

02.69.06

FLUCTUACIONES ESTADISTICAS DE LA POBLACION
DE NEUTRONES: "EXPERIENCIA DE ALFA-FEYNMAN."

C. Castro Madero

R. Corcuera

H. Schilman.

H. Perl

CNEA-Re-33

19969



I. INTRODUCCION

Las fluctuaciones estadísticas de la población de neutrones en un reactor se han convertido en los últimos años, merced al desarrollo de la teoría correspondiente en un medio poderoso para investigar y medir una variedad de parámetros nucleares de importancia en el reactor y, en ciertos casos, también permitió conocer parámetros de la fisión de isótopos interesantes como $\langle \gamma(\gamma-1) \rangle$

La detección de neutrones como proceso estadístico puede estudiarse tanto en el campo temporal como en el de frecuencias. En nuestro caso nos interesa el campo temporal y además, con la condición de efectuar la detección en "modo pulso"

Una experiencia que se encuentra en esa categoría es la de "Alfa-Feynman". Esta consiste en medir la distribución del número de cuentas durante intervalos de tiempo fijo τ . La detección se efectúa en el reactor en estado estacionario, subcrítico, con fuente de neutrones. La distribución de cuentas en un proceso completamente al azar es poissoniana, caracterizada por tener una variancia relativa $V=1$. En el caso de detección neutrónica en un conjunto multiplicativo, la distribución deja de ser Poisson puesto que las cadenas de fisiones establecen una correlación positiva en la distribución. En cambio responde en buena aproximación, de acuerdo a lo mostrado por N. Pacilio¹⁾, a una distribución del tipo Binomial Negativa (d.b.n.) Esa correlación positiva se debe a que es posible detectar "dos neutrones

consecutivos provenientes de un antecesor común. De esa manera existe una variancia relativa correlacionada $\Psi = V-1 > 0$, que debe identificarse con el parámetro Ψ de la d.b.n.

La medición de Ψ' en función del intervalo de detección τ permite conocer a través de un modelo físico, ciertos parámetros como α , ρ , potencia, $\langle \nu(\nu-1) \rangle$ etc; si bien nosotros nos restringiremos a los dos primeros. En cuanto al modelo, este puede tener en cuenta o no los neutrones retardados, la dependencia espacial, etc.

En cada caso su simplicidad impondrá restricciones a la forma de medición: por ejemplo, la no-inclusión de neutrones retardados limitará el rango de valores de τ , dentro del cual el modelo es válido, hasta un máximo del orden de 100 milisegundos.

Los primeros estudios fueron hechos por de Hoffman ²⁾, Feynman ³⁾ y Serber.

II. ESTUDIO DE LAS FLUCTUACIONES CON LA FUNCION GENERATRIZ DE PROBABILIDADES.

Dado un sistema caracterizado por un conjunto de N observables aleatorios que indicaremos con el subíndice i , que pueden tomar valores $\{n_i\} \equiv \{n_1, n_2, \dots, n_N\}$ en el instante t ; le asignaremos a cada observable un parámetro x_i . Sea $P(n_1, n_2, \dots, t)$ la probabilidad de que el conjunto de observable tome en t , los valores (n_1, n_2, \dots) se define la función generatriz de probabilidades (f.g.p.) como:

$$F(\bar{x}, t) \equiv F(u_1, u_2, \dots, t) = \sum_{u_1} \sum_{u_2} \dots P(u_1, u_2, \dots, t) \prod_{i=1}^N x_i^{u_i} \quad (1)$$

La condición de certeza

$$\sum_{u_1} \sum_{u_2} \dots P(u_1, u_2, \dots, t) = 1. \quad (2)$$

conduce a las siguientes expresiones:

$$F(\bar{1}, t) = 1 \quad (3)$$

$$F_{x_j} \equiv \left. \frac{\partial F(\bar{x}, t)}{\partial x_j} \right|_{\bar{x}=\bar{1}} = \langle u_j \rangle \quad (4)$$

$$F_{x_j x_k} \equiv \left. \frac{\partial^2 F(\bar{x}, t)}{\partial x_j \partial x_k} \right|_{\bar{x}=\bar{1}} = \langle u_j u_k \rangle; \quad j \neq k \quad (5)$$

$$F_{x_j x_j} \equiv \left. \frac{\partial^2 F(\bar{x}, t)}{\partial x_j^2} \right|_{\bar{x}=\bar{1}} = \langle u_j (u_j - 1) \rangle \quad (6)$$

La ecuación diferencial que relaciona $F(\bar{x}, t)$ con sus derivados respecto a t , y \bar{x} es la "ecuación de Fokker-Planck" del sistema. Consideremos un reactor infinito homogéneo, monoenergético (térmico sin neutrones retardados, dentro del cual se introduce un detector que al capturar un neutrón da origen a una carga en el sistema electrónico asociado.

En consecuencia, los observables son:

- 1) la población de neutrones que puede tomar valores indicados por n , y que tiene asociado el parámetro x .
- 2) la carga acumulada en el sistema de detección luego de un tiempo t de estar abierto al conteo, que toma valores indicados por q , y que le asociamos el parámetro y .

Tomando como unidad de carga, la generada en una absorción, llamando S a la intensidad de la fuente y P_{ν} a la probabilidad de que en una fisión se emitan ν neutrones, resulta:

$$\begin{aligned}
 P(n, q, t + \delta t) = & P(n, q, t) [1 - S \delta t] [1 - \nu \Sigma_c \delta t] [1 - \nu \Sigma_f \delta t] + \quad (7) \\
 & + P(n-1, q, t) S \delta t + P(n+1, q-1, t) (n+1) \nu \Sigma_c \delta t + \\
 & + \sum_{\nu} P(n+1-\nu, q, t) (n+1-\nu) \nu \Sigma_f p_{\nu} \delta t
 \end{aligned}$$

Donde cada término indica el efecto, durante el lapso de tiempo δt , de:

- a) No modificación del sistema .
- b) Fuente externa
- c) Captura.
- d) Fisión.

Donde se despreciaron transiciones de segundo orden, tomando δt suficientemente pequeño. Si ahora $\delta t \rightarrow 0$, encontramos:

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial P(n, q, t)}{\partial t} = & P(n-1, q, t) \cdot S + P(n+1, q-1, t) (n+1) \nu \Sigma_c + \\
 & + \sum_{\nu} P(n+1-\nu, q, t) (n+1-\nu) \nu \Sigma_f p_{\nu} \quad (8)
 \end{aligned}$$

Si se multiplica (8) por $x^n y^q$ sumando sobre los valores posibles de n y q , obtenemos la ecuación de Fokker-Planck de la f.g.p.:

$$\frac{\partial F(x, y, t)}{\partial t} = S(x-1)F + \sum_{\nu} \nu (y-x) \frac{\partial F}{\partial x} + \sum_{\nu} \nu (\nu-x) \frac{\partial F}{\partial x} \quad (9)$$

donde se introduce la f.g.p. de los neutrones de fisión:

$$\phi \equiv \phi(x) = \sum_{\nu} \frac{1}{\nu} \beta_{\nu} x^{\nu} \quad (10)$$

que por lo visto, en (3), (4) y (6) cumple:

$$\phi(1) = 1 ; \quad \phi_x = \langle \nu \rangle ; \quad \phi_{xx} = \langle \nu(\nu-1) \rangle \quad (11)$$

Si se deriva (9) respecto a x en el punto x=1 se obtiene la relación conocida:

$$\frac{\partial F_x}{\partial t} = \frac{\partial \langle n \rangle}{\partial t} = S + \left[\sum_f (\langle \nu \rangle - 1) - \sum_c \right] \langle n \rangle \nu \quad (12)$$

que para el caso de S=0 da como solución:

$$\langle n \rangle(t) = n_0 \cdot e^{-\alpha t} \quad (13)$$

donde α es en consecuencia, la constante de decaimiento del flujo "prompt": $\alpha = \left[\sum_c - \sum_f (\langle \nu \rangle - 1) \right] \nu$. Si en cambio se trata de estado estacionario, éste está definido por la condición:

$$\frac{\partial \langle n \rangle}{\partial t} = 0 \quad (14)$$

y la solución correspondiente es:

$$\langle n \rangle = \frac{S}{\alpha} \quad (15)$$

Las derivadas primeras condujeron a valores medios, las derivadas segundas nos dan, en cambio, las fluctuaciones buscadas

$$\frac{\partial \langle n(n-1) \rangle}{\partial t} = 2S \langle n \rangle + \langle n \rangle \nu \sum_f \langle \nu(\nu-1) \rangle - 2\alpha \langle n(n-1) \rangle \quad (16)$$

$$\frac{\partial \langle n q \rangle}{\partial t} = S \langle q \rangle + \sum_c v \langle n(n-1) \rangle - \alpha \langle n q \rangle \quad (17)$$

$$\frac{\partial \langle q(q-1) \rangle}{\partial t} = 2 \sum_c v \langle n q \rangle \quad (18)$$

En estado estacionario, el primer miembro de (16) es nulo. Combinando estas 3 ecuaciones, transformando Laplace, despejando la variancia relativa de nuestro observable $V = [\langle Q^2 \rangle - \langle Q \rangle^2] / \langle Q \rangle$ y antitransformado, obtenemos.

$$\Psi(z) = V - 1 = C_0 \left(1 - \frac{1 - e^{-\alpha z}}{\alpha z} \right) \quad (19)$$

donde C_0 es una constante que depende de $\langle \gamma(\gamma-1) \rangle$, $\langle \gamma \rangle$, α y \sum_c / \sum_f . Vemos que dentro de los límites de validez del modelo la medición de $\Psi = \Psi(z)$ conduce al conocimiento de α .

III. ECUACION DE FOKKER-PLANCK CON TEORIA DE LA EDAD DE FERMI

A continuación resumiremos el modelo mucho más realista debido a V. Raievski ⁴).

Comenzamos subdividiendo el reactor en pequeñas celdas de volumen $\delta \bar{r}_i$, centradas en el punto \bar{r}_i . En cada celda existe un detector capaz de detectar toda absorción producida en dicha celda.

Llamando:

N_i : N° de neutrones térmicos en la celda i al tiempo t .

T_{ie} : N° de núcleos precursores de neutrones retardados del grupo i en

la celda i .

q : carga variable generada luego de una absorción.

π_q : probabilidad de que una absorción genera una carga de valor q .

λ_e : constante de decaimiento de los núcleos radiactivos, precursores del grupo l .

S_i : intensidad de una fuente externa puesta en la celda i .

C_i : indicación (p. ej. tensión) del detector de la celda i en el instante t .

$m(t)$: respuesta temporal del detector.

α_{ij} : probabilidad de pasaje de un neutrón de la celda i , a la j .

$p_i^l(t)$
 $n_1 \delta_{1e}, n_2 \delta_{2e}, \dots$: probabilidad de que luego de una absorción en la celda i se generen neutrones prompts que llegan a térmicos con la distribución entre celdas y neutrones retardados distribuidos según $\{\gamma_{1e}, \gamma_{2e}, \dots\}$, $l = 1, \dots, 6$

$P(t)$
 $\{N_i, \pi_{ie}, C_i\}$: probabilidad de tener al tiempo t . la distribución $\{N_i\}$ de neutrones térmicos $\{\pi_{ie}\}$ de precursores y de indicaciones de los detectores.

Asociando a estos tres conjuntos de observables, los parámetros x_i, z_{ie}, y_i respectivamente la ecuación de Fokker-Planck correspondiente a $P(t)$ $\{N_i, \pi_{ie}, C_i\}$ es:

$$\frac{\partial F(\bar{x}, \bar{z}_e, \bar{y}, t)}{\partial t} = \sum_i S_i (x_i - 1) F + \sum_i \sum_l \lambda_l (x_i - z_{ie}) \frac{\partial F}{\partial z_{ie}} + \sum_i v \sum_a (\phi^i y_i - x_i) \frac{\partial F}{\partial x_i} + \frac{1}{2} \sum_i \sum_j (\alpha_{ij} \frac{\partial F}{\partial x_i} - \alpha_{ji} \frac{\partial F}{\partial x_j}) (x_j - x_i) v \sum_s$$

(20)

donde se introdujeron las f.g.p. auxiliares $\phi^i = \phi^i(\vec{x}, \vec{z}_e)$ y $\psi^i = \psi^i(y_i)$ correspondientes a la distribución de neutrones de fisión y producción de carga respectivamente.

$$\phi^i(\vec{x}, \vec{z}_e) = \sum_{\{n_j\}} \sum_{\{\delta_{je}\}} b_{\{n_j, \delta_{je}\}}^i \prod_j [x_j^{n_j} \prod_e z_{je}^{\delta_{je}}] \quad (21)$$

$$\psi^i(y_i) = \sum_g \pi_g \cdot y_i^{q^{m(g)}} \quad (22)$$

Utilizamos a continuación la teoría de la edad de Fermi, para evaluar la probabilidad de que un neutrón de fisión ($\tau = 0$) nacido en i , llegue a la energía térmica en la celda j :

$$p_{ij} = \frac{\exp[-|\vec{r}_j - \vec{r}_i|^2 / 4\tau]}{(4\pi\tau)^{3/2}} \cdot \delta\vec{r}_j \quad (23)$$

y se supondrá por simplicidad que lo mismo vale para los núcleos precursores agregando la condición que el neutrón retardado generado en ese caso, nace a la edad térmica en j de modo de que los estados inicial y final son correctos. Puesto que $\beta \ll 1$ se supondrá nula la probabilidad de generarse dos neutrones retardados en una misma fisión.

Llamando:

P_ν : probabilidad de que se emitan ν neutrones luego de una absorción.

β_l : Fracción de neutrones retardados del grupo l , en una fisión con emisión de ν neutrones.

$P_\nu (1 - \nu\beta)$: probabilidad de que se emitan neutrones "prompts" luego de una absorción.

$P_\nu \nu\beta_\ell$: idem neutrones retardados del grupo

De este modo la f.g.p. ϕ^i con la edad de Fermi,

resulta:

$$\phi^i = \sum_\nu P_\nu \left[(1 - \nu\beta) \left(\sum_j p_{ij} x_j \right)^\nu + \sum_\ell \nu\beta_\ell \left(\sum_j p_{ij} x_j \right)^{\nu-1} \left(\sum_k p_{ik} z_{k\ell} \right) \right] \quad (24)$$

Definiendo p_ν como la análoga de P_ν , luego de una fisión:

$$p_\nu = \frac{\sum_a P_a}{\sum_f} P_\nu \quad (25)$$

Se obtienen los siguientes valores medios:

$$\sum_\nu P_\nu \cdot \nu = \frac{\sum_f}{\sum_a} \sum_\nu p_\nu \nu = \frac{\sum_f}{\sum_a} \langle \nu \rangle = k. \quad (26)$$

$$\langle n_j^i \rangle = \phi_{x_j}^i = k(1 - \beta) p_{ij} \quad ; \quad \langle \delta_{j\ell}^i \rangle = \phi_{z_{j\ell}}^i = k\beta_\ell p_{ij} \quad (27)$$

$$\langle n_j n_k \rangle = k(1 - 2\beta) \frac{\langle \nu(\nu - 1) \rangle}{\langle \nu \rangle} p_{ij} p_{ik} \quad \langle n_j \delta_{k\ell} \rangle = k\beta_\ell \frac{\langle \nu(\nu - 1) \rangle}{\langle \nu \rangle} p_{ij} p_{ik} \quad (28)$$

Resulta interesante conocer la correlación entre el N° de neutrones de dos celdas. Si llamamos a y b a dichas celdas, ya se vio que:

$$\langle N_a N_b \rangle = F_{x_a x_b} + \delta_{ab} \cdot F_{x_a} \quad (29)$$

donde δ_{ab} es la delta de Krödcker, Si llamamos $n(\vec{r}_i)$ a la densidad de neutrones en \vec{r}_i :

$$\langle N_a N_b \rangle = n(\vec{r}_a, \vec{r}_b) \delta \vec{r}_a \cdot \delta \vec{r}_b + n(\vec{r}_a) \cdot \delta(\vec{r}_a - \vec{r}_b) \cdot \delta \vec{r}_a \quad (30)$$

la función de correlación $n(\bar{r}_a, \bar{r}_b)$ puede ponerse como:

$$n(\bar{r}_a, \bar{r}_b) = n(\bar{r}_a) \cdot n(\bar{r}_b) + \psi(\bar{r}_a, \bar{r}_b) \quad (31)$$

y la función $\psi(\bar{r}_a, \bar{r}_b)$ se llama "densidad de presencia".

Analogamente se definen las densidades de presencia $\psi_l(\bar{r}_a, \bar{r}_b)$ entre neutrones y precursores del grupo l y $\xi_{ll'}(\bar{r}_a, \bar{r}_b)$ entre precursores de los grupos l y l' .

Las probabilidades de transporte valen:

$$\alpha_{ij} = \frac{\exp[-\sum_t |\bar{r}_i - \bar{r}_j|]}{4\pi |\bar{r}_i - \bar{r}_j|^2} \sum_t \delta \bar{r}_j \quad (32)$$

Para que el formalismo se aplique directamente a nuestro caso, consideramos solamente un núcleo y un reflector homogéneos y definimos los operadores:

$$\hat{M}(\nu \Sigma_a)^{-1} = L_n \nabla^2 + k e^{-\tau \nabla^2} - 1 \quad \text{en el núcleo} \quad (33)$$

$$\hat{M}(\nu \Sigma_a)^{-1} = L_r \nabla^2 - 1 \quad \text{en el reflector} \quad (34)$$

donde $e^{\tau \nabla^2} = 1 + \tau \nabla^2 + \dots$ y la ecuación de autovalores correspondiente es:

$$\hat{M} \varphi_j = \frac{1}{V} \kappa_j \varphi_j \quad (35)$$

Las autofunciones φ_j y $\sum_t^{-1} \text{grad.} \varphi_j$ son continuas en todo punto y las φ_j se anulan en la superficie del reactor.

Si además se definen las funciones V_j por:

$$(\nabla^2 + B_j^2) V_j = 0 \quad \text{en el núcleo} \quad (36)$$

$$(\nabla^2 - k_j) V_j = 0 \quad \text{en el reflector} \quad (37)$$

De este modo se obtiene que:

$$\varphi_j = a_j V_j$$

y

$$\frac{\kappa_j}{v^2 \Sigma_a} = k e^{-\tau B_j^2} - 1 - L^2 B_j^2$$

Así las autofunciones constituyen un conjunto completo para desarrollar las densidades de presencia, la fuente $S(\vec{r})$, etc. Si ahora se toman las ecuaciones correspondientes a las fluctuaciones de la carga del detector, obtenidas de la ecuación de Fokker-Planck, y suponemos el reactor no lejos de crítico, se puede sustituir el operador $\nabla^2 \longrightarrow B_0^2$ primer autovalor de aquel.

En esas condiciones y promediando los 6 grupos retardados en uno solo de constante $\lambda = \frac{1}{\beta} \sum \lambda_i \beta_i$

resulta:

$$\frac{\langle C^2 \rangle - \langle C \rangle^2}{\langle C \rangle} = 1 + \frac{\alpha k e^{-\tau B_0^2}}{S_0 v} \cdot \frac{\langle \gamma(\gamma-1) \rangle}{\langle \gamma \rangle} \cdot m \left(1 + \frac{e^{\alpha_1 t} - e^{\alpha_2 t}}{(\alpha_2 - \alpha_1) t} \right)$$

$$\alpha_1 = v \sum a_k \beta e^{-\tau B_0^2} ; \alpha_2 = -\frac{\lambda(1-k_e)}{k \beta e^{-\tau B_0^2}} ; k_e = k e^{-\tau B_0^2} - L^2 B_0^2$$

$$S_0 = \frac{\iiint S(\vec{r}) \varphi_0(\vec{r}) d^3 r}{\iiint \varphi_0^2(\vec{r}) d^3 r} ; \alpha = \frac{v \iiint \varphi_0^3 d^3 r}{\left[\iiint \varphi_0^2 d^3 r \right]^2} \quad (38)$$

IV. FORMULACION DE BENNETT

Finalmente presentamos la expresión de la variancia relativa, encontrada por Bennett⁵⁾. Sea un detector cuya señal llamamos $V(t)$, la "función de ruido $\phi(t)$ " durante un intervalo de medición T , está definida por

$$\phi(t) = \frac{v(t) - \bar{v}}{\bar{v}} ; \quad \bar{v} = \frac{1}{T} \int_0^T v(t) dt \quad (39)$$

como el valor medio de $\phi(t)$ es nulo, resulta:

$$\phi(t) = \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos \omega_n t + b_n \text{sen } \omega_n t) ; \quad \omega_n = \frac{2\pi n}{T} \quad (40)$$

$$\begin{pmatrix} a_n \\ b_n \end{pmatrix} = \frac{2}{T} \int_0^T \phi(t) \begin{pmatrix} \cos \omega_n t \\ \text{sen } \omega_n t \end{pmatrix} dt \quad (41)$$

Si se realiza un gran número de mediciones en idénticas condiciones el ensemble de amplitudes de Fourier encontrado en tales mediciones $\{a_{ni}\}$ y $\{b_{ni}\}$ cumplirá:

$$\langle a_n \rangle = \langle b_n \rangle = \langle a_j b_k \rangle = \langle a_j a_k \rangle_{j \neq k} = \langle b_j b_k \rangle = 0 \quad (42)$$

por la independendencia de las fluctuaciones en mediciones diferentes. Se define el espectro del proceso $W(\omega_n)$ a:

$$\frac{W(\omega_n)}{T} = \langle a_n^2 \rangle = \langle b_n^2 \rangle \quad (43)$$

Si la respuesta del detector a la detección de un neutrón, es $V \cdot f(t)$, donde la amplitud V depende del lugar del detector donde se inicia la ionización y en el intervalo T arribaron k cuentas, tendremos:

$$V(t) = \sum_{j=1}^k u_j \cdot f(t-t_j) \quad (44)$$

Con esta expresión de $V(t)$ las ecuaciones (40) y (41) resultan:

$$a_n + ib_n = \frac{2}{T} \int_0^T \phi(t) e^{i\omega_n t} dt = \frac{2}{T} \cdot \frac{\bar{f}(\omega_n)}{V} \sum_{j=1}^k u_j \cdot e^{i\omega_n t_j} \quad (45)$$

con

$$\bar{V} = c \cdot \bar{u} \int_0^{\infty} f(t) dt ; c = \frac{k}{T} ; \bar{f}(\omega_n) = \int_0^{\infty} f(t) e^{i\omega_n t} dt \quad (46)$$

Ahora el espectro $W(\omega_n)$ definido en (43) resulta:

$$\frac{W(\omega_n)}{T} = \frac{2B(\omega_n)}{c} \left[\tau + \frac{2}{cT} \sum_{l=1}^k \left\langle \sum_{m>l} \cos \omega_n (t_l - t_m) \right\rangle \right] \quad (47)$$

con

$$B(\omega_n) = \frac{|\bar{f}(\omega_n)|^2}{\left| \int_0^{\infty} f(t) dt \right|^2} ; \tau = \frac{\bar{u}^2}{u^2} = \frac{\sum_i u_i^2}{\left(\sum_{i=1}^k u_i \right)^2} \quad (48)$$

El calculo de (47) implica conocer la distribución de probabilidad de observar dos cuentas separadas por un tiempo

Esta probabilidad está formada por una parte al azar (no-correlacionada) y otra correlacionada (efecto de cadenas de neutrones de fisión):

$$P(z) \cdot dz = C \cdot dz + Y X(z) dz \quad (49)$$

Para la parte correlacionada Orndoff⁶⁾ encontró que $Y = \epsilon \frac{\gamma(\gamma-1)}{\gamma^2}$ con ϵ = eficiencia del detector = N° de cuentas / N° de fisiones y γ = neutrones emitidos en una fisión. En la definición de $X(z)$ aparece la función de transferencia $H(s)$ entre reactividad ρ y población de neutrones n .

La ecuación de balance de neutrones no demasiado lejos de criticidad puede linealizarse. Si se supone además baja potencia como para no hacer intervenir la realimentación por temperatura, $H(s)$ vale:

$$H(s) = \frac{\mathcal{L}[n(t)]}{\mathcal{L}[\rho(t)]} = \frac{1 - \sum_{i=1}^n \frac{s\beta_i}{s+\lambda_i}}{s \left[l_0 + \sum_{i=1}^n \frac{\beta_i}{s+\lambda_i} \right] + \Delta} = \sum_{p=1}^{n+1} \frac{A_p}{s+s_p} \quad (50)$$

con:

l_0 = vida media de neutrones

A_p = residuo en el polo- s_p

= componente continua de

Ahora la función $X(z)$ vale:

$$X(z) = \sum_{p=1}^{n+1} A_p \cdot H(s_p) \cdot e^{-s_p z} \quad (51)$$

y reemplazado ésta en la expresión (47) para $W(w_n)$.

$$\begin{aligned}
 W(\omega_n) &= \frac{-2}{C} B(\omega_n) \left[r + 2Y \int_0^{\infty} x(\tau) \cos \omega_n \tau d\tau \right] = \\
 &= \frac{2}{C} B(\omega_n) \left[r + 2Y \sum_{p=1}^{n+1} \frac{A_p S_p H(s_p)}{\omega_n^2 + s_p^2} \right] \quad (52)
 \end{aligned}$$

Si el intervalo de medición T se divide en N subintervalos de duración $\tau = T/N$, redefinimos:

$$\bar{V} = \left\langle \frac{1}{N} \sum_{k=1}^N \frac{1}{\tau} \int_{k\tau}^{(k+1)\tau} v(t) dt \right\rangle; \quad \overline{V^2} = \left\langle \frac{1}{N} \sum_{k=1}^N \left(\frac{1}{\tau} \int_{k\tau}^{(k+1)\tau} v(t) dt \right)^2 \right\rangle \quad (53)$$

donde el bracket indica promedio sobre el ensemble de amplitudes de Fourier. Ahora la variancia relativa $\sigma^2(\tau)$ de $v(t)$ será:

$$\sigma^2(\tau) = \frac{\overline{V^2} - \bar{V}^2}{\bar{V}^2} = \frac{\bar{V}}{\tau^2 N} \sum_{k=1}^N \left\langle \left(\int_{k\tau}^{(k+1)\tau} \phi(t) dt \right)^2 \right\rangle \quad (54)$$

de acuerdo a los visto en (39). Desarrollando en serie de Fourier a $\phi(t)$ de acuerdo con (40), (42), y (43) para $T \rightarrow \infty$ (estado estacionario), tenemos:

$$\sigma^2(\tau) = \frac{\bar{V}}{\tau^2 \pi} \int_0^{\infty} W(\omega_n) \frac{1 - \cos \omega \tau}{\omega^2} d\omega \quad (55)$$

Si se pasa a la magnitud digital $n = N^0$ de cuentas

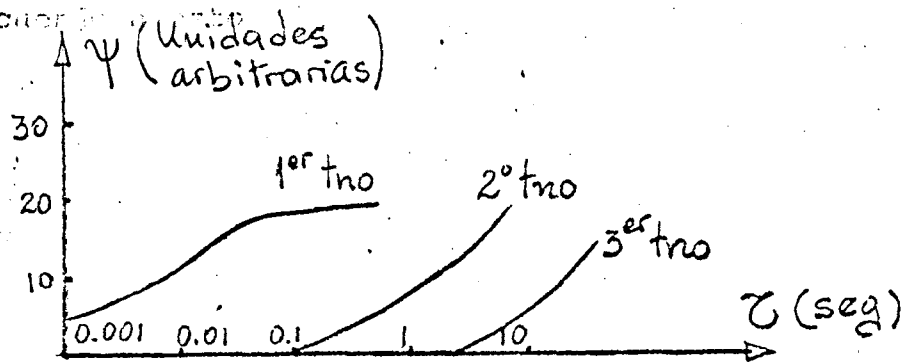
durante el intervalo τ , resulta:

$$\sigma^2(\tau) = \frac{\overline{n^2} - (\bar{n})^2}{\bar{n}} = \frac{CR}{\pi\tau} \int_0^{\infty} W(\omega) \frac{1 - \cos \omega\tau}{\omega^2} d\omega \quad (56)$$

donde CR es la velocidad de conteo (countingrate). Para la expresión hallada de $W(\omega)$, (56) se reduce a:

$$\sigma^2(\tau) = 1 + 2\gamma \sum_{p=1}^{n+1} \frac{A_p T(s_p)}{s_p} \left(1 - \frac{1 - e^{-s_p\tau}}{s_p} \right) \quad (57)$$

Donde la representación gráfica de los primeros términos es: de acuerdo a:



De acuerdo a esto Bennett mostró que para los casos usuales, si se consideran $\tau \lesssim 0,1$ seg. el único término de significación en la sumatoria de (57), es el primero, obteniéndose:

$$\sigma^2(\tau) = 1 + \Psi(\tau) = 1 + \frac{\epsilon \cdot \gamma(\gamma-1)(1-\beta)^2}{\gamma^2 (\beta-\rho)^2} \left[1 - \frac{1 - e^{-\alpha\tau}}{\alpha\tau} \right] \quad (58)$$

Una particularidad de esto es que $\sigma^2(\tau)$ diverge para $\rho = 0$. En realidad lo que sucede es que en estado crítico, el estado estacionario solo existe sin fuente externa S y además el nivel de potencia al ser arbitrario hace que \bar{n}/τ no tenga un valor definido.

V. OBJETIVOS

Es nuestro interés encontrar el valor de α . Se desprende, en base a lo presentado por Bennett, que las mediciones deben realizarse con tiempos $\tau \lesssim 0,1 \text{ seg.}$, y en consecuencia la determinación de α a través de (58) (o sea sin tener en cuenta los neutrones retardados) por cuadrados mínimos. Tenemos:

$$\psi(\tau) = \epsilon \frac{\gamma(\gamma-1)}{\gamma^2} \frac{(1-\beta^2)}{(\beta-\rho)^2} \left[1 - \frac{1-e^{-\alpha\tau}}{\alpha\tau} \right] \quad (59)$$

Se ajustará entonces esta expresión en base a los valores experimentales de ψ . Para llevar a cabo el ajuste por cuadrados mínimos se utilizan las siguientes relaciones:

$$\psi(\tau) = C \left[1 - \frac{1-e^{-\alpha\tau}}{\alpha\tau} \right] = \frac{C}{\alpha\tau} \left[\alpha\tau - 1 + e^{-\alpha\tau} \right]$$

Denominando:

$$X_i = \tau ; Y_i = \psi(\tau)\tau \quad \text{para cada valor de } \tau$$

queda:

$$Y_i = C X_i - \frac{C}{\alpha} + \frac{C}{\alpha} e^{-\alpha X_i}$$

y

$$\epsilon_i = C X_i - \frac{C}{\alpha} + \frac{C}{\alpha} e^{-\alpha X_i} - Y_i^{\text{exp.}}$$

De donde la aplicación del ajuste conduce a minimizar:

$$G = \sum_{i=1}^m p_i \epsilon_i^2 = \text{mínimo según } \alpha \text{ y } C$$

con

p_i : Peso estadístico de ϵ_i

m : número de mediciones

A través de las condiciones para:

$$\alpha; \sum_{i=1}^m p_i \epsilon_i \frac{\partial \epsilon_i}{\partial \alpha} = 0$$

$$C; \sum_{i=1}^m p_i \epsilon_i \frac{\partial \epsilon_i}{\partial C} = 0$$

Resolviendo para C, se obtiene finalmente:

$$F(\alpha) = H_1 * H_3 - H_2 * H_4 \tag{60}$$

donde:

$$H_1 = \sum p_i y_i (\alpha x_i + e^{-\alpha x_i} - 1)$$

$$H_2 = \sum p_i (\alpha x_i + e^{-\alpha x_i} - 1)^2$$

$$H_3 = \sum p_i (\alpha x_i + e^{-\alpha x_i} - 1) (\alpha x_i e^{-\alpha x_i} + e^{-\alpha x_i} - 1)$$

$$H_4 = \sum p_i y_i (\alpha x_i e^{-\alpha x_i} + e^{-\alpha x_i} - 1)$$

Cuya resolución para el parámetro α , y además cálculos adjuntos se realiza con el "Programa α " (Apéndice I). Escrito en Fortran IV para la Computadora GE 625 de YPF.

Obtenido el valor de α , puede calcularse la reactividad ρ , a través de la relación $\alpha = \frac{\beta - \rho}{l_0}$

VI. PARTE EXPERIMENTAL

Los datos experimentales, se obtuvieron utilizando el

el equipo cuyo esquema en bloque es el indicado:

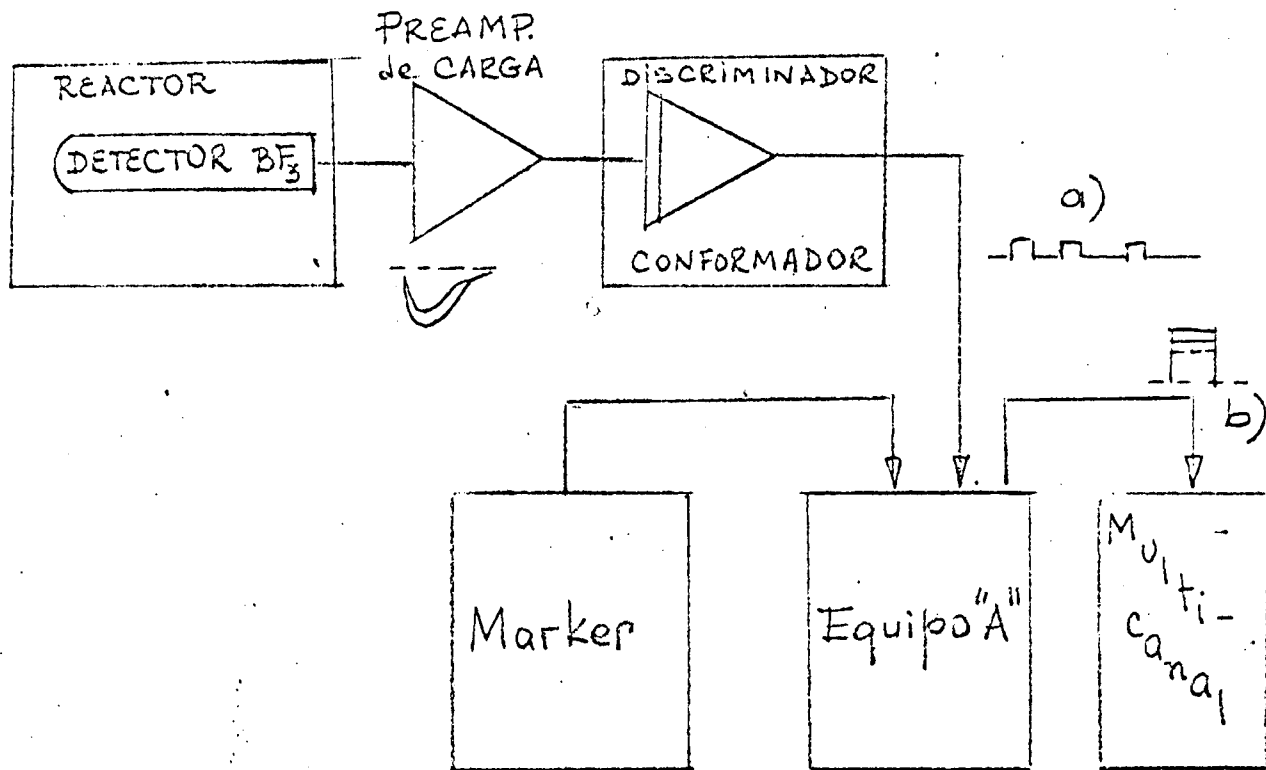


FIG. I

Del cual deben destacarse las siguientes características:

- i) Detector de gran volumen sensible de forma de obtener mayor eficiencia ϵ (definida en la expresión (49)), aumentando así el término de correlación $\psi = \sqrt{V} - 1$ debido a que lo que se mide experimentalmente es la variancia V .
- ii) Utilización de un amplificador de carga, obtiniéndose entonces alta ganancia, aún en detrimento de un aumento en el tiempo muerto del amplificador, que en nuestro caso era de $1,5 \cdot 10^{-5} \text{ seg}^{-1}$

iii) Utilización de un equipo auxiliar (Equipo "A"); que permite utilizar el multicanal como analizador de altura de pulsos, Esto permite tener una mayor flexibilidad en los intervalos de tiempo τ de medición que si se utilizaba el M.C. en modo "Multi-escalímetro" directamente.

Descripción Equipo "A"

Este equipo recibe pulsos conformados (a) y distribuidos en el tiempo tal como son detectados, dando a la salida pulsos analógicos (b) de altura proporcional al número de pulsos que recibió durante un intervalo τ ; la frecuencia de los pulsos de salida es fija $\gamma = 1/2\tau$. Los pulsos que recibe durante el intervalo τ son acumulados en un escalímetro. Luego un Convertidor Digital Analógico (C.D.A.) genera un pulso de altura proporcional al número de pulsos incidentes, al que se suma una tensión umbral M, esta tensión es la correspondiente a "cero cuentas". De esta forma se evita la utilización de los primeros canales del M.C. en los que siempre se introducen pulsos espureos.

A través de un oscilador controlado a cristal, con temperatura regulada (Marker), se permite la entrada, durante un lapso τ muy preciso. (Variaciones del orden de una parte en un millón), de los pulsos al escalímetro. En el intervalo siguiente el Marker bloquea la entrada al escalímetro, y durante el mismo se realiza la conversión digital analógica.

El escalímetro consiste de 6 flip-flop, cuya capacidad máxima es de 63 cuentas. El tiempo muerto dado por el escalímetro, que nos da el del equipo "A" es menor que el intro-

ducido por el preamplificador.

La conversión en el C.D.A. nos da a la salida de este una corriente total $i = cte.n$, donde n es la indicación del escalímetro. Un amplificador operacional permite asegurar la condición $e_e \ll E$. Esquemáticamente:

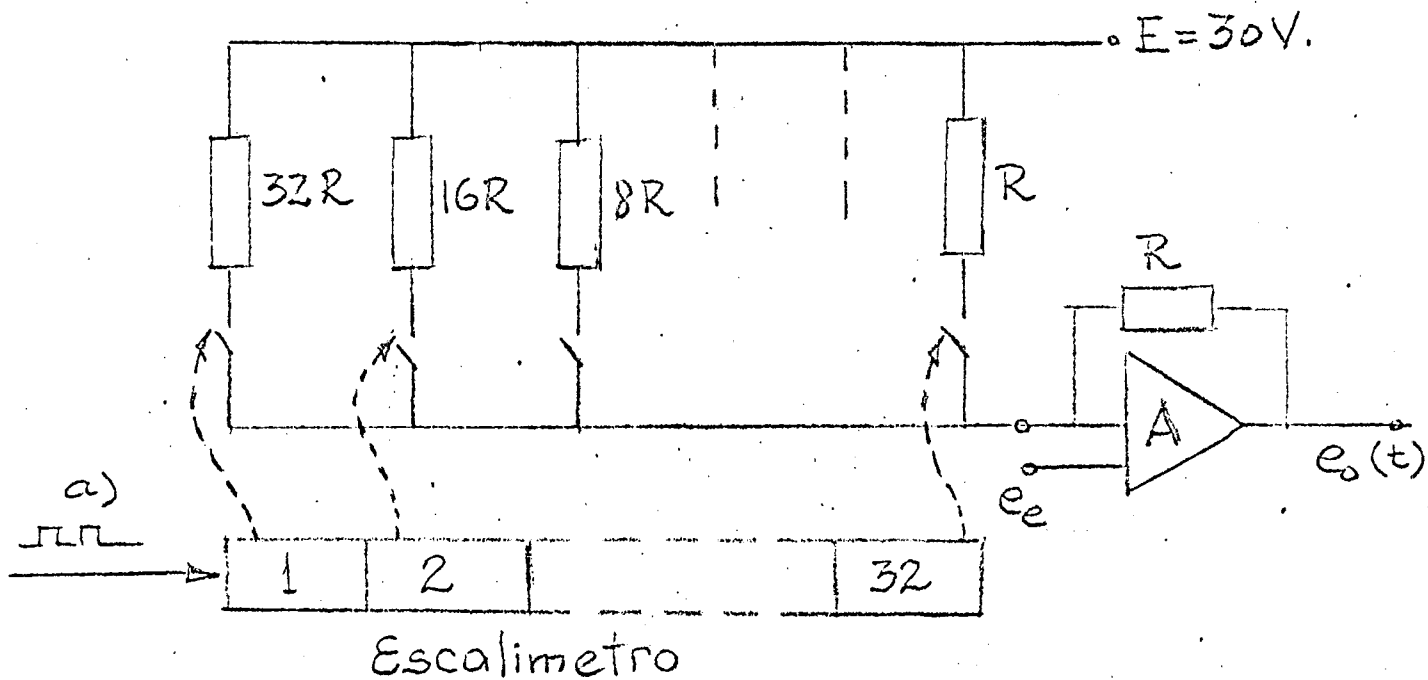


FIG. II

La salida $e_o(t) = cte.n$ es inyectada en un circuito "y lineal", en cuya segunda entrada se introduce un pulso M de altura constante. La salida del circuito "y lineal" es:

$$e_1 = e_o + M \text{ (Pulsos b)}$$

ESQUEMA EQUIPO "A"

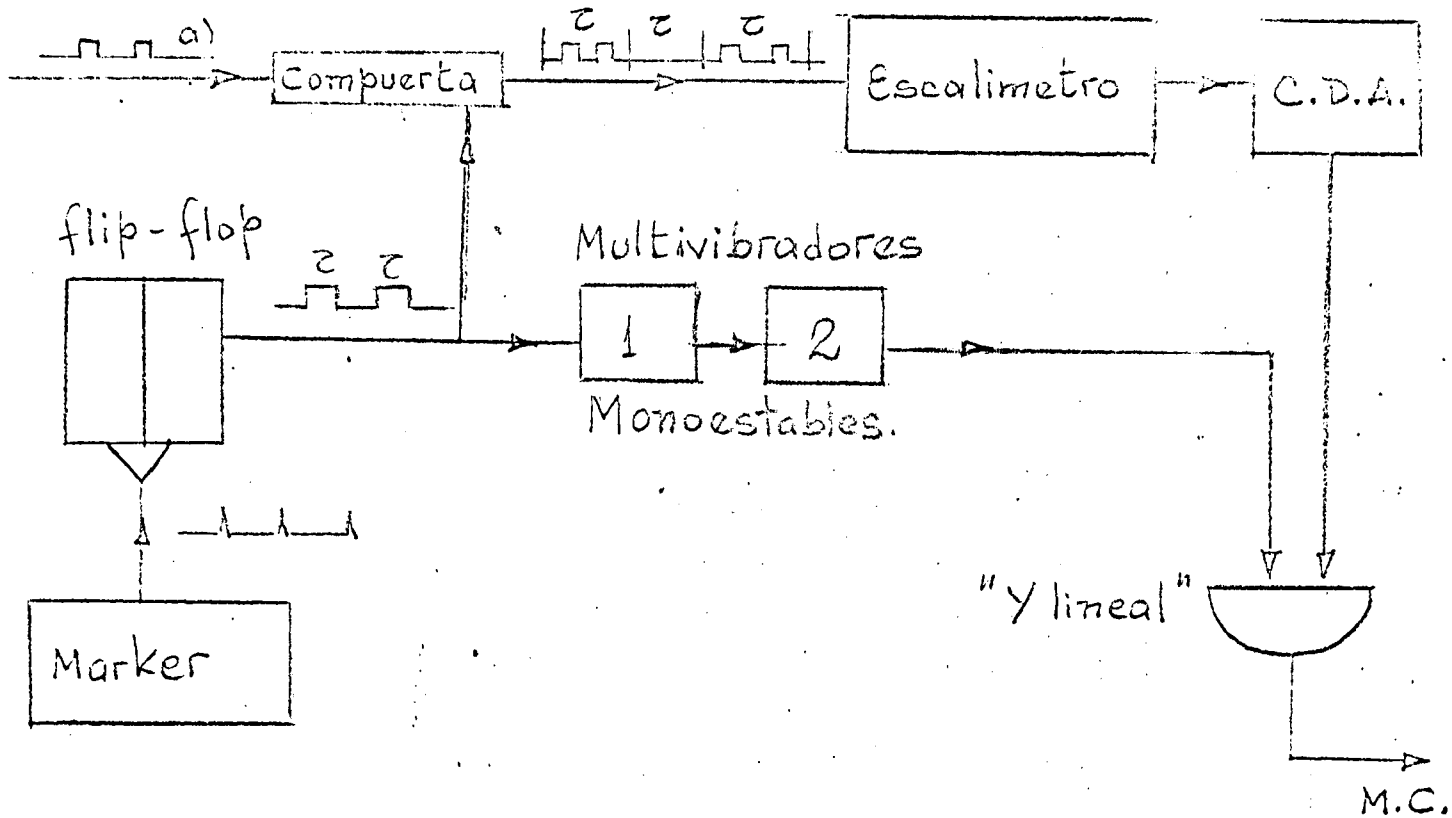


FIG. III

La calibración del equipo se realiza por medio de las llaves de la fig. II, generando pulsos de altura igual a los producidos cuando en el escalímetro se acumulan ciertas cantidades de cuentas. Esta simulación de eventos sirve para ajustar el M.C.; determinando que canales conviene usar y cual es la dispersión de canales que se tiene como causa de ruidos, siempre presentes.

VII. CORRECCIONES POR TIEMPO MUERTO

En la experiencia es indispensable la corrección por tiempo muerto (T.M.). Para esto se utiliza el formalismo presen-

tado en el trabajo "Dead-time corrections on detection experiments on Nuclear Statistics" 7)

Un sistema de detección está activo durante un tiempo y se toman N mediciones. Siendo N_k^e el número de ellas correspondientes a k cuentas, tenemos:

$$N_k^e = N_k + \sum_{i>k} N_i \pi(i \rightarrow k) - \sum_{i<k} N_k \pi(k \rightarrow i)$$

donde

N_k : Número real de casos de k cuentas que se tendría si el T.M. fuera igual a cero.

: La probabilidad de transición de una medición con j cuentas reales a una con n observables.

Logicamente siempre $n < j$

Llamando C.R. al "counting rate"; y como normalmente

$p_0 \equiv (C.R.) \cdot (T.M.) \ll 1$ resulta

$$\pi_k \equiv \pi(k \rightarrow k-1) \gg \pi(k \rightarrow k-2)$$

con lo cual

$$N_k^e = N_k + N_{k+1} \cdot \pi_{k+1} - N_k \cdot \pi_k$$

(61)

La expresión de π_j se obtiene dividiendo el tiempo en M intervalos iguales $t_0 > T.M.$ Llamando $p = (C.R.) t_0$ se obtiene:

$$\pi_k = \left\{ \left[\frac{M!}{(M-k+1)!(k-2)!1!} \right] (1-p-p^2)^{M-k+1} p^{k-2} \right\} \cdot \left\{ \left[\frac{M!}{(M-k)!k!} \right] (1-p)^{M-k} p^k \right\}^{-1}$$

que con la condición $1 \gg p \gg p^2$ se reduce a :

$$\pi_k = \frac{k(k-1)}{M} = \frac{k(k-1)}{\bar{n}} p \quad (62)$$

Como nos interesan las convecciones por T.M. para las distribuciones de Poisson y Binominal Negativa, nos planteamos las convecciones en estos dos casos

i) Distribución de Poisson

Recordando la propiedad:

$$p_{k+1} = \left\{ \frac{\bar{n}}{(k+1)} \right\} p_k$$

p_k : Probabilidad de tener k eventos

y con las ecuaciones (60) y (61) tenemos:

$$N_k^e = \left[1 + p(1 + \bar{n}^{-1})k - (p/\bar{n})k^2 \right] \quad (63)$$

de la cual se infieren:

$$\bar{n}^e = \bar{n} (1-p) \quad (64) (a)$$

$$\bar{n}^2 e = (\bar{n})^2 (1-2p) + \bar{n} (1-3p) \quad (64) (b)$$

y

$$V^e = \left\{ \frac{\bar{n}^2 - (\bar{n}^e)^2}{\bar{n}^e} \right\} \quad (65)$$

$V^e < 1$ debido a que $p > 0$ ya que T.M. $\neq 0$.

ii) Distribución Binomial Negativa.

Teniendo en cuenta la propiedad:

$$p_{k+1} = (1+\psi)^{-1} \left\{ \frac{(k+k\psi)}{(k+1)} \right\} p_k$$

donde ψ es el parámetro de la d.b.n.

Usando la propiedad y las ecuaciones (61) y (62) tenemos:

$$N_k^e = N_k \left[1 + p_k \left\{ \bar{n}^{-1} + (1+\psi)^{-1} \right\} - p_k^2 \left\{ \bar{n} (1+\psi) \right\}^{-1} \right] \quad (66)$$

de la cual se infieren:

$$\bar{n}^e = \bar{n} (1-p) - p\psi \quad (67)$$

$$\bar{n}^{2e} = (\bar{n})^2 (1-2p) + \bar{n} (1-3p+\psi-6p\psi) - 3p\psi - \psi p \psi^2 \quad (68)$$

De estas dos últimas ecuaciones obtenemos, en función de los datos experimentales, la ecuación para ψ :

$$F(\psi) = B_2 \psi^2 + B_1 \psi + B_0 = 0$$

donde

$$B_0 = (\bar{n}^e)^2 (1-2p) - \bar{n}^e (1-p)^2 + \bar{n}^e (1-4p+3p^2)$$

$$B_1 = \bar{n}^e (1-5p+2p^2) - 2p(1-p)$$

$$B_2 = -p(3-2p)$$

Determinación de p.

De las ecuaciones (64) a);b) y (65) se obtiene

$$F(p) = A_0 + A_1 p + A_2 p^2 = 0 \quad (69)$$

con

$$A_0 = -(1 - v^e)$$

$$A_1 = 2(2 - v^e)$$

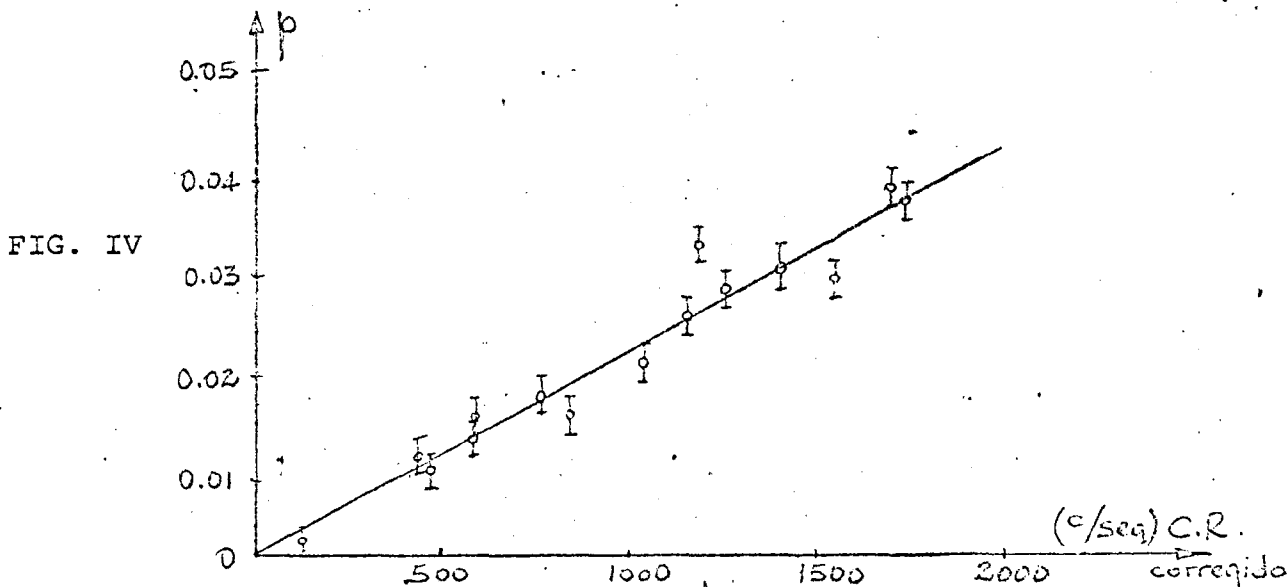
$$A_2 = v^e + \bar{n}^e - 3$$

cuya solución conduce a:

$$p = \left[v^e - 2 + \left\{ 1 + \bar{n}^e (1 - v^e) \right\}^{1/2} \right] / (v^e + \bar{n}^e - 3) \quad (70)$$

Utilizando esta expresión. se determina experimentalmente p para distintos C.R., utilizando una fuente de neutrones; (distribución de Poisson). Se ajustaron los puntos obtenidos a una recta, ya que inicialmente se definió $p = (CR)t_0$, donde t_0 es constante.

Los resultados, y rangos usados son los que muestra el siguiente gráfico:



CONCLUSIONES:

Las distintas mediciones de la experiencia se realizaron en el reactor RA-2, facilidad crítica del RA-3, para diferentes niveles de subcriticidad.

Este reactor tiene elementos combustibles constituidos por placas planas de Uranio enriquecido al 90%, moderado por Agua, y reflejado en parte por grafito y en parte por Agua, La configuración del núcleo se especifica en el "Programa α ", para cada caso.

Se compararon los valores de α encontrados con los que se obtuvieron; en este Departamento, con Fuente Pulsada y hubo concordancia entre los valores obtenidos por ambos métodos. Se puede estudiar la dependencia espacial del parámetro α , con el mismo equipo, utilizando detectores de pequeño volumen.

APENDICE I

Preparación de datos para "Programa ALFA"

TARJETA I:

cd 1-6

col 7-9 NUMM

col 10-12 NUMP

col 14-19

col 21-56 CØNF(36)

FØRMAT (A6, 2I3, 1x, A6, 1x, 36A1

palabra MEDIDA

Nº de medida

Nº de puntos

Palabra PUNTØS

Configuración de la grilla (6x6)

Usar A para agua, C grafito

V combustible y 1,2,3,4 para las

barras de control.

TARJETA II:

col 1-72

FØRMAT (72H)

Comentarios a ser impresos

TARJETA III: (NAMELIST)

col 2

col 3-7

col 9 en adelante

Signo \$

Palabra DATØS

T=tiempo en minutos,

TAU= intervalo en mseg,

NO= contaje 0,

NE(1)= cont. seg. 1, cont. seg.2

etc. hasta último ≠0

Si hace falta mas tarjetas terminar las intermedias

con, (coma)

Al finalizar otro signo \$

Tarjeta 3 repetida NUMP veces.

Luego siguientes medidas con el mismo formato anterior

Terminar con una Tarjeta con la palabra FIN (col 1-3).

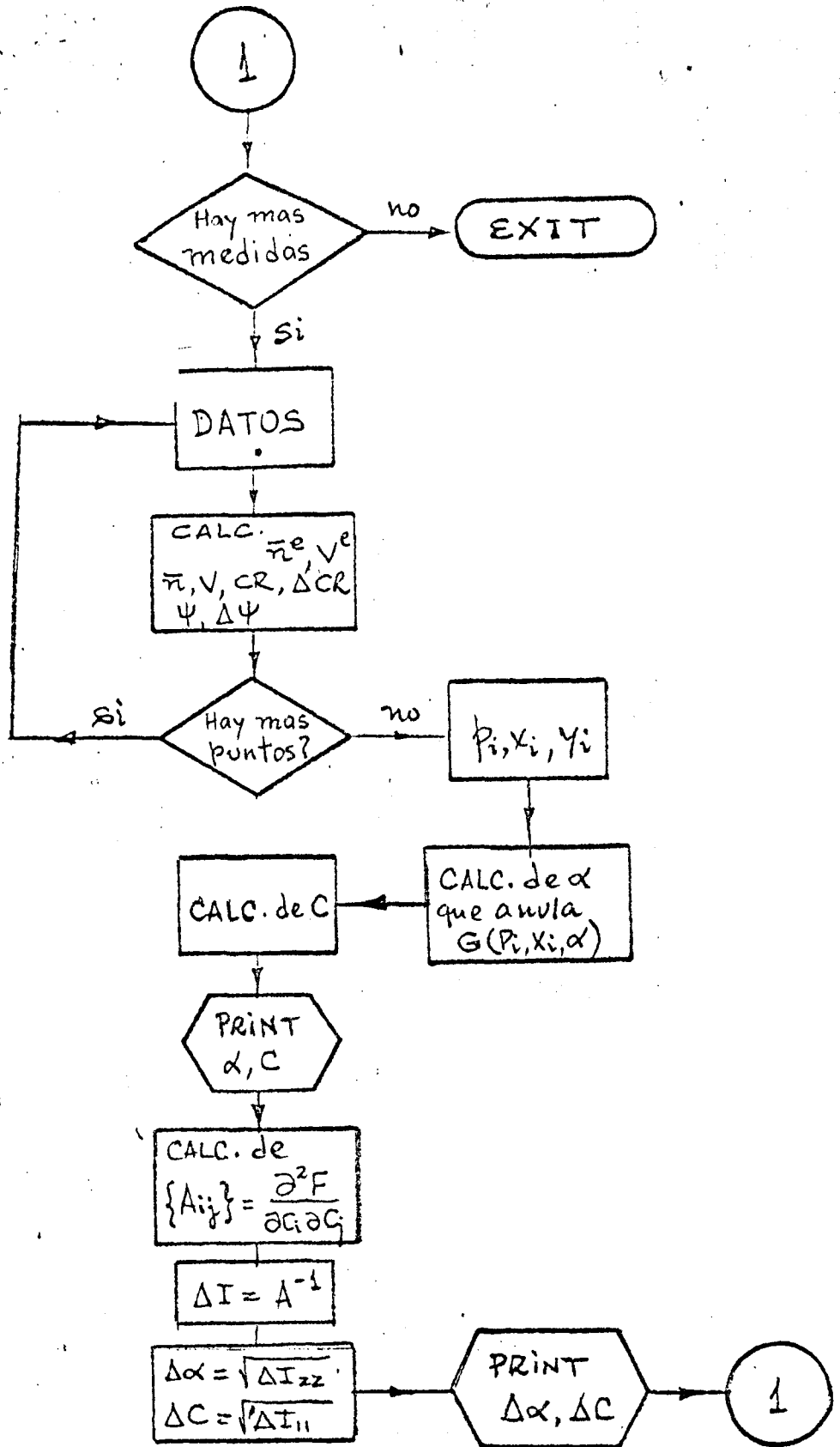


DIAGRAMA DE FLUJO

CALCULO DE ALFA Y C (REACTOR PUNTUAL)

SIN NEUTRONES RETARDADOS

CALCULO DE ALFA Y C (REACTOR PUNTUAL)
 SIN NEUTRONES RETARDADOS
 NO USAR TAU > 100 MSEC - AJUSTE POR CUADRADOS MINIMOS DE
 FI = C*(1 - (1 - EXP(-ALFA*TAU)))/(ALFA*TAU)
 FORMATOS DE ENTRADA
 FORMABEZANDO CAPTOS UNA TARJETA CON
 MEDIDA COMENTARIO A IMPRIMIR (COL. 20-56) A6, 2I3, 1X, A6, 1X, 36A1
 LUEGO COMENTARIO A IMPRIMIR (COL. 1-72) 72H
 \$DATOS T=(MINUTOS), TAU=(MSEC), NO=(VALOR), NE(1)=(VAL.), (VAL.), ETC
 ETC (SOLO LOS NO CERO) \$ DESDE COL 2 (N GRUPOS DE TARJETAS)
 AL FINALIZAR UNA TARJETA CON CUALQUIER PALABRA (EJ. FIN, COL. 1-3)

DIMENSION NE(63), VTAU(20), FI(20), ERFI(20), CONF(36), NANUL(20)
 DIMENSION CR(20), ERCR(20), NVEC(10)

COMMON VTAU, FI, ERFI, C, NCONT
 DATA NMED, NPUN, NFIN, SHMED, 6HPUNTOS, 6HFIN /
 DATA NVEC/0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9/
 NAMELIST DATOS/ T, TAU, NO, NE
 FP(X) = .000014*X

READ(5, 500) ND MED, NUMM, NUMP, NDPUN, CONF
 FFORMAT (A6, 2I3, 1X, A6, 1X, 36A1)
 IF (ND MED .NE. 0) CALL EXIT
 WRITE(6, 600) ND MED, NUMM, NUMP, NDPUN
 FFORMAT (1I1, 10X, 6H*****, A6, I3, 4H CON, I3, A6, 6H *****/)

READ(5, 501))
 FFORMAT (72H

WRITE(6, 501)
 WRITE(6, 601)
 FFORMAT (//3X, 18H** CONFIGURACION *//)
 DO 1 I=1, 6

J = 6*I-5
 K = J+5
 WRITE(6, 602)(CONF(JJ), JJ=J, K)
 FFORMAT = 0
 NCONTR = 0

WRITE(6, 603)
 FFORMAT (//30H PUNTO TAU (MSEC) N MED, EXP . 3X, 18HV EXP N MED, COR
 R, 3X, 24HC/SEC+-ERROR FI+-ERROR//)
 1 REWIND 01

DO 2 I=1, NUMP
 DO 12 II=1, 63
 NE(II) = 0
 READ(5, DATOS) NO, NE
 WRITE(6, 601) NO, NE
 NCONTR = NCONTR + 1
 NKN

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30	31	32	33	34	35	36	37	38	39	40	41	42	43	44	45	46	47	48	49	50
11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30	31	32	33	34	35	36	37	38	39	40	41	42	43	44	45	46	47	48	49	50	51	52	53	54	55	56	57	58	59	60

0	1	10	11	20	30	31	40	50	60	70	80	90	100	110	120	130	140	150	160	170	180	190	200	210	220	230	240	250	260	270	280	290	300	310	320	330	340	350	360	370	380	390	400	410	420	430	440	450
0	1	10	11	20	30	31	40	50	60	70	80	90	100	110	120	130	140	150	160	170	180	190	200	210	220	230	240	250	260	270	280	290	300	310	320	330	340	350	360	370	380	390	400	410	420	430	440	450


```

SUBROUTINE CMIN
DIMENSION X(20), Y(20), P(20)
COMMON X, Y, P, C, N
EXTERNAL FE
SP(X)=C*(1.-EXP(-ALFA*X))/(ALFA*X)
B1 = 0.0
B2 = 40.0
EPS = 2000.0
DO 1 I=1,N
X(I) = X(I)*0.001
Y(I) = Y(I)
ERFIE(I) = P(I)
P(I) = 0./P(I)*X(I)
SP I=1,N
DO 2 I=1,N
P(I) = P(I)/SP
CALL BISECT(FE, B1, B2, ALFA, EPS, KENN)
IF (KENN) 3, 4, 3
WRITE(6,600) B1, B2
FORMAT(//)SUMALFA NO ESTA COMPRENDIDA ENTRE,F4.1,2H Y,F6.1/)
REWRITE(6,601)
FORMAT(1H0,58H X Y F(X) Y-F(X)
601 1
H0 = 0
I = 1, N
H1 = (EXP(-ALFA*X(I))+ALFA*X(I))-1.0)/ALFA*C
H2 = (EXP(-H1)*HP(I))+H
WRITE(6,602) X(I), Y(I), H1, H2, P(I)
H1 = H2*H2*P(I)+H
WRITE(6,603) H
SUMA DE LOS ERRORES CUADRATICOS =,E15,8)
FORMAT(1H0,36H ERALFA,ERC)
CALL ETERR(ALFA, ERALFA, C, ERC)
WRITE(6,604) ALFA, ERALFA, C, ERC
FORMAT(//)12X,6HALFA =,F6.1,2H+--F4.1//12X,6H C =,F6.1,2H+--F4.1)
XINT = 0.0001
IF (X(1).GT.0.00049) XINT = 0.0002
IF (X(1).GT.0.00199) XINT = 0.0010
TAU(I) = XINT
FIT(I) = FI(XINT)
FIDEN(I) = FI(XINT)
I = I + 1
ITAU(I) = XINT
FIT(I) = FI(TAU(I))
FIDEN(I) = FI(TAU(I))
IF (ABS(TAU(I))-X(ICOR(IENT))) .GT. 1.0E-10) GO TO 6
ICOR(IENT) = I

```

```

0
120 1
230 1
340 1
450 1
560 1
670 1
780 1
890 1
900 1
1005 6
1100 6
1200 6
1300 6
1400 6
1500 6
1600 6
1700 6
1800 6
1900 6
2000 6
2100 6
2200 6
2300 6
2400 6
2500 6
2600 6
2700 6
2800 6
2900 6
3000 6
3100 6
3200 6
3300 6
3400 6
3500 6
3600 6
3700 6
3800 6
3900 6
4000 6
4100 6
4200 6
4300 6
4400 6
4500 6
4600 6
4700 6
4800 6
4900 6
5000 6
5100 6
5200 6
5300 6
5400 6
5500 6
5600 6
5700 6
5800 6
5900 6
6000 6
6100 6
6200 6
6300 6
6400 6
6500 6
6600 6
6700 6
6800 6
6900 6
7000 6
7100 6
7200 6
7300 6
7400 6
7500 6
7600 6
7700 6
7800 6
7900 6
8000 6
8100 6
8200 6
8300 6
8400 6
8500 6
8600 6
8700 6
8800 6
8900 6
9000 6
9100 6
9200 6
9300 6
9400 6
9500 6
9600 6
9700 6
9800 6
9900 6

```

```

1
2
3
4
5
6
7
8
9
10
11
12
13
14
15
16
17
18
19
20
21
22
23
24
25
26
27
28
29
30
31
32
33
34
35
36
37
38
39
40
41
42
43
44
45
46
47
48
49
50
51

```


REFERENCIAS

- 1) N. Pacilio - Bernoulli Trials and Counting Correlations on Nuclear Particles Detection. Nuclear Instruments and Methods, 42, pag. 241-244, 1966.
- 2) 2) Feynmann R., De Hoffman F., Serber R. - Journal of Nuclear Engineering, 3, 64, 1956.
- 4) Raievski V. - Fluctuations Statistiques dans les Piles. Rapport C.E.A. N° 1673.
- 5) Bennett E.F. - Nuclear Science and Engineering, 8, 53-61, 1960
- 6) Orndoff J.D. - Nuclear Science and Engineering, 2, 450, 1967.
- 7) Castro Madero C., Schilman H. Corcuera R. - Nuclear Instruments and Methods, 66, 270-276, 1968.