

id 320



Proyecto Final Integrador

Ingeniería nuclear con orientación en aplicaciones

---

# Análisis numérico de una expansión libre de jet supersónico en tobera axisimétrica

---

**Huaranca Arnaldo Oscar**

**Director:** Dr. Guido Berlin  
**Co-director:** Ing. Matias Cardozo

**Miembros del jurado**  
Salvador Ortiz  
Diego Perez

Julio del 2023

*Dedicado a mi mamá y mi papá.  
Gracias por el apoyo incondicional  
Papá, un abrazo grande al cielo.*

# Resumen

En este proyecto integrador se presentan los resultados de varias pruebas en las que se analizó el comportamiento de un gas en expansión libre en una geometría axisimétrica bidimensional en estado estacionario que nos permitió obtener condiciones de flujo supersónico y que tendría aplicaciones, en futuros proyectos, en el estudio de enriquecimiento aerodinámico isotópico.

El análisis aquí descrito, tuvo en cuenta los principales parámetros que rigen la expansión libre del gas que son: el diámetro del orificio de entrada del gas, la presión de estancamiento y la presión de descarga. Es por ello, que se realizó el modelado de un gas que se expande libremente hasta alcanzar flujo supersónico con el software *Ansys Fluent* (CFD).

Estos resultados se compararon con las relaciones semi-empíricas presentadas por los autores Giovanni Sanna – Giuseppe Tomassetti (2005) que se tomaron como referencia para el análisis. La región analizada fue la zona de campo cercano, específicamente la zona de silencio donde se cumplen las condiciones de éstas relaciones.

Para la calibración del modelado se realizaron variaciones de los parámetros de las simulaciones como, por ejemplo, la densidad de la malla, las relaciones de presiones en la entrada y salida, y la extensión del dominio computacional.

El gas que se utilizó para las simulaciones fue aire, que circuló desde una cámara de alta presión hacia otra de baja presión por medio de una boquilla. Esto permitió obtener un flujo supersónico a la salida de la boquilla el cual se analizó y se comparó con lo propuesto como referencia, citada anteriormente.

Los datos obtenidos por el programa *Fluent* de las distintas simulaciones y los de referencia se compararon mediante el error cuadrático medio, y con la variación de este indicador (disminuye o aumenta) se seleccionaron las alternativas de simulación más adecuada. Se tomó como criterio que el error disminuya entre cada simulación y con esto poder obtener valores que se asemejen a los propuestos por la referencia. Con los últimos resultados, el error cuadrático medio pasó de 2% a 0.08%.

Tomando en cuenta todos los datos calculados por las simulaciones en *Fluent* y con un error cuadrático medio del 0.08% se puede tomar estos valores como aceptables en comparación con el modelo semi-empírico y utilizarlos para futuros análisis en regiones que no estén delimitadas por la zona de silencio, ni por valores del número de Mach mayores a 5.5 donde tienen validez las relaciones semi-empíricas.

# Índice general

Índice de figuras	4
Índice de tablas	5
<b>1. Introducción</b>	<b>9</b>
1.1. Motivación . . . . .	9
1.2. Separación isotópica . . . . .	10
1.3. Dinámica de los fluidos . . . . .	12
1.3.1. Ecuación de Continuidad . . . . .	12
1.3.2. Ecuación de Conservación de Cantidad de Movimiento . . . . .	13
1.3.3. Ecuación de Conservación de Energía . . . . .	14
1.3.4. El modelo de gas ideal . . . . .	14
1.4. Régimen fluido-dinámico . . . . .	15
1.4.1. Hipótesis del continuo . . . . .	16
1.4.2. Ecuaciones de Navier-Stokes . . . . .	17
1.4.3. Condiciones de Contorno . . . . .	17
1.4.4. Regímenes de flujos . . . . .	18
1.4.5. Modelos de turbulencia . . . . .	19
1.5. Objetivos . . . . .	20
<b>2. Modelo semi-empírico</b>	<b>21</b>
2.1. Jet libre subexpandido . . . . .	21
2.2. Estructura del jet libre subexpandido . . . . .	23
2.3. Expansión libre supersónica axisimétrica . . . . .	27
2.3.1. Zona de silencio . . . . .	28
2.4. Aplicación del modelo semi-empírico . . . . .	32
<b>3. Resolución numérica</b>	<b>35</b>
3.1. Método de comparación . . . . .	35
3.2. Modelado en Fluent . . . . .	37
3.3. Prueba 1 . . . . .	38
3.4. Prueba 2 . . . . .	41
3.5. Variación de la relación $p_o/p_b$ . . . . .	43
3.6. Prueba 3 . . . . .	48
<b>4. Conclusiones y trabajos futuros</b>	<b>51</b>
<b>A. Apéndice A: Tablas de coeficientes</b>	<b>52</b>
A.1. Tabla 8.2.1 . . . . .	52
A.2. Tabla 8.2.1 . . . . .	52

Bibliografía

54

# Índice de figuras

1.1. Volumen de control en coordenada rectangulares, con ingreso y salida de masa. [14] . . . . .	13
1.2. Regímenes de flujo en términos de número de Knudsen y ecuaciones gobernantes. [11] . . . . .	15
1.3. Hipotesis del continuo, variación de la densidad con respecto al tamaño del volumen de control. [12] . . . . .	16
2.1. Evolución de la presión longitudinal en una tobera convergente para distintas relaciones de presiones. [9] . . . . .	21
2.2. Evolución de la presión longitudinal en una tobera convergente-divergente para distintas relaciones de presiones. [9] . . . . .	22
2.3. Esquema de una expansión continua de chorro libre sub expandido desde una tobera. [18] . . . . .	24
2.4. Estructura de un chorro muy subexpandido. [18] . . . . .	25
2.5. Esquema de una expansión continua de chorro libre desde una tobera, el gas se transporta desde una cámara de alta presión hacia la cámara de descarga de baja presión. . . . .	27
2.6. Detalles estructurales de un chorro libre axisimétrico subexpandido emitido de una tobera convergente. El chorro tiene simetría de revolución alrededor del eje x. El diámetro máximo del barril $D_B$ , el diámetro del disco de Mach $D_M$ , y sus coordenadas axiales $X_B$ y $X_M$ . [16] . . . . .	29
2.7. Detalles de la geometría de las líneas de corriente cerca del eje del chorro. Las líneas de corriente parecen ser emitidas desde una fuente puntual situada en el punto $(x_0,0)$ aguas abajo de la sección de salida de la tobera. [16] . . . . .	31
2.8. Gráfico de la presión respecto a la distancia desde el orificio de salida del aire con una relación de presiones de $p_o/p_b = 100$ , a distintas posiciones del eje radial. . . . .	33
2.9. Gráfico del número de Mach con una relación de presiones de $p_o/p_b = 100$ . . . . .	33
2.10. Gráfico de la presión respecto a la distancia desde el orificio de salida del aire con una relación de presiones de $p_o/p_b = 1000$ , a distintas posiciones del eje radial. . . . .	34
2.11. Gráfico del número de Mach con una relación de presiones de $p_o/p_b = 1000$ . . . . .	34
3.1. Esquema del dominio computacional de estudio con las posiciones de los puntos que se tomaron para comparar el número de Mach. . . . .	36
3.2. Esquema del dominio computacional y dimensiones de la geometría. . . . .	38
3.3. Geometría y dimensiones utilizadas en <i>Fluent</i> . . . . .	41
3.4. Gráficos del número de Mach del aire con variación de la relación de $p_o/p_b$ . . . . .	43
3.5. Comparación de evolución de las relaciones $X_M/D$ respecto a los valores de $p_o/p_b$ tanto de referencia como las obtenidas por las simulaciones. . . . .	46
3.6. Esquema de la densidad de malla en la geometría axisimétrica de estudio, obtenida del programa <i>Fluent</i> . . . . .	48

# Índice de tablas

3.1. Coordenadas espaciales de los puntos que se eligieron para la comparación de los valores obtenidos, para $p_o/p_b = 100$ . . . . .	36
3.2. Error porcentual del número de Mach al comparar los valores de referencia y los obtenidos por el programa <i>Fluent</i> con $p_o/p_b = 100$ . . . . .	39
3.3. Error porcentual del número de Mach al comparar los valores de referencia y los obtenidos por el programa <i>Fluent</i> , variando la densidad de la malla y con $p_o/p_b = 100$ . . . . .	39
3.4. Comparación de los números de Mach de la referencia y de los obtenidos en <i>Fluent</i> con la geometría 1 y 2, con $p_o/p_b = 100$ . . . . .	42
3.5. Comparación con los datos obtenidos de la ecuación 2.1 y de la simulación, con la relación de presiones $p_o/p_b = 100$ de la geometría 1 y 2. . . . .	42
3.6. Comparación de los números de Mach de la referencia y de los obtenidos en <i>Fluent</i> con $p_o/p_b = 17000$ . . . . .	44
3.7. Comparación de los números de Mach de la referencia y de los obtenidos en <i>Fluent</i> con $p_o/p_b = 10000$ . . . . .	44
3.8. Comparación de los números de Mach de la referencia y de los obtenidos en <i>Fluent</i> con $p_o/p_b = 1000$ . . . . .	45
3.9. Comparación de los números de Mach de la referencia y de los obtenidos en <i>Fluent</i> con $p_o/p_b = 500$ . . . . .	45
3.10. Comparación con los datos obtenidos de la ecuación 2.1 y de las simulaciones, con su respectivo error porcentual a diferentes valores de $p_o/p_b$ . . . . .	46
3.11. Comparación de los números de Mach de la referencia y de los obtenidos en <i>Fluent</i> con variación de la densidad de la malla, con $p_o/p_b = 100$ . . . . .	49
3.12. Comparación de los números de Mach de la referencia y de los obtenidos por <i>Fluent</i> calculado con el modelo de turbulencia $k - \epsilon$ y Spalart-Allmaras, con $p_o/p_b = 100$ . . . . .	49
3.13. Comparación con los datos obtenidos de la ecuación 2.1 y de las simulaciones, con los modelos turbulentos $k - \epsilon$ y Spalart-Allmaras, con $p_o/p_b = 100$ . . . . .	50

# Glosario

$C_i$ : Concentración molar de la especie gaseosa  $i$ -ésima

$C_p$ : Calor específico a presión constante

$C_v$ : Calor específico a volumen constante

$m$ : Masa molar

$Ma$ : Número de Mach

$p$ : Presión

$p_0$ : Presión de estancamiento

$p_b$ : Presión de descarga

$r$ : Radio genérico

$R$ : Constante universal de los gases

$T$ : Temperatura

$T_0$ : Temperatura de estancamiento

$v$ : Velocidad

$\rho$ : Densidad

$\rho_0$ : Densidad de estancamiento

$\gamma$ : Coeficiente de expansión adiabática

$X_m$ : Distancia de la tobera al disco de Mach

$D$ : Diámetro de la tobera

$\beta$ : Coeficiente de separación

$v_c$ : Volumen de control

$u_i$ : Velocidad en dirección  $i$

$\tau_{ij}$ : Componente  $ij$  del tensor de esfuerzos

$x$ : Coordenada espacial

$e$ : Energía por unidad de masa

$\partial q_i / \partial x_i$ : Representación de una fuente volumétrica

$F$ : Fuerza

$n$ : Número de moles

$K_n$ : Número de Knudsen

$Re$ : Número de Reynolds

N-S: Navier-Stokes

CFD: Dinámica de Fluidos Computacional

REV: Elemento de Volumen Representativo

ECRI: Elementos de Combustibles para Reactores de Investigación

PFPU: Planta de Fabricación de Polvos de Uranio

PHWR: Pressurized Heavy Water Reactor

CNEA: Comisión Nacional de Energía Atómica

LASIE: Laboratorio Argentino para Separación Isotópica para Enriquecimiento

$UF_6$ : Hexafluoruro de uranio

# Introducción

## 1.1. Motivación

En los últimos años, las emisiones de dióxido de carbono derivadas de las actividades industriales que utilizan combustibles fósiles y el efecto invernadero que estas emisiones producen sobre la atmósfera, son responsables en gran parte del cambio climático global y con el aumento de la población mundial es necesario encontrar otras alternativas de obtención de energía.

En este sentido la energía nuclear, cuyas emisiones de gases de efecto invernadero son insignificantes, es una de las mejores soluciones a este problema. Es más, no solo contribuye a reducir las emisiones contaminantes, sino que también produce grandes cantidades de energía para satisfacer el desarrollo futuro. [1]

Para la industria nuclear, es de suma importancia el uranio en la creación de elementos de combustibles para las centrales nucleares. El uranio natural es una sustancia química que naturalmente posee una ligera radioactividad y está formado en gran medida por tres isótopos, aproximadamente un 99.28 % del isótopo  $^{238}\text{U}$ , un 0.71 % del isótopo  $^{235}\text{U}$  y 0.01 % del isótopo  $^{234}\text{U}$ . En particular, el isótopo  $^{235}\text{U}$  es capaz de producir una reacción nuclear al fisiónar con neutrones del espectro térmico y liberar grandes cantidades de energía, ya que se trata de un isótopo fisible. [2]

Por esta razón, el sistema nuclear argentino tuvo como objetivo estratégico dominar la tecnología del ciclo del combustible incursionando en el desarrollo de la tecnología del enriquecimiento isotópico del uranio para tener un ciclo de combustible nuclear autónomo y sustentar la independencia del país en el manejo de sus recursos energéticos. [3]

En la actualidad, Argentina cuenta con amplia experiencia en la capacidad de producir comercialmente elementos combustibles para reactores de investigación en su Planta de Fabricación de Elementos Combustibles para Reactores de Investigación (*ECRI*) y elaborar compuestos de uranio en la Planta de Fabricación de Polvos de Uranio (*PFPU*). Esta última tiene como tarea fundamental la provisión de polvos de óxido de uranio enriquecido a la empresa *CONUAR S.A.* para la fabricación de los elementos combustibles para las centrales nucleares Atucha I, Atucha II y Embalse, reactores del tipo *PHWR* (Pressurized Heavy Water Reactor). En consecuencia, el proceso de enriquecimiento de uranio resulta de suma importancia para la industria nuclear de nuestro país.

## 1.2. Separación isotópica

El proceso de enriquecimiento del uranio, se lleva a cabo mediante distintas técnicas de separación isotópicas. La separación isotópica es el proceso que permite aumentar la concentración de un isótopo determinado de un elemento químico, mediante la aplicación reiterada de métodos físicos, químicos, o físico-químicos [6]. Para cuantificar la eficacia de un proceso de enriquecimiento, se utiliza el factor de enriquecimiento  $\alpha$  que es el cambio en las concentraciones isotópicas entre los materiales de alimentación y de producto. [7]

En este sentido, las concentraciones de los isótopos que se presentan en el uranio natural no son las favorables para la creación de elementos de combustibles, por esta razón se busca aumentar la concentración del isótopo  $^{235}\text{U}$  y como resultado, se desarrollaron técnicas de separación isotópica aerodinámicas con el fin de obtener un mayor porcentaje de enriquecimiento con un bajo costo energético. En estas técnicas se utiliza el hexafluoruro de uranio  $\text{UF}_6$  en estado gaseoso, y algunas de ellas son:

- **Difusión gaseosa:** En esta técnica se lleva a cabo mediante la efusión molecular, que es un proceso por el cual un gas bajo presión escapa de un recipiente al exterior a través de una pequeña abertura. [6].

En un recipiente que contiene una mezcla de dos gases, la especie con menor peso molecular tendrá una mayor velocidad e impactará en las paredes del recinto con mayor frecuencia al compararlo con la otra especie de mayor peso molecular. Si en este dispositivo las paredes tienen como característica orificios que permitan el paso de las moléculas de una a una sin dejar que el gas fluya como un fluido continuo, la especie más ligera fluirá a través de las paredes con mayor proporción a diferencia de las moléculas más pesadas [4] [5].

La eficiencia de la separación es aproximadamente de  $\alpha = 1.004$ , tan baja que el proceso debe repetirse muchas veces para obtener un grado útil de enriquecimiento, por lo que se usan muchas etapas en cascada. [7]

- **Centrifugación:** en esta técnica se bombea un gas dentro de un cilindro rotante a altas velocidades, generando que las distintas masas que conforman el gas posean diferentes velocidades. Esta diferencia de velocidades en el gas provoca un comportamiento difusivo específico para cada componente.

Cuando se llega al estado estacionario, se observa que la concentración de la especie pesada y liviana, se encuentra a lo largo de la coordenada radial con centro en el eje del cilindro pero que en la periferia del cilindro la concentración de la especie pesada es máxima.

Este proceso reporta un mayor grado de enriquecimiento en cada etapa, aproximadamente de  $\alpha = 1.15$  en comparación a la anterior técnica. Pero tiene la particularidad que para obtener estos valores se necesita realizar este proceso en cascada y además los caudales que puede procesar en cada serie son relativamente bajos, lo cual demanda un alto costo energético. [7]

- **Separación asistida por Láser:** En este método, especies en estado gaseoso son bombeadas a través de toberas y cámaras, diseñadas para generar campos de presión que favorezcan el efecto de baro-difusión. Esto es el transporte de una especie de una zona de alta concentración a otra zona de baja concentración por medio de una diferencia de presión.

Se busca obtener condiciones de presión, temperatura que favorezcan la separación isotópica y mediante la excitación de las especies individuales, que componen el gas, utilizando un haz de laser en una frecuencia específica aumentar esa separación. De esta forma es posible prevenir la formación de aglomeraciones en una de las especies de la mezcla, logrando un aumento en la eficiencia del proceso separativo, aproximadamente de  $\alpha = 5$ , y reduciendo las etapas separativas de este último. [5] [6] [7]

Se debe tener en cuenta que, para las técnicas de separación isotópica aerodinámica, su eficiencia aumenta cuanto mayor sea la diferencia de masa entre los elementos. Además, al aplicar nuevas tecnologías como el láser, en las técnicas de separación isotópica aerodinámica, se pronostica que el coeficiente de separación también aumenta en gran medida en comparación con las otras técnicas.

Los análisis de la separación asistida por láser a escala de laboratorio pronostican un alto grado de enriquecimiento a un bajo costo energético. En la Comisión Nacional de Energía Atómica (CNEA) se creó el proyecto LASIE (Laboratorio Argentino para Separación Isotópica para Enriquecimiento), para desarrollar tecnologías de separación isotópica basadas en procesos aerodinámicos asistidos por excitación láser.

Es por esta razón que en este trabajo nos enfocamos en la técnica de separación isotópica aerodinámica, analizando distintos modelados en los que se hace circular la mezcla que se quiere enriquecer, mediante relaciones semi-empíricas y simulaciones computacionales que se apliquen en el régimen fluido dinámico.

### 1.3. Dinámica de los fluidos

La dinámica de fluidos estudia los fluidos en movimiento con la aplicación de la física newtoniana (como la conservación de la materia, segunda Ley de Newton, primera ley de la termodinámica, entre otros), y caracteriza su comportamiento interno cuando son sometidos a distintas fuerzas.

El fluido es una sustancia o medio continuo que se deforma constantemente en el tiempo ante la aplicación de una sollicitación o tensión tangencial sin importar su magnitud, las ecuaciones que lo describen pueden ser extremadamente complejas o no, dependiendo de las simplificaciones que se aplique para su análisis y que es lo mejor que modela el comportamiento del fluido. Los fluidos pueden considerarse compresibles o incompresibles, con flujos estacionarios o no estacionarios. [9]

Un fluido incompresible es cualquier fluido cuya densidad siempre permanece constante con el tiempo y tiene la capacidad de oponerse a la compresión bajo cualquier condición. La compresión de un fluido es el cambio en el volumen cuando se somete a una presión exterior. [9]

Cuando el volumen cambia en gran medida se considera al fluido como compresible (que muestra una variación significativa de la densidad como resultado de fluir), esto sucede cuando la velocidad del flujo es cercana a la velocidad del sonido. Estos cambios suelen experimentar principalmente los gases. [9]

Adicionalmente, los flujos pueden ser estacionarios y no estacionarios, un flujo estacionario es aquel en donde la velocidad del mismo en cada punto es constante y tiene el mismo valor sobre toda área perpendicular al movimiento del fluido en cualquier instante de tiempo. En cambio, en un flujo no estacionario la velocidad del fluido cambia con el tiempo. [9]

Por este motivo, las ecuaciones que se emplean para el modelo matemático consistente son las de conservación de masa, momento y energía, en las que se supone un volumen de control fijo en el espacio, a través del cual circula el fluido.

#### 1.3.1. Ecuación de Continuidad

Esta ecuación se deriva de aplicar el principio de conservación de masa. La ecuación resultante es conocida como la ecuación de conservación de masa o ecuación de continuidad, la cual describe el flujo neto de masa saliendo del volumen de control ( $vc$ ) a través de sus fronteras (ver figura 1.1). En notación vectorial se tiene:

$$\frac{\partial(\rho u_i)}{\partial x_i} = 0 \quad \text{para } i = x, y \quad (1.1)$$

[13] [14]

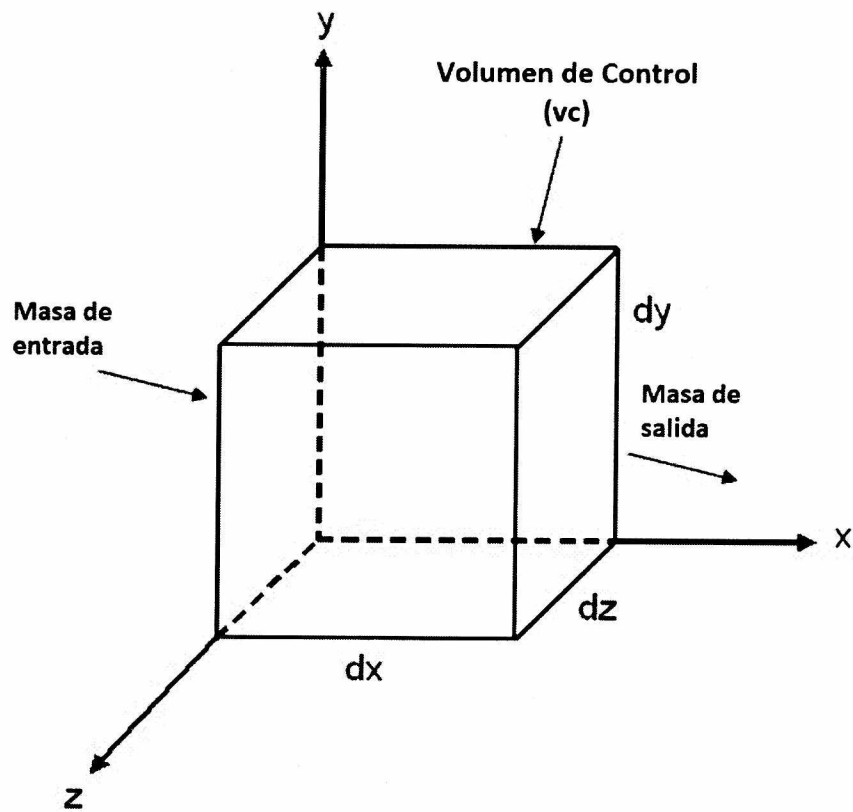


Figura 1.1: Volumen de control en coordenada rectangulares, con ingreso y salida de masa. [14]

### 1.3.2. Ecuación de Conservación de Cantidad de Movimiento

La ecuación de movimiento es la representación matemática de la segunda ley de Newton, que establece que el incremento temporal del momento lineal en el volumen de control ( $vc$ ), más el flujo neto de momento lineal de salida del volumen de control debe ser igual a la suma de las fuerzas que actúan sobre él, las fuerzas que actúan son de dos tipos: las fuerzas másicas o de cuerpo y las fuerzas superficiales.

Las fuerzas másicas actúan directamente sobre la masa volumétrica del  $vc$  (entre ellas la fuerza de la gravedad, centrífuga, eléctrica y magnética, las cuales serán representadas como  $F_i$ ). Las fuerzas superficiales actúan directamente sobre la superficie del  $vc$  del fluido en dirección normal, la presión ejercida sobre la superficie impuesta por el fluido exterior al mismo en la dirección tangencial, las fuerzas causadas por las tensiones viscosas.

Este balance producirá tres ecuaciones escalares diferenciales parciales en estado estacionario, una para cada dirección del sistema coordenado  $(x,y)$ . La forma general de la ecuación de conservación de momento para fluidos newtonianos, en notación tensorial, es:

$$\frac{\partial(\rho u_i u_j)}{\partial x_j} = -\frac{\partial p}{\partial x_i} + \frac{\partial}{\partial x_j} \left[ \mu \left( \frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) - \frac{2}{3} \mu \frac{\partial u_k}{\partial x_k} \delta_{ij} \right] + F_i \quad (1.2)$$

Para cada  $i = x, y$  ;  $j = x, y$  y  $\delta_{ij} \begin{cases} 1 & \text{si } i = j \\ 0 & \text{si } i \neq j \end{cases}$

[13] [14]

### 1.3.3. Ecuación de Conservación de Energía

La ley de la conservación de la energía constituye el primer principio de la termodinámica y afirma que la cantidad total de energía en cualquier sistema aislado (sin interacción con ningún otro sistema) permanece invariable con el tiempo, aunque dicha energía puede transformarse en otra forma de energía.

En los sistemas termodinámicos, una consecuencia de esta ley es la llamada primera ley de la termodinámica, la cual establece que, al suministrar una determinada cantidad de energía térmica ( $Q$ ) a un sistema, esta cantidad de energía será igual a la diferencia del incremento de la energía interna del sistema ( $\nabla U$ ) menos el trabajo ( $W$ ) efectuado por el sistema sobre sus alrededores. En su forma matemática se puede escribir para cualquier volumen de control:

$$\nabla U = Q - W \quad (1.3)$$

[9]

### 1.3.4. El modelo de gas ideal

El modelo de gas ideal se refiere a un gas hipotético que realiza una simplificación de los gases reales y considera que:

- Formado por partículas puntuales sin efectos electromagnéticos.
- Las colisiones tanto entre las moléculas, como las moléculas y las paredes es de tipo elástica, es decir, se conserva el momento y la energía cinética.
- La energía cinética es directamente proporcional a la temperatura.
- Un gas monoatómico ajusta bien al modelo de gas ideal cuando está a presión y temperatura ambiente ( $p = 1 \text{ atm}$  y  $T = 273 \text{ K}$ ).

Este modelo se aplica a gases con temperaturas cercanas a la temperatura ambiente y presiones cercanas a la presión atmosférica, esta ley de los gases ideales se expresa como:

$$pV = nRT \quad (1.4)$$

Donde  $p$  es la presión del gas,  $V$  es el volumen que ocupa,  $T$  es su temperatura,  $R$  es la constante particular del gas ideal, y  $n$  es el número de moles del gas. [9]

## 1.4. Régimen fluido-dinámico

En el estudio de los flujos de los gases estos se pueden dividir respecto al grado de rarefacción, que es un proceso en el cual una sustancia se hace menos denso, y para ello se determina un número adimensional llamado *número de Knudsen*. Este se define como  $Kn = \lambda/L$  siendo  $\lambda$  el camino promedio recorrido por las moléculas antes de realizar una colisión y  $L$  una longitud característica del problema. Dado que  $L$  es arbitraria, se suele definir al  $Kn$  de dos maneras. La primera se realiza utilizando una distancia característica local basada en la densidad del gas  $L = (\rho(dp/dx))$ . La definición alternativa se obtiene utilizando como distancia característica el tamaño de la celda.

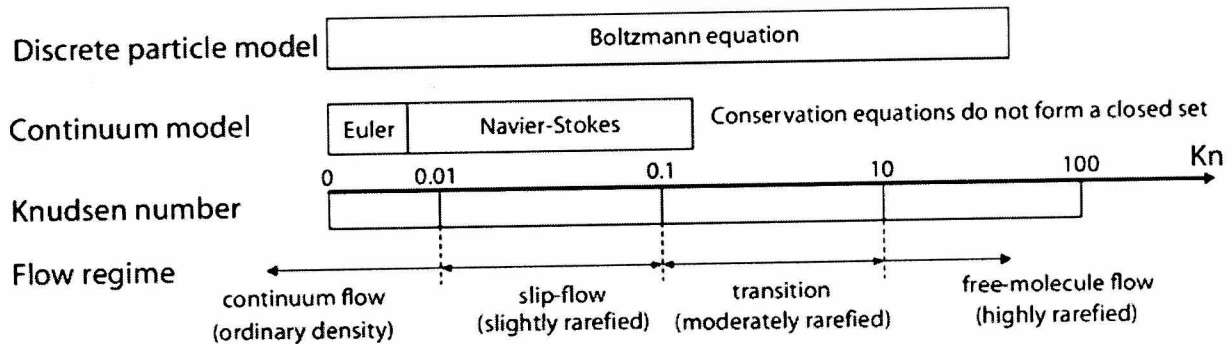


Figura 1.2: Regímenes de flujo en términos de número de Knudsen y ecuaciones gobernantes. [11]

En la figura 1.2, un  $Kn < 0,01$  implica que las moléculas viajan solo una pequeña distancia con respecto a la longitud característica antes de interactuar con otras. Este flujo puede ser descrito como continuo, y en este régimen las moléculas rara vez chocan contra las paredes y el flujo está dominado por colisiones intra-moleculares. En este rango las ecuaciones de *Navier-Stokes* ( $N-S$ ) son válidas.

Por otro lado, el rango con  $Kn$  entre 0,01 y 10 es llamado régimen de transición y no puede ser descrito con el modelo continuo. (La validez de  $N-S$  con condiciones de borde de deslizamiento llega aproximadamente a  $Kn = 1$ ). Más precisamente, las ecuaciones para el esfuerzo cortante y la transferencia de calor, que dependen de magnitudes derivadas como la velocidad y la temperatura, no pueden ser usadas.

Por último, los gases con  $Kn > 10$  se llaman flujos moleculares y las moléculas solo interactúan con las paredes, ya que ocurren pocas colisiones entre ellas. El modelo físico a utilizar, y los métodos numéricos junto a sus aproximaciones, dependen del régimen en el que se encuentre el sistema. [9]

Teniendo en cuenta estos rangos, se asume que las simulaciones que se realizarán estarán dentro del régimen continuo, teniendo en cuenta ciertas hipótesis descriptas a continuación.

### 1.4.1. Hipótesis del continuo

Los fluidos están compuestos por moléculas, que están separadas por espacio vacío. Si tomamos un *volumen de control*  $vc$ , que posee en su interior  $N$  moléculas de una misma especie y cuya masa es  $M_i$ , a medida que reducimos  $vc$  la masa dentro del volumen  $N M_i$  puede permanecer constante si la reducción corresponde a espacio vacío o cambiar abruptamente a medida que  $N$  es reducido por uno. Por lo tanto, a medida que el volumen de control se acerca a la escala molecular, la densidad experimenta fluctuaciones.

Por otro lado, la descripción matemática de las propiedades de los fluidos, como la densidad, asume una aproximación suave a las propiedades a medida que  $vc$  se reduce. Como se observa en la figura 1.3.

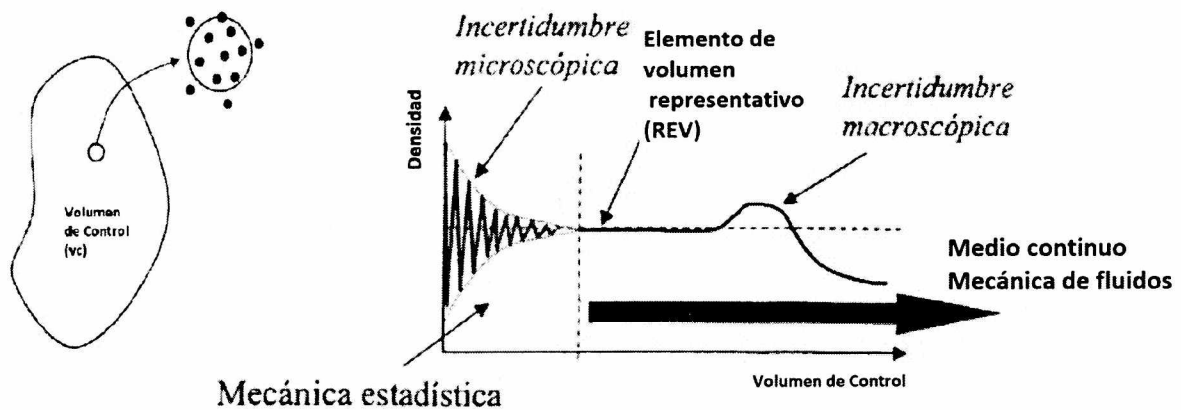


Figura 1.3: Hipotesis del continuo, variación de la densidad con respecto al tamaño del volumen de control. [12]

El principio de la mecánica de fluidos está basado, en el hecho de que varios procesos físicos pueden ser modelados matemáticamente asumiendo que el fluido existe como un continuo, que se distribuye uniformemente y completa el espacio que ocupa. La hipótesis se olvida de la estructura heterogénea de los átomos y permite una aproximación a propiedades físicas a un nivel infinitesimal. Esto permite evaluar las propiedades en un nivel macroscópico definido por un *Elemento de Volumen Representativo (REV)*.

Entonces, el volumen es pequeño como para resolver variaciones espaciales pero lo suficientemente grande como para obviar las oscilaciones por espacio intermolecular. Una vez que está definido el *REV* la actividad bajo una escala menor es eliminada y el *REV* tiene propiedades homogéneas. Esta teoría postula que el promedio de cada propiedad tiende a un límite cuando el volumen de control tiende a cero, siempre y cuando el límite sea alcanzado antes que la actividad molecular aparezca. [13] [14]

### 1.4.2. Ecuaciones de Navier-Stokes

Las ecuaciones de Navier-Stokes, en dinámica de fluidos, describen el movimiento tridimensional de sustancias fluidas viscosas. Con su resolución se obtienen campos de velocidades y de presiones para el flujo. Si a un gas levemente enrarecido con un número de Knunsen de entre  $0.01 < Kn < 0.1$ , se le aplica el modelo del continuo en un volumen de control, estas ecuaciones serían:

$$\begin{cases} \frac{d\rho}{dt} + \rho \frac{\partial u_i}{\partial x_i} = 0 \\ \rho \frac{du_i}{dt} + \frac{\partial p}{\partial x_i} + \frac{\partial \tau_{ij}}{\partial x_j} = 0 \\ \rho \frac{de}{dt} + p \frac{\partial u_i}{\partial x_i} + \tau_{ij} \frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial q_i}{\partial x_i} = 0 \end{cases} \quad (1.5)$$

Siendo  $\rho$  la densidad,  $p$  la presión,  $\tau_{ij}$  la componente  $ij$  del tensor de esfuerzos,  $x$  una coordenada espacial,  $e$  la energía por unidad de masa,  $\partial q_i / \partial x_i$  representa una fuente volumétrica y  $u_i$  representa la velocidad en dirección  $i$ . La expresión de conservación de momento lineal se realiza en tres direcciones, por lo tanto, el recuento total de ecuaciones es cinco. [14]

De la ecuación 1.5 se tiene que las variables  $\rho$ ,  $p$ ,  $u_i, q_i$  y  $\tau_{ij}$  son desconocidas e independientes entre sí, en un principio; ya que estas deben relacionarse de alguna manera para formar un conjunto cerrado.

El modelo del continuo afronta este problema adoptando relaciones entre las tensiones y las deformaciones, el gradiente de temperatura y la transferencia de calor. Esto permite cerrar el conjunto de ecuaciones. [13] [14]

### 1.4.3. Condiciones de Contorno

La solución de un sistema de ecuaciones diferenciales queda determinada por las condiciones de contorno. En el modelo continuo se suelen utilizar condiciones de borde de no-deslizamiento o de deslizamiento, esto implicaría de cierta forma igualar o no la componente tangencial de la velocidad del gas con la de la superficie sólida.

Desde el punto de vista de la teoría cinética de gases es posible derivar una velocidad de deslizamiento cerca de la pared, cuya magnitud resulta proporcional al camino libre medio  $\lambda$ , que ante condiciones ordinarias es despreciable.

Las características de la condición de contorno de deslizamiento son:

- Permiten que ocurra un salto de temperatura y de velocidad en la pared, la cual es la primera manifestación de que el flujo está enrarecido.
- Hasta Kn del orden de uno, el comportamiento puede ser tratado a través de las ecuaciones de N-S con condiciones de deslizamiento.
- Aunque haya modelos teóricos más rigurosos, las ecuaciones de N-S con condiciones de deslizamiento siguen siendo utilizadas por su practicidad.

[13] [14]

#### 1.4.4. Regímenes de flujos

Los flujos pueden clasificarse de diversas maneras, puesto que una de las más importantes se refiere al nivel de turbulencia presente.

##### El número de Reynolds

De acuerdo con el nivel de turbulencia presente en el fluido, se pueden identificar los regímenes de flujo y para ello se utiliza el Número de Reynolds, que es un número adimensional que relaciona las fuerzas de inercia con las fuerzas viscosas, definiéndose de la siguiente forma:

$$Re = \frac{\rho V L}{\mu} \quad (1.6)$$

donde  $\rho$  es la densidad,  $V$  es la velocidad,  $L$  es una dimensión característica y  $\mu$  es la viscosidad dinámica. Y se puede clasificar diferentes tipos de flujos:

- **Flujo laminar:** es aquel en el que las partículas se desplazan en capas paralelas, o láminas, sin invadir el camino de las otras partículas. Con un valor del número de Reynolds aproximado  $Re < 2100$ .
- **Flujo en transición:** es una condición intermedia entre el flujo laminar y el flujo turbulento, por ejemplo en un tubo, inicialmente se produce turbulencia en la zona central del fluido donde la velocidad es mayor, pero quedan zonas de flujo laminar hacia la periferia del fluido. Con un valor del número de Reynolds aproximado de entre  $2100 < Re < 4000$ .
- **Flujo turbulento:** Este tipo de flujo se caracteriza por trayectorias circulares erráticas, semejantes a remolinos, generalmente cuando las velocidades del fluido son muy altas. Con un valor del número de Reynolds aproximado de  $Re > 4000$ .

[9]

##### El número de Mach

Otro número adimensional fundamental para el estudio de fluidos, es el número de Mach ( $M_a$ ), que indica la relación entre la velocidad de un fluido ( $V_o$ ) y la velocidad local del sonido en dicho fluido ( $a_o$ ). Se representa matemáticamente de la siguiente forma:

$$M_a = \frac{V_o}{a_o} \quad (1.7)$$

Considerando que la velocidad del sonido en aire es de 340 m/s a una temperatura de 15 °C, por lo que el número de Mach depende de algunas variables como la temperatura o presión y la densidad. Dependiendo del valor del número de Mach, el flujo se puede clasificar en:

- **Subsónico, incompresible:**  $M_a < 0.3$
- **Subsónico, compresible:**  $0.3 < M_a < 0.7$

- **Transónico, compresible:**  $0.7 < M_a < 1.2$
- **Sónico:**  $M_a = 1$
- **Supersónico, compresible:**  $1.2 < M_a < 5$
- **Hipersónico, compresible:**  $5 < M_a$

[9]

#### 1.4.5. Modelos de turbulencia

En este trabajo se analizará el fluido en régimen turbulento como se trata de un modelo complejo para la resolución de las ecuaciones se realiza un promedio de las ecuaciones de N-S, obteniendo las ecuaciones de *Reynolds-Averaged Navier-Stokes equations (RANS)*. Esto agrega variables desconocidas que, por lo tanto, deben ser modeladas en términos de cantidades conocidas. Para determinar las variables desconocidas existen diversos modelos tales como:

- **Modelo  $k - \epsilon$ :** es un modelo de turbulencia en el cual la solución de dos ecuaciones de transporte permite determinar la energía cinética turbulenta  $k$  y la tasa de disipación de energía turbulencia  $\epsilon$ . Estos valores luego se relacionan con la viscosidad turbulenta. Este método es robusto, económico y posee precisión razonable para nuestro análisis que se realiza dentro del rango turbulento. Este es un modelo empírico derivado de razonamientos fenomenológicos.
- **Modelo de Spalart-Allmaras:** resuelve una ecuación de transporte para obtener la viscosidad cinemática turbulenta. En su forma original, este es un modelo para bajo número de Reynolds requiriendo que la zona afectada por la viscosidad este correctamente descrita. A su vez, se ha demostrado el correcto desempeño de este método ante gradientes de presión adversos, a diferencia del modelo  $k - \epsilon$  que en estos casos predice esfuerzos de corte excesivos. Por último, el método de Spalart- Allmaras es el menos costoso computacionalmente de ambos, ya que solo requiere la resolución de una ecuación de transporte.

[13] [15]

## 1.5. Objetivos

El objetivo general de este proyecto integrador es analizar el comportamiento de un gas que se expande libremente en una geometría axisimétrica bidimensional en estado estacionario mediante la comparación de relaciones semi-empíricas con modelados en *Fluent*.

Los objetivos específicos para este proyecto son:

- Comparar los valores que se obtienen de los modelados en el programa *Fluent* con respecto a los valores de referencia que se obtienen de las relaciones semi-empíricas en la zona de silencio, que es donde se cumplen las condiciones de estas relaciones.
- Calcular los errores cuadráticos medios correspondientes, teniendo como fin la disminución del mismo en cada corrida al modificar un parámetro del modelado.
- Determinar para que condiciones los resultados obtenidos por las simulaciones con *Fluent* son equivalentes a los del modelo semi-empírico de referencia.
- Utilizar el programa *ANSYS Fluent* para la resolución de problemas fluido dinámicos más complejos mediante simulaciones.

## Modelo semi-empírico

En este capítulo nos enfocaremos en los principios físicos generales, los cuales caracterizan un jet libre subexpandido, para ello se propone un modelo semi-empírico que predice de forma cuantitativa este fenómeno.

Teniendo en cuenta lo mencionado en el capítulo anterior, el análisis se hace en el régimen del continuo con un fluido compresible en un flujo turbulento en estado estacionario.

### 2.1. Jet libre subexpandido

El jet o chorro expandido ocurre cuando un gas que se encuentra en una cámara a una presión de estancamiento o de remanso ( $p_o$ ) y sale de este dispositivo por medio de una boquilla u orificio, a una presión de salida ( $p_e$ ) a otra cámara con una presión de descarga ( $p_b$ ), como se muestra por ejemplo en la figura 2.1, la variación de las presiones para obtener distintos tipos de flujos. Este comportamiento se puede presentar tanto en toberas convergentes como en convergentes-divergentes.

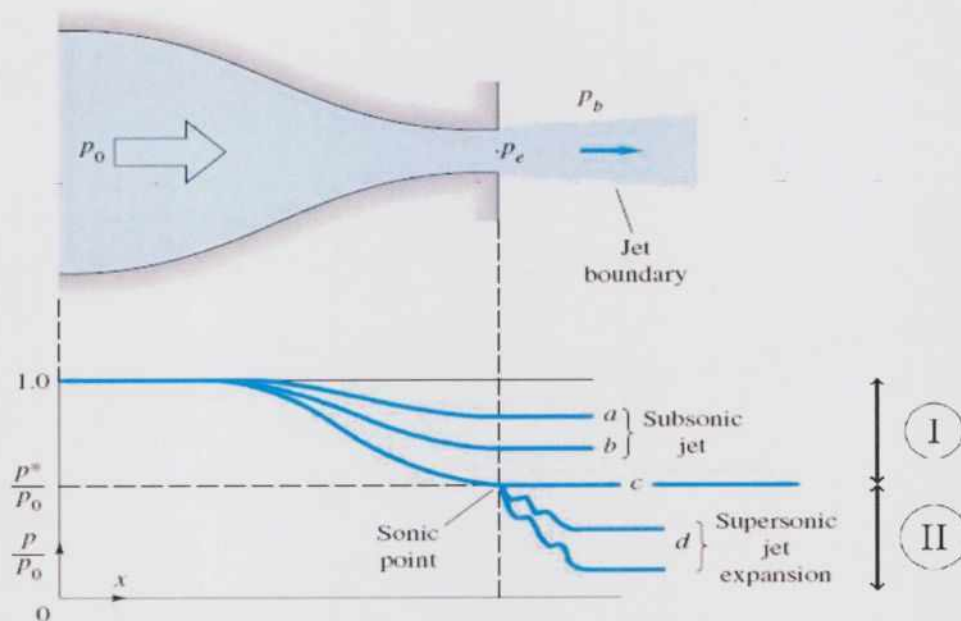


Figura 2.1: Evolución de la presión longitudinal en una tobera convergente para distintas relaciones de presiones. [9]

En una tobera convergente (figura 2.1) se pueden encontrar dos situaciones principales, de-

pendiendo de la presión de estancamiento ( $p_o$ ) y la presión de descarga ( $p_b$ ), con diferentes evoluciones de la presión dentro del dispositivo, esto se puede observar en el gráfico de las relaciones de presiones respecto la distancia de la figura 2.1.

El primer régimen (I) corresponde al caso subsónico, donde la presión de salida es igual a la presión de descarga y el caudal másico aumenta con la presión de estancamiento (casos a y b). Al inicio del segundo régimen (II), se alcanza el estado crítico ( $M_a = 1$ ) donde el flujo se vuelve sónico (caso c) en la boquilla y ahora esta queda choqueada (*Choked*). Es decir, la presión de salida es igual a la presión crítica y el flujo másico es máximo.

Por esta razón, el flujo ahora depende principalmente de las condiciones de estancamiento y de descarga. Por debajo del estado crítico, todas las variables tienen el mismo comportamiento dentro de la boquilla (caso d) pero la presión de salida ahora es mayor que la presión de descarga: el equilibrio de presión se producirá fuera del dispositivo y, por lo tanto, da lugar a un chorro subexpandido. [9]

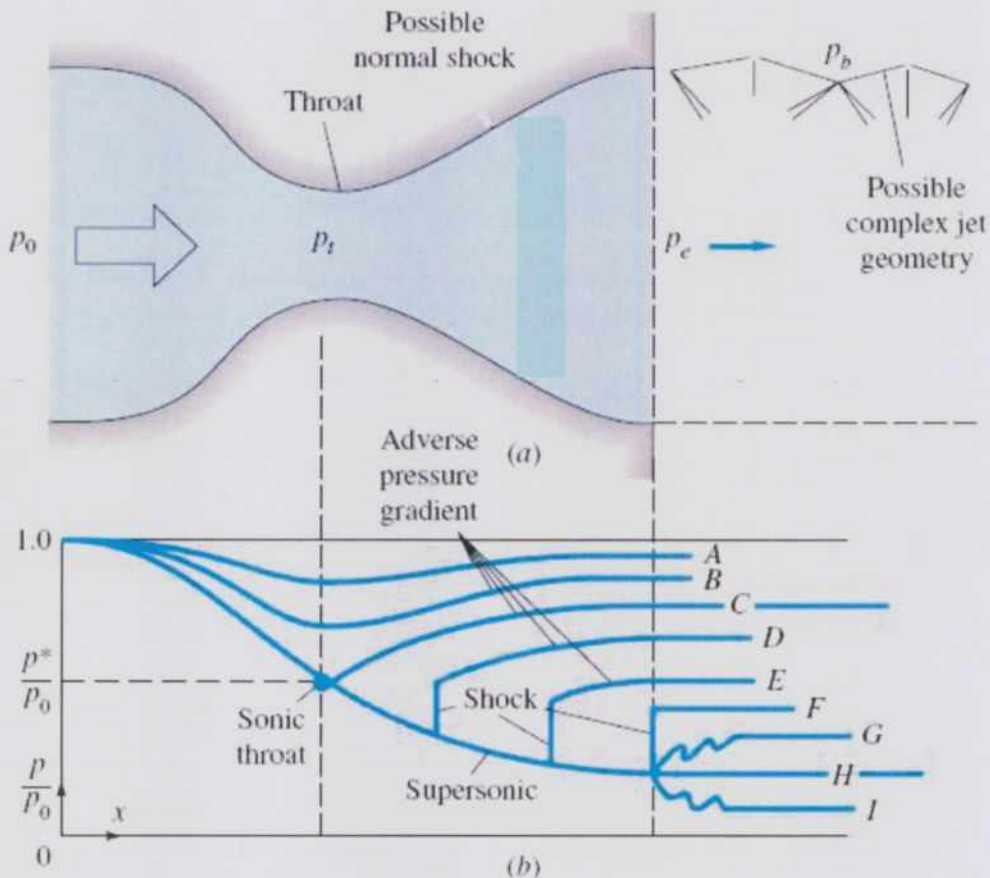


Figura 2.2: Evolución de la presión longitudinal en una tobera convergente-divergente para distintas relaciones de presiones. [9]

La tobera convergente-divergente o tobera De Laval, es un dispositivo usado para acelerar un fluido hasta velocidades supersónicas ( $M_a > 1$ ), esto por medio de la conversión de la presión y energía térmica en energía cinética. En la figura 2.2 se esquematiza una tobera convergente-divergente.

En la sección convergente, el fluido puede ser acelerado hasta el régimen sónico ( $M_a = 1$ ), lo cual ocurre en la garganta, donde el flujo másico es máximo, de forma análoga al caso c de la tobera convergente. Sucesivamente, el fluido continúa acelerándose en la sección divergente hasta alcanzar el régimen supersónico para el cual fue diseñada la tobera. Sin embargo, el solo hecho de contar con una tobera convergente – divergente no asegura que el régimen supersónico será alcanzado en el plano de salida. Es posible que el fluido se desacelere en la sección divergente si la contrapresión a la salida no se encuentra en el rango adecuado. [10]

## 2.2. Estructura del jet libre subexpandido

Como en este trabajo nos enfocaremos en la expansión libre, evaluando cuantitativamente la evolución externa del campo de flujos que sale de una tobera convergente, en el régimen II en el caso d, ya que se cumpliría la condición de jet libre subexpandido en estado supersónico y en estado estacionario donde el comportamiento del fluido presenta efectos compresibles que imponen la estructura general del chorro.

Franquet, Perrier, Gibout y Pascal Bruel (2015) demostraron que los principales parámetros que gobiernan el fenómeno incluye al patrón inicial del chorro (que depende de la relación de la presión de estancamiento ( $p_o$ ) y la presión de descarga ( $p_b$ )), la fase de la expansión en la sección de salida, el número de Reynolds del chorro ( $R_e$ ) y el ángulo de impacto. Mientras que los primeros parámetros se discutirán a continuación, el efecto del ángulo de impacto en el flujo está fuera del propósito de este trabajo y por lo tanto no se detallará.

Teniendo en cuenta estos parámetros en la estructura de un jet sub expandido, tomando la suposición de [18] que en la sección de salida del jet el número de Reynolds es  $R_e > 10^4$ , donde la capa de mezcla es inicialmente turbulenta se puede distinguir tres zonas en el interior del jet:

- la zona de campo cercano
- la zona de transición
- la zona de campo lejano

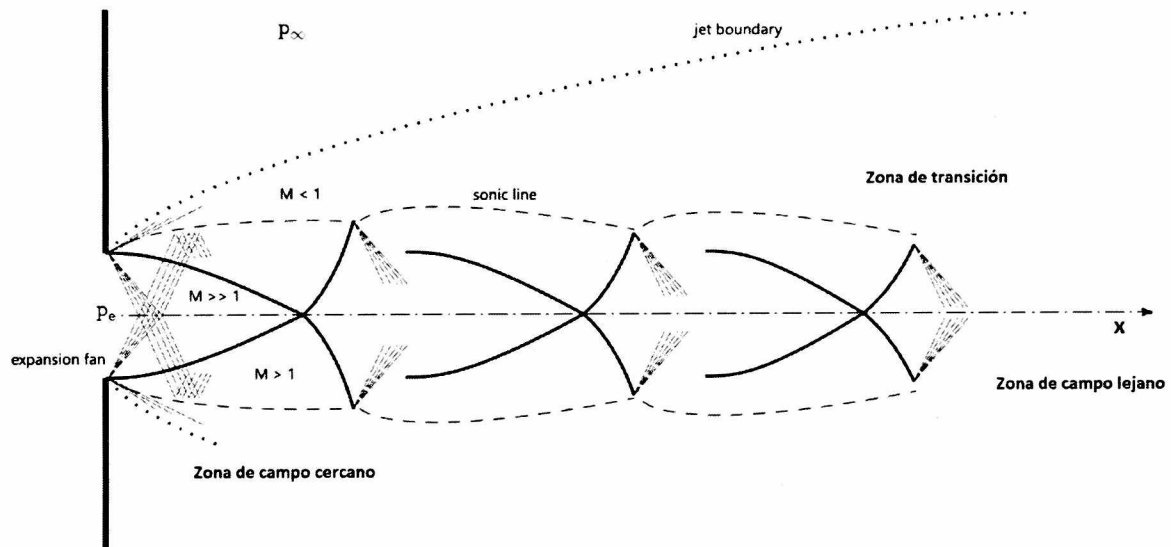


Figura 2.3: Esquema de una expansión continua de chorro libre subexpandido desde una tobera. [18]

En la figura 2.3, **la zona de campo cercano** se divide en dos partes: la parte central (región gasodinámica) y la capa de mezcla (o capa de cizalla libre). La región del núcleo está dominada por los efectos compresibles y se considera en gran medida estable. Los efectos viscosos, en cambio, se suponen generalmente no relevantes en esta zona y, por tanto, no tienen impacto en el patrón de flujo. En esta parte interior, el fluido se expande inicialmente de forma isoentrópica y luego se comprime de nuevo mediante un sistema de ondas de compresión incrustadas. Por otro lado, la capa de mezcla, es la región donde la discontinuidad en la velocidad del gas en el borde del chorro se suaviza. [18] [19]

Dependiendo de la relación de presiones de la tobera, el chorro supersónico que sale muestra diferentes patrones de choques. Una onda de choque es una onda de presión que viaja más rápido que la velocidad del sonido en el medio por el cual se propaga la onda, que a través de diversos fenómenos produce diferencias de presión externas y aumento de la temperatura. Se trata de un proceso irreversible en donde se puede pasar de un flujo supersónico a un flujo subsónico.

Cuando la fase de subexpansión es baja ( $2 \leq p_o/p_b \leq 7$ ), el chorro se asemeja a las conocidas estructuras en “diamante” o en “X”, como se muestra en la figura 2.3. En la placa de salida, el flujo debe expandirse bruscamente para adaptarse a la presión de descarga. Así, en el borde del dispositivo se genera un abanico de expansión para adaptarse al equilibrio de presiones en la Línea Sónica (SL). Las ondas de expansión se expanden hacia el eje del chorro, donde se reflejan. [18]

A continuación, el flujo se ve obligado a atravesar de nuevo la región de expansión, alcanzando así una presión inferior a la de descarga. Sin embargo, dado que el equilibrio de presiones debe garantizarse siempre en la frontera, las ondas de expansión se reflejan, esta vez en la SL, en forma de ondas de compresión, que acaban uniéndose para formar un choque oblicuo que se conoce generalmente como choque de barril o choque interceptor. [19]

A su vez, alcanza el eje y se refleja hacia el “*Jet Boundary*” (*JB*), formando un nuevo choque oblicuo denominado en este caso choque reflejado, que posteriormente, los flujos vuelven a comprimirse al pasar por el choque de barril. Finalmente, para equilibrar de nuevo el repentino aumento de presión, el flujo sufre de nuevo un proceso de expansión, replicando entonces la estructura. Este patrón continúa hasta que las fuerzas viscosas predominan suficientemente lejos del plano de salida de la tobera. [18]

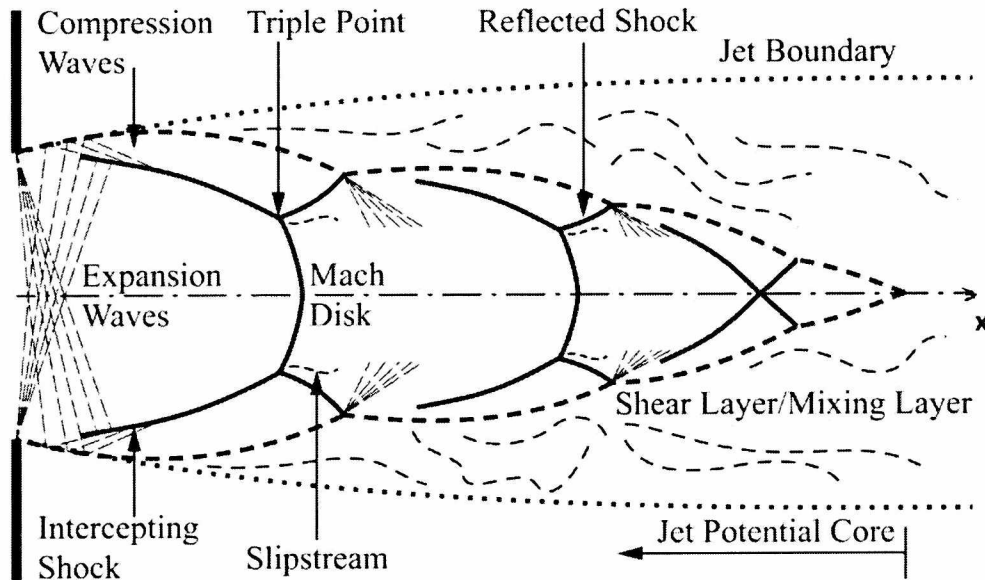


Figura 2.4: Estructura de un chorro muy subexpandido. [18]

Otro caso, a medida que aumenta la relación de presiones ( $p_o/p_b \leq 7$ ), (ver figura 2.4), el reflejo regular del choque interceptor en el eje ya no puede producirse. Esto se debe a la fuerte expansión del chorro, que provoca que la presión a lo largo del eje sea demasiado baja con respecto a la de la descarga. En su lugar, la fuerte compresión necesaria tiene lugar a través de un disco de choque normal o disco de Mach. La reflexión del choque interceptor se produce en el borde del disco de Mach, en correspondencia del punto en el que se encuentran los tres choques (interceptor, reflejado y disco de Mach), que se denomina punto triple. [18]

Si la relación de presiones es mucho mayor al valor  $p_o/p_b = 7$ , el campo de flujo se ve dominado por la presencia del disco de Mach, que se encuentra en el centro del chorro y ha crecido tanto en fuerza como en diámetro para evitar la formación de otros choques normales.

Como se muestra en la figura 2.4, el flujo aguas abajo del disco de Mach es necesariamente subsónico y decae a través de una serie de choques oblicuos a pesar de que tales estructuras están distorsionadas por las inestabilidades del flujo. La capa de mezcla crece durante su desarrollo aguas abajo debido a los efectos viscosos, difundiéndose gradualmente hacia el interior y, por tanto, reduciendo la energía de la región del núcleo.

De igual forma, la capa de mezcla sustituye por completo a la parte interior. Cuando la línea

sónica alcanza el eje, se dice que es el comienzo de **la zona de transición**, donde las variaciones de las características del campo de flujo son pequeñas, tanto axial como radialmente, y el campo de flujo se caracteriza principalmente por la turbulencia. Aquí, la difusión radial es responsable de que el campo de presión sea homogéneo, ya que el arrastre de fluido desde el campo externo tiene lugar en todas partes. [19]

Por último, en **la zona del campo lejano**, el flujo está idealmente expandido y sus características (presión media, velocidad y temperatura) son autosimilares, es decir, la zona de interés está lo suficientemente lejos aguas abajo como para que la velocidad y el esfuerzo cortante sean función de un parámetro de similitud. [19]

En este caso, se considera que el flujo está completamente desarrollado. En este caso, puede obtenerse información útil sin resolver las ecuaciones de movimiento. De todas formas, los efectos compresibles pueden estar todavía presentes, ya que el número de Mach podría ser superior a 0,3. Además, esta zona no depende de la estructura de los flujos cercanos, por lo que no es importante disponer de una descripción detallada de cómo llegó el fluido al estado que tiene en la zona del campo lejano. [18]

### 2.3. Expansión libre supersónica axisimétrica

Haciendo énfasis en la zona de campo cercano, en donde el fluido que ingresa a una cámara de baja presión  $p_b$ , desde una cámara estanca de alta presión  $p_0$ , por medio de un orificio de diámetro  $D$ , el fluido se expande dentro de la cámara de baja presión y se forma una estructura de expansión libre donde las ondas de choque producidas características dan lugar a la formación de elevados gradientes transversales al flujo principal de las variables involucradas, tales como presión, temperatura, densidad y velocidad; como se muestra en la figura 2.5.

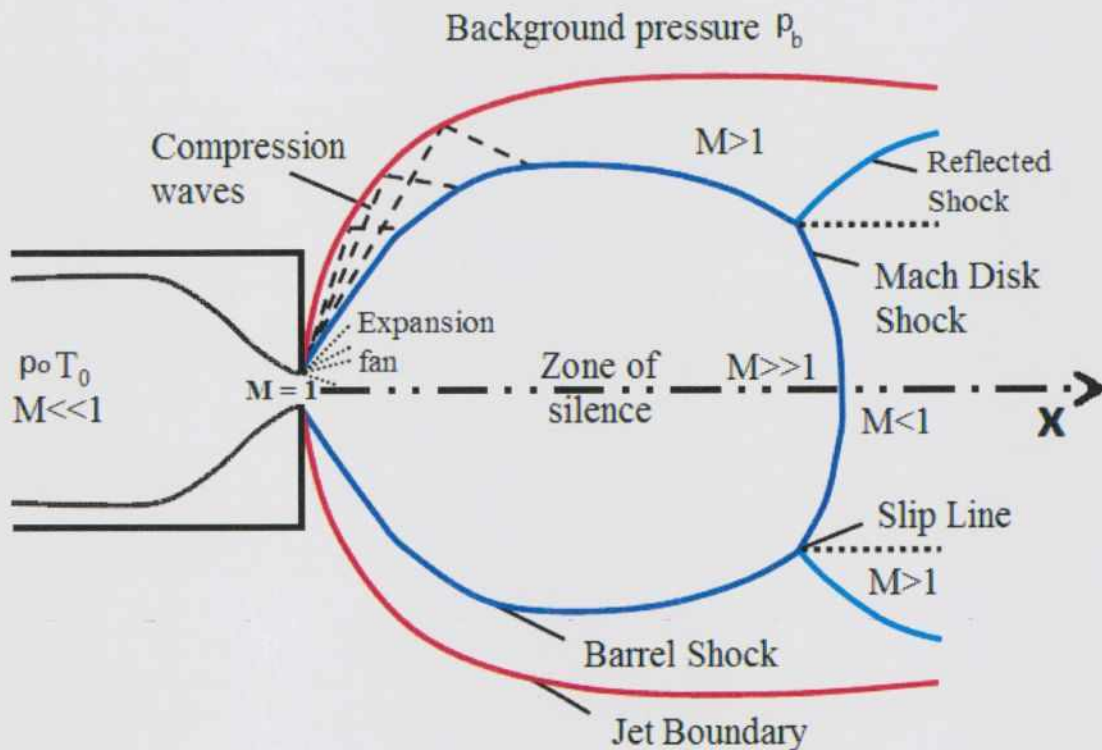


Figura 2.5: Esquema de una expansión continua de chorro libre desde una tobera, el gas se transporta desde una cámara de alta presión hacia la cámara de descarga de baja presión.

Como las ecuaciones que describen este fenómeno tienen un alto grado de complejidad, se utilizaron las relaciones semi-empíricas presentadas por los autores Giovanni Sanna y Giuseppe Tomassetti (2005). La geometría que se utilizó tiene una simetría de revolución respecto al eje central de la expansión, de tal forma que los campos vectoriales y escalares que describen al sistema fluido-dinámicamente también tienen simetría de revolución.

La figura 2.5 representa conceptualmente la entrada del fluido a la cámara de descarga, en donde la relación de las presiones de entrada y salida es capaz de producir condiciones críticas en la garganta de la tobera, y cómo evoluciona el fluido con estas condiciones. El régimen

de expansión se vuelve supersónico, alcanzando un número de Mach mayor a la unidad a la salida de la tobera. El mismo continúa aumentando rápidamente al transicionar de un flujo interno a un flujo libre conforme se va expandiendo. Tiene lugar la formación de las estructuras características en el estacionario.

Adicionalmente, rodeando el eje de simetría se forma una zona de ondas de choques oblicuas que se suele llamar choque de barril, *Barrel Shock*, y el disco de Mach (onda de choque normal estacionaria) enfrentados, como se observa en la figura 2.5. La zona intermedia, dentro del barril y antes del disco de Mach se denominada **zona de silencio**, allí la expansión puede considerarse adiabática y es el área en donde se realiza el análisis. Esto se debe a que la fricción lejos de las paredes es pequeña (exceptuando irreversibilidades localizadas debidas a la viscosidad del fluido).

Luego del proceso de compresión, se da un nuevo proceso de expansión concatenado al anterior que se replica cíclicamente, dando forma a estructuras de celdas de tamaño decreciente, se las denomina celdas de Mach (*Mach cells*). [16]

### 2.3.1. Zona de silencio

En la estructura de expansión libre que se esquematiza en la figura 2.6, en la posición axial:  $X_B$  a la distancia de la boquilla al diámetro máximo del barril y  $X_M$  a la distancia de la boquilla al disco de mach. En la posición radial:  $D$  el diámetro de la boquilla,  $D_B$  es el diámetro máximo del barril y  $D_M$  es el diámetro del disco de mach.

Las dimensiones y posiciones del disco de Mach han sido analizadas de forma semi-empíricas por varios investigadores como función de la razón entre las presiones, de la cámara de alta y baja,  $p_o/p_b$  para diversos gases. [16]

La posición del disco de Mach ( $X_M$ ), adimensionalizada con el diámetro de la boquilla  $D$  de la tobera propuesta por los autores [16], resulta ser independiente de  $\gamma$  y válida para  $15 \leq p_o/p_b \leq 17000$ , como se muestra en la ecuación 2.1 (siendo  $\gamma$ , el coeficiente de expansión adiabática del gas o mezcla de gases que es igual al cociente del  $C_p$  y  $C_v$  del gas, calculados con la proporción molar de cada especie y calores específicos individuales de los componentes del gas que se analiza).

$$\frac{X_M}{D} = 0.67(p_o/p_b)^{0.5} \quad (2.1)$$

Para el diámetro del disco de Mach  $D_M$  que se proponen en la bibliografía [16] se calcula con las siguientes ecuaciones:

$$D_M = 0.42X_M \quad \text{para} \quad p_o/p_b \geq 20 \quad (2.2)$$

$$D_M = 0.48X_M \quad \text{para} \quad p_o/p_b \geq 1000 \quad (2.3)$$

Con las expresiones para el diámetro máximo del barril y su respectiva posición axial.

$$X_B = 0.63X_M \quad (2.4)$$

[16]

donde  $X_B$  es la posición axial donde se encuentra el diámetro máximo del barril.

$$1.19 \leq D_B \leq 1.26D_M \quad (2.5)$$

[16]

donde  $D_B$  es el diámetro máximo del barril. Los valores exactos de  $D_M$  y  $D_B$  dependen de  $\gamma$  y  $p_o/p_b$ . Antes de alcanzar al disco de Mach en la primera de las celdas de expansión libre, dentro de la **zona de silencio** (figura 2.6). [16]

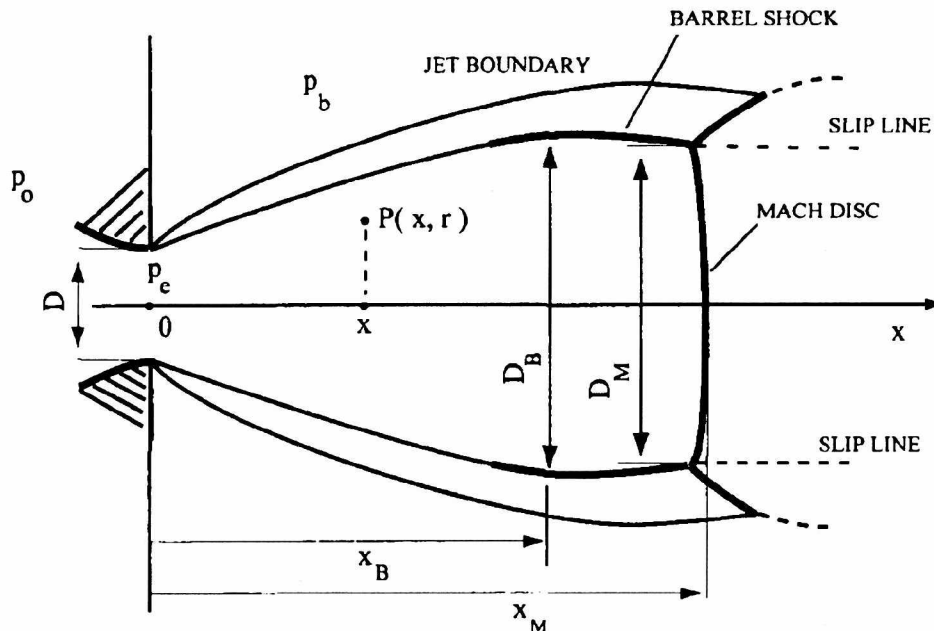


Figura 2.6: Detalles estructurales de un chorro libre axisimétrico subexpandido emitido de una tobera convergente. El chorro tiene simetría de revolución alrededor del eje x. El diámetro máximo del barril  $D_B$ , el diámetro del disco de Mach  $D_M$ , y sus coordenadas axiales  $X_B$  y  $X_M$ . [16]

Siendo el régimen de flujo compresible, los campos de densidad y temperatura se vuelven incógnitas del problema fluido-dinámico. Es necesario resolver en forma simultánea la conservación del momento lineal (Navier-Stokes) y la transferencia de energía. Basados en el acople de Navier-Stokes y difusión del calor, se resuelve entonces la transferencia de masa. La solución del problema fluido dinámico se obtiene encontrando  $\vec{V}(\vec{x})$ ,  $T(\vec{x})$ ,  $p(\vec{x})$  y  $\rho(\vec{x})$ .

Dado que el número de mach ( $M_a$ ), es un parámetro importante para el estudio de problemas de gases a altas velocidades en donde se producen cambios significativos en la presión, densidad y temperatura, y por medio de este parámetro caracterizar el fluido; por esta razón las variaciones de las propiedades termodinámicas quedan explícitamente en relación con el número de mach. [17]

El número de Mach sobre el eje de simetría de la geometría solo depende de la posición adimensionalizada con el diámetro  $D$  de la boquilla de la tobera y del coeficiente de expansión adiabática  $\gamma$ . Conociendo el número de Mach en el eje de simetría de la expansión, en la parte central de la **zona de silencio**, y considerando que allí la expansión es adiabática, es posible obtener los valores de las variables termodinámicas como la presión, densidad, temperatura a partir de las condiciones de estancamiento. [17]

Los autores H. Ashkenas y C.K. Sherman (1964), hicieron una caracterización cuantitativa de un chorro libre, usando como hipótesis que el flujo en la sección de salida de la tobera es uniforme y ligeramente supersónico, por lo que es posible determinar el campo de flujo y la posición del límite del chorro, el barril y los choques de Mach. Dentro de la **zona de silencio**, debido al flujo isoentrópico, se puede obtener los valores locales de las variables  $\rho$ ,  $T$  y  $p$  conociendo la función  $M_a(x, r)$ .

Por esta razón, en las ecuaciones 2.6, 2.7 y 2.8, propuesta por el libro [16], se detalla cómo se relacionan estas variables con las condiciones de estancamiento y con el número de Mach:

$$T(x) = \frac{T_0}{\left(1 + \frac{\gamma-1}{2} M_a(x)^2\right)} \quad (2.6)$$

$$p(x) = \frac{p_0}{\left(1 + \frac{\gamma-1}{2} M_a(x)^2\right)^{\frac{\gamma}{\gamma-1}}} \quad (2.7)$$

$$\rho(x) = \frac{\rho_0}{\left(1 + \frac{\gamma-1}{2} M_a(x)^2\right)^{\frac{1}{\gamma-1}}} \quad (2.8)$$

Un estudio de estas soluciones muestran las siguientes características:

- Dentro de la **zona de silencio**, la línea de corriente parece irradiar desde una “fuente de simetría cilíndrica” situada en un punto del eje axial a una distancia  $x_0$  de la sección de salida de la tobera (véase la figura 2.7). La densidad  $\rho$  disminuye a lo largo de cada línea de flujo en proporción al cuadrado inverso de la distancia  $R$  de la fuente
- Un ajuste de la variación del número de Mach en función de la distancia  $x$  a la tobera se puede obtener mediante la siguiente ecuación:

$$M_a = A \left( \frac{x - x_0}{D} \right)^{\gamma-1} - \frac{1}{2} \frac{\left( \frac{\gamma+1}{\gamma-1} \right)}{A \left( \frac{x-x_0}{D} \right)^{\gamma-1}} \quad (2.9)$$



Para encontrar los valores de las variables  $\rho$ ,  $p$  y  $T$  en un punto  $(x, r)$  fuera del eje axial, se calcula  $M_a(x, 0)$  en el eje de simetría con la ecuación 2.9, y con ello podemos calcular  $T(x, 0)$ ,  $\rho(x, 0)$  y  $p(x, 0)$ , mediante las ecuaciones 2.6, 2.7 y 2.8.

Entonces, podemos calcular  $\rho(x, r)$  mediante la ecuación 2.12 y, una vez conocida la relación  $\rho(x, r)/\rho_0$ , podemos obtener  $M_a(x, r)$ . Por último, utilizando las ecuaciones 2.6 y 2.7 deducimos  $T(x, r)$  y  $p(x, r)$ .

## 2.4. Aplicación del modelo semi-empírico

Teniendo en cuenta lo planteado anteriormente y se utilizó una geometría axisimétrica bidimensional rectangular con el gas de estudio aire en estado estacionario, para poder realizar los cálculos correspondientes, se implementó un script en *MATLAB* con el que se calculó las relaciones de las ecuaciones 2.6, 2.7, 2.8 y 2.9, mediante el cual se trasladaron los coeficientes de las tablas Apéndice A.1 y A.2

Esta geometría posee de ancho 0.02 m y de alto 0.01 m, y esta región se divide para crear un mallado rectangular, con 1000000 nodos, que fueron los puntos del dominio para las ecuaciones antes mencionadas.

El gas ingresa con una presión de estancamiento  $p_o$  por un orificio de radio de 0.001 m a la geometría antes mencionada que posee una presión de descarga de  $p_b$ . Posteriormente, mediante la aplicación de la ecuación 2.9 y con los valores de las tablas del Apéndice A.1 y A.2, se calculó el número de Mach en el eje axial, que luego se utilizó para calcular los primeros valores de las variables ( $\rho$ ,  $T$  y  $p$ ) en el eje axial.

Luego, mediante la aplicación de las ecuaciones 2.10, 2.11 y 2.12, se determinaron los valores de los parámetros  $M_a(x, r)$ ,  $T(x, r)$ ,  $\rho(x, r)$  y  $p(x, r)$  en el dominio bidimensional, que posteriormente estos datos se utilizaran de referencia.

En las figuras 2.8 y 2.10 se ilustra la variación de la presión respecto al eje axial, manteniendo constante la posición radial; las relaciones de presiones fueron  $p_o/p_b = 100$  y  $p_o/p_b = 1000$ , respectivamente.

En los gráficos del número de Mach, se tomaron en consideración las condiciones antes mencionadas para el cálculo de los datos de las relaciones semi-empíricas y se delimitó la zona de silencio de forma lineal al unir con una recta, la posición de los diámetros del orificio de entrada ( $D/2$ ), diámetro máximo del barril ( $D_B$ ) y del disco de Mach ( $D_M$ ). Es en esta región en donde se realiza el análisis y se aplica las relaciones del método semi-empírico.

Esto se observa en las figuras 2.9 y 2.11, donde se ilustra la **zona de silencio** delimitada de forma lineal con la particularidad que, además se graficó el número de Mach para valores mayores a 5,5 (la condición de validez de las relaciones semi-empíricas) hasta la posición del disco de Mach y para valores del número de Mach menores a 5,5 es igual a cero.



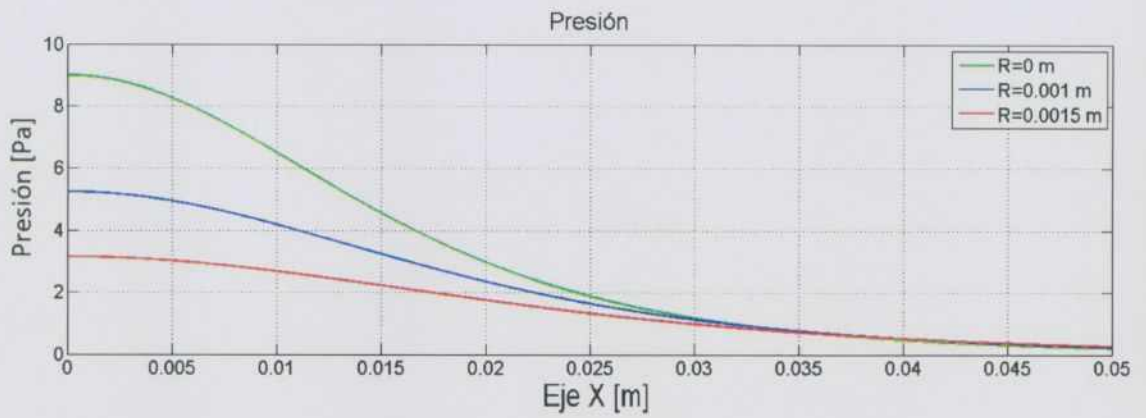


Figura 2.10: Gráfico de la presión respecto a la distancia desde el orificio de salida del aire con una relación de presiones de  $p_o/p_b = 1000$ , a distintas posiciones del eje radial.

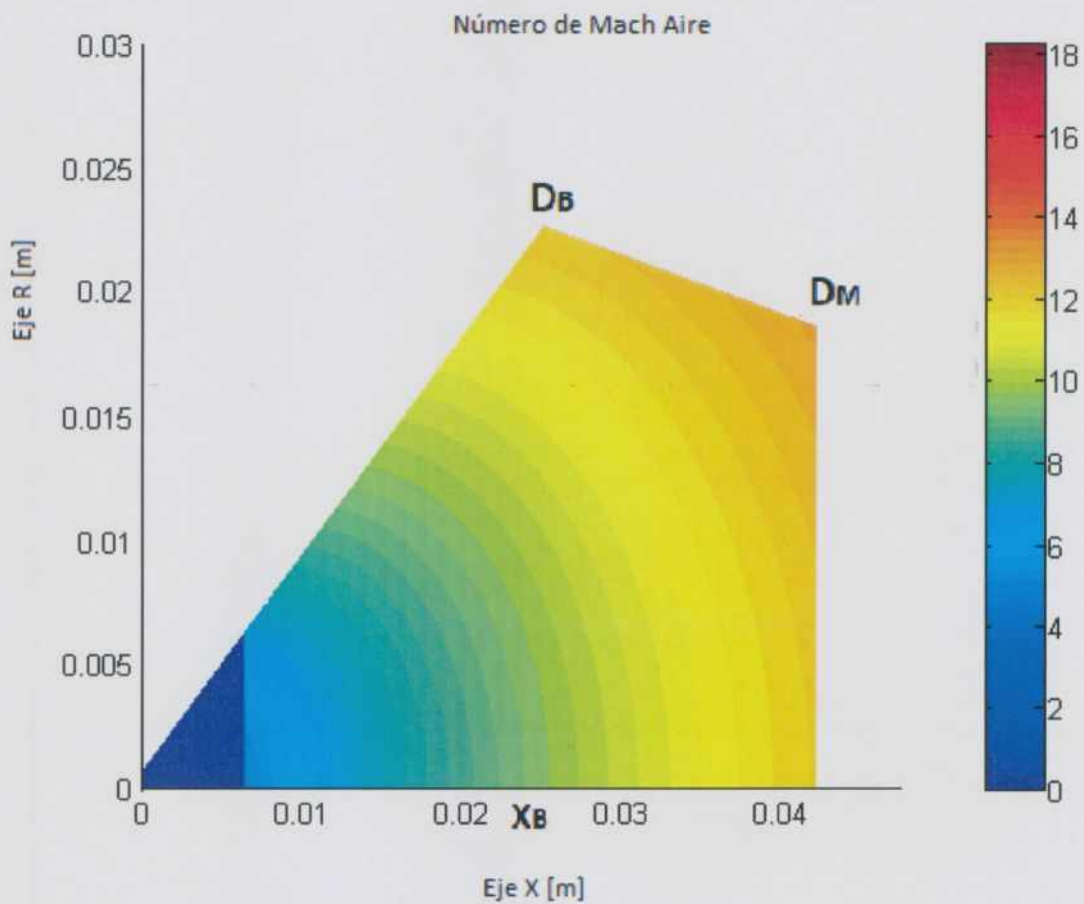


Figura 2.11: Gráfico del número de Mach con una relación de presiones de  $p_o/p_b = 1000$ .

## Resolución numérica

En este capítulo se realizaron simulaciones con el programa *Fluent*, analizando el jet libre de un gas en una geometría axisimétrica bidimensional en estado estacionario, permitiendo obtener condiciones de flujo supersónico. Los parámetros que dominan este análisis son las relaciones de presiones de entrada y salida, y el diámetro del orificio de entrada.

El programa *Fluent*, es un software que utiliza el método de volúmenes finitos en el análisis de la dinámica de fluidos y nos permite simular el flujo de un fluido en geometrías complejas. Para ellos se discretiza una región del espacio, se crea una malla y se resuelve en cada elemento de la misma las ecuaciones de conservación, obteniendo los balances de masa y energía.

Utilizando este software, se realizó un modelado de jet libre en una geometría bidimensional axisimétrica que, mediante la variación de parámetros de la simulación, (como la relación de las presiones  $p_o/p_b$ , densidad de la malla, dominio de estudio y modelos turbulentos) obtener datos para luego ser comparados con los de referencia.

La región de estudio será en la zona de campo cercano y específicamente en donde se realizará la comparación con los datos de referencia corresponde a la denominada **zona de silencio**, donde se cumplen las relaciones semi-empíricas propuestas en el capítulo anterior.

### 3.1. Método de comparación

Se realizará una comparación de los datos obtenidos de las ecuaciones 2.6, 2.7, 2.8 y 2.9 en el dominio de estudio con los obtenidos en cada ejecución del programa *Fluent*. Para esto, se eligen nueve puntos del dominio de los distintos métodos de análisis que estén dentro de la **zona de silencio** (como se definió en el capítulo anterior).

Tomando como referencia el eje axial: la distancia a la posición del ancho máximo del barril ( $X_B$ ), las regiones con número de Mach mayores a 5.5 y menores a la posición del disco de Mach ( $X_M$ ); y en el eje radial: puntos en el eje de simetría y valores menores al ancho máximo del barril ( $D_B$ ).

En la figura 3.1 se observa la distribución de estos puntos en el espacio y en la tabla 3.1 se presentan sus coordenadas para una relación de presiones de  $p_o/p_b = 100$ , que se modifican dependiendo de las relaciones de presiones que se realizaron en los casos de estudio que se presentan a continuación.

Puntos	x [m]	r [m]
1	0,0070	0,0005
2	0,0070	0,0010
3	0,0070	0,0015
4	0,0084	0,0005
5	0,0084	0,0010
6	0,0084	0,0015
7	0,0100	0,0005
8	0,0100	0,0010
9	0,0100	0,0015

Tabla 3.1: Coordenadas espaciales de los puntos que se eligieron para la comparación de los valores obtenidos, para  $p_o/p_b = 100$ .

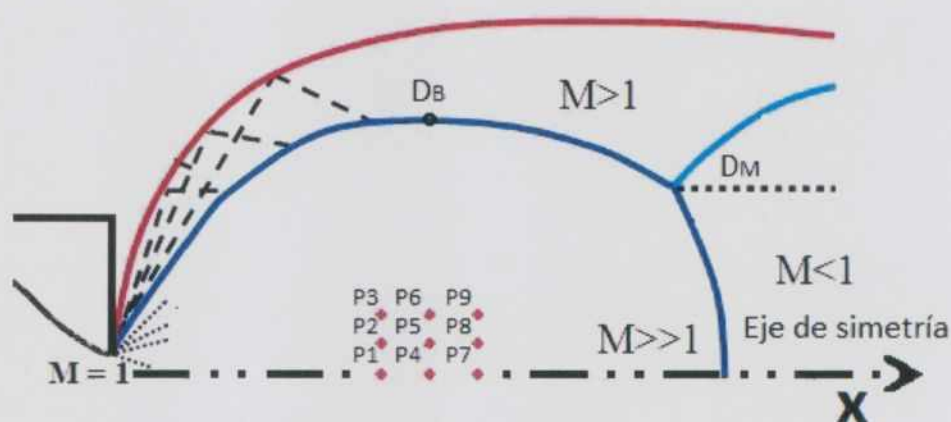


Figura 3.1: Esquema del dominio computacional de estudio con las posiciones de los puntos que se tomaron para comparar el número de Mach.

Para determinar las diferencias entre los valores de referencia y los obtenidos por el programa *Fluent* se aplicó el error cuadrático medio a un conjunto de observaciones, siendo una estimación que mide la diferencia cuadrática media entre los valores estimados (los datos calculados por *Fluent*) y los valores reales (los datos obtenidos por las relaciones semi-empíricas). Este error se presenta en las tablas de comparación de manera porcentual para cada simulación.

Para las comparaciones de los números de mach en distintos puntos del dominio se utilizó el error cuadrático porcentual y para la comparación de las relaciones de  $X_M/D$  se calculó el error relativo. Con cada variación de la simulación se tuvo como objetivo disminuir el valor del error cuadrático medio entre cada modificación que se realice en el modelado y así poder tener valores equivalentes a las relaciones semi-empíricas.

## 3.2. Modelado en Fluent

Con el programa *Fluent*, se buscó realizar simulaciones que sean comparables con las propuestas por el modelo semi-empíricas de referencia [16]. El análisis se realizó en estado estacionario para una geometría bidimensional axisimétrica designando las regiones de ingreso y salida del gas, las paredes y el eje axisimétrico.

Para ello, se creó inicialmente una figura en dos dimensiones que luego se transformó en una superficie con un plano de 0.5 mm de espesor con "Surface Body". Posteriormente, se realizó un mallado rectangular de la geometría creada, utilizando una longitud del lado de cada elemento de la malla de  $1 \times 10^{-6}$  m.

Con estos datos establecidos se configuró la forma de la resolución de las ecuaciones, en este caso se seleccionó el esquema de resolución de Pressure-Based con la formulación de velocidad absoluta. Se tomó como modelo el de energía y el modelo de turbulencia  $k - \epsilon$ .

Se eligió el modelo de gas ideal para el aire, por ser un problema de flujo compresible y como condición de entrada se impuso una presión de  $p_o = 101325$  Pa y la condición de la presión de salida de  $p_b = 1013.25$  Pa, que se modificaron dependiendo de la relación de presiones  $p_o/p_b$  que se utilizó para el análisis; a una temperatura en ambos casos de 300 K. Para el caso de las paredes se aplicó la condición de no deslizamiento, con un modelo de rugosidad estándar.

Con estas condiciones se eligió el método de resolución de acoplamiento presión-velocidad con el esquema acoplado y con una tolerancia de los residuos relativos de la solución de las ecuaciones con un valor de  $1 \times 10^{-6}$ . Inicialmente en este esquema se utilizaron un aproximado de  $1 \times 10^5$  iteraciones para la resolución de las simulaciones que luego se fue variando dependiendo del análisis y las comparaciones de los modelos.

### 3.3. Prueba 1

En la figura 3.2 se presenta la geometría bidimensional axisimétrica que se utilizó y sus dimensiones, también puede verse la zona de ingreso de gas por  $V1$  y la salida del gas por  $V2$  y  $H1$  la distancia axial desde el orificio de entrada del gas en donde se realizaron los análisis; y con color verde el eje de simetría de la simulación.

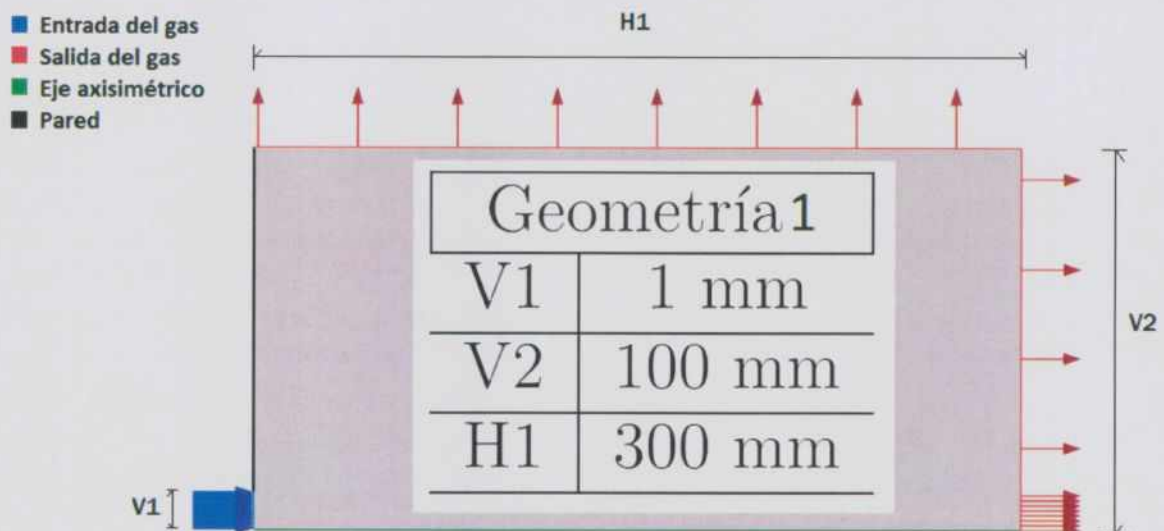


Figura 3.2: Esquema del dominio computacional y dimensiones de la geometría.

El gas ingresa por la izquierda hacia la derecha, por una boquilla de dimensión  $V1 = 1$  mm de radio desde una presión de estancamiento  $p_o = 101325$  Pa a una cámara de descarga con una presión  $p_b = 1013.25$  Pa, obteniendo una relación de presiones  $p_o/p_b = 100$ . Se mantienen las condiciones de operación de la simulación mencionadas en el modelado de *Fluent* y se desprecia el efecto de la gravedad en el fluido.

En esta prueba se fue variando la extensión del dominio computacional, es decir, la dimensión  $H1$  del modelado estos valores fueron 15 mm, 20 mm y 30 mm. Se mantuvo las mismas condiciones operativas para ver si al modificar este parámetro en cada simulación los datos calculados sufrían alguna modificación para luego compararlos con los datos de referencia.

Teniendo en cuenta que, para el análisis de la expansión libre del gas nos enfocamos en la zona de campo cercano (específicamente en la **zona de silencio**), las simulaciones deben contener por completo esta zona. Se calculó el valor del límite superior en el eje axial siendo este la distancia al disco de Mach con la ecuación 2.1 obteniendo un valor igual

$$X_M = 0.0134 \text{ m.}$$

Número de Mach				
Puntos	Referencia	$H1 = 15 \text{ mm}$	$H1 = 20 \text{ mm}$	$H1 = 30 \text{ mm}$
1	5,2183	5,5035	5,5035	5,5035
2	5,2335	5,5173	5,5173	5,5173
3	5,2785	5,5630	5,5629	5,5630
4	5,4131	5,6981	5,6981	5,6981
5	5,4264	5,7102	5,7102	5,7102
6	5,4661	5,7508	5,7508	5,7509
7	5,5985	5,8832	5,8832	5,8832
8	5,6104	5,8939	5,8939	5,8939
9	5,6457	5,9304	5,9304	5,9305
<b>Error cuadrático medio</b>	-	8.1 %	8.1 %	8.1 %

Tabla 3.2: Error porcentual del número de Mach al comparar los valores de referencia y los obtenidos por el programa *Fluent* con  $p_o/p_b = 100$ .

En la tabla 3.2 se observan los valores del número de Mach que se obtuvieron con las distintas simulaciones, en la columna de “Referencia” se presentan los resultados de las relaciones semi-empíricas del capítulo anterior y en las siguientes columnas se muestran los datos obtenidos a partir de cada corrida en *Fluent*, en donde se realizaron únicamente variaciones en la longitud de  $H1$  en el eje axial.

Número de Mach					
Puntos	Referencia	<i>Fluent</i> (N= Nodos)			
		N=451401	N=316151	N=120701	N=14342
1	5,2163	5,5391	5,5364	5,5369	5,5035
2	5,2315	5,5551	5,5521	5,5519	5,5173
3	5,2766	5,6018	5,5990	5,5971	5,5035
4	5,4131	5,7394	5,7366	5,7358	5,6981
5	5,4264	5,7536	5,7505	5,7492	5,7102
6	5,4661	5,7947	5,7919	5,7892	5,7509
7	5,6004	5,9297	5,9269	5,9250	5,8832
8	5,6122	5,9424	5,9393	5,9369	5,8937
9	5,6475	5,9788	5,9760	5,9725	5,9305
<b>Error cuadrático medio</b>	-	10.70 %	10.52 %	10.41 %	8.1 %

Tabla 3.3: Error porcentual del número de Mach al comparar los valores de referencia y los obtenidos por el programa *Fluent*, variando la densidad de la malla y con  $p_o/p_b = 100$ .

Comparando las simulaciones del *Fluent* con los valores de referencia al variar el valor de  $H1$ , se observa que el error cuadrático medio no varía y es de 8.1%. Se podría decir que mientras la simulación contenga la **zona de silencio**, la variación axial del dominio no modificaría en gran medida los datos calculados.

En esta primera simulación se aplicó una malla rectangular con una cantidad de 14000 nodos aproximadamente, (como se realiza un análisis del espacio discretizada). Posteriormente, para esta nueva simulación se tomó el valor de  $H1 = 20$  mm, se aumentó la densidad de la malla y se observó como evoluciona el error cuadrático con esa variación.

Esto lo podemos apreciar en la tabla 3.3, en donde se observa que al aumentar la cantidad de nodos, aumentaba el error de 8.1%, 10.41%, 10.52% hasta llegar a 10.7%. Este último con una cantidad de nodos de 450000 aproximadamente. Esto nos demuestra que existe un problema al momento de realizar las simulaciones, ya que al aumentar la densidad de la malla el error debería disminuir y ocurra todo lo opuesto.

Al momento de comparar las condiciones de operación de ambos modelos, tanto el de referencia como el de las simulaciones, se observó que los datos de ingreso del gas no eran los mismos, por ejemplo, no se cumplía que en el orificio de entrada el fluido se encuentre en estado sónico que era una de las condiciones que proponen los autores. Por lo que se agrega a la entrada una tobera convergente, ya que, por las características presentadas en el capítulo anterior, se obtendría un flujo en estado sónico a la salida del conducto. Con ello se realizarán una vez más las variaciones de las simulaciones y se comparan los resultados, en una segunda prueba.

### 3.4. Prueba 2

En esta segunda prueba se modifica la geometría agregando un conducto convergente, como se muestra en la figura 3.3 con sus dimensiones correspondientes. Para que con esto se cumpla, la condición es que en la entrada el fluido se encuentre en estado crítico, como se explicó en el capítulo 2.

Se agregó a la geometría ya existente un conducto cónico de radio  $V1$  y de longitud  $H1$ , que es por donde viaja el gas antes de ingresar a la cámara de descarga por el orificio de dimensión  $V3$ . Con esta modificación se esperó que las condiciones de operación fueran las correctas y se vea reflejado en la disminución del error porcentual en cada simulación.

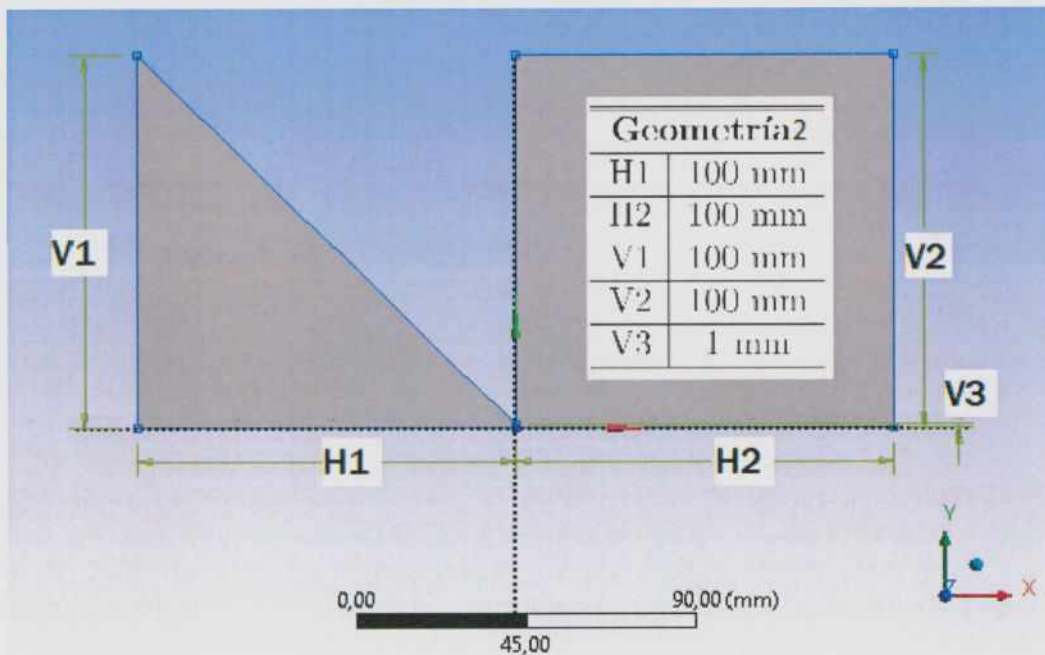


Figura 3.3: Geometría y dimensiones utilizadas en *Fluent*.

Luego se realizó el mismo procedimiento que al inicio de la Prueba 1 y se obtuvieron los datos presentados en la tabla 3.4. Aquí se compararon los datos de referencia con los obtenidos por las distintas geometrías, teniendo como Geometría 1 a la propuesta en la Prueba 1 y como Geometría 2 a la que se observa en la figura 3.3.

Número de Mach			
Puntos	Referencia	Geometría 1	Geometría 2
1	5,2315	5,5364	5,0672
2	5,2766	5,5521	5,1211
3	5,3504	5,5990	5,2089
4	5,7549	5,7366	5,5742
5	5,7872	5,7505	5,6132
6	5,8404	5,7919	5,6769
7	6,2819	5,9269	6,0906
8	6,3055	5,9393	6,1196
9	6,3445	5,9760	6,1662
<b>Error cuadrático medio</b>	-	8.1 %	2.93 %

Tabla 3.4: Comparación de los números de Mach de la referencia y de los obtenidos en *Fluent* con la geometría 1 y 2, con  $p_o/p_b = 100$ .

$p_o/p_b = 100$			
-	Referencia	Geometría 1	Geometría 2
$X_M/D$	6.70	7.24	6.89
<b>Error relativo</b>	-	-8.06 %	-2.84 %

Tabla 3.5: Comparación con los datos obtenidos de la ecuación 2.1 y de la simulación, con la relación de presiones  $p_o/p_b = 100$  de la geometría 1 y 2.

Con esta modificación los valores obtenidos del número de Mach pasaron de tener un error del 8.1 % a 2.93 %. Adicionalmente, se realizó el cálculo y la comparación de la relación  $X_M/D$  de ambas geometrías, que al ser  $X_M$  un límite de la **zona de silencio**, que es la región donde se cumplen las relaciones semi-empíricas que estamos comparando. En la tabla 3.5 se presentan estos resultados, y los errores que se calcularon fueron 8.06 % en la Geometría 1 y 2.84 % en la Geometría 2. Aproximando los valores obtenidos por el modelado con los que se calculó con las ecuaciones del capítulo 2.

### 3.5. Variación de la relación $p_o/p_b$

Utilizando la misma metodología que en la prueba 2 y haciendo uso de la misma geometría, se realizaron variaciones en las relaciones de presiones de la entrada y de la salida ( $p_o/p_b$ ) ya que al ser parámetros que influyen en gran medida en el análisis de las simulaciones tanto en los datos dentro de la zona de silencio como en el cálculo de  $X_M$ . Con esto observar como se ve modificada la zona de silencio y su estructura, al compararlos con los datos de referencia en esas mismas condiciones.

Es por ello que para las variaciones de esta relación de presiones se tomaron valores dentro del rango presiones de  $15 \leq p_o/p_b \leq 17000$ , que se presenta en el Capítulo 2, mediante el cual puede independizarse del coeficiente adiabático  $\gamma$  al calcular  $X_M$ , que es unos de los parámetros que delimitan la **zona de silencio** en donde se cumplen las relaciones semi-empíricas.

En la figura 3.4 se muestra el gráfico de los valores del número de Mach correspondientes a la relación de presiones y como cambia la estructura de la zona de silencio. En las tablas 3.6, 3.7, 3.8 y 3.9 se observa los valores de los datos obtenidos, en nueve puntos en particular, en donde se calcularon y compararon los valores del número de Mach con respecto a las corridas realizadas al variar las relaciones de presiones, y estas fueron  $p_o/p_b = 17000, 10000, 1000, 500$ .

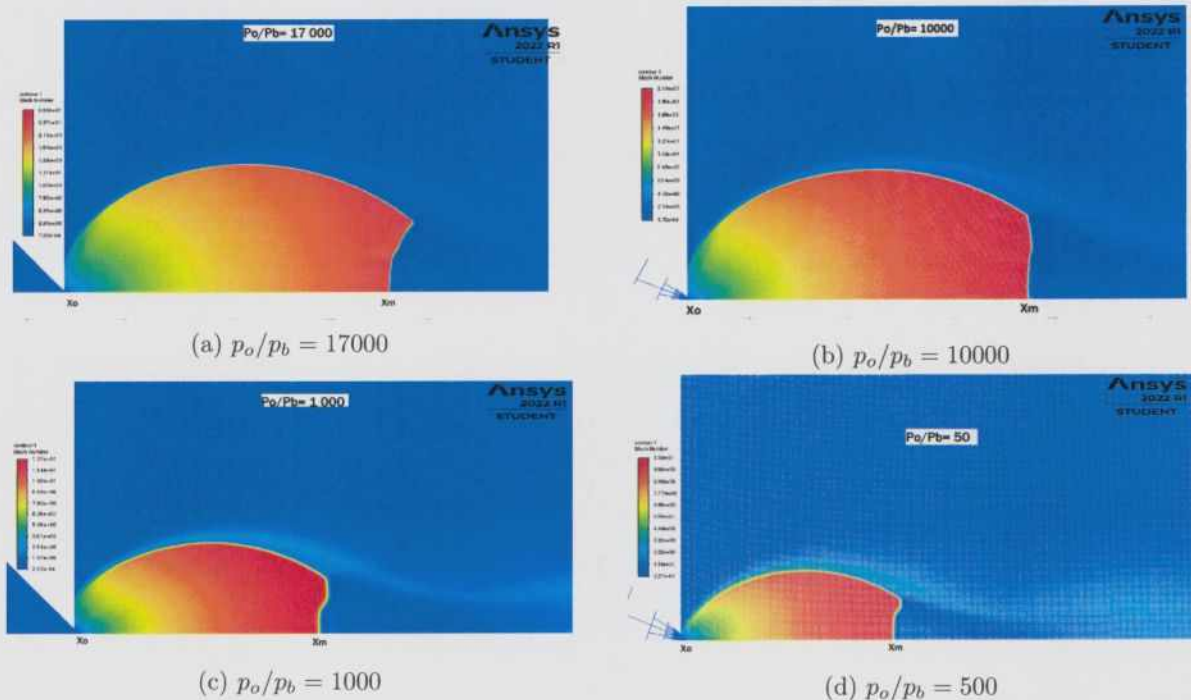


Figura 3.4: Gráficos del número de Mach del aire con variación de la relación de  $p_o/p_b$ .

Para el caso de los puntos en los que se compararon los números de Mach de cada simulación se tomó en cuenta que la **zona de silencio** varía con respecto a los valores de las relaciones de presiones, tomando la misma metodología de comparación explicado anteriormente, se eligieron nueve puntos los cuales sean representativos para el análisis (observar como varia el

error al variar la relación de presiones), estos puntos se posicionaron en el eje de simetría como también en la región central de la **zona de silencio**.

$p_o/p_b = 17000$		
Número de Mach		
Puntos	Referencia	<i>Fluent</i>
1	5,2315	5,0681
2	5,2766	5,2107
3	5,3504	5,3547
4	5,7549	5,5756
5	5,7872	5,6155
6	5,8404	5,6799
7	6,2819	6,0929
8	6,3055	6,1227
9	6,3445	6,1703
<b>Error cuadrático medio</b>	-	2.42 %

Tabla 3.6: Comparación de los números de Mach de la referencia y de los obtenidos en *Fluent* con  $p_o/p_b = 17000$ .

$p_o/p_b = 10000$		
Número de Mach		
Puntos	Referencia	<i>Fluent</i>
1	5,2315	5,1068
2	5,2766	5,1822
3	5,3504	5,2903
4	5,7549	5,5891
5	5,7872	5,6196
6	5,8404	5,6992
7	6,2819	6,0924
8	6,3055	6,1219
9	6,3445	6,1693
<b>Error cuadrático medio</b>	-	2.26 %

Tabla 3.7: Comparación de los números de Mach de la referencia y de los obtenidos en *Fluent* con  $p_o/p_b = 10000$ .

$p_o/p_b = 1000$		
Número de Mach		
Puntos	Referencia	<i>Fluent</i>
1	5,2315	5,1220
2	5,2766	5,2083
3	5,3504	5,2083
4	5,7549	5,5737
5	5,7872	5,6137
6	5,8404	5,6773
7	6,2819	6,0897
8	6,3055	6,1195
9	6,3445	6,1668
<b>Error cuadrático medio</b>	-	2.55 %

Tabla 3.8: Comparación de los números de Mach de la referencia y de los obtenidos en *Fluent* con  $p_o/p_b = 1000$ .

$p_o/p_b = 500$		
Número de Mach		
Puntos	Referencia	<i>Fluent</i>
1	5,2315	5,4099
2	5,2766	5,4093
3	5,3504	5,4557
4	5,7549	5,9421
5	5,7872	5,9121
6	5,8404	5,9354
7	6,2819	6,4836
8	6,3055	6,4355
9	6,3445	6,4367
<b>Error cuadrático medio</b>	-	2.07 %

Tabla 3.9: Comparación de los números de Mach de la referencia y de los obtenidos en *Fluent* con  $p_o/p_b = 500$ .

Se puede apreciar que, en la tabla 3.6 se obtuvo un error del 2.42 % con una relación de las presiones  $p_o/p_b = 17000$ , en la tabla 3.7 un error del 2.26 % con  $p_o/p_b = 10000$ , en la tabla 3.8 un error del 2.55 % con  $p_o/p_b = 1000$  y en la tabla 3.9 un error de 2.07 % con una relación de presiones igual a  $p_o/p_b = 500$ .

Esto muestra que al modificar la relación de presiones provoque que la zona de silencio también se vea modificada, al aumentar la relación de presión aumenta la extensión de la zona de silencio manteniendo su estructura característica. Con los cálculos obtenidos, el error cuadrático medio no superó el 3 % para  $15 \leq p_o/p_b \leq 17000$ . Este es un buen indicador para el

modelado en *Fluent* ya que no se vio influenciado en gran medida el cálculo de los datos dentro de la **zona de silencio** de las simulaciones.

Otro de los parámetros que se analizó con estas simulaciones fue la relación de  $X_M/D$  de la ecuación 2.1 y observar cómo evoluciona el límite de la **zona de silencio**. Reemplazando las relaciones de presiones que se utilizaron en dicha ecuación (cálculo de referencia), se comparó con los datos obtenidos por las simulaciones, teniendo en cuenta que para la elección del  $X_M$  en *Fluent* se tomó el valor promedio de la región en la cual la variación del número de Mach era abrupta. En la tabla 3.10 y en la figura 3.5, se observa la comparación entre los datos obtenidos.

AIRE			
Po/Pb	$X_M/D$ (Referencia)	$X_M/D$ ( <i>Fluent</i> )	Error [%]
17000	87,36	95,55	-9,37
10000	67,70	69,27	-2,32
1000	21,19	21,70	-2,42
500	14,98	15,38	-2,66
50	4,74	4,61	2,74

Tabla 3.10: Comparación con los datos obtenidos de la ecuación 2.1 y de las simulaciones, con su respectivo error porcentual a diferentes valores de  $p_o/p_b$ .

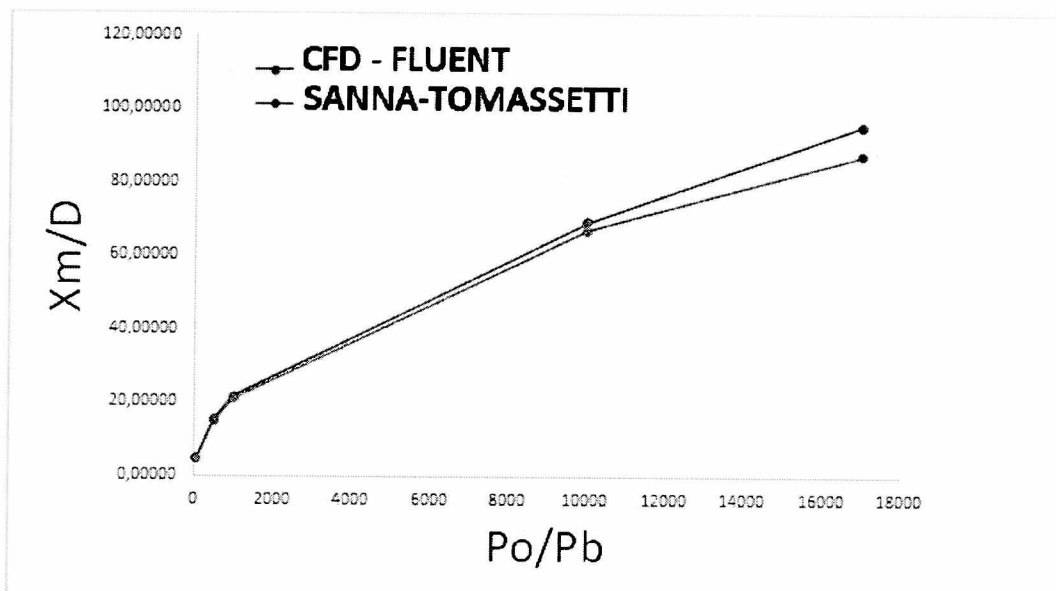


Figura 3.5: Comparación de evolución de las relaciones  $X_M/D$  respecto a los valores de  $p_o/p_b$  tanto de referencia como las obtenidas por las simulaciones.

En la tabla 3.10 se puede observar que dentro del rango de  $15 \leq p_o/p_b \leq 17000$ , el error no llega al 3% del error relativo porcentual de los datos; a diferencia de los valores que están próximos a los extremos del rango, en donde los errores superan ese valor.

Los datos obtenidos en esta prueba muestran cómo al variar las relaciones de presiones variaba la **zona de silencio** esto afectaba la comparación de los datos de las simulaciones con los de las relaciones semi-empíricas, obteniendo errores que no superan el 3% dentro del rango de las presiones  $15 \leq p_o/p_b \leq 17000$ , tanto en el cálculo de los números de Mach como al calcular el límite superior de la **zona de silencio**. Pero que aumenta a medida que nos acercamos a los extremos del mismo, en el caso del cálculo de la relación  $X_M/D$ .

### 3.6. Prueba 3

Para esta simulación, se aplicaron las mismas condiciones de operación de la prueba 2 con una relación de presiones de  $p_o/p_b = 100$ , pero con la diferencia que se aumentó la densidad de la malla. Esta modificación en la malla no se aplicó de forma homogénea, sino que se delimitaron regiones específicas de interés. La región que se delimitó fue con las siguientes características: el eje axial desde la entrada del gas hasta el disco de Mach; y en el eje radial, desde el eje de simetría hasta el ancho máximo del barril ( $D_B$ ) aproximadamente, haciendo énfasis en la **zona de silencio**. En la figura 3.6, se puede observar la variación de la densidad de la malla.

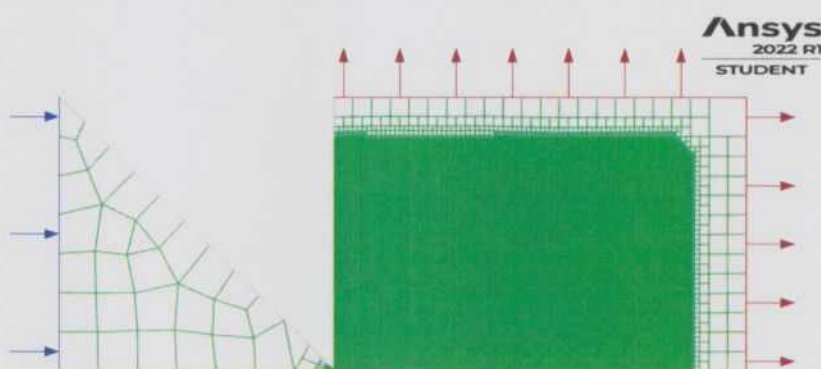


Figura 3.6: Esquema de la densidad de malla en la geometría axisimétrica de estudio, obtenida del programa *Fluent*.

Teniendo en cuenta las mismas condiciones de operación y con el aumento de la densidad de la malla con un valor de 400000 de nodos aproximadamente, se observa en la tabla 3.11 que el error cuadrático medio disminuyó a un 0.080 % en comparación a la anterior densidad de malla que tenía un error del 2.93 % con 250000 nodos. Como anteriormente se explicó que el programa *Fluent*, que utiliza el método de volúmenes finitos es de esperar que al aumentar la densidad de la malla el error tienda a disminuir y esto se vio reflejado en los datos obtenidos.

Como el aumento de la densidad de la malla produce que el tiempo de cálculo en el análisis aumente, (ya que para esta simulación se utilizó el modelo turbulento  $k - \epsilon$  el cual resuelve dos ecuaciones de transporte), en esta Prueba 3 se cambió de modelo turbulento para analizar la expansión libre de un gas, el modelo que se utilizó fue Spalart-Allmaras (explicado en el Capítulo 1) que al resolver una ecuación de transporte se espera que el tiempo de cálculo disminuya y además observar si esto influye en los datos calculados.

Número de Mach			
Puntos	Referencia	Fluent (N= Nodos)	
		N=400000	N=250000
1	5,2315	5,2570	5,0672
2	5,2766	5,3006	5,1211
3	5,3504	5,3765	5,2089
4	5,7549	5,7442	5,5742
5	5,7872	5,7774	5,6132
6	5,8404	5,8335	5,6769
7	6,2819	6,2356	6,0906
8	6,3055	6,2633	6,1196
9	6,3445	6,3054	6,1662
<b>Error cuadrático medio</b>	-	0.08 %	2.93 %

Tabla 3.11: Comparación de los números de Mach de la referencia y de los obtenidos en *Fluent* con variación de la densidad de la malla, con  $p_o/p_b= 100$ .

Con estas modificaciones se obtuvo la tabla 3.12 donde se muestran los datos obtenidos por la referencia y por las simulaciones con dos modelos turbulentos. El error porcentual no sufrió variaciones importantes con un valor de 0.080 % con el modelo turbulento  $k - \epsilon$  y con el modelo turbulento Spalart-Allmaras un valor de 0.083 %, destacando que el tiempo de cálculo, utilizando  $1 \times 10^5$  iteraciones, disminuyó considerablemente de 40 min a 35 min, aproximadamente.

Número de Mach			
Puntos	Referencia	$k - \epsilon$	Spalart-Allmaras
1	5,2315	5,2570	5,2578
2	5,2766	5,3006	5,3012
3	5,3504	5,3765	5,3771
4	5,7549	5,7442	5,7451
5	5,7872	5,7774	5,7782
6	5,8404	5,8335	5,8341
7	6,2819	6,2356	6,2365
8	6,3055	6,2633	6,2641
9	6,3445	6,3054	6,3061
<b>Error cuadrático medio</b>	-	0.080 %	0.083 %

Tabla 3.12: Comparación de los números de Mach de la referencia y de los obtenidos por *Fluent* calculado con el modelo de turbulencia  $k - \epsilon$  y Spalart-Allmaras, con  $p_o/p_b= 100$ .

En la tabla 3.13 se muestra el cálculo de la relación  $X_M/D$  obtenidos con distintos métodos turbulentos, con un error relativo de 0.082 % para el modelo de  $k - \epsilon$  y 0.091 % para el modelo

de Spalart-Allmaras. Esta diferencia en el valor de los errores se podría deber a que el modelo de turbulencia  $k-\epsilon$  resuelve dos ecuaciones de transporte en comparación al modelo de turbulencia de Spalart-Allmaras que solo resuelve una ecuación de transporte, pero que para nuestro análisis se tomara como equivalente la resolución con un modelo u otro.

$p_o/p_b = 100$			
	Referencia	$k - \epsilon$	Spalart-Allmaras
$X_M/D$	6.700	6.705	6.706
<b>Error relativo</b>	-	-0.082 %	-0.091 %

Tabla 3.13: Comparación con los datos obtenidos de la ecuación 2.1 y de las simulaciones, con los modelos turbulentos  $k - \epsilon$  y Spalart-Allmaras, con  $p_o/p_b = 100$ .

Con las modificaciones que se realizaron en la geometría de *Fluent* y mediante la variación de distintos parámetros de la simulación, se calcularon datos que se compararon con los obtenidos de las relaciones semi-empíricas. Se logró obtener un error cuadrático medio de 0.08 % dentro de la **zona de silencio** que es la región en donde se cumplen las condiciones de las relaciones de referencia.

Esto se ve influenciado por el aumento en los nodos en la densidad de malla, dependiendo de la disposición computacional y del tiempo que se requiera de cálculo, y podría tomarse, los datos obtenidos de las simulaciones, como equivalentes a los de referencia para futuros trabajos.

## Conclusiones y trabajos futuros

En este proyecto integrador se analizó el comportamiento de un gas en expansión libre en una geometría axisimétrica bidimensional en estado estacionario en condiciones de flujo supersónico. El gas que se utilizó fue aire, que ingresaba de una cámara a una presión de estancamiento ( $p_o$ ) a otra con una presión de descarga ( $p_b$ ) a través de un orificio con un diámetro ( $D$ ) específico.

Se utilizaron las relaciones semi-empíricas presentadas en el Capítulo 2 y se desarrolló un script, en el programa *MATLAB*, que sirvió de referencia para las simulaciones creadas con el programa *Fluent*.

En *Fluent*, se realizó un modelado de una geometría rectangular axisimétrica y se observó el comportamiento al modificar algunas características. Para ello, se realizaron variaciones de las relaciones de presiones, densidades de mallas en el dominio y métodos turbulentos de resolución, así también como calcular el límite superior de la **zona de silencio** que es la región en donde se cumplen las condiciones de las relaciones semi-empíricas.

Comparando los resultados obtenidos por *Fluent* de las distintas simulaciones con los de referencia por medio del error cuadrático medio, se obtuvo un error porcentual que pasó de 2% a 0.08%. Esto indicaría que los valores que se obtienen de la simulación del programa *Fluent* son comparables con los datos obtenidos por las relaciones semi-empíricas en la **zona de silencio** del jet libre subexpandido.

Futuros trabajos que se pueden proponer en esta línea son: análisis por fuera de la **zona de silencio**, en mezcla de gases con diferente peso molecular, geometrías más complejas que las estudiadas, como por ejemplo agregar separadores en la cámara de descarga del gas o utilizar toberas curvas que aumenten la separación isotópica aerodinámica.

Así mismo, sería conveniente utilizar un hardware con mayor potencia de cálculo (en este caso fue una computadora de escritorio) para disminuir los tiempos de los cálculos y aumentar la densidad de la malla en la región de interés.

Además, tomando este resultado como óptimo se podría utilizar el método *CFD* en las regiones de estudio donde no se cumplen las condiciones de las ecuaciones del Capítulo 2, como por ejemplo en regiones donde el número de Mach es menor a 5.5 o en regiones fuera de la **zona de silencio**; como también en las regiones próximas al límite del chorro.

## Apéndice A: Tablas de coeficientes

### A.1. Tabla 8.2.1

Contiene los parámetros que se utilizan en los cálculos de la ecuación 2.9, extraído de [16].

$\gamma$	$x_o/D$	A
1.67	0.0075	3.26
1.40	0.40	3.65
1.2857	0.85	3.96
1.20	1.00	4.29
1.10	1.60	5.25
1.05	1.80	6.44

### A.2. Tabla 8.2.1

Contiene los parámetros que se utilizan en los cálculos de la ecuación 2.12, extraído de [16].

$\gamma$	$\phi$
1.67	1.365
1.40	1.662
1.2857	1.888

# Bibliografía

- [1] Foro Nuclear.(2013). *Etapas para la obtención del combustible nuclear a partir del uranio*. URL:<https://www.foronuclear.org/actualidad/a-fondo/etapas-para-la-obtencion-del-combustible-nuclear-a-partir-del-uranio>. Accessed: 27/3/23
- [2] ENERGÍA NUCLEAR. ORIOL PLANAS.(2021).*Uranio enriquecido: tipos, usos y obtención*. URL: <https://energia-nuclear.net/funcionamiento-central-nuclear/combustible-nuclear/uranio/uranio-enriquecido>. Accessed: 27/3/23
- [3] Argentina.gob.ar, Enriquecimiento de uranio. URL: <https://www.argentina.gob.ar/cnea/aplicaciones/enriquecimiento-de-uranio>. Accessed: 27/3/23
- [4] BENEDICT, MANSON, THOMAS H. PIGFORD y HANS WOLFGANG LEVI.(1981) *URANIUM*, Chap 5, 2nd ed, New York: McGraw-Hill Education.
- [5] HARRY ASHKENAS y FREDERICK S. SHERMAN.(1962). *STRUCTURE AND UTILIZATION SUPERSONIC FREE JETS IN LOW DENSITY WIND TUNNELS*.
- [6] JOSE LUIS HERRANZ GARCÍA.(2017). *Separación isotópica de litio a escala industrial*, Oviedo.
- [7] RYAN SNAYDER.(2016). *A Proliferation Assessment of Third Generation Laser Uranium Enrichment Technology*, Princeton, USA, SCIENCE & GLOBAL SECURITY.
- [8] TODO CIENCIA.CARLOS G. GIANELLA.(2023).*ENRIQUECIMIENTO DE URANIO: UN ASUNTO IMPRESCINDIBLE PARA GARANTIZAR LA SOBERANÍA ENERGÉTICA*. URL:<https://www.todociencia.com.ar/enriquecimiento-de-uranio-un-asunto-imprescindible-para-garantizar-la-soberania-energetica/>. Accessed: 27/3/23
- [9] FRANK M. WHITE.(2004). *Mecánica de Fluidos*, 5ta ed,Mc Graw Hill.
- [10] JESÚS MANCILLA ROMERO.(2020). *Diseño de una tobera convergente-divergente para un túnel de viento supersónico de número de mach de 1.6*, Universidad Aeronáutica en Querétaro, México.
- [11] HUIDAN YU.(2004). *Lattice Boltzmann equation simulations of turbulence, mixing, and combustion*.Texas A& M University.

- [12] ALEXANDRA ZADVORNAYA .(2018). *Characterization of Supersonic Gas Jets for High-Resolution Laser Ionization Spectroscopy of Heavy Elements*, American Physical Society.
- [13] ANSYS.(2015). *ANSYS Fluent Theory Guide 15.0*. Canonsburg.
- [14] PEDRO J. C. SÁNCHEZ .(2014). *Estudio del Flujo en la Tobera del Motor Cohete J-2S Mediante Técnicas CFD*. Valencia, Universidad Politécnica de Valencia.
- [15] JAVIER GUSTAVO YAMBOMBO GUANUTAXI.(2021). *modelación numérica CFD del flujo en una rápida escalonada incorporando tabiques triangulares alterados, con flujos de aproximación subcritico, utilizando el programa ANSYS FLUENT*, Quito.
- [16] GIOVANNI SANNA y GIUSEPPE TOMASSETTI.(2005). *Introduction to Molecular Beams Gas Dynamics*, London, Imperial College Press.
- [17] RODRIGO ROLNY, FRANCISCO MANCUSO y MIGUEL COUSSIRAT.(2017). *Aplicación de la mecánica de fluidos computacional como complemento de enseñanza en la Universidad: Estudio de flujos compresibles* , Argentina, Asociación Argentina de Mecánica Computacional.
- [18] ERWIN FRANQUET, VINCENT PERRIER, STÉPHANE GIBOUT y PASCAL BRUEL.(2015). *Free underexpanded jets in a quiescent medium: A review*. libro: Progress in Aerospace Sciences, Vol 77. Elsevier Ltd.
- [19] D'ANGELO ROBERTO.(2021-2022). *Numerical study of the impact of nozzle shape on underexpanded jet - wall interaction[BR]- Integration Internship*, Brazil, Faculté des Sciences appliquées.

# Agradecimientos

A mi familia por siempre estar presente, por su apoyo incondicional y creer en mí.

A mis amigas y amigos, que fueron parte de este viaje y soportaron cada momento tanto los buenos como los malos.

A mis directores y al grupo LASIE, por toda la ayuda que me brindaron para que este trabajo fuera posible.

Al instituto Dan Beninson por darme la oportunidad de finalizar mis estudios.

A cada persona que me inspiró a seguir adelante, a pesar de los momentos difíciles me sacó una sonrisa y me dio ánimos para continuar.