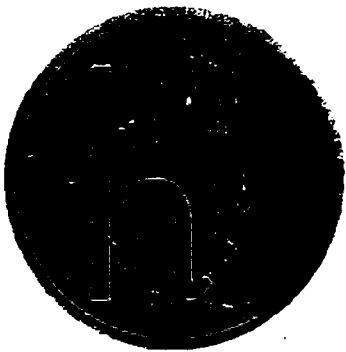


04.67.04
COTIGNOLA



C.N.E.A. Biblioteca	
ARCHIVO PUBLICACIONES	
Nº 1	AÑO 1967

EFEECTO MAGNETOMORFICO LONGITUDINAL

EN LAMINAS

J. M. Cotignola

CENTRO ATOMICO BARILOCHE
COMISION NACIONAL DE ENERGIA ATOMICA
INSTITUTO DE FISICA "Dr. J. A. BALSEIRO"
UNIVERSIDAD NACIONAL DE CUYO
SAN CARLOS DE BARILOCHE, RIO NEGRO - ARGENTINA

EFFECTO MAGNETOMORFICO LONGITUDINAL EN LAMINAS

Tesis presentada ante la Universidad Nacional de Cuyo
para optar al título de Doctor en Física.



R.P. Platzeck
Asesor Científico



J.M. Cotignola

A la memoria de mi padre.

La parte experimental de este trabajo fue hecha en colaboración con los Lic. M.E. de la Cruz y F. de la Cruz. A ellos debo la realización de esta parte del trabajo y no es solamente por esto que deseo expresarles mi agradecimiento, sino también por la amistad que me han brindado y por su constante ejemplo de laboriosidad, responsabilidad y dedicación al trabajo.

Deseo agradecer también al personal técnico del Laboratorio de Bajas Temperaturas, por la eficiente ayuda que me han prestado.-

I - LA ECUACION DE BOLTZMANN

El método que conduce a la ecuación de Boltzmann es esencialmente cinético; sin embargo nosotros reservaremos este nombre para el tratamiento más simple descrito en el cap. II. Es difícil y largo tratar de justificar las suposiciones que haremos para derivar la ecuación, sobre todo en el caso de partículas cuánticas. En cambio consideraremos a estas suposiciones como una aproximación al problema que tratamos. Vamos a estudiar ahora un sistema de partículas idénticas. El número de grados de libertad de cada partícula es tres y el estado del sistema está completamente determinado, en un dado instante, si se conocen todas las coordenadas y los impulsos en ese instante. Supondremos que el estado de una partícula es independiente del resto, salvo en el instante en que realiza una colisión con alguna otra del sistema. Llamamos espacio μ , o espacio de las fases de una partícula al espacio exadimensional cuyas componentes son las tres coordenadas y las tres componentes de impulso. El estado de una partícula está unívocamente determinado por un punto en el espacio μ . Un elemento de volúmen en μ queda expresado como:

$$d^3r d^3p = dx dy dz dp_x dp_y dp_z$$

Supondremos ahora que el número de partículas del sistema es lo suficientemente grande como para que la densidad de puntos en μ pueda ser expresada mediante una función continua de \vec{r} y \vec{p} . Si $f(\vec{r}, \vec{p}, t)$ es esta función entonces el número de partículas del sistema con coordenadas entre \vec{r} y $\vec{r} + d\vec{r}$

e impulsos entre \vec{p} y $\vec{p} + d\vec{p}$ será

$$dN(\vec{r}, \vec{p}, t) = f(\vec{r}, \vec{p}, t) d^3r d^3p$$

Entonces el número de partículas cuyos puntos representativos están contenidos en un volumen D de μ es

$$N = \int_D f(\vec{r}, \vec{p}, t) d^3r d^3p$$

La variación local de N es

$$\frac{\partial N}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial t} \int_D f d^3r d^3p$$

Esta variación va a estar dada por el balance entre el flujo neto a través de la superficie Σ que limita a D y la producción y destrucción de puntos por las fuentes y sumideros (Q_+ , Q_-) contenidos en D . Entonces

$$\int \frac{\partial f}{\partial t} d^3r d^3p = Q_+ - Q_- - \int f \vec{u} \cdot d\vec{\sigma}$$

donde $d\vec{\sigma}$ es el vector elemento de superficie dirigido según la normal exterior a D y \vec{u} es la velocidad en μ . Aplicando el teorema de Gauss resulta:

$$\frac{\partial f}{\partial t} = q_+ - q_- - \text{div}(f\vec{u}) \quad (1)$$

donde q está definido por la relación: $Q = \int_D q d^3 r d^3 p$
Por otra parte la derivada total de f es

$$\frac{df}{dt} = \frac{\partial f}{\partial t} + \vec{u} \cdot \text{grad} f \quad (2)$$

Reemplazando (1) en (2) y utilizando algunas relaciones de análisis vectorial resulta:

$$\frac{\partial f}{\partial t} = q_+ - q_- - f \text{div} \vec{u} \quad (3)$$

El término $\text{div} \cdot \vec{u}$ es nulo en virtud de las ecuaciones de Hamilton y entonces la ec.(3) resulta:

$$\frac{df}{dt} = q_+ - q_- \quad (4)$$

Esta es la ecuación de Boltzmann que escrita en forma desarrollada es:

$$\frac{\partial f}{\partial t} + \frac{\vec{p}}{m} \cdot \frac{\partial f}{\partial \vec{r}} + \vec{F} \cdot \frac{\partial f}{\partial \vec{p}} = q_+ - q_- \quad (5)$$

Para escribir esta última ecuación hemos tenido en cuenta la ley:

$$\vec{F} = \dot{\vec{p}}$$

siendo \vec{F} la fuerza exterior al sistema que actúa sobre las partículas.

Las cantidades q_+ y q_- son los términos que tienen en

cuenta las colisiones entre partículas. Estas colisiones son los procesos que pueden "crear" o "destruir" puntos en un elemento de μ . En general estos términos van a ser una integral que contiene a f y por lo tanto (5) es una ecuación integrodiferencial. La forma del término de colisión va a depender fundamentalmente del tipo de interacción de las partículas entre sí o con centros dispersivos. Una vez que la forma de este término ha sido dada la solución de (5) es el principal problema de la teoría.

Si el sistema está aislado entonces cualquiera que sea el estado inicial, aquél va a tender a un estado $f_0(p)$ que es el de equilibrio. Nosotros no lo demostraremos pero el significado es claro. El responsable de este comportamiento del sistema es el término de colisión. Cuando $f = f_0$ entonces de (5) resulta:

$$q_+ - q_- = 0$$

Esto no significa que una vez alcanzado el equilibrio no hay más colisiones sino que en equilibrio hay tantas que crean puntos en un elemento de μ como que destruyen.

Como el término de colisión es en general no nulo cuando no existe equilibrio y nulo cuando lo hay, es tentador suponer que por lo menos para $f - f_0 \ll 1$ el término de colisión puede reemplazarse por:

$$\frac{f_0 - f}{\alpha} = - \beta / \alpha \tag{6}$$

La ecuación (5) resulta ahora:

$$\frac{\partial f}{\partial t} + \frac{\vec{p}}{m} \cdot \frac{\partial f}{\partial \vec{r}} + \vec{F} \cdot \frac{\partial f}{\partial \vec{p}} = -g/\tau \quad (7)$$

Esta se llama la aproximación del tiempo de relajación y la constante de proporcionalidad τ se llama tiempo de relajación.

La ecuación (7) es la ecuación de Boltzmann unicamente en el caso en que el término de colisión sea exactamente (6); en caso contrario (7) da una aproximación al problema que puede ser buena o mala. En particular si queremos asegurarnos que la solución aproximada conserva el número de partículas conviene poner:

$$f = f_0 + g - \frac{1}{D} \int_D g d^3r d^3p$$

Si el término de colisiones reemplazado por $\frac{(f - f_0)}{\tau}$, la ecuación (5) queda transformada en

$$\frac{\partial f}{\partial t} + \frac{\vec{p}}{m} \cdot \frac{\partial f}{\partial \vec{r}} + \vec{F} \cdot \frac{\partial f}{\partial \vec{p}} = -g/\tau + \frac{1}{D} \int_D g d^3r d^3p \quad (8)$$

Como (8) da evidentemente la misma corriente que (7), vamos a utilizar esta última teniendo en cuenta que el número de partículas está dado por f_0 y no por f .

Estudiaremos ahora el caso en que el sistema está compuesto por electrones de carga e sometidos a un campo eléctrico uniforme \vec{E} . Si queremos resolver el problema mediante la ecuación (7), debemos tener en cuenta que f es una función

que difiere poco de f_0 . Esto significa que la fuerza que actúa sobre el sistema debe ser suficientemente pequeña como para que esto se cumpla y por lo tanto es lícito despreciar términos del orden de $F \cdot g$ frente a $f \cdot f_0$. En condiciones estacionarias $\partial f / \partial t = 0$, y entonces la ecuación (7) es

$$\vec{v} \cdot \frac{\partial g}{\partial \vec{p}} + e \vec{E} \cdot \frac{\partial f_0}{\partial \vec{p}} + g/2 = 0 \quad (9)$$

Si el medio es infinito f , y por lo tanto g , no van a ser función de r y entonces (9) se reduce a

$$g = -2 e E_x \frac{\partial f_0}{\partial x} \quad (10)$$

donde hemos llamado x a la dirección del campo.

Los electrones obedecen a la estadística de Fermi-Dirac y entonces

$$f_0 = \frac{2}{h^3} \rho_0 \quad (11)$$

donde ρ_0 es la función de distribución de F.D.; h es la constante de Planck y representa el volumen elemental en μ . El factor 2 tiene en cuenta el hecho de que cada estado de impulso puede estar ocupado por dos electrones, según las dos orientaciones de espín.

La corriente queda definida por la relación

$$\vec{J} = \frac{e}{m} \int \vec{p} f d^3 p \quad (12)$$

$$\vec{p} = \frac{e}{c} \vec{A}$$

Vamos ahora a calcular \vec{J} utilizando la solución de (9). f_0 no contribuye por ser la distribución de equilibrio y entonces

$$\vec{J} = \frac{e}{m} \int \vec{p} g d^3p$$

y de (10) resulta

$$J_x = - \frac{e^2 \omega E_x}{m} \int p_x \frac{\partial f_0}{\partial p_x} d^3p \quad (13)$$

poniendo

$$\frac{\partial f_0}{\partial p_x} = \frac{\partial f_0}{\partial p} \frac{p_x}{p} ; p_x = p \cos \theta$$

$$d^3p = p^2 \sin \theta dp d\varphi d\theta$$

(13) resulta

$$J_x = - \frac{4}{3} \pi e^2 \frac{\omega E_x}{m} \int p^3 \frac{\partial f_0}{\partial p} dp \quad (14)$$

A temperaturas normales f_0 puede ser reemplazada por la distribución a 0°K sin cometer error apreciable. Teniendo en cuenta que a 0°K

$$\frac{\partial f_0}{\partial p} = - \delta(p - p_F)$$

donde p_F es el impulso máximo de los electrones, (14) resulta

$$J_x = \frac{8\pi}{3} \frac{e^2 \omega E_x}{m v_F^3} p_F^3$$

Utilizando la definición fenomenológica de la conductividad eléctrica

$$\vec{J} = \sigma \vec{E}$$

se tiene

$$\sigma = \frac{8\pi}{3} \frac{e^2 \tau p_F^3}{m h^3} \quad (15)$$

La aproximación (7) no establece cuál es el tipo de colisiones que sufren las partículas sino que introduce un parámetro que puede interpretarse como el tiempo medio entre choques. Es por esto que τ es una cantidad que debe ser medida experimentalmente.

Como vamos a hacer uso frecuente del concepto de tiempo de relajación, conviene estudiar más detalladamente la ec.(5) para ver hasta qué punto el concepto es aplicable. Para esto hay que escribir en forma explícita el término de colisión y entonces es necesario saber cuáles son los procesos que dispersan los electrones. Como nos interesa específicamente el caso de electrones en metales vamos a suponer que existen solamente dos tipos de choques: dispersión por imperfecciones de la red cristalina y dispersión por ondas elásticas de la red (fonones). No vamos a estudiar detalladamente el mecanismo de estos procesos sino que daremos sus características esenciales.

Un resultado bien conocido de la teoría de metales es que los estados de un electrón en un metal están bastante bien representados por una onda plana modulada por una función que tiene la periodicidad del potencial cristalino. Entonces los

estados están definidos por la longitud de onda λ , o lo que es lo mismo, por el número de onda $k = \frac{2\pi}{\lambda}$. La cantidad k toma valores discretos, debido a la periodicidad de la red, y por la misma razón el número de valores de k , que corresponden a una situación físicamente distinta, es finito. Una imperfección de la red tiene como consecuencia que el potencial cristalino es modificado en las inmediaciones y esto puede hacer que el electrón haga una transición de un estado a otro. Como las imperfecciones están fijas el electrón cambia su impulso pero no su energía, es decir, el choque es elástico. Cuando un electrón interacciona con un fonón puede absorber la energía de éste y la energía del electrón no se conserva en el proceso, el choque es inelástico. Como estamos especificando los estados del electrón por la cantidad k , que en realidad es un vector, es conveniente trabajar en el espacio \mathcal{M}_k . Un elemento de volumen en tal espacio es entonces $d^3r d^3k$.

Como la relación entre p y k es $p = \hbar k$, el espacio \mathcal{M}_k queda dividido en celdas de tamaño $8\pi^3$ ya que por el principio de incerteza $\Delta x \Delta k = 2\pi$. Por el mismo principio el número de estados distinguibles del sistema es

$$\nu = \frac{2 - \Omega V}{8 \pi^3} \quad (16)$$

donde el factor 2 tiene en cuenta el espín y

$$\Omega = \int d^3k$$

$$V = \int d^3r$$

o sea que ΩV es el volumen en μ_k accesible al sistema. La densidad de estados en μ_k es entonces

$$\frac{\nu}{\Omega V} = \frac{1}{4\pi^3}$$

es decir que el número de estados posibles en un elemento de volumen de μ_k es

$$d\nu(\vec{r}, \vec{k}) = \frac{1}{4\pi^3} d^3r d^3k \quad (17)$$

y la densidad de estados en el espacio k es consecuentemente

$$\frac{\nu}{4\pi^3} \quad (18)$$

Si $dN(\vec{r}, \vec{k},)$ es el número de electrones comprendidos entre \vec{r} y $\vec{r} + d\vec{r}$ y $\vec{k} + d\vec{k}$ entonces la probabilidad de ocupación de la celda será

$$f = \frac{dN(\vec{r}, \vec{k})}{d\nu(\vec{r}, \vec{k})}$$

y de (17) obtenemos

$$dN(\vec{r}, \vec{k}) = \frac{1}{4\pi^3} f(\vec{r}, \vec{k}) d^3r d^3k \quad (19)$$

Haciendo el mismo razonamiento que nos condujo a la ec.(5) resulta

$$\frac{\partial f}{\partial t} + \vec{v} \cdot \frac{\partial f}{\partial \vec{r}} + \frac{\vec{F}}{\hbar} \cdot \frac{\partial f}{\partial \vec{k}} = 4\pi^3 (q_+ - q_-) \quad (20)$$

Ahora vamos a calcular q_+ y q_- . Consideremos en electrón contenido en el elemento de volumen $d^3r d^3k'$; la probabilidad de que en un instante t después este electrón se encuentre en el elemento de volumen $d^3r d^3k$ será

$$\frac{V}{4\pi^3} P(\vec{k}', \vec{k}) \delta t d^3k [1 - f(\vec{k}, \vec{r})]$$

donde $p(\vec{k}, \vec{k}')$ es la probabilidad de transición por unidad de tiempo entre los estados \vec{k} y \vec{k}' y el factor $(1-f)$ es la probabilidad de que haya estados disponibles tal como lo requiere el principio de exclusión. Como el número de electrones en $d^3r d^3k'$ es

$$\frac{1}{4\pi^3} f(\vec{k}', \vec{r}) d^3r d^3k'$$

entonces los electrones ganados por d^3k , provenientes de d^3k' , por unidad de volumen en μ_k y por unidad de tiempo serán

$$\left(\frac{V}{4\pi^3}\right)^2 P(\vec{k}', \vec{k}) f(\vec{k}', \vec{r}) [1 - f(\vec{k}, \vec{r})] d^3k' \quad (21)$$

Esta cantidad es por definición q_+ . Como el estado de espín en general no cambia en los procesos de choques que consideramos, la densidad de estados finales es la mitad de la considerada y consecuentemente en (21) debemos introducir un factor $\frac{1}{2}$. El término q_- se calcula de igual manera. La ecuación de Boltzmann resulta ahora

$$\frac{\partial f}{\partial t} + \vec{v} \cdot \frac{\partial f}{\partial \vec{r}} + \frac{\vec{F}}{\hbar} \cdot \frac{\partial f}{\partial \vec{k}} = \frac{V}{8\pi^3} \int [P(\vec{k}, \vec{k}') f'(1-f) - P(\vec{k}', \vec{k}) f(1-f')] d^3k' \quad (22)$$

donde $f' = f(\vec{k}', \vec{r})$

El segundo término en (22) es independiente de V porque la probabilidad de transición P debe ser calculada con funciones de onda normalizadas en el volumen del metal y esto da una contribución como V^{-1} . En equilibrio

$$f(\vec{r}, \vec{k}) = f_0(k)$$

donde $f_0(k)$ es la distribución de F.D., y el término de colisión debe anularse. Entonces

$$P(\vec{k}, \vec{k}') f_0'(1-f_0) - P(\vec{k}', \vec{k}) f_0(1-f_0') = 0$$

Si además el choque es elástico $f_0 = f_0'$ y en consecuencia

$$P(\vec{k}', \vec{k}) = P(\vec{k}, \vec{k}')$$

Ahora haremos las siguientes suposiciones: las superficies de energía constante son esféricas, el choque es elástico y P depende únicamente del ángulo entre \vec{k} y \vec{k}' y no de su orientación absoluta. Poniendo ahora

$$f = f_0 + g$$

y despreciando los mismos términos que en ecuación (9), la solución de (22) es (Ziman, 1962):

$$f(\vec{r}, \vec{k}) - f_0(\vec{k}) = \frac{-\vec{v}_k \cdot \left(\frac{\partial f_0}{\partial T} \nabla T + e \frac{\partial f_0}{\partial E_k} \vec{E} \right)}{\int (1 - \cos \theta) \sigma(k, \theta) d\Omega} \quad (23)$$

donde $\sigma(k, \theta)$ es una cantidad relacionada con $P(k, k')$ y θ es el ángulo entre \vec{k} y \vec{k}' ; E_k es la energía del estado \vec{k} y $d\Omega$ es el elemento de ángulo sólido. La cantidad

$$\frac{1}{\tau(k)} = \int (1 - \cos \theta) \sigma(k, \theta) d\Omega \quad (24)$$

depende de la probabilidad de transición para electrones de impulso $\hbar k$ y tiene dimensiones de inversa de tiempo. Comparando (23) con (10) se vé que $\tau(k)$ puede ser considerado como un tiempo de relajación salvo que ahora depende del módulo del vector k . Como la derivada de la distribución de equilibrio respecto de la energía tiene una singularidad como una delta negativa, solamente va a interesar el valor de $\tau(k_F)$. En efecto, si se calcula la conductividad utilizando (23) resulta

$$\sigma = \frac{e^2 \tau(k_F)}{4\pi^3 \hbar} \int \vec{v} \cdot d\vec{S} \quad (25)$$

donde $d\vec{S}$ es el vector elemento de superficie sobre la superficie de Fermi.

Las condiciones impuestas para resolver (22) son tan ideales que no son satisfechas practicamente por ningún metal. Sin embargo es posible ver que aún en el caso en que las superficies de energía no son esféricas se puede definir una cantidad que puede considerarse como un tiempo de relajación. Si se cono-

ciere la solución de (22) entonces el término de colisión sería conocido y poniendo

$$f_+(\vec{k}) - f_-(\vec{k}) = -g/\tau(\vec{k})$$

quedaría definida una función $\tau(\vec{k})$ que podría pensarse que es un tiempo de relajación. Sin embargo, en general $\tau(\vec{k})$ va a ser función de las fuerzas exteriores al sistema. Esto puede verse enseguida cuando hay choque inelástico. Si aplicamos un gradiente de temperatura, los choques inelásticos con fonones a pequeños ángulos tendrán influencia en el transporte de calor ya que la energía del electrón cambia; sin embargo cuando hay un campo eléctrico aplicado, en vez de un gradiente de temperatura, estos choques van a tener menos influencia porque cambian poco la dirección de movimiento del electrón y por lo tanto el transporte de carga en esa dirección no se ve tan afectado. A temperaturas suficientemente bajas, como para que los procesos de choques con defectos sean dominantes, es razonable esperar que exista un tiempo de relajación. Por otra parte, a temperaturas tales que la energía media por electrón sea mayor que la máxima energía de los fonones, el choque puede ser considerado prácticamente elástico y nuevamente puede esperarse que exista un τ . Una discusión más completa sobre este problema puede verse en Ziman (1962, 1964) y Jones(1956).

II - EL METODO CINETICO.

Muchas propiedades electrónicas de los metales pueden ser descriptas utilizando un modelo simple que llamaremos el método cinético. Si bien este tratamiento es menos riguroso que la ecuación de Boltzmann, tiene la ventaja de ser mucho más simple y permitir visualizar más intuitivamente el problema. En este capítulo vamos a desarrollar este método y lo aplicaremos a algunos casos particulares.

La primera hipótesis que haremos es que los electrones en un metal se comportan como partículas libres salvo en el momento en que hacen una colisión. Los tipos de colisiones que consideraremos son los descriptos en el Cap. I y su efecto es el de hacer pasar al electrón de un estado de movimiento uniforme a otro. Llamamos $P(t)$ a la probabilidad de que un electrón se encuentre en el instante t en el mismo estado de movimiento que en $t=0$. Dividimos ahora el intervalo $(0,t)$ en n intervalos iguales Δt . Si el electrón llegó al instante $(k-1)\Delta t$ sin hacer colisión, llamamos $P_k(\Delta t)$ a la probabilidad de que no lo haga en el instante Δt siguiente. La probabilidad de que llegue al instante $m\Delta t$ sin hacer colisiones es el producto de las n probabilidades $P_k(\Delta t)$. Hacemos la hipótesis que $P_k(\Delta t)$ es independiente de k y entonces

$$P(m\Delta t) = P^m(\Delta t)$$

desarrollando en serie de Taylor se tiene

$$P(\Delta t) = P(0) + \left(\frac{\partial P}{\partial t} \right)_0 \Delta t + \dots$$

y por lo tanto

$$P(m\Delta t) = \left[1 + \left(\frac{\partial P}{\partial t} \right)_0 \Delta t + \dots \right]^m$$

ya que $P(0)=1$. Para obtener una función de variable continua ponemos:

$$t = \lim. n \Delta t \quad \text{para } n \rightarrow \infty \quad \text{y } \Delta t \rightarrow 0 .$$

Haciendo el paso al límite en el segundo miembro resulta

$$P(t) = e^{-t/\tau}$$

donde

$$\tau = - \left(\frac{\partial P}{\partial t} \right)_{t=0}$$

La suposición de que $P_k(\Delta t)$ es independiente de k significa que la probabilidad de que el electrón no choque entre t y $t + \Delta t$ es $\Delta t/\tau$ e independiente de t . En general $P(t)$ puede ser una función de la velocidad y por lo tanto τ también. El tiempo medio entre choques es

$$\langle t \rangle = \int_0^{\infty} t d[1 - P(t)] = \tau$$

Debido al principio de exclusión, solamente aquellos electrones que están contenidos en un intervalo de energía kT con respecto a la energía de Fermi van a ser los que pueden realizar colisiones capaces de modificarles el estado de movimiento y en consecuencia sólo el valor de τ sobre esta superficie es el que va a gobernar muchas de las propiedades de transporte. De esta forma hemos arribado a conclusiones semejantes a las del capítulo anterior.

Si un electrón se mueve con velocidad v_0 , entonces cuando se aplica un campo eléctrico al sistema se moverá con una velocidad media

$$\langle v \rangle = v_0 + \frac{eE\tau}{m} \quad (1)$$

Esto significa que todos los electrones van a adquirir, por efecto del campo, un incremento de velocidad en la dirección del mismo dado por el último término de (1). Esta velocidad de arrastre de los electrones en la dirección del campo va a dar una corriente neta

$$J = \frac{ne^2E\tau}{m}$$

donde n es el número de electrones por unidad de volumen. Expresando este número en función del impulso máximo se obtiene el mismo resultado que en (I-15).

El método cinético resuelve el problema de la conductividad térmica. Vamos a dar una idea del cálculo de esta propiedad porque la relación entre ambas conductividades permite establecer una ley cuya validez es en cierta forma una medida de la validez de las aproximaciones que usaremos más adelante.

La conductividad térmica queda definida por la relación

$$\dot{Q} = \kappa \nabla T$$

donde \dot{Q} es el flujo de calor y ∇T es el gradiente de temperatura. Lo que debemos calcular es el flujo neto de energía a través de una sección. Los electrones se mueven dentro de un cristal y vamos a suponer que cuando hacen una colisión se ponen en equilibrio térmico con la red. Sea ahora $x=0$ el

plano a través del cual se quiere calcular el flujo. Un electrón que atraviesa dicho plano tendrá una energía

$$E = E(0) \pm \frac{\partial E}{\partial x} b$$

donde $E(0)$ es la energía media de un electrón en equilibrio con la red en el plano $x=0$, b es la coordenada x del punto en el cual el electrón sufrió la última colisión y los signos $+$ y $-$ corresponden al caso en que el electrón se mueva de izquierda a derecha o viceversa. Los únicos electrones que pueden cambiar su estado de movimiento son los que están sobre la superficie de Fermi, con un tiempo medio entre choques τ . La distancia media recorrida por estos electrones será

$$l = v_F \tau$$

y finalmente la energía media de los electrones que atraviesan el plano $x=0$, haciendo un ángulo θ con respecto a la normal al plano, será

$$E = E(0) \pm \frac{\partial E}{\partial x} l \cos \theta$$

Si $d\nu(\theta)$ es el número de electrones que inciden por unidad de tiempo y área en un ángulo comprendido entre θ y $\theta + d\theta$, entonces el flujo neto de energía será

$$\dot{Q} = \int_0^\pi \frac{\partial E}{\partial x} l \cos \theta d\nu(\theta)$$

La cantidad $d\nu(\theta)$ resulta ser

$$d\nu(\theta) = \frac{1}{2} n v_F \sin \theta \cos \theta d\theta$$

y reemplazando en la integral se obtiene

$$\dot{Q} = \frac{1}{3} m v_F \int \frac{\partial E}{\partial x}$$

Poniendo

$$m \frac{\partial E}{\partial x} = m \frac{\partial E}{\partial T} \frac{\partial T}{\partial x} = C \frac{\partial T}{\partial x}$$

donde C es la capacidad calorífica por unidad de volumen del sistema, se tiene

$$\dot{Q} = \frac{1}{3} C v_F \int \frac{\partial T}{\partial x}$$

Para un gas de electrones libres

$$C = \pi^2 m k^2 T / m v_F^2$$

donde k es la constante de Boltzmann. La conductividad resulta finalmente

$$K = \frac{\pi^2}{3} m \frac{k^2 T^2}{m}$$

Eliminando el parámetro e de las expresiones de σ y κ se obtiene

$$\frac{K}{\sigma T} = \frac{1}{3} \pi^2 \frac{k^2}{e^2} = L_0$$

Esta es la ley de Wiedemann-Franz y expresa que la relación

$\kappa/\sigma T$ es un número independiente de la estructura electrónica del metal. Este número se llama el número de Lorenz.

La validez de esta ley es restringida ya que lleva implícita la suposición que las partículas responsables de la conductividad son las mismas en ambos casos y además que los procesos de choques tienen también en ambos casos la misma efectividad. Únicamente bajo estas condiciones es posible eliminar

el tiempo de relajación de entre las dos expresiones de conductividad. En definitiva puede decirse que la existencia de un tiempo de relajación implica la validez de la ley y viceversa. En base a lo que discutimos en el capítulo anterior se puede esperar que la ley sea válida a altas y bajas temperaturas y no a temperaturas intermedias.

III - EFFECTOS DE BORDE.

En el estudio de los efectos de borde nos basaremos exclusivamente en el modelo del electrón libre. Como hemos visto, la magnitud característica que aparece en los fenómenos de conductividad es el tiempo de relajación, o lo que es lo mismo, su magnitud asociada, el camino libre medio. Según el modelo que estamos utilizando, λ es independiente de la dirección de movimiento y de la posición del electrón en el metal. Sin embargo, cuando el electrón llega a la superficie del metal debe necesariamente sufrir una reflexión ya que no puede escapar. Esto quiere decir que en la zona cercana a la superficie la aproximación que usamos deja de ser válida. Este efecto no tiene ninguna importancia cuando las dimensiones de la muestra son mucho mayores que el camino libre medio. Esto se debe simplemente a que el número de electrones que chocan en la superficie es mucho menor que el de los que chocan en el interior.

El caso es completamente diferente cuando la muestra tiene alguna dimensión que es comparable con el camino libre medio. En estas condiciones los procesos de reflexión pueden llegar a ser importantes y modificar seriamente el fenómeno de conductividad. En lo sucesivo vamos a considerar muestras con geometrías definidas, tales como láminas o cilindros regulares. Supondremos también que la muestra es infinita en la dirección del campo.

Dos casos extremos pueden presentarse; o el electrón es reflejado especularmente en la superficie o es reflejado en forma totalmente difusa. Cuando se refleja especularmente sufre

simplemente un cambio de impulso en la dirección normal del campo. Esto significa que la corriente no se ve afectada y por lo tanto la conductividad resulta independiente del tamaño de la muestra. En el caso difuso, una vez que el electrón chocó con la superficie puede ser reemitido en cualquier dirección. Este proceso afecta el movimiento en la dirección del campo y por lo tanto la corriente y la conductividad, que resulta ser función de la geometría de la muestra. Para tratar casos intermedios lo que se hace es suponer que una fracción p de los electrones se refleja especularmente y $(1-p)$ en forma difusa. Nosotros nos ocuparemos del caso $p=0$ por ser más simple y además porque hay cierta evidencia experimental de que éste es el caso más común. Ahora estudiaremos dos casos particulares de geometría.

a) Láminas. El primer tratamiento sistemático de efectos de borde fue hecho por Fuchs (1938) en láminas. El método consiste en resolver la ecuación de Boltzmann con apropiadas condiciones de contorno y, en principio, es aplicable a cualquier tipo de geometría.

Definimos como lámina a un medio limitado por dos planos paralelos separados una distancia a . Sea z la dirección normal al plano de la lámina y x la dirección del campo, que es normal a z . Cuando resolvimos la ecuación de Boltzmann en presencia de campo y para medio infinito, vimos que era posible escribir la función de distribución en la forma $f=f_0 + g$. Ahora haremos la misma suposición, salvo que debido al carácter del problema, g va a ser función de la velocidad y también de

la coordenada z . La ecuación de Boltzmann resulta ahora

$$\frac{\partial g}{\partial z} + \frac{g}{\partial v_z} = \frac{eE}{mv_z} \frac{\partial f_0}{\partial v_x}$$

La solución de esta ecuación es

$$g(\vec{v}, z) = -\frac{eE}{m} \frac{\partial f_0}{\partial v_x} \left\{ 1 + F(\vec{v}) e^{-z/\alpha v_z} \right\}$$

donde $F(\vec{v})$ es una función arbitraria de su argumento y debe ser determinada de acuerdo a las condiciones de contorno. Si el choque es perfectamente difuso entonces la función de distribución con $v_n > 0$, siendo n la normal interior a la pared, debe ser f_0 en todos los puntos sobre la pared. Con estas condiciones de contorno la solución para g resulta finalmente

$$g^+(\vec{v}, z) = -\frac{eE}{m} \frac{\partial f_0}{\partial v_x} \left\{ 1 - e^{-z/\alpha v_z} \right\} \quad (v_z > 0)$$

$$g^-(\vec{v}, z) = -\frac{eE}{m} \frac{\partial f_0}{\partial v_x} \left\{ 1 - e^{(a-z)/\alpha v_z} \right\} \quad (v_z < 0)$$

la corriente se calcula utilizando (I-12) y en este caso resulta ser función de z . Para poder comparar con la cantidad medida experimentalmente es necesario promediar sobre una sección transversal, es decir

$$\sigma = \frac{1}{Ea} \int_0^a J(z) dz \quad (1)$$

De esta forma se obtiene finalmente

$$\sigma = \sigma_0 \left[1 - \frac{2l}{2a} \int_0^{\pi/2} \sin^3 \theta \cos \theta \left\{ 1 - e^{-a/l \cos \theta} \right\} d\theta \right] \quad (2)$$

En esta expresión, σ_0 es la conductividad intrínseca del material, es decir la conductividad que tendría en ausencia de efecto de borde. Más adelante volveremos sobre este caso.

b) Alambres. Llamaremos alambre a una muestra infinita de sección rectangular o circular. El primer caso fue resuelto por MacDonald y Sarginson (1950) para muestras de sección cuadrada, y el segundo por Dingle (1950). En ambos el problema es más complicado porque es bidimensional y en consecuencia la solución de la ecuación de Boltzmann presenta mayores dificultades. La técnica de cálculo es esencialmente la misma que para la lámina, es decir, el problema se reduce a resolver la ecuación de Boltzmann con adecuadas condiciones de contorno. Nosotros vamos a dar simplemente un resumen para el caso del cilindro.

Tomamos coordenadas cartesianas y llamamos z a la coordenada en la dirección del eje del cilindro. El campo eléctrico está en esta dirección. La ecuación para este caso es

$$v_x \frac{\partial f}{\partial x} + v_y \frac{\partial f}{\partial y} + \frac{eE}{m} \frac{\partial f}{\partial v_z} = - \frac{f - f_0}{\tau}$$

y haciendo las aproximaciones usuales resulta

$$v_x \frac{\partial g}{\partial x} + v_y \frac{\partial g}{\partial y} + g/\tau = - \frac{eE}{m} \frac{\partial f_0}{\partial v_z}$$

Ahora g es función de las variables $(x, y; v_x, v_y, v_z)$. Esto se ve estudiando la simetría del problema.

La solución de esta ecuación es más difícil que para el caso de la lámina y resulta ser

$$g = -\frac{eE_0}{m} \frac{\partial t_0}{\partial v_z} + e \left\{ -\frac{1}{3} \left[\frac{r}{v_z} + Y \left(\frac{r}{v_z} - \frac{g}{v_y} \right) \right] \right\}$$

donde Y es una función arbitraria. Ahora es conveniente pasar a coordenadas cilíndricas y elegir aquellas soluciones que cumplen con la simetría del problema. Una vez hecho esto resulta

$$g = -\frac{eE_0}{m} \frac{\partial t_0}{\partial v_z} \left[1 - h(r, v_r, v_\theta) e^{-\frac{1}{3} \left(\frac{r v_r}{v_r^2 + v_\theta^2} \right)} \right]$$

donde h es una función arbitraria de sus argumentos. Para determinar esta función hay que aplicar condiciones de contorno. Suponiendo que los electrones chocan difusamente con la pared resulta

$$g = -\frac{eE_0}{m} \frac{\partial t_0}{\partial v_z} \left\{ 1 - e^{-\frac{r v_r + [a^2(v_r^2 + v_\theta^2) - r^2 v_\theta^2]^{1/2}}{2(v_r^2 + v_\theta^2)}} \right\}$$

Para calcular la corriente ponemos

$$v_r = v \sin \theta \sin \varphi$$

$$v_\theta = v \sin \theta \cos \varphi$$

$$v_z = v \cos \theta$$

Poniendo $2 v_F = l$ se tiene

$$\frac{\sigma(r)}{\sigma_0} = \frac{3}{4\pi} \int_0^\pi d\theta \cos^2 \theta \sin \theta \int_0^{2\pi} d\varphi \left[1 - e^{-\frac{r \sin \varphi + (a^2 - r^2 \cos^2 \varphi)^{1/2}}{l \sin \theta}} \right]$$

donde

$$\sigma(r) = \frac{J(r)}{E}$$

Tomando el valor medio de $\sigma(r)$ sobre una sección transversal

se obtiene finalmente

$$\frac{\sigma}{\sigma_0} = 1 - \frac{12}{\pi k} \int_0^{\pi/2} d\theta \cos^3 \theta \sin^3 \theta \left(1 - \int_0^{\pi/2} e^{-k \sin \psi / \sin \theta} \sin \psi d\psi \right) ; \quad k = \frac{2a}{l}$$

c) Aplicación del Método Cinético. Consideremos nuevamente la ecuación

$$\vec{v} \cdot \nabla g + \frac{g}{\tau} = -\frac{eE}{m} \cdot \nabla_v f_0$$

Su solución general es (Chambers, 1950)

$$g(\vec{v}, \vec{r}) = -\frac{eE}{m} \cdot \frac{\partial f_0}{\partial \vec{v}} \left\{ 1 + G(\vec{v}, \vec{r}_B) e^{-|\vec{r} - \vec{r}_B|/\tau} \right\} \quad (3)$$

donde \vec{r}_B es el punto de la superficie que se alcanza moviéndose desde \vec{r} en la dirección opuesta a la del vector \vec{v} ; $G(\vec{v}, \vec{r}_B)$ es una función arbitraria y se determina según las condiciones del problema. Nosotros vamos a desarrollar el método utilizado por Chambers para obtener (3).

Supondremos que el choque con la pared es difuso y vamos a considerar un electrón que pasa por un punto 0 y que tiene una velocidad \vec{v} . Como vimos en el capítulo II, si el electrón pasa por este punto en el tiempo $t = 0$, la probabilidad de que no haga ningún choque hasta el tiempo t es $e^{-t/\tau}$. Sin embargo ahora el caso es diferente ya que va a hacer seguramente un choque después de un tiempo suficiente como para alcanzar algún punto de la pared. Este hecho modifica evidentemente la función de probabilidad y debemos poner ahora

$$P(\vec{v}, t) = -H\left(t, \frac{|\vec{r}_B|}{|\vec{r}|}\right) e^{-t/\tau} \quad (4)$$

donde r_B es la coordenada del punto sobre la pared alcanzado por el electrón que se mueve con velocidad \vec{v} , y H es la función de Heveaside. Haciendo uso de la propiedad

$$\frac{dH(t-t_0)}{dt} = \delta(t-t_0)$$

resulta que el tiempo medio entre choques para los electrones que pasan por 0 con velocidad \vec{v} es

$$\tau_1 = \tau (1 - e^{-t_B/\tau}) \quad (5)$$

donde

$$t_B = |\vec{r} - \vec{r}_B| / |\vec{v}|$$

La velocidad de arrastre que tienen los electrones que estamos considerando es

$$\Delta v = \frac{eE\tau_1}{m} = \frac{eE\tau}{m} (1 - e^{-t_B/\tau})$$

Como esta es la misma para todos los electrones que pasan por 0, resulta que los que ahora tienen velocidad $\vec{v} = \vec{v}_0 + \Delta \vec{v}$ son los mismos, digamos, que antes de la aplicación del campo tenían velocidad \vec{v}_0 . Antes de la aplicación del campo de distribución era f_0 y entonces

$$f(\vec{r}, \vec{v}) = f_0(\vec{v}) - \frac{eE}{m} \cdot \frac{\partial t_0}{\partial v} \tau (1 - e^{-t_B/\tau})$$

Esta es una solución del tipo (3) con el valor particular $G = -1$.

En el caso intermedio debemos introducir el coeficiente de pulido p , tal como lo hicimos anteriormente. En este caso

y luego de integrar resulta

$$z_1 = z \left(1 - e^{-t_0/z} \right) + \sum_{n=0}^{\infty} p^{(n)} z \left[e^{-t_n/z} - e^{-t_{(n+1)}/z} \right]$$

Ponemos ahora

$$t_n = t_0 + \Delta t_n$$

y entonces

$$z_1 = z \left\{ 1 + \left[\sum_{n=0}^{\infty} p^{(n+1)} \left(e^{-\Delta t_n/z} - e^{-\Delta t_{(n+1)}/z} \right) - 1 \right] e^{-t_0/z} \right\} \quad (7)$$

Con este valor de z_1 resulta

$$g(\vec{v}, \vec{r}) = -\frac{eE}{m} \cdot \frac{\partial t_0}{\partial r} z_1$$

y esta solución es efectivamente de la forma (3)

De (7) se ve que

$$G = \sum_{n=0}^{\infty} p^{(n+1)} \left(e^{-\Delta t_n/z} - e^{-\Delta t_{(n+1)}/z} \right) - 1$$

Reordenando términos y recordando que $\Delta t_0 = 0$, puede ponerse

$$G = (p-1) \sum_{n=0}^{\infty} p^n e^{-\Delta t_n/z} \quad (8)$$

Los intervalos Δt_n son los tiempos empleados por el electrón entre choques con las paredes; para una geometría dada estos van a depender del punto en el cual el electrón realiza el primer choque y también de la dirección de incidencia. En el caso de láminas o de alambres cilíndricos se ve ensiguida que

es independiente de n y entonces puede ponerse

$$\Delta t_m = m \Delta t$$

siendo Δt el intervalo de tiempo comprendido entre dos colisiones con las paredes y entonces

$$G = \frac{p-1}{1-p e^{-\Delta t/\tau}} \quad (9)$$

Ahora vamos a dedicarnos a estudiar el caso particular de choques difuso. Como ya se vió, este caso corresponde a $G=-1$. La función de distribución correspondiente es la dada en ec. (3) en donde debe reemplazarse G por su valor numérico.

Con esta función de distribución la corriente resulta ser

$$J(r) = \frac{e^2 E_0}{m} \int_0^\infty v^3 \frac{\partial f_0}{\partial v} dv \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^\pi d\theta \sin\theta \cos^2\theta (1 - e^{-|\vec{r}-\vec{r}_B|/\tau})$$

Recordando la expresión correspondiente a σ_0 , y poniendo $l = \tau E_0$ se obtiene finalmente

$$\frac{\sigma_0}{\sigma_0} = 1 - \frac{3}{4\pi S} \int_S dS \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^\pi d\theta \sin\theta \cos^2\theta e^{-|\vec{r}-\vec{r}_B|/\tau} \quad (10)$$

donde S es el área de la sección transversal sobre la cual se ha promediado la corriente. Para efectuar la integración hay que expresar $|\vec{r}-\vec{r}_B|$ en función de las coordenadas y del vector posición \vec{r} .

Vamos a utilizar la ec. (10) para resolver el caso de la lámina. Tomamos como origen de coordenadas a un punto sobre la superficie (por ej. sobre la cara inferior). El vector $\vec{r}_B = \vec{r}_B$ es paralelo al vector \vec{v} , es decir

$$\vec{r} - \vec{r}_B = \alpha \vec{v}$$

Hacemos ahora uso del hecho que \vec{r}_B es un vector que señala a un punto sobre la superficie y entonces, si \underline{z} es la dirección normal a la lámina, tenemos

$$(\vec{r}_B)_z = a \quad \text{si } B \text{ es un punto sobre la cara superior}$$

$$(\vec{r}_B)_z = 0 \quad \text{si } B \text{ es un punto sobre la cara inferior}$$

Entonces

$$\frac{|\vec{r} - \vec{r}_B|}{r_B} = \frac{\alpha_{\pm}}{z}$$

donde

$$\alpha_{+} = (a-z)/l \sin \theta \cos \varphi ; \quad \alpha_{-} = z/l \sin \theta \cos \varphi \quad (11)$$

Los electrones que vienen de haber chocado con la parte inferior de la lámina tienen velocidad positiva según el eje \underline{z} y entonces vienen con un ángulo θ comprendido entre 0 y $\frac{\pi}{2}$. Análogamente a los que vienen de haber chocado con la cara superior les corresponden ángulos comprendidos entre $\frac{\pi}{2}$ y π . Como el integrando depende solamente de \underline{z} se tiene

$$\frac{1}{S} \int_S ds = \frac{1}{a} \int_0^a dz \quad (12)$$

Introduciendo (11) en (10) y haciendo uso de (12), resulta

$$\frac{\sigma}{\sigma_0} = 1 - \frac{4\pi\epsilon}{4\pi a} \int_0^{\pi/2} d\varphi \int_0^a dz \left[\int_{\pi/2}^{\pi} d\theta \sin \theta \cos^2 \theta e^{\frac{a-z}{l} \sin \theta \cos \varphi} + \int_0^{\pi/2} d\theta \sin \theta \cos^2 \theta e^{-\frac{z}{l} \sin \theta \cos \varphi} \right]$$

La integración según φ debe hacerse entre 0 y $\frac{\pi}{2}$ para que no cambie de signo el exponente, de ahí el factor 4. La integra-

ción sobre z es inmediata y resulta

$$\frac{\sigma}{\sigma_0} = 1 - \frac{3f}{\pi a} \int_0^{\pi/2} d\varphi \cos\varphi \left\{ \int_{\pi/2}^{\pi} d\theta \cos^2\theta \sin^2\theta [1 - e^{-a/l \sin\theta \cos\varphi}] + \right. \\ \left. + \int_0^{\pi/2} d\theta \cos^2\theta \sin^2\theta [e^{-a/l \sin\theta \cos\varphi} - 1] \right\}$$

Dado que $\int_{\pi/2}^{\pi} = - \int_0^{\pi/2}$, puede ponerse

$$\frac{\sigma}{\sigma_0} = 1 - \frac{6f}{\pi a} \int_0^{\pi/2} d\varphi \cos\varphi \int_0^{\pi/2} d\theta \cos^2\theta \sin^2\theta (1 - e^{-a/l \sin\theta \cos\varphi}) \quad (13)$$

Para comparar esta expresión con (2) hay que tener en cuenta que en esta última el eje polar es el z , mientras que en (13) es un eje según la dirección del campo. Haciendo el cambio de ejes, tal como se indica en la Fig.1, e integrando según la expresión se reduce a la (2). La integral (2) puede transformarse a una expresión que contiene integrales tabuladas (ver p.ej. Sondheimer, 1952.). Hay dos casos límites para los cuales puede aproximarse por expresiones simples

$$\frac{\sigma}{\sigma_0} = 1 + \frac{3f}{8a} \quad (a \gg l)$$

$$\frac{\sigma}{\sigma_0} = \frac{4f}{3a \log(l/a)} \quad (a \ll l)$$

Dingle (1950), ha utilizado argumentos fenomenológicos para tratar el caso $a \gg l$ tanto en alambres como en láminas. El caso $a \ll l$ para láminas está discutido en Ziman (1962), Sondheimer (1952), y Lovell (1936).

IV - EFEECTO MAGNETOMORFICO

Hemos visto que el fenómeno de conductividad se ve afectado por la geometría de la muestra cuando alguna dimensión de ésta es comparable con el camino libre medio. Cuando además del campo eléctrico \vec{E} hay aplicado un campo magnético \vec{H} , la fuerza que actúa sobre los electrones será

$$\vec{F} = e(\vec{E} + \frac{1}{c} \vec{v} \times \vec{H}) \quad (1)$$

La presencia de \vec{H} va a afectar también la conductividad. Para ver esto supongamos un conductor cilíndrico con el campo magnético en la dirección del eje. Como se ve enseguida de (1), la presencia de \vec{H} no va a modificar el movimiento de los electrones en la dirección de la corriente y por lo tanto tampoco debería modificar la conductividad. Sin embargo los electrones se ven ahora obligados a describir trayectorias helicoidales alrededor de la dirección de \vec{H} , y este hecho modifica la frecuencia de choques de los electrones con las paredes. Como el radio de curvatura del círculo que resulta de proyectar la hélice sobre un plano perpendicular a \vec{H} , es inversamente proporcional a éste, es de esperar que para campos suficientemente grandes prácticamente ningún electrón va a chocar con las paredes y por lo tanto la conductividad va a tender a σ_0 . Si llamamos $\sigma(H)$ a la conductividad en presencia de H , entonces esperamos que

$$\frac{\sigma(H)}{\sigma_0} \rightarrow 1 \quad \text{para } H \rightarrow \infty$$

Este fenómeno no debe de ninguna manera confundirse con el

conocido como magnetorresistencia. Este último consiste en que ρ también es función de H , y esto depende de las características particulares de la superficie de Fermi del metal. En el caso que ésta sea esférica el efecto no aparece. Nosotros nos ocuparemos del problema magnetomórfico, suponiendo una superficie de Fermi esférica, y dejaremos para más adelante el caso en que también hay magnetorresistencia y los fenómenos se superponen.

El caso descrito anteriormente es uno de los tantos que pueden presentarse debido a las diferentes geometrías posibles y también a las diferentes orientaciones de campo magnético con respecto a la corriente \vec{J} . Todos los casos son en principio atacables mediante el uso de la ecuación de Boltzmann, en la cual hay que introducir el término adicional proveniente de la fuerza magnética. Sondheimer (1952) da una reseña de todos los casos posibles y trata algunos de ellos. El método cinético es aplicable en el caso \vec{H} paralelo a \vec{J} y nosotros lo vamos a utilizar para alambres y en especial para láminas. Cuando \vec{H} es perpendicular a \vec{J} , el problema se complica debido a que aparece un voltaje de Hall y entonces la ecuación de Boltzmann resulta un método más sencillo.

a) Alambres. Dado que el campo magnético no afecta el movimiento de los electrones en la dirección de la corriente, el tratamiento es exactamente el mismo que el que se aplicó para obtener la ec. (III-10), salvo que ahora $(\vec{r} - \vec{r}_B)$ debe ser reemplazado por la distancia efectiva que recorrió el electrón entre ambos puntos. La integral fue evaluada por Chambers (1950) valiéndose de una serie de transformaciones que nosotros desarrollaremos aquí, por ser el mismo método que aplicaremos en el caso de la lámina.

Sea \underline{z} el eje del cilindro, y sean $\vec{E}(0,0,E)$; $\vec{H}(0,0,H)$, los campos eléctricos y magnético respectivamente. Un electrón que se mueva haciendo un ángulo θ con el eje \underline{z} y con velocidad v_F , va a describir una hélice y la proyección de ésta en el plano xy será un círculo de radio

$$r = \frac{m v_F c \sin \theta}{e H} = r_0 \sin \theta$$

Si el electrón recorre una distancia \underline{s} entre los puntos \vec{r}_A y \vec{r}_B y si ψ es el ángulo del arco de círculo, que determina la proyección de \underline{s} en el plano xy , entonces se ve inmediatamente que

$$s = r_0 \psi$$

y entonces

$$\frac{\sigma}{\sigma_0} = 1 - \frac{3}{4\pi S} \int_S dS \int_0^{2\pi} d\psi \int_0^\pi d\theta \sin \theta \cos^3 \theta e^{-r_0 \psi / l} \quad (2)$$

Lo que hemos hecho no es más que reemplazar la distancia entre \vec{r}_A y \vec{r}_B por el camino que recorre el electrón entre ambos puntos. Esta solución ha sido también encontrada por Dingle mediante integración directa de la ecuación de Boltzmann (ver Chambers, 1950). La exponencial que obtiene es de la forma

$$e^{-(r_0/l) f(r, v_r, v_\theta)}$$

donde $f(r, v_r, v_\theta)$ es una función más o menos complicada. Es posible demostrar que $f = \psi$ y por lo tanto la solución es la misma que la obtenida por el método cinético.

Para integrar (2) consideramos los electrones que en el instante considerado viajan con $\psi = \psi_0$, haciendo un ángulo θ con el eje \underline{z} y que interceptan la sección transversal sobre la cual se quiere calcular la corriente. La proyección de la

trayectoria de estos electrones sobre el plano xy es la misma que la trayectoria que recorrerían los electrones si tuvieran $v_z = 0$ y un radio de curvatura $r = r_0 \sin \theta$. Consideremos un electrón que choca con la pared en el punto P y que en Q se mueve con $\varphi = 0$ (ver fig.2). Si x_p, y_p , son las coordenadas del punto P y $\underline{x}, \underline{y}$ las de Q , y además ψ_1 es el ángulo que describió el electrón entre ambos puntos, se tiene

$$x_p = x + r(1 - \cos \psi_1)$$

$$y_p = y + r \sin \psi_1$$

entonces

$$[x + r(1 - \cos \psi_1)]^2 + [y + r \sin \psi_1]^2 = a^2 \quad (3)$$

siendo a el radio del cilindro. Esta es la ecuación de una circunferencia de radio a con centro en el punto R de coordenadas $[-r(1 - \cos \psi_1), -r \sin \psi_1]$.

Todos los electrones que desde que chocaron con la pared han girado un ángulo ψ y que viajan con $\varphi = 0$ están sobre esta circunferencia. Vamos a llamar $C(\psi)$ a las circunferencias de la familia (3); $C(0)$ es la que corresponde a la pared del cilindro. Si consideramos ahora dos circunferencias $C(\psi_1)$ y $C(\psi_2)$, vemos que estas se interseccionan en un punto dentro de $C(0)$. Esto significa que existe una doble solución y la que tiene sentido es la correspondiente al menor ángulo ya que la otra implica que el electrón ha realizado parte de su trayectoria fuera del cilindro. Entonces los electrones que han girado un ángulo ψ_1 desde que chocaron con la pared son los que están sobre el arco de $C(\psi_1)$ comprendido entre la

intersección de ésta con $C(0)$ y con la circunferencia de radio $(a - r)$ (para $r \leq a$) con centro en $(-r, 0)$, que es la envolvente del haz¹ (ver fig. 2).

Nosotros vamos a estar interesados en el área $S(\psi)$, ocupada por los electrones que desde que chocaron con la pared han girado ángulos comprendidos entre cero y ψ . La que se ve sombreada en fig. 3 es $S(\psi_r)$. Una vez conocida $S(\psi)$, la ec. (2) puede escribirse

$$\frac{\sigma}{\sigma_0} = 1 - \frac{3}{4\pi} \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\pi} d\theta \sin\theta \cos^2\theta \int_0^{2\pi} d\psi p(\psi) e^{-\psi/\eta}$$

donde $\eta = r/r_0$ y

$$p(\psi) = \frac{1}{S} \frac{\partial S(\psi)}{\partial \psi}$$

Debido a la simetría del problema es claro que integrando es independiente de φ y entonces la integración con respecto a esta variable puede efectuarse inmediatamente. De esta forma resulta

$$\frac{\sigma}{\sigma_0} = 1 - \frac{3}{2} \int_0^{\pi} d\theta \sin\theta \cos^2\theta \int_0^{2\pi} d\psi p(\psi) e^{-\psi/\eta} \quad (4)$$

Los valores de $p(\psi)$ han sido calculados por Chambers. La integral (4) ha sido evaluada por métodos en parte gráficos y en parte numéricos. El resultado es que decrece monotonamente desde su valor a campo nulo hasta el valor uno a medida que el campo aumenta. Algunas de estas curvas pueden verse en Chambers (1950) y en Sondheimer (1952).

1) El haz tiene en realidad dos envolventes, la segunda es una circunferencia con igual centro y radio $(a + r)$

b) Láminas. El método de integración que hemos utilizado para la ec. (2) hace uso de la simetría cilíndrica del problema. La ventaja radica en que debido a esta simetría es posible integrar con respecto a una de las variables en forma inmediata. En una lámina con campo longitudinal esta simetría no es tan evidente y la ecuación (2) ha sido resuelta poniendo ψ en función de las variables S, θ, φ . La integral triple que resulta es extremadamente complicada y para resolverla es necesario recurrir a una computadora (Yi - Han Kao, 1965). Nosotros vamos a desarrollar un método basado en el utilizado por Chambers para el cilindro, que permite reducir (2) a una integral simple y por lo tanto más fácil de resolver numéricamente.

La idea del método se basa en que una lámina de espesor a puede ser considerada como un cilindro hueco con espesor de pared a , en el límite cuando el diámetro medio del cilindro tiende a infinito, manteniéndose el espesor de la pared constante. Es evidente que ahora el problema tiene simetría cilíndrica y por lo tanto el método utilizado en a) puede aplicarse directamente. Para mayor claridad vamos a estudiar primero el problema de un medio infinito en el cual hay un agujero cilíndrico de radio a_1 . El caso es esencialmente análogo al anterior. Tomaremos el caso $r < a_1$, por ser el único que nos va a interesar. Los electrones que viajan con $\varphi = 0$ haciendo un ángulo θ con el eje z y que desde que chocaron con la pared han girado un ángulo ψ , están sobre una porción de arco de circunferencia $C(\psi)$ de la familia (3). Por consideraciones análogas a las hechas anteriormente puede verse que esta porción de arco es la comprendida entre las intersecciones de $C(\psi)$

con $C(0)$ y con la envolvente del haz, de radio $a + r$. Llamamos $S_1(\psi)$ al área ocupada por los electrones que desde que chocaron con la pared han girado ángulos comprendidos entre cero y ψ . Este área es la que aparece sombreada en la fig. 4. Ahora supongamos que el medio conductor sea el comprendido entre dos cilindros concéntricos de radios a_1 y a_2 , siendo $a_1 < a_2$ y $a_2 - a_1 = a$. Consideraremos solamente los electrones que han chocado con la pared interior. El problema consiste en calcular $S(\psi)$ para estos electrones en el caso $r \leq a_1$. Como dijimos, esta situación es la única que interesa ya que es la única que se va a presentar en el límite. Llamamos $C(\psi)$ a las circunferencias de la familia (3) con radio a_1 . Hay dos casos posibles:

i) $r \leq a/2$

Este caso, es simple ya que los arcos de las $C(\psi)$ que contienen a los electrones bajo consideración están siempre contenidos entre las paredes y entonces el cálculo es análogo al de fig. 4. Entonces en este caso

$$S(\psi) = S_1(\psi)$$

para $0 \leq \psi \leq 2\pi$

ii) $r > a/2$

Ahora hay cuatro situaciones diferentes a considerar ; (ver fig.5): $0 \leq \psi \leq \psi_1$: Aquí estamos en las mismas condiciones que en el caso anterior y en consecuencia $S(\psi) = S_1(\psi)$
 $\psi_1 \leq \psi \leq \psi_2$: Ahora $C(\psi)$ corta a C_2 en dos puntos y la situación es diferente. Entonces

$$S(\psi) = S_2(\psi)$$

$\psi_2 \leq \psi \leq \psi_3$: En este intervalo $C(\psi)$ corta a C_2 y C_3 , entonces

$$S(\psi) = S_3(\psi)$$

$\psi_3 \leq \psi \leq \psi_4$: Ahora $C(\psi)$ corta C_4

$$S(\psi) = S_4(\psi)$$

Para ángulos mayores que ψ_4 , $C(\psi)$ corta a C_4 en el interior de C_1 y entonces S no es más función de ψ .

Definimos ahora

$$p(\psi) = \frac{1}{\pi} \lim_{\substack{a_1, a_2 \rightarrow \infty \\ a_1 - a_2 = a}} \frac{1}{(a_1^2 - a_2^2)} \frac{\partial S(\psi)}{\partial \psi} \quad (5)$$

Según vimos antes, va a haber cuatro expresiones diferentes de acuerdo a los casos que hemos considerado. Los $p(\psi)$ están calculados en el apéndice A, así como los valores límites de los ángulos ψ_1, ψ_2 , etc. Las expresiones requeridas son

$$\pi p_1(\psi) = \frac{r}{2a} (1 + \cos \psi/2)$$

$$\pi p_2(\psi) = \frac{r}{2a} (1 + \cos \psi/2) - \frac{1}{2} \cotg \frac{\psi}{2} \left(\frac{4r^2}{a^2} \sin^2 \frac{\psi}{2} - 1 \right)^{1/2}$$

$$\pi p_4(\psi) = \frac{r}{2a} (1 + \cos \psi/2) + \frac{1}{2} - \frac{r}{a}$$

$$\psi_1 = 2 \operatorname{sen}^{-1} \frac{a}{2r}$$

$$\psi_2 = \cos^{-1} \left(1 - \frac{a}{r} \right)$$

$$\psi_4 = 2 \cos^{-1} \left(1 - \frac{a}{r} \right)$$

$$\cos^{-1} \equiv \arccos ; \quad \operatorname{sen}^{-1} \equiv \operatorname{arcsen}$$

No es necesario calcular $p_3(\psi)$ porque en el límite $\psi_3 = \psi_2$

Hasta el momento hemos considerado solamente aquellos electrones que han chocado con la pared interior. En el caso límite los que han realizado choques con la pared exterior van a contribuir en igual forma y por lo tanto no es necesario considerarlos separadamente. Poniendo en (2) $\sin \theta = x$, tenemos

$$\frac{\sigma}{\sigma_0} = 3 \int_0^1 x(1-x^2)^{1/2} g(x) dx \quad (7)$$

donde

$$g(x) = 1 - 2 \int_{\psi_2(x)}^{\psi_1(x)} p(x, \psi) e^{-\psi/\eta} d\psi$$

El factor 2 resulta de incluir los electrones que han chocado con la pared exterior.

Hemos visto que hay dos casos diferentes según que $r = r_0 x$ sea mayor o menor que $a/2$.

Para $x \leq x_1 = \frac{a}{2r_0}$, $p(\psi) = p_1(\psi)$ para todo ψ y entonces $\psi_2(x) = 0$, $\psi_1(x) = 2\pi$

$$g_1(x) = 1 - 2 \int_0^{2\pi} p_1(x, \psi) e^{-\psi/\eta} d\psi$$

Calculando la integral resulta

$$g_1(x) = 1 - \frac{\mu x}{\pi} \frac{\eta}{4+\eta^2} [8 + \eta^2 (1 - e^{-2\pi/\eta})] \quad (8)$$

donde $\mu = r_0/a$

Para $x \gg x_1$, estamos en la otra situación y entonces $\psi_a = 0$; $\psi_b = \psi_4$. Además el intervalo de integración debe dividirse en tres partes según los tres casos que hemos señalado.

$$g_2(x) = 1 - 2 \int_0^{\psi_1} p_1(x, \psi) e^{-\psi/\eta} d\psi - 2 \int_{\psi_1}^{\psi_2} p_2(x, \psi) e^{-\psi/\eta} d\psi - 2 \int_{\psi_2}^{\psi_4} p_4(x, \psi) e^{-\psi/\eta} d\psi$$

Reemplazando los valores de $p(x, \psi)$ dados en (6) resulta

$$g_2(x) = 1 + \frac{1}{\pi} \left\{ e^{-\psi_2/\eta} [\mu \eta x (f(x) e^{-\psi_2/\eta} + 2) + 2(e^{-\psi_2/\eta} - 1)] - \mu \eta x \frac{8 + \eta^2}{4 + \eta^2} + \int_{\psi_1}^{\psi_2} \cotg \frac{\psi}{2} (4\mu^2 x^2 \sin^2 \frac{\psi}{2} - 1)^{1/2} e^{-\psi/\eta} d\psi \right\} \quad (9)$$

donde

$$f(x) = \frac{4 \cos \frac{\psi_2}{2} - 2 \eta \sin \frac{\psi_2}{2}}{4 + \eta^2} - 1$$

La integral a calcular es entonces

$$\frac{\bar{\sigma}}{\sigma_0} = 3 \int_0^{x_1} x(1-x^2)^{\frac{1}{2}} g_1(x) dx + 3 \int_{x_1}^1 x(1-x^2)^{\frac{1}{2}} g_2(x) dx \quad (10)$$

donde g_1 y g_2 están dados por (8) y (9) respectivamente.

Es posible demostrar que en el límite $\eta = 0$, la expresión (10) se reduce a la (III-13), correspondiente a la lámina en ausencia de campo. La demostración puede verse en el apéndice B.

Cuando $\frac{1}{\mu} \gg 2$, se tiene que $x_1 = 1$ y entonces (10) puede integrarse inmediatamente. Resolviendo la integral para este caso resulta

$$\frac{\bar{\sigma}}{\sigma_0} = 1 - \frac{3}{16} \mu \frac{\eta}{4 + \eta^2} [8 + \eta^2 (1 - e^{-2\eta/\eta})] \quad (11)$$

Cuando $\frac{1}{\mu} \ll 2$, la integral (10) es doble dado que g_2 contiene una integral sobre la variable ψ .

Vamos a estudiar ahora la integral

$$I = \int_{\psi_1}^{\psi_2} \cotg \frac{\psi}{2} (k^2 \sin^2 \frac{\psi}{2} - 1)^{1/2} e^{-\psi/2} d\psi$$

donde hemos puesto $k = 2/\mu$

Para $2 \gg 1$, la integral puede reemplazarse con suficiente aproximación por

$$I \approx 2 e^{-\overline{\psi}/2} \left\{ A \left[\sqrt{k-1} - \cos^{-1} \frac{1}{\sqrt{k}} \right] - \frac{B}{2k} \left[\sqrt{k(k-1)} - \ln(\sqrt{k} + \sqrt{k-1}) \right] + \frac{C}{2} \left[\frac{k-1}{\sqrt{k}} - \frac{(k+1)^2}{2k} \sin^{-1} \frac{k-1}{k+1} \right] + \frac{(k-1)^2}{4k} \pi \right\} \quad (12)$$

El error cometido en esta aproximación es

$$\frac{\Delta I}{I} < \frac{0,005}{2^3} \quad (13)$$

Los cálculos correspondientes a (12) y (13), así como las definiciones de A, B, C, y $\overline{\psi}$, pueden verse en el apéndice C.

La integral (10) ha sido calculada haciendo uso de (9) y (12). Los resultados para tres diferentes valores de $\alpha = a/l$ se muestran en la fig. 6. En base a las aproximaciones hechas en los cálculos, puede estimarse que el error cometido es inferior al 3%. La limitación de la validez de la aproximación (12) impues-

ta por la condición $\eta \gg 1$, implica $\frac{1}{\mu} \gg \alpha$. Como se ve en la fig. 6, para $\alpha \leq 0,5$, es posible obtener practicamente toda la curva ya que los valores para $\frac{1}{\mu} = 0$ son bien conocidos.

El acuerdo de nuestros resultados con los obtenidos por Yi-Han Kao es en general bueno, salvo en algunos puntos en los cuales la discrepancia llega a ser aproximadamente del 5%. Esta diferencia parece ser algo mayor que el error que hemos estimado en nuestros cálculos. Por otra parte el autor no hace ninguna estimación de el error que afecta a sus curvas.

Una de las características sobresalientes de las curvas es la presencia de un máximo de resistividad. Para comprender este comportamiento conviene señalar que en una lámina delgada, en ausencia de campo magnético, la corriente es principalmente debida a los electrones que viajan en dirección aproximadamente paralela a la superficie (Lovell, 1936), (Ziman, 1962). Cuando se aplica un campo magnético, la trayectoria va a ser modificada en forma tal que van a realizar colisiones con las paredes. Esto puede resultar en un aumento de la resistividad total. En campos altos, la resistividad debe tender a su valor intrínseco que es menor que el que tiene a campo nulo y en consecuencia debe aparecer un máximo.

APENDICE A

Vamos a hacer el cálculo explícito, de las cantidades $p(\Psi)$ y Ψ que aparecen en ec. (IV-6). De la fig. 5 pueden deducirse inmediatamente las siguientes relaciones

$$\Psi_1(a_1, a_2, r) = 2 \operatorname{sen}^{-1} \frac{a}{2r}$$

$$\Psi_2(a_1, a_2, r) = \cos^{-1} \frac{(a_1+r)^2 + r^2 - a_2^2}{2(a_1+r)r}$$

$$\Psi_3(a_1, a_2, r) = \cos^{-1} \frac{a_1^2 - (a_2-r)^2 - r^2}{2(a_2-r)r} \quad (\text{A-1})$$

$$\Psi_4(a_1, a_2, r) = 2 \cos^{-1} \frac{a_1^2 - (a_2-r)^2 - r^2}{2(a_2-r)r}$$

Haciendo el paso al límite para $(a_1, a_2) \rightarrow \infty, (a_2 - a_1) = a$, se ve enseguida que se obtienen los valores dados en (IV-6).

Ahora vamos a calcular $S(a_1, a_2, r, \Psi)$ para los diferentes casos teniendo en cuenta que sólo consideramos $r < a_1$.

Para $\Psi \leq \Psi_1$, la situación es la mostrada en la fig. A1. Los cálculos de las superficies dan los siguientes resultados

$$S_a = a_1^2 \delta + 2ra_1 \operatorname{sen} \frac{\Psi}{2} \cos \frac{\delta}{2}$$

$$S_b = \frac{1}{2} (r+a_1)^2 \Psi - \frac{1}{2} (\delta + \Psi) a_1^2 - r \operatorname{sen} \frac{\Psi}{2} (a_1 \cos \frac{\delta}{2} + r \cos \frac{\Psi}{2})$$

$$S_1 = S_a + S_b \quad (\text{A-2})$$

$$\operatorname{sen} \frac{\delta}{2} = \frac{r}{a} \operatorname{sen} \frac{\Psi}{2}$$

Para calcular las otras cantidades hacemos uso de la fig. A2.

Para S_2 ponemos

$$S_2 = S_1 - S'_2$$

siendo S'_2 el área sombreada. Además

$$S'_2 = \frac{1}{2} a_1^2 \alpha - \frac{1}{2} a_2^2 \beta + \frac{1}{2} [4r^2 \sin^2 \frac{\psi}{2} (2a_1^2 + 2a_2^2 - 4r^2 \sin^2 \frac{\psi}{2}) + 2a_1 a_2 - a_1^2 - a_2^2]^{1/2}$$

donde

(A-3)

$$\cos \frac{\alpha}{2} = \frac{a_2^2 - a_1^2 - 4r^2 \sin^2 \frac{\psi}{2}}{4a_1 r \sin \frac{\psi}{2}}$$

$$\cos \frac{\beta}{2} = \frac{a_2^2 - a_1^2 + 4r^2 \sin^2 \frac{\psi}{2}}{4a_2 r \sin \frac{\psi}{2}}$$

El área S_4 es la encerrada por la curva C_1 que pasa por los puntos P_1, P_2, P_3, P_4, P_5 . Los electrones contenidos en el triángulo P_2, P_3, P_6 no cuentan porque éstos han chocado con C_2 . Como la cantidad que interesa calcular es $\frac{\delta S}{\delta \psi}$, es igualmente apropiado calcular S'_4 , que es el área del triángulo P_1, P_2, P_7 , teniendo en cuenta que $\frac{\partial S_4}{\partial \psi} = -\frac{\partial S'_4}{\partial \psi}$ de la figura se ve que

$$S'_4 = \frac{1}{2} (a_2 - r)^2 \delta - a_1^2 \delta + 2OAP_7 - 2OAP_1 \quad (A-4)$$

donde

$$\frac{\delta}{2} = \pi - \xi - \frac{\psi}{2} \quad (A-5)$$

y

$$\cos \xi = \frac{(a_2 - r)^2 + r^2 - a_1^2}{2(a_2 - r)r}$$

entonces

$$\frac{\partial \xi}{\partial \psi} = 0$$

También tenemos que

$$\cos(\xi + \delta) = \frac{a_1^2 + r^2 - (a_2 - r)^2}{2a_1 r}$$

por lo tanto

$$\frac{\partial(\xi + \delta)}{\partial \psi} = 0$$

Haciendo uso de la relación

$$\sin\left(\frac{\psi}{2} - \xi\right) = \frac{r \sin \psi/2}{a_1} \quad (\text{A-6})$$

y dado que $\xi + \delta = \text{cte.}$, es posible poner

$$\delta = \text{cte} - \frac{\psi}{2} + \sin^{-1} \frac{r \sin \psi/2}{a_1} \quad (\text{A-7})$$

Para calcular los dos últimos términos de (A-4) ponemos

$$OAP_7 - O'AP_1 = OAP_7 + OAO' - OAO' - O'AP_1 = OO'P_7 - OO'P_1 \quad (\text{A-8})$$

Como $\xi + \delta = \text{cte.}$ tenemos

$$\frac{\partial(OO'P_7)}{\partial \psi} = 0$$

Por último es fácil ver que

$$OO'P_1 = \frac{1}{2} a_1 r \operatorname{sen} \delta \quad (\text{A-9})$$

Ahora vamos a calcular las cantidades $p(\psi)$ haciendo uso de la definición (IV-5); cada vez que hablemos de paso al límite lo haremos refiriendonos a las condiciones especificadas en esta definición. De la relación entre δ y ψ , dada en la ec. (A-2), resulta

$$\delta \rightarrow \frac{2r \operatorname{sen} \psi/2}{a_1} \quad ; \quad \cos \delta/2 \rightarrow 1$$

Utilizando la expresión de S_1 dada en (A-2) se obtiene la expresión correspondiente a $p_1(\psi)$ dada en (IV-5).

A partir de la ec. (A-3) se obtiene para S_2

$$\lim_{a_2^2 - a_1^2} \frac{S_2'}{a_2^2 - a_1^2} = \lim \frac{1}{4} a_1 (\alpha - \beta) - \frac{1}{2} \beta + \frac{1}{2} \left(\frac{4r^2 \operatorname{sen}^2 \psi/2}{a_1^2} - 1 \right)^{1/2} \quad (\text{A-10})$$

Hay que calcular $\lim \frac{1}{4} a_1 (\alpha - \beta)$; para esto usamos la relación

$$\frac{\alpha - \beta}{2} = \eta$$

donde

$$\cos \eta = \frac{a_1^2 + a_2^2 - 4r^2 \operatorname{sen}^2 \psi/2}{2 a_1 a_2}$$

en el límite $\cos \eta \rightarrow 1$, o sea $\eta \rightarrow 0$, y se puede poner

$$\eta = \operatorname{sen} \eta = \left[1 - \left(\frac{a_1^2 + a_2^2 - 4r^2 \operatorname{sen}^2 \psi/2}{2 a_1 a_2} \right)^2 \right]^{1/2}$$

entonces

$$a_1 \gamma = \left[a_1^2 - \left(\frac{a_1^2 + a_2^2 - l^2}{2a_2} \right)^2 \right]^{1/2}$$

siendo $l = 2r \sin \psi/2$

Expresando la raíz en función de a_2 y haciendo el paso al límite resulta

$$\lim \sqrt{\quad} = a \sqrt{\frac{l^2}{a^2} - 1}$$

y entonces

$$\frac{1}{2a} \lim a_1 \gamma = \frac{1}{2} \left(\frac{4r^2}{a^2} \sin^2 \psi/2 - 1 \right)^{1/2}$$

Reemplazando esta expresión en (A-9) y derivando se obtiene el resultado dado en (IV-6).

Para S_4 se tiene

$$S_4' = \frac{1}{2} (a_2 - r)^2 \delta - a_1^2 \delta - a_1 r \sin \psi \tag{A-11}$$

en donde hemos hecho uso de (A-4), (A-8) y (A-9). De (A-5) y (A-7) tenemos

$$\frac{\partial \delta}{\partial \psi} = -1; \quad \frac{\partial \psi}{\partial \psi} = \frac{1}{2} - \frac{r \cos \psi/2}{2a_1 \left(1 - \frac{r^2 \sin^2 \psi/2}{a_1^2} \right)^{1/2}}$$

Además por (A-6)

$$\sin \psi = \sin \psi \left(1 - \frac{r^2 \sin^2 \psi/2}{a_1^2} \right)^{1/2} + \cos \frac{\psi}{2} \frac{r \sin \psi/2}{a_1}$$

Reemplazando estas expresiones en (A-11) resulta

$$\frac{\partial S_4'}{\partial \psi} = -\frac{1}{2} (a_2 - r)^2 + \frac{1}{2} a_1^2 - a_1 r \left(1 - \frac{r^2 \sin^2 \psi}{a_1^2}\right)^{1/2} + \frac{1}{2} r^2 \cos \psi$$

Haciendo el paso al límite se obtiene la expresión dada en (IV-6).

APENDICE B

Para demostrar que la expresión (IV-10) tiende a la (III-13) cuando $H \rightarrow 0$, haremos el siguiente cambio de variable

$$r_0 \psi \sin \theta = b \quad (\text{B-1})$$

Utilizando los valores de ψ_1 y ψ_2 dados en (IV-6) resulta

$$\psi_1 \rightarrow \frac{a}{r_0 \sin \theta} \quad ; \quad \psi_2 \rightarrow 2 \left(\frac{a}{2 r_0 \sin \theta} \right)^{1/2}$$

y entonces

$$b_1 = r_0 \psi_1 \sin \theta = a$$

$$b_2 = r_0 \psi_2 \sin \theta \rightarrow \infty$$

Las expresiones para p_1 y p_2 , dadas en (IV-6), deben expresarse en función de la nueva variable, haciéndose además el paso al límite para $\psi \rightarrow 0$. Hecho esto obtenemos

$$p_1 = \frac{r_0 \sin \theta}{\pi a}$$

$$p_2 = \frac{r_0 \sin \theta}{\pi a} - \frac{r_0 \sin \theta}{\pi a} \left(1 - \frac{a^2}{b^2}\right)^{1/2}$$

La integral (IV-10) resulta entonces

$$\frac{G}{G_0} = 3 \int_0^1 x(1-x^2)^{1/2} dx \left[1 - \frac{2}{\pi a} \int_0^\infty e^{-b/l \sin \theta} db + \right. \\ \left. + \frac{2}{\pi a} \int_a^\infty \left(1 - \frac{a^2}{b^2}\right)^{1/2} e^{-b/l \sin \theta} db \right] \quad (B-2)$$

La primera integral es inmediata, Integrando por partes la segunda resulta

$$\frac{2}{\pi a} l \sin \theta \int_a^\infty e^{-b/l \sin \theta} \frac{a^2 db}{b^3 \sqrt{1 - a^2/b^2}}$$

Haciendo el cambio de variable

$$\frac{a}{b} = \cos \varphi \quad db = \frac{a \sin \varphi d\varphi}{\cos^2 \varphi}$$

la integral queda

$$\frac{2}{\pi a} l \sin \theta \int_0^{\pi/2} e^{-a/l \cos \varphi \sin \theta} \cos \varphi d\varphi$$

Reemplazando en (B-2) se obtiene una expresión idéntica a (III-13).

APENDICE C.

La integral

$$I = \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} e^{\cot \varphi} (4\mu^2 x^2 \sin^2 \frac{\varphi}{2} - 1)^{1/2} e^{-\varphi/2} d\varphi \quad (C-1)$$

no es expresable mediante funciones elementales pero es posi-

ble resolverla en forma aproximada. Para esto vamos a calcular cual es el valor máximo del intervalo de integración. Los valores de los límites son

$$\sin \frac{\varphi_1}{2} = z$$

$$z = \frac{a}{2r}$$

$$\cos \varphi_2 = (1 - 2z)$$

La última expresión puede escribirse

$$\sin^2 \frac{\varphi_2}{2} = z$$

Entonces

$$\frac{\varphi_2 - \varphi_1}{2} = \sin^{-1} \sqrt{z} - \sin^{-1} z \quad (C-2)$$

Para encontrar el máximo de esta función debemos resolver la ecuación

$$\frac{1}{2} \frac{d(\varphi_2 - \varphi_1)}{dz} = \frac{1}{2\sqrt{z}\sqrt{1-z}} - \frac{1}{\sqrt{1-z^2}} = 0$$

La raíz es

$$z = \frac{1}{3}$$

Reemplazando este valor en (C-2) obtenemos

$$(\varphi_2 - \varphi_1)_{\text{máx}} = 0,55 \quad (C-3)$$

Ahora escribimos (C-1) de la siguiente manera

$$I = e^{-\bar{\varphi}/\rho} \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} \cotg \frac{\varphi}{2} (k^2 \sin^2 \frac{\varphi}{2} - 1)^{1/2} e^{-(\varphi - \bar{\varphi})/\rho} d\varphi$$

donde

$$\bar{\varphi} = \frac{\varphi_1 + \varphi_2}{2} ; \quad k = 2\mu x$$

Desarrollamos la exponencial hasta el segundo orden

$$e^{-(\psi-\bar{\psi})/\eta} \approx 1 - \frac{\psi-\bar{\psi}}{\eta} + \frac{1}{2} \frac{(\psi-\bar{\psi})^2}{\eta^2} = 1 - \frac{2}{\eta} \frac{\psi-\bar{\psi}}{2} + \frac{2}{\eta^2} \left(\frac{\psi-\bar{\psi}}{2} \right)^2 \quad (C-4)$$

Ahora vamos a reemplazar el ángulo por el seno

$$e^{-(\psi-\bar{\psi})/\eta} \approx 1 - \frac{2}{\eta} \sin \frac{\psi-\bar{\psi}}{2} + \frac{4}{\eta^2} (1 - \cos \frac{\psi-\bar{\psi}}{2}) \quad (C-5)$$

En esta última expresión hemos hecho uso de la identidad

$$2 \sin^2 \frac{\psi-\bar{\psi}}{4} = 1 - \cos \frac{\psi-\bar{\psi}}{2}$$

Desarrollando (C-5) y reemplazando en (C-1) obtenemos

$$I \approx 2 e^{-\bar{\psi}/\eta} \int_{t_1}^{t_2} (k^2 t^2 - 1)^{1/2} [A - Bt + C\sqrt{1-t^2}] \frac{dt}{t}$$

donde

$$t = \sin \frac{\psi}{2} \quad ; \quad t_1 = \frac{1}{k} \quad ; \quad t_2 = \frac{1}{\sqrt{k}}$$

y además

$$A = \left(1 + \frac{4}{\eta^2} \right) ; \quad B = \left(\frac{2}{\eta} \cos \frac{\bar{\psi}}{2} + \frac{4}{\eta^2} \sin \frac{\bar{\psi}}{2} \right) ;$$

$$C = \left(\frac{2}{\eta} \sin \frac{\bar{\psi}}{2} - \frac{4}{\eta^2} \cos \frac{\bar{\psi}}{2} \right)$$

Integrando resulta (IV-12).

Para estimar el error de la aproximación consideramos únicamente el caso $\eta \gg 1$ para estar seguros de una rápida convergencia en el desarrollo de la exponencial. En vez de (C-5) vamos a hacer uso de (C-4) ya que en todo caso el error cometido

al reemplazar el ángulo por el seno es menor que el cometido al reemplazar la exponencial por su desarrollo hasta el segundo orden.

La integral (C-1) es de la forma

$$I = \int_{\psi_1}^{\psi_2} g h d\psi \quad (C-6)$$

y entonces

$$\Delta I = \int_{\psi_1}^{\psi_2} g \Delta h d\psi$$

donde

$$\Delta h = e^{-\frac{(\psi - \bar{\psi})}{\eta}} - 1 + \frac{\psi - \bar{\psi}}{\eta} - \frac{1}{2} \frac{(\psi - \bar{\psi})^2}{\eta^2} \approx \frac{(\psi - \bar{\psi})^3}{6\eta^3}$$

Reemplazando en la expresión para ΔI resulta

$$\Delta I = \frac{1}{6\eta^3} \int_{\psi_1}^{\psi_2} g (\psi - \bar{\psi})^3 d\psi < \frac{(0,3)^3}{6\eta^3} \int_{\psi_1}^{\psi_2} g d\psi \quad (C-7)$$

La última desigualdad es consecuencia de que

$$|\psi - \bar{\psi}|_{\max} \approx 0,3$$

como puede verse enseguida de (C-3).

De (C-6) y (C-7) resulta

$$\frac{\Delta I}{I} < \frac{(0,3)^3}{6\eta^3} \frac{\int_{\psi_1}^{\psi_2} g d\psi}{\int_{\psi_1}^{\psi_2} g e^{-\frac{(\psi - \bar{\psi})}{\eta}} d\psi}$$

A los efectos de estimar el error podemos considerar que el cociente de las integrales es igual a uno y entonces

$$\frac{\Delta I}{I} < \frac{(0,3)^3}{6\eta^3}$$

V - PROBLEMAS EXPERIMENTALES

En ausencia de campo magnético el efecto de borde queda generalmente expresado por

$$\frac{\sigma}{\sigma_0} = f\left(\frac{l}{a}, p\right) \quad (1)$$

donde l/a es la relación entre el camino libre medio y el espesor (o diámetro) de la muestra, p es el coeficiente de reflexión especular en la superficie y σ_0 es la conductividad intrínseca del metal.

Lo que se hace experimentalmente es medir σ y luego comparar los resultados con los cálculos teóricos. Para cada muestra las incógnitas son p , l , y σ_0 . Evidentemente, la comparación se simplifica si se conoce el valor de p . Trabajos previos en efectos de borde (Andrew, 1949), y en efecto skin anómalo (Chambers, 1950 a), indican que el valor más aceptable es $p = 0$.

La validez de la ecuación (1) es general, en cambio los cálculos teóricos de σ se basan en ciertas condiciones de idealidad que no son logradas en la práctica.

Vamos a analizar los dos hechos principales que pueden originar desacuerdo entre los resultados teóricos y experimentales.

Choque inelástico: Como ya vimos, este tipo de choque puede imposibilitar la definición de un tiempo de relajación, ya que éste puede depender de la fuerza que aparta al sistema de su estado de equilibrio. Una forma obvia de solucionar experimentalmente esta dificultad, es bajar suficientemente la temperatura hasta que los choques sean casi exclusivamente debidos a

imperfecciones. Sin embargo, para que el efecto de borde sea visible, el metal debe ser de pureza suficientemente elevada como para que λ sea del orden de a . En metales con temperatura de Debye baja, es necesario trabajar a temperaturas por debajo de la de baño de helio líquido para alcanzar las condiciones requeridas. Por otra parte, siempre que se trabaje dentro del rango de validez de la ley de Ohm, es razonable tratar de describir el fenómeno de conductividad mediante el concepto de relajación. Sin embargo, τ no va a ser el mismo en la conductividad eléctrica que en la térmica; esto se debe a que los choques no van a tener la misma efectividad en ambos procesos.

Si los electrones son dispersados por imperfecciones y fonones, entonces va a tener sentido hablar de un τ siempre que las probabilidades de choque sean independientes. En este caso la probabilidad total será la suma de las probabilidades individuales y entonces

$$\frac{1}{\tau} = \frac{1}{\tau_1} + \frac{1}{\tau_2} \quad (2)$$

Esta relación es conocida como la regla de Matthiesen. Aún cuando la regla no se verifique, las desviaciones no van a ser muy grandes (Ziman, 1962), (Kohler, 1949).

Superficie de Fermi no esférica: Cuando la superficie de Fermi no es esférica, el tiempo de relajación va a ser en general función de la posición del electrón sobre la superficie. Como los cálculos teóricos del efecto de borde suponen que τ es un número, es posible que en algunos casos el acuerdo entre teoría y experimento sea pobre. El sodio es en este sentido un metal casi ideal por tener simetría cúbica y una superficie

de Fermi casi esférica. Sin embargo, en metales con estructura electrónica más complicada, como mercurio y estaño, el acuerdo resultó bueno. (Andrew, 1949). A falta de una teoría más exacta, lo único que puede hacerse desde el punto de vista experimental es ver hasta que punto las teorías simples son capaces de describir el fenómeno.

Otro problema es el de variar experimentalmente la relación l/a . En principio, hay dos formas posibles. Si se trabaja en la zona en que la resistencia no es residual, se puede variar l variando la temperatura. Este método es objetable porque como σ_0 no puede ser medida con la muestra fina, es necesario hacer mediciones en una suficientemente gruesa y suponer que las propiedades intrínsecas de ambas son idénticas. Además, como ya vimos, es posible que la teoría deje de ser válida cuando la resistencia no es puramente residual.

Otro método consiste en realizar mediciones en muestras de diferente espesor. Aquí se presenta una dificultad similar a la anterior y es que no se puede asegurar que todas las muestras tengan el mismo l . En realidad, es muy posible que no lo tengan, ya que en el caso de láminas, por ejemplo, las más finas tienen probablemente una mayor concentración de impurezas y tensiones debido al proceso de laminación.

Todas estas dificultades se resuelven haciendo mediciones en presencia de campo magnético. Consideremos el caso particular en que el campo sea paralelo a la corriente. Como vimos, el efecto de borde se expresa mediante la relación

$$\frac{\sigma}{\sigma_0} = f(l/a, r_0/a) \quad (3)$$

donde r_0 es el radio de giro del electrón en el campo magnético. Para un valor fijo de l/a , es posible obtener una curva experimental variando el campo. Las incógnitas a determinar son ρ , $m v$, y σ_0 , y el método de hacerlo será explicado más adelante.

Con este tipo de mediciones, es posible obtener información utilizando una sola muestra a una sola temperatura; además de poder determinarse el camino libre medio, se determina el impulso del electrón. Los experimentos en presencia de campo magnético tienen un inconveniente debido a que en general los metales presentan magnetorresistencia intrínseca, es decir que su resistencia es función del campo, aún en ausencia de efectos de borde. En consecuencia medir el efecto magnetomórfico puro es prácticamente imposible. En sodio la magnetorresistencia es muy baja y entonces el efecto, de borde puede medirse limpiamente. Chambers (1950) ha hecho mediciones en alambres de este metal y ha encontrado un buen acuerdo entre teoría y experimento.

Es posible dar argumentos fenomenológicos que permiten obtener el efecto magnetomórfico a partir de los datos experimentales en metales no ideales. El método es debido a Olsen (1958) y se basa en el siguiente argumento: En ausencia de efecto de borde los metales cumplen con bastante generalidad la ley

$$\frac{\rho(H) - \rho(0)}{\rho(0)} = F\left[\frac{H}{\rho(0)}\right] \quad (4)$$

donde $\rho(H)$ es la resistividad medida a campo y $\rho(0)$ a campo nulo. F es una función que puede ser diferente para cada metal. La relación (4) se conoce como regla de Kohler. Si bien

el modelo del electrón libre no da magnetorresistencia, lo podemos usar para tratar de interpretar que significado tiene la relación $H/\rho(0)$. Haciendo un simple cálculo resulta

$$\frac{H}{\rho(0)} = \frac{mecn}{r_0} \quad (5)$$

donde n es el número de electrones libres por unidad de volumen, e la carga y c la velocidad de la luz. En base a (5) podemos decir que $H/\rho(0)$ da una idea de la relación entre el camino libre medio y el radio de giro del electrón, o lo que es lo mismo, de la relación entre la frecuencia ciclotrónica y el tiempo de relajación. En general se supone que el tiempo de relajación no se modifica por el efecto del campo. Por otra parte, cuando hay efectos de borde, se reduce por debajo de su valor intrínseco debido al choque de los electrones con las paredes de la muestra. En este caso en vez de (4) debemos poner

$$\frac{\rho(H) - \rho_s(H)}{\rho_s(H)} = F \left[\frac{H}{\rho_s(H)} \right] \quad (6)$$

$\rho(H)$ es como antes la resistividad medida a campo H , $\rho_s(H)$ es la resistividad que se mediría en una muestra con el mismo ρ pero sin magnetorresistencia, y F es la misma función que en (4). Es necesario entonces medir la magnetorresistencia de una muestra gruesa de metal que se desea estudiar para verificar que la regla de Kohler es efectivamente satisfecha por el mismo y para determinar la forma de la función, F . Una vez que F es conocida hay que obtener $\rho_s(H)$ a partir de (6). Como $\rho_s(H)$ aparece en el argumento de F , el cálculo es algo

laborioso y hay que ir haciendo aproximaciones sucesivas pero el resultado puede obtenerse con tanta exactitud como se quiera.

La validez de (6) es por supuesto cuestionable pero por el momento es la única forma de poder deducir los valores de $\rho_s(H)$ a partir de los resultados experimentales y por lo tanto nosotros la supondremos válida. La fórmula (6) ha sido usada por Försvoll y Holwech (1963) para el caso de campo transversal a la corriente y por Olsen (1958) y Lutes y Clayton (1965) para efectos longitudinales en alambres de indio y aluminio respectivamente. Salvo en los resultados de Olsen, los valores obtenidos mediante la ec. (6) resultaron en buen acuerdo con la teoría. Por otra parte de la Cruz el al. (a ser publicado en Phys. Rev.) han utilizado los datos de Olsen para hacer la comparación con la teoría usando un criterio diferente en la determinación de las cantidades σ_0 , ρ , y mv que el utilizado por Olsen, y similar al que utilizaremos nosotros, obteniendo de esta manera un acuerdo mucho mejor.

VI - DETALLES EXPERIMENTALES.

Construcción de las muestras.

El efecto de borde es tanto más pronunciado cuanto menor es la relación α/f . Sin embargo no es suficiente con reducir el espesor de la muestra a la mitad para que la relación quede reducida en la misma proporción. Es posible inclusive que cuanto más fina sea la muestra, mayor sea la relación. Esto se debe a que en el proceso de laminación se pueden ir introduciendo impurezas en forma tal de acortar el camino libre medio. Hay que tener en cuenta que cuanto mayor es la pureza del material con que se trabaja, más seriamente se va a ver afectado el camino libre medio por efecto de las impurezas introducidas. Consecuentemente, la laminación se hizo poniendo el material entre dos planchas de teflón las cuales fueron limpiadas cuidadosamente con acetona.

Las muestras V, VI, VII, VIII, IX y X, utilizadas en las mediciones de efectos de borde fueron cortadas en forma de lámina de aproximadamente de 0,4 cm. de ancho. El material era de pureza 99,9999%, según datos de la fábrica Consolidated Mining and Smelting Company of Canada, Limited. Las muestras I, II y III, utilizadas en la determinación de la función de Kohler, tenían la forma de un prisma rectangular de 0,2 por 0,2 cm. La muestra I era del mismo material que las delgadas y el resto de material de pureza inferior.

Los alambres para medir tensión, eran de manganina de 0,002" y fijadas en puntos alineados con el eje de la muestra, a una distancia de 3 cm. entre sí. Para verificar que la separación

entre alambres no afectaba los resultados, se fijaron dos alambres más a la muestra III, separados entre sí una distancia de 1,5 cm.; los resultados obtenidos en este caso son los que identificamos como muestra IV.

En todas las muestras, los alambres de tensión se fijaron mediante soldadura de punto. Para esto fue necesario aplanar ligeramente el alambre de manganina en la zona en que se deseaba soldar.

La muestra de indio se colocaba sobre un electodo plano, encima de ella, y en lugar conveniente, se colocaba la manganina aplanada, y sobre la manganina se apoyaba el otro electodo, que tenía forma cónica. Ambos electodos eran de cobre. La soldadora se cargaba con un cierto voltaje que luego era descargado a través de los electodos y la muestra. Los dos factores que hay que regular para obtener una buena soldadura son el voltaje de carga y la presión del electodo cónico sobre el alambre. Como el indio es un material muy blando, lo que se hizo fue elegir una presión tal que no lo deforme y luego se fue variando el voltaje de carga hasta que se obtuvo una soldadura de buena calidad. Hay que tener en cuenta que el método se basa en el relativamente mal contacto eléctrico entre las piezas a soldarse. Una vez fijado el voltaje conveniente para una presión dada hay que mantener a esta última. Si la presión se aumenta el indio se deforma, el contacto entre éste y la manganina mejora y entonces no suelda. Si se disminuye puede suceder que el contacto empeore lo suficiente como para que el calor que se desarrolle funda al indio. Es importante también que el electodo cónico y el alambre estén bien limpios porque sino el contacto es malo y la manganina se suelda al electodo e inclusive puede fundirse.

Operando en la forma que acabamos de describir y teniendo en cuenta todas las precauciones, se lograron soldaduras de buena calidad, firmes y localizadas dentro de un área de aproximadamente 0,1 mm. de diámetro.

Para evitar problemas de diferencia de dilatación entre muestra y soporte, las probetas se montaron sobre una espátula de indio, envuelta en mylar de 0,0075" de espesor para aislarla electricamente. La fijación se hizo utilizando barniz G.E. 7031.

Todas las muestras que estaban montadas sobre una espátula, que eran cuatro o cinco, se conectaban en serie para poder utilizar un solo circuito de corriente. Los alambres de interconexión eran de indio. Los alambres de entrada y salida eran también de indio hasta unos diez centímetros de la muestra y luego se continuaban con cobre. De esta forma se evitaron efectos termoeléctricos indeseables.

Los alambres de indio se soldaron directamente a la muestra, sin usar ningún tipo de soldadura, utilizando un soldador eléctrico y flujo Divco Heavy Duty. La separación entre los alambres de corriente y tensión fue siempre mayor que 0,5 cm. Por último las muestras fueron recocidas a 50° C por veinticuatro horas.

Cuando el sistema estuvo a 4,2° K, las fuerzas electromotrices espúreas fueron del orden de algunos microvoltios. Para evitar este efecto, los alambres de tensión se cortaron a algunos centímetros de las soldaduras y se continuaron con cobre hasta temperatura ambiente. De esta forma, y cuando el extremo frío de los alambres de cobre estaba sumergido en el baño de helio, las fem. espúreas se redujeron a un factor diez.

Para averiguar si los resultados dependían del tipo de fijación, y también del material de los alambres de tensión, se fabricó una muestra en la que la manganina se reemplazó por indio. La fijación consistió simplemente en presionar en frío el alambre contra la muestra. La soldadura resultó ser menos resistente y no tan localizada como con el método anterior.

Método de Medición

Las medidas de resistencia se hicieron circulando una corriente por la muestra y midiendo la caída de tensión. La corriente se midió con un amperímetro Weston modelo 931 de 3Amp. fondo de escala; el voltaje con un milimicrovoltímetro Keithley modelo 149, con una sensibilidad máxima de 0,1 microvol fondo de escala.

Un serio inconveniente resultó ser el ruido que entraba en la muestra por efecto de ruidos en el campo del electroimán. Como el Keithley tiene salida para registrador, éste se utilizó para mandar la señal a través de un filtro a otro instrumento. El circuito usado se muestra en la fig. 7. La resistencia variable R se ajustó en forma tal que la lectura en el instrumento fuera directa. Una vez fijado el valor de R , que fue de aprox. 130 ohm, se verificó que la lectura era directa en toda la escala y en todos los rangos a utilizar.

El circuito de corriente consistió en una batería en serie con la muestra, una resistencia variable y una llave que permitía invertir el sentido de la corriente.

Salvo en el interior del crióstato, todos los cables, tanto en el circuito de tensión como en el de corriente, se blindaron

con malla de cobre y se pusieron dentro de un caño de hierro. Los elementos tales como condensadores, resistencias etc., se colocaron dentro de cajas de hierro.

El Keithley tiene un sistema que permite compensar las fem. espúreas. Igualmente los valores se contrastaron con los obtenidos con el método de invertir la corriente, comprobándose que coincidían.

Se hicieron mediciones utilizando diferentes valores de corriente para asegurar que los resultados eran independientes de ésta. El valor final se fijó en 2 Amp. El campo magnético se midió utilizando un gaussímetro de bobina rotante. En todos los experimentos se hicieron mediciones girando el campo en 180° y en ningún caso se observó efecto alguno. El factor de geometría de las muestras se determinó midiendo la resistencia eléctrica de cada una a temperatura ambiente y tomando como valor para la resistencia específica del indio a esta temperatura

$$\rho_{293} = 9,1 \times 10^{-6} \text{ cm.}$$

según datos de WADD Technical Report 60-56 part IV (N.B.S. Boulder, Colorado, 1961).

VII - RESULTADOS Y CONCLUSIONES

Magnetorresistencia Intrínseca.

Las mediciones de magnetorresistencia se hicieron a 4,2°K utilizando varias muestras. Los resultados para las muestras I, II, III, IV pueden verse en la fig. 8 y las características principales de cada una de ellas se detallan en la tabla I. Los valores obtenidos con otras muestras estuvieron en buen acuerdo con los dados aquí.

Las muestras II, III, y IV, por ser de menor pureza, se encontraban en la zona de resistencia residual a 4,2°K, en cambio la resistencia de la muestra I era todavía función de la temperatura.

De los resultados de la fig. 8 se deduce que la regla de Kohler se cumple ya que $\Delta\varrho/\varrho$ es independiente de la pureza y también de si el material está o no en la zona residual.

Como debido al ruido proveniente del electroimán no se pudieron obtener buenos datos con la muestra I a 1,4°K, se debió suponer que la función de Kohler es la misma a esta temperatura. Esta suposición está justificada porque la función es independiente de la pureza. También es lícito suponer que los resultados no están afectados por efectos de borde ya que debido a las diferentes purezas, la relación entre espesor y camino libre medio es muy diferente para cada muestra.

La función de Kohler que obtuvimos no coincide con la obtenida previamente con Olsen. Como este autor utiliza para medir tensión alambres de indio, los cuales fueron soldados en frío, se prepararon dos muestras, una en forma de alambre y

otra en forma de prisma usando esta técnica. Los resultados obtenidos así coincidieron con los nuestros anteriores. Finalmente, y para verificar la calidad de nuestro equipo de medición, se midió la magnetorresistencia de una muestra de aluminio. Los resultados coincidieron con los obtenidos previamente por Lutes y Clayton (1965).

Efecto Magnetomórfico

Las mediciones se hicieron a 4,2 y 1,4°K en seis muestras cuyas características y dimensiones se detallan en la tabla II.

Como se mencionó anteriormente, los valores medidos son la superposición del efecto magnetomórfico y de la magnetorresistencia. Para descontar a esta última se usó la función de Kohler medida en las muestras gruesas y la regla de Kohler modificada por Olsen dada en la ec. (6). De esta forma se obtuvo $\rho_s(H)$ para cada muestra.

Las curvas teóricas de efecto magnetomórfico dan la relación ρ_s^t / ρ_0 en función de la variable $\mu = \alpha H$, donde

$$\alpha = a e / m v c$$

siendo a el espesor de la muestra, e y $m v$ la carga y el impulso del electrón respectivamente y c la velocidad de la luz. Por otra parte lo que se conoce experimentalmente es ρ_s^e en función del campo magnético. Lo que hay que determinar es cuales son los mejores valores de f_0 y α que dan el mejor acuerdo entre ρ_s^t y ρ_s^e . Para esto se graficaron las curvas teóricas en papel log. log. Sobre el gráfico se colocó un papel transparente y se graficó $d \rho_s^e$ en función de bH ; d y b son dos números arbitrarios que se elegían convenientemente pa-

ra que la curva resultara dentro del gráfico. Como el gráfico es logarítmico, la multiplicación por constantes es equivalente a correr el origen. Luego se desplazaba el papel transparente, teniendo cuidado en no girarlo, hasta encontrar la curva teórica que mejor coincidía con la que estaba dibujada en el papel. Una vez encontrada se elegía un punto donde las curvas coincidían exactamente. El valor de μ correspondiente a la abscisa del punto teórico, dividido por el de H , correspondiente a la del experimental, dió el valor de α . Igualmente, dividiendo el valor de la ordenada del punto experimental por la del teórico se obtuvo ρ_0 . El valor de a/l está dado por el valor del parámetro correspondiente a la curva teórica elegida.

Con los datos obtenidos a $4,2^\circ\text{K}$, no fue posible encontrar ninguna coincidencia. Esto puede deberse a que en esta temperatura las muestras no estaban todavía en la zona residual. Como vimos antes, es posible que la teoría simple que estamos usando no sea capaz de describir el fenómeno cuando hay interacción electrón fonón. Esto parecería indicar que la regla de Matthiessen no es válida en este caso. Olsen (1958, 1962) ha sugerido que la dispersión de electrones por fonones, que a bajas temperaturas resulta en una deflección del movimiento del electrón en pequeños ángulos, puede ser mucho más efectiva en muestras finas que en gruesas. Esto se debe a que un electrón que se mueve en dirección casi paralela a la superficie de la muestra puede, por efecto de una colisión con un fonón, ser enviado hacia el borde y allí hacer un choque difuso. Un mecanismo como éste invalida la regla de Matthiessen ya que los tiempos de relajación no son estrictamente independientes.

Los resultados obtenidos a $1,4^\circ\text{K}$ se pueden ver en la fig.9

y en la tabla II . Los puntos de las figuras corresponden a los valores medidos y las curvas son las que resultan de sumarle la magnetorresistencia a la ρ_s^t elegida en cada caso. Para esto se hizo uso de la ec.(6). Los máximos que se observan tienen muy poco que ver con los predichos por la teoría; se debe a que la magnetorresistencia es siempre creciente y en cambio el efecto magnetomórfico tiende en último caso a bajar el valor de la resistencia total. Este tipo de comportamiento se observa también en alambres, para los cuales la teoría predice un decrecimiento monotono cuando solo se tiene en cuenta el efecto de borde. Una comparación de ρ_s^t y ρ_s^e , para las muestras VIII, IX y X se puede ver en la fig. 10 . En la zona del máximo la coincidencia no es muy buena. Yi-Han Kao ha encontrado la relación

$$\left(\frac{l}{r}\right)_{\rho_{\text{máx}}} = 1,26 \left(\frac{a}{l}\right)^{0,57} \quad (1)$$

válida dentro de un 10% y para $0,01 \leq \alpha \leq 1$. Aquí $(l/r)_{\rho_{\text{máx}}}$ es el valor para el cual ρ es máximo. Esta relación permite deducir mv si ρ es conocido y viceversa. Nosotros hemos preferido determinar los valores de estos parámetros imponiendo la condición que el acuerdo sea lo mejor posible en todo el rango de medición, en vez de hacer uso de la relación dada en la ec.(1), lo cual implicaría darle mayor peso a la zona del máximo.

Como se ve en la fig. 10 C, la curva correspondiente a ρ_s^e , en la muestra X, no presenta un máximo. Lo mismo se pudo observar en la muestra V . Esto se debe a que por ser l y a grandes, el máximo se encuentra en la zona en que el material está en estado superconductor.

Comparando los resultados y las curvas teóricas con el méto-

do que hemos descripto, es posible determinar el valor de mv dentro de un 7%, y como puede verse en la tabla II, los valores obtenidos con las diferentes muestras coinciden dentro de este error. El valor promedio de mv es $1,5 \text{ g.cm./seg.}$.

Comparación con otros resultados

Hasta el momento, las únicas mediciones de efecto magneto-mórfico longitudinal en indio han sido hechas por Olsen (1958), en alambres. Como dijimos anteriormente, este autor no encontró ningún acuerdo razonable entre teoría y experimento. Solamente pudo lograr un acuerdo en la zona de campos bajos, suponiendo un impulso igual a aproximadamente tres veces el valor que predice la teoría del electrón libre. Para lograr coincidencia en campos altos debió suponer un valor de once veces el valor del electrón libre. Sin embargo Olsen supone que todas las muestras tienen el mismo camino libre medio, y como ya hemos discutido, esta suposición es dudosa porque una situación tal es muy difícil de lograr experimentalmente.

En la tabla III se muestran los valores de ρ, ℓ y mv obtenidos por de la Cruz et al. comparando los datos de Olsen con la teoría, usando el método que hemos detallado anteriormente.

Los valores de impulso calculados de esta manera están en buen acuerdo con los obtenidos con nuestras mediciones en láminas. Por otra parte Cotti (1961) obtuvo a partir de mediciones de efecto Sondheimer el valor $mv = 10^{-19} \text{ g.cm./seg.}$. Sin embargo Försvoll y Holwech (1964) midiendo el mismo efecto obtuvieron $mv = 1,3 \cdot 10^{-19} \text{ g.cm./seg.}$. Este resultado está en bastante buen acuerdo con el obtenido por nosotros.

El valor promedio de $\rho_0 \lambda$ en tabla III es superior al nuestro. Este valor debería ser el mismo ya que es una constante del material. En la tabla IV se muestran los valores promedio obtenidos con alambres y láminas, y también el valor considerado como el mejor, obtenido a partir de mediciones de efecto skin anómalo, según dato de Bate et al. (1963). Estos autores han analizado el caso de alambres en condiciones en que el camino libre medio es anisótropo, y llegan a la conclusión que la aproximación de λ isótopo puede ser buena cuando el electrón debe atravesar varios cristales antes de alcanzar la superficie. En muestras delgadas este no es el caso y para un cilindro, puede considerarse que la muestra es un policristal unidimensional. La consecuencia de esto es que $\rho_0 \lambda$ medido en alambres delgados resulta ser mayor que el que se mediría en una muestra gruesa. En este sentido, una lámina es un policristal bidimensional y esto podría ser la causa de que el valor de $\rho_0 \lambda$ obtenido sea intermedio entre el medido con efecto skin anómalo y en alambres.

En conclusión, los resultados indican que es posible encontrar un valor de impulso en forma tal de hacer coincidir las curvas teóricas con las experimentales. Este valor está en buen acuerdo con el medido con efecto magnetomórfico longitudinal en alambres y con efecto Sondheimer. Sin embargo, como el indio tiene una superficie de Fermi no esférica, mediciones en monocristales darían el valor máximo del impulso normal a la dirección de crecimiento. De esta forma, haciendo mediciones en monocristales crecidos en diferentes direcciones, sería posible obtener una información más detallada sobre la superficie de Fermi del metal.

TABLA I

Dimensiones y resistividad intrínseca ρ_0 de las muestras usadas en la determinación de la regla de Kehler para indio.

<u>Muestra</u>	<u>Espesor (cm.)</u>	<u>$\rho_0 10^{10} (\Omega \text{ cm.})$</u>
I	0,2	43
II	0,2	179
III	0,2	68
IV	0,2	68

TABLA II

Valores experimentales de l , $\rho_0 l$, y mv obtenidos a partir de mediciones en láminas delgadas.

<u>Muestra</u>	<u>$\rho_0 10^{10}$ ($\Omega \text{ cm.}$)</u>	<u>$l 10^2$ (cm.)</u>	<u>$\rho_0 l 10^{11}$ ($\Omega \text{ cm.}^2$)</u>	<u>$mv 10^{19}$ (g.cm.sec.⁻¹)</u>	<u>a (cm.)</u>
V	1,3	7,25	0,94	1,45	0,012
VI	2,84	3,47	0,98	1,56	0,0055
VII	2,72	3,31	0,90	1,53	0,0033
VIII	3,62	2,46	0,89	1,49	0,0032
IX	1,76	5,00	0,88	1,55	0,0065
X	1,32	6,8	0,90	1,40	0,011

a = espesor
 l = camino libre medio

ρ_0 = resistividad intrínseca
 mv = impulso electrónico

TABLA III

Valores experimentales de l , $\rho_0 l$, y mv obtenidos a partir de datos de Olsen en alambres, usando la regla de Kohler de fig. 6

d (cm.)	$\rho_0 10^{10}$ (Ω cm.)	$l 10^2$ (cm.)	$\rho_0 l 10^{11}$ (Ω cm. ²)	$mv 10^{19}$ (g. cm. seg. ⁻¹)
0,006	15,0	0,86	1,31	1,39
0,0085	12,1	0,94	1,14	1,32
0,031	8,3	1,82	1,51	1,5

d = diámetro del alambre. ρ_0 = resistividad intrínseca
 l = camino libre medio. mv = impulso electrónico

TABLA IV

Valores de $\rho_0 l$ obtenidos mediante diferentes métodos ¹⁾

Efecto skin anómalo	$0,6 \cdot 10^{-11}$ (Ω cm.)
Efecto magnetomórfico en láminas ²⁾	$0,92 \cdot 10^{-11}$ (Ω cm.)
Efecto magnetomórfico en alambres	$1,4 \cdot 10^{-11}$ (Ω cm.)

1) Ver Bate et al. (1963).

2) Valor obtenido en este trabajo.

INDICACIONES DE LAS FIGURAS

- Fig. 1 : Transformación de ejes para comparación de las fórmulas (III-2) y (III-13).
- Fig. 2 : $C(\psi_1)$ es la circunferencia con centro en R y radio a . La flecha curva indica el sentido de giro de los electrones.
- Fig. 3 : Construcción para la determinación de $S(\psi_1)$.
- Fig. 4 : Construcción para la determinación de $S_1(\psi)$.
- Fig. 5 : Construcción para la determinación de los ángulos ψ_1 , ψ_2 , ψ_3 y ψ_4 .
- Fig. 6 : Efecto magnetomórfico longitudinal en láminas, para tres diferentes valores del parámetro $\alpha = a/f$.
- Fig. 7 : Circuito del filtro utilizado para eliminar el ruido proveniente del electroimán.
- Fig. 8 : Regla de Kohler del In para campo longitudinal. ρ_H , resistividad a campo H. ρ , resistividad a campo nulo. ρ_{100} resistividad a 100°K. Δ Muestra I, \bullet Muestra II, $+$ Muestra III, \square Muestra IV.
- Fig. 9 : Resistividad en función de campo magnético a 1,4°K. La curva sólida es la que da el mejor ajuste con la teoría y es la correspondiente a los parámetros dados en tabla II.
- Fig. 10: \bullet Efecto magnetomórfico puro deducido a partir de los datos experimentales. \times Puntos teóricos obtenidos con los parámetros de table II.
- Fig.A-1: Construcción para la determinación de $S_1(\psi)$.
- Fig.A-2: Construcción para la determinación de $S_2(\psi)$ y $S_4(\psi)$. En ambos casos el ángulo se ha indicado con la misma letra.

BIBLIOGRAFIA

- Andrew, E.R. (1949), Proc. Phys. Soc. A, 62, 77.
- Bate, R.T., Byron Martin, y Hille, P.F. (1963), Phys. Rev. 131, 1482.
- Chambers, R.G. (1950), Proc. Roy. Soc. A, 202, 378.
(1950a), Nature, 165, 239.
- Dingle, R.B. (1950), Proc. Roy. Soc. A, 201, 545.
- Förvoll, K. y Holwech, I. (1964), Phil. Mag., 10, 181.
- Fuchs, K. (1938), Proc. Camb. Phil. Soc. 34, 100.
- Jones, H. (1956), Handb. d. Phys. 19, 227.
- Kohler, M. (1949), Z. Phys. 126, 495.
- Lovell, A.C.B. (1936), Proc. Roy. Soc. A, 157, 311.
- Lutes, O.S. y Clayton, D.A. (1965), Phys. Rev. 138, A1448.
- Mac Donald, D.K.C. y Sarginson, K. (1950), Proc. Roy. Soc. A, 203, 223,
- Olsen, J.L. (1958), Helv. Phys. Acta, 31, 713.
(1962), Electron Transport in Metals (Interscience Publishers, Inc., New York).
- Sondheimer, E.H. (1952), Adv. in Phys., 1, 1.
- Yi-Han Kao (1965) Phys. Rev., 138, A1412.
- Ziman, J.M. (1962), Electrons and Phonons (Oxford University Press).
(1964), Principles of the Theory of Solids (Cambridge University Press).

RESUMEN

Efecto Magnetomórfico: Cuando los electrones se mueven en un medio infinito, la resistencia eléctrica es debida a los procesos de choque que realiza el electrón dentro del medio. Cuando es limitado, va a haber también choque contra la superficie que lo limita. Este proceso tiene importancia cuando el número de choques con la superficie es comparable con el número de choques dentro del metal, en otras palabras, el efecto de borde será tanto más visible cuanto mayor sea la relación entre camino libre medio y la dimensión de la muestra que interviene en el proceso.

Desde fines del siglo pasado se conocía que un conductor delgado presentaba mayor resistividad que una muestra gruesa del mismo material. J.J.Thomson fue el primero en sugerir una explicación de este fenómeno como la que hemos dado anteriormente.

El primer tratamiento riguroso de este tipo de problema fue hecho por Fuchs (1938); Lovell(1936) había obtenido anteriormente una solución aproximada. El método de Fuchs consiste en resolver la ecuación de Boltzmann con las condiciones de contorno adecuadas, y fue aplicado por este autor al caso particular de láminas. El correspondiente para alambres fue estudiado por Mac Donald y Sarginson (1950) para sección cuadrada y por Dingle (1950) para sección circular.

Chambers (1950) ha utilizado argumentos cinéticos para encontrar la solución de la ecuación de Boltzmann para cualquier tipo de geometría. Según Chambers, la conductividad está dada por la siguiente expresión:

$$\frac{\sigma}{\sigma_0} = 1 - \frac{3}{4\pi S} \int_S dS \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^\pi \sin\theta e^{-|\vec{r}-\vec{r}_B|/\ell} e^{-\omega^2 \theta} \quad (1)$$

Aquí σ es la conductividad de la muestra, σ_0 es la conductividad que tendría la misma muestra si no hubiera efecto de borde, S es la sección sobre la cual se promedia la corriente, \vec{r} es un punto sobre esta superficie, \vec{r}_B es un punto sobre la superficie que limita a la muestra, y ℓ es el camino libre medio correspondiente a los choques internos del electrón. Para efectuar la integración hay que poner $|\vec{r}-\vec{r}_B|$ en función de las variables de integración.

La suposición que siempre se hace para poder calcular teóricamente el efecto de borde es que los electrones dentro del metal son prácticamente libres. Además en (1) se ha supuesto que el electrón choca difusamente con la pared, es decir que una vez que realizó el choque puede ser reemitido en cualquier dirección. Es posible extender la teoría al caso en que los choques no sean totalmente difusos. Nosotros hemos desarrollado una expresión para este caso y para cualquier tipo de geometría. Tal expresión coincide con las ya conocidas en los casos particulares de lámina y cilindro. Los cálculos para el caso no difuso son más complicados y además dificultan la comparación entre teoría y experimento. Por suerte hay evidencia experimental que el caso totalmente difuso es el más común.

Cuando se aplica un campo magnético, la trayectoria de los electrones se ve modificada y en consecuencia la frecuencia de choques contra las paredes cambia. Esto tiene influencia directa sobre la conductividad, la cual resulta ahora ser función del campo. Este es un efecto que depende de la geometría y no

tiene relación con la magnetorresistencia del material. Por esto es que se lo llama efecto magnetomórfico. Como el campo puede tener diferentes orientaciones con respecto a la corriente y a la muestra, hay muchas diferentes posibilidades. Nosotros nos ocuparemos del caso en que el campo es paralelo a la corriente. Para éste, la expresión (1) se puede aplicar inmediatamente reemplazando la distancia $\vec{r} - \vec{r}_B$ por el camino efectivo que recorrió el electrón entre esos dos puntos. La expresión que se obtiene es:

$$\frac{\sigma}{\sigma_0} = 1 - \frac{3}{4\pi^2} \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\pi} d\theta \sin\theta \cos^2\theta \int_s^{\infty} ds e^{-4r_0/l} \quad (2)$$

donde r_0 es el radio de giro de un electrón que se mueve con velocidad v_F normal al campo magnético y φ es el ángulo que giró el electrón desde que chocó con la pared hasta que llegó al punto en el cual se calcula la corriente. La expresión (2) es en general muy difícil de integrar. Chambers la ha podido reducir a una más sencilla en el caso de cilindros porque el problema tiene simetría cilíndrica y se simplifica. Esto no quiere decir que la integral se pueda resolver analíticamente sino que se puede reducir a una más fácil de resolver numéricamente. Para láminas la integral triple ha sido resuelta por medio de computadora por Yi-Han Kao (1965), y por nosotros por medio de un método que permite reducir (2) a una integral simple y por lo tanto más fácil de calcular numéricamente. El método se basa en que un cilindro hueco tiende a una lámina cuando se hace tender el radio medio del cilindro a infinito manteniendo el espesor de pared a constante. El problema tiene

simetría cilíndrica y puede simplificarse como en el caso anterior. Cuando $2a \gg r_0$ la integral se puede resolver analíticamente. Desgraciadamente este caso no es tan importante y es necesario calcular el resto de la curva por métodos numéricos.

En la fig. 6 se muestran las curvas obtenidas integrando (2), para tres valores del parámetro $\alpha = a/\rho$. Es posible demostrar en forma general que para $H = 0$, (2) se reduce a la misma expresión que la obtenida por Fuchs.

Experimento: El problema que se presenta cuando se quiere medir el efecto magnetomórfico es que en general los metales presentan magnetorresistencia y por lo tanto lo que se mide es la superposición de ambos efectos. Kohler (1938) ha sugerido que en ausencia de efecto de borde, los metales cumplen con bastante generalidad la ley

$$\frac{\rho(H) - \rho(0)}{\rho(0)} = F\left[\frac{H}{T(0)}\right] \quad (3)$$

donde $\rho(H)$ es la resistividad a campo H , $\rho(0)$ es la correspondiente a campo nulo y F es una función característica del metal. En base a argumentos fenomenológicos, Olsen (1958) ha modificado la regla de Kohler para poder aplicarla al caso en que el efecto magnetomórfico modifica la magnetorresistencia total. En este caso la ley (3) debe ser reemplazada por

$$\frac{\rho(H) - \rho_s(H)}{\rho_s(H)} = F\left[\frac{H}{\rho_s(H)}\right] \quad (4)$$

Aquí $\rho_s(H)$ es la resistividad debida a efecto magnetomórfico puro y F es la misma función que en (3). Si la función F es conocida, entonces (4) permite obtener $\rho_s(H)$.

Nosotros hemos realizado mediciones de efecto magnetomórfico en láminas de indio. La función F fue determinada midiendo la magnetorresistencia del indio en muestras suficientemente grandes como para que el efecto de borde sea despreciable. Estas mediciones sirvieron no solo para determinar F sino también para verificar que el metal satisfacía la regla de Kohler.

Las mediciones de $\rho(H)$ en láminas se hicieron utilizando seis muestras cuyas características se dan en la tabla II. A partir de los valores medidos de $\rho(H)$, se dedujo el valor experimental $\rho_s^e(H)$ utilizando la relación (4). La comparación con el valor teórico $\rho_s^t(H)$ se hizo eligiendo el valor de los parámetros ρ_0 , l , y mv que daban el mejor acuerdo entre $\rho_s^t(H)$ y $\rho_s^e(H)$. Estos valores están dados también en la tabla II. En la fig. 9 se muestra la comparación entre las curvas experimental y la teórica que resulta de sumarle la magnetorresistencia a $\rho_s^t(H)$ por medio de la relación (4).

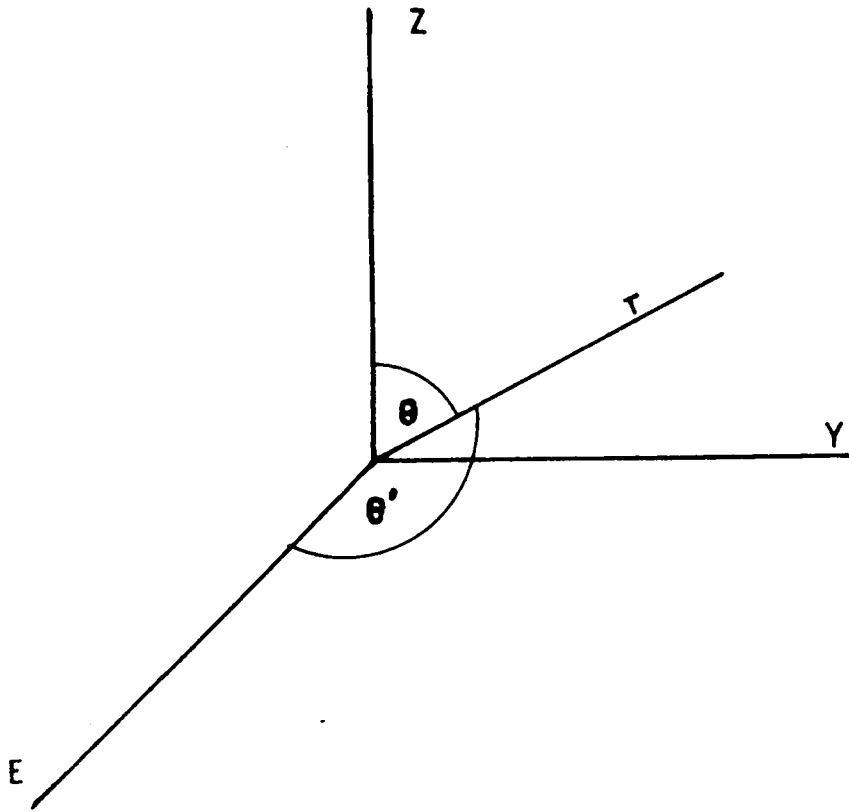
Como se ve en la tabla II, el valor de mv obtenido con las diferentes muestras es el mismo dentro de un 7%. Por otra parte, este es el error que estimamos haber cometido al hacer la comparación entre las curvas teóricas y experimentales. $\rho_0 l$ es también constante dentro de este error. Como esta cantidad es una característica del material es razonable que resulte constante.

Los valores de impulso están en bastante buen acuerdo con los obtenidos por otros métodos. Sin embargo el valor de $\rho_0 l$ resultó mayor al que se considera como el mejor, obtenido a

partir de mediciones de efecto skin anómalo. Bate et al. (1963) han demostrado que mediciones en alambres delgados pueden dar un valor mayor de $\rho_0 l$. Esto se debe a la anisotropía del camino libre medio. El caso de láminas es similar y por lo tanto ésta puede ser la causa de la discrepancia.-

INDICE

I	-	La Ecuación de Boltzmann	1
II	-	El Método Cinético	15
III	-	Efecto de Borde	21
IV	-	Efecto Magnetomórfico	33
		Apéndices al Capítulo IV	45
V	-	Problemas Experimentales	55
VI	-	Detalles Experimentales	61
VII	-	Resultados y conclusiones	66
		Tablas	72
		Indicaciones de las Fig.	74
		Bibliografía	75
		Resumen	76



$$\text{Sen } \theta \, d\theta \, d\varphi = \text{Sen } \theta' \, d\theta' \, d\varphi'$$

$$\text{Cos } \theta' = \text{Sen } \theta \, \text{Cos } \varphi$$

$$\text{Cos } \theta = \text{Sen } \theta' \, \text{Sen } \varphi'$$

FIG 1

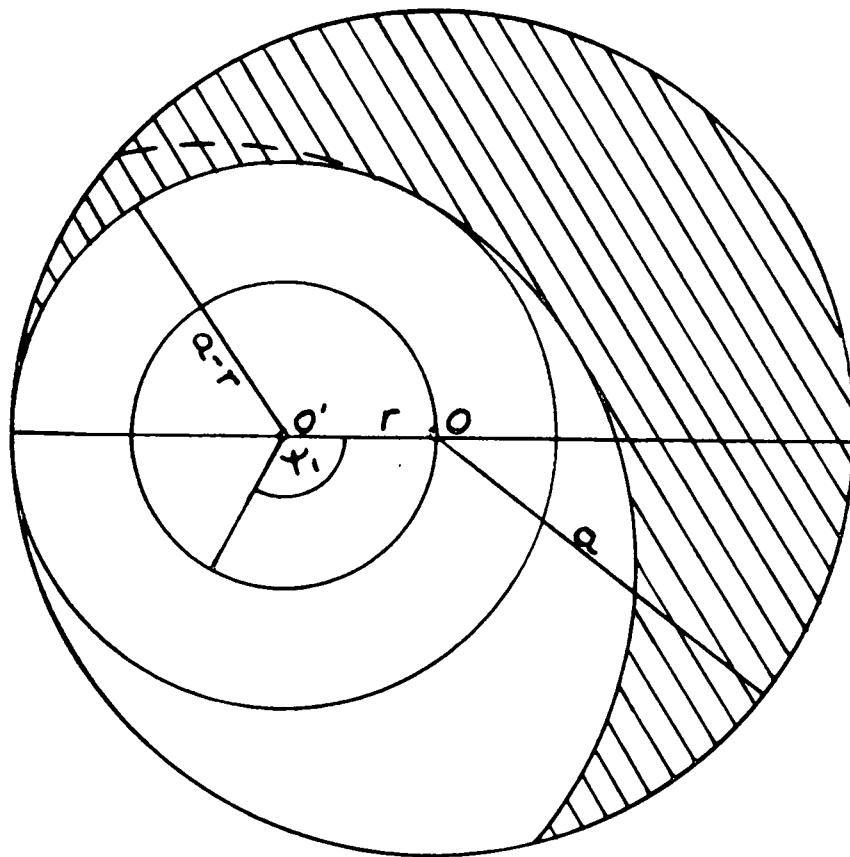


FIG 3

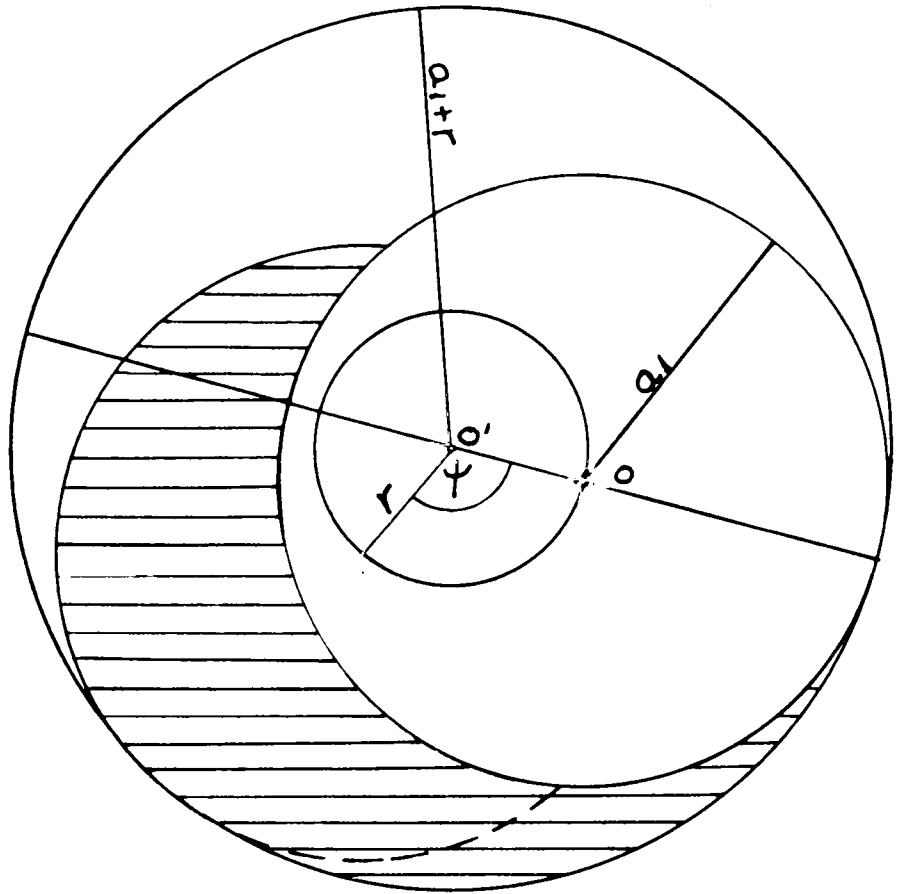


FIG 4

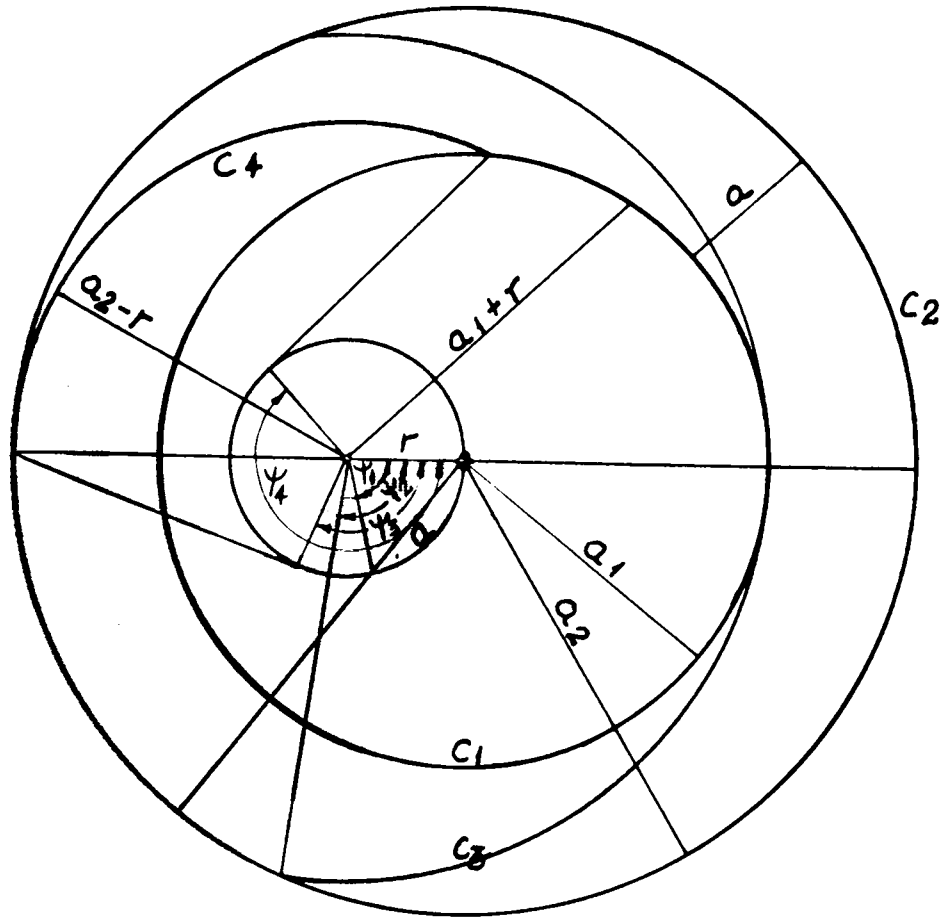


FIG 5

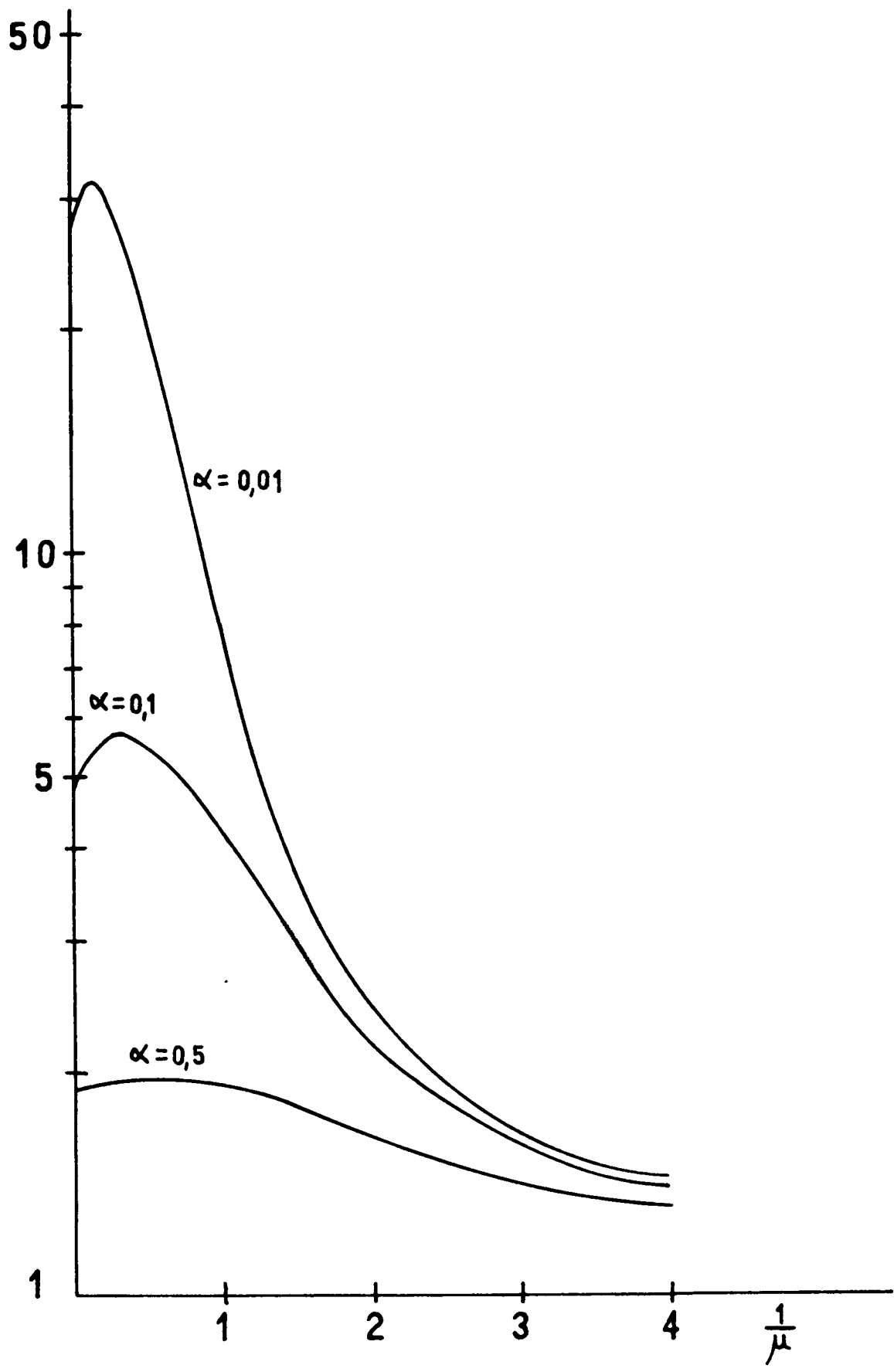


FIG 6

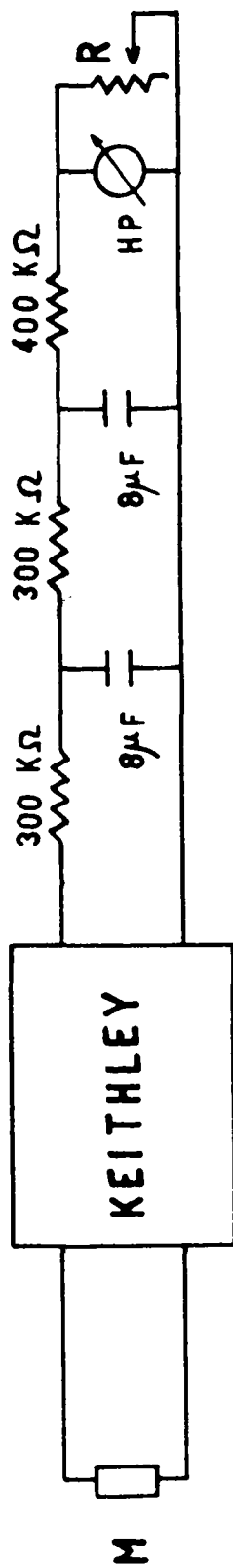


FIG 7

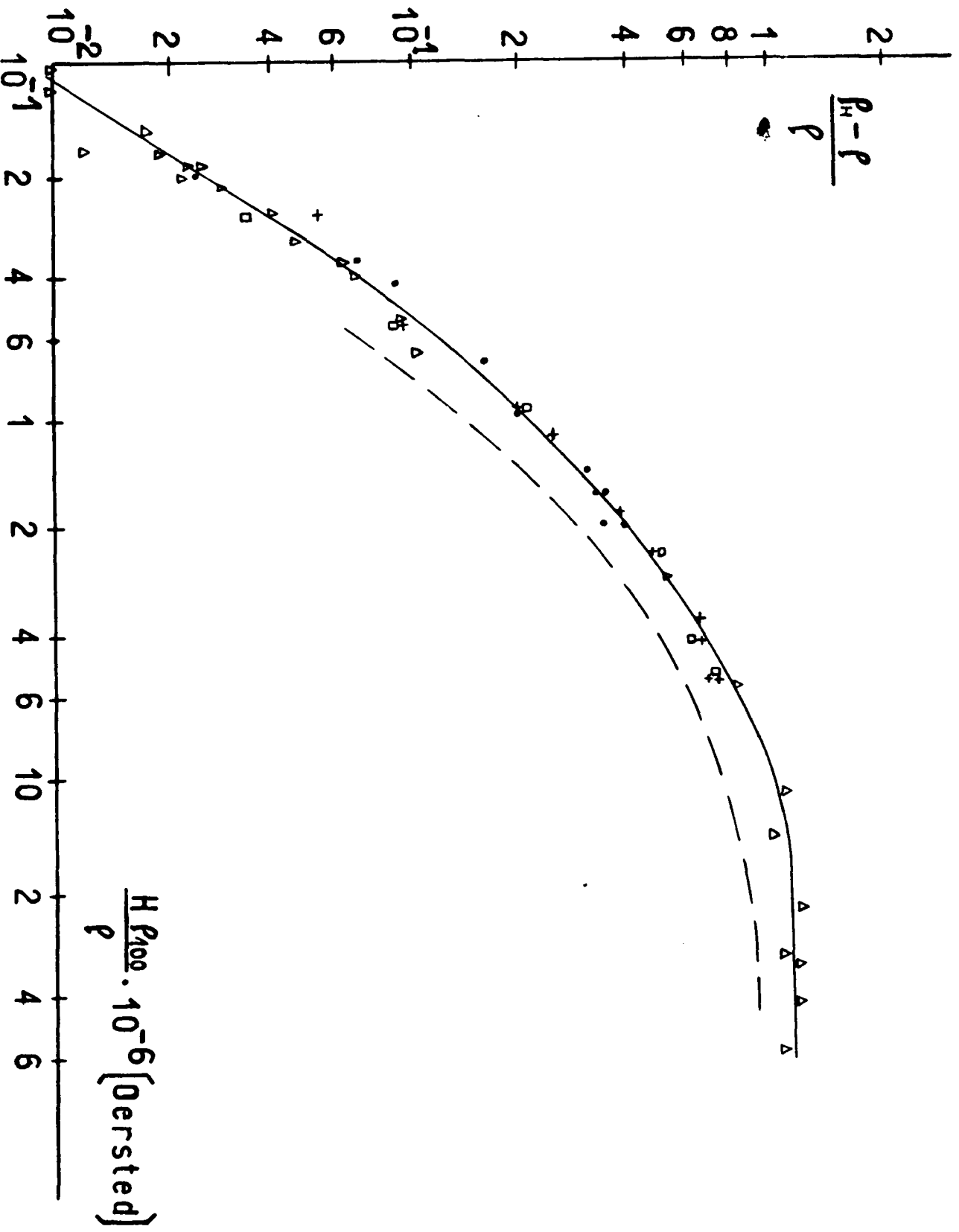


FIG 8

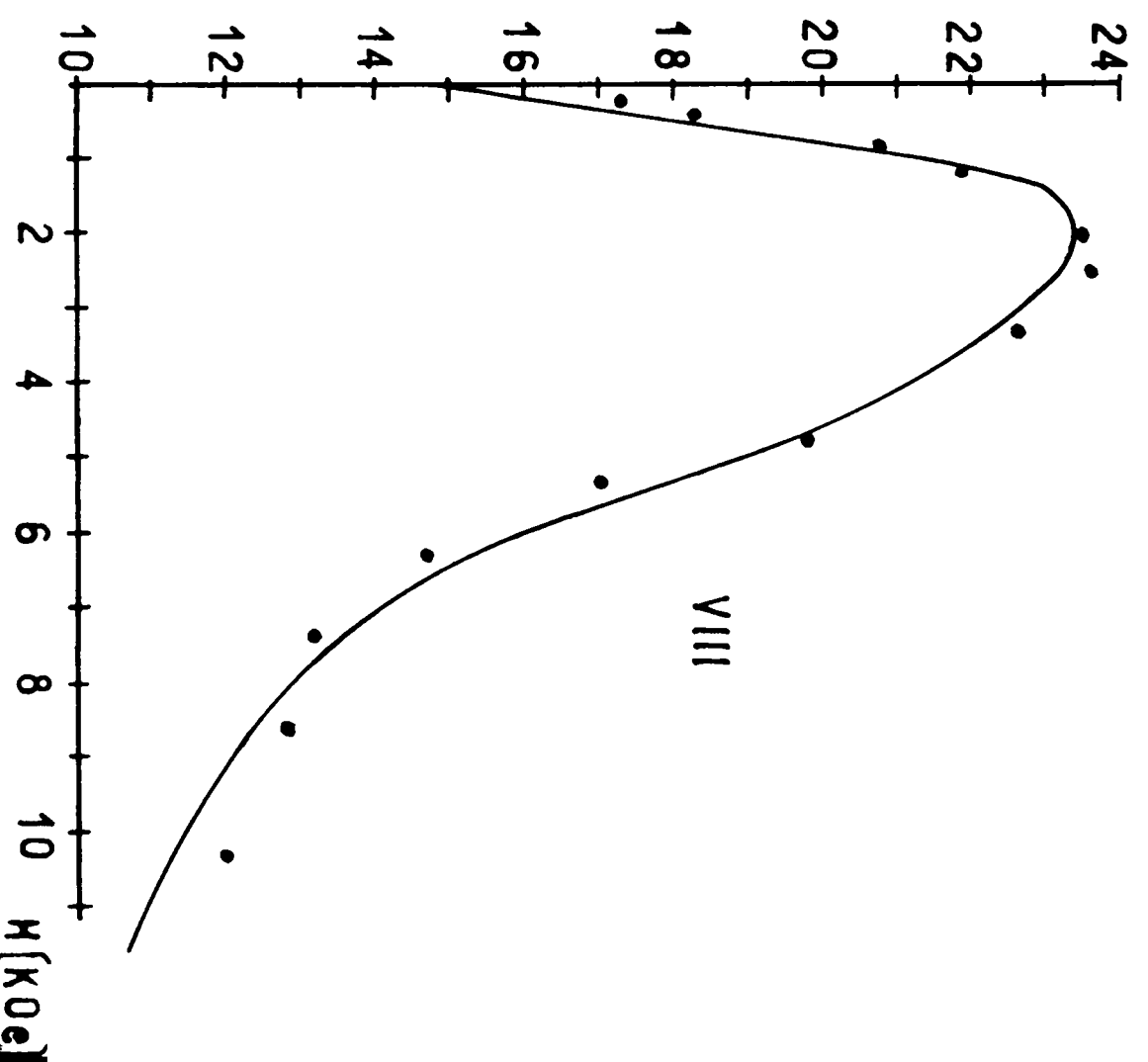
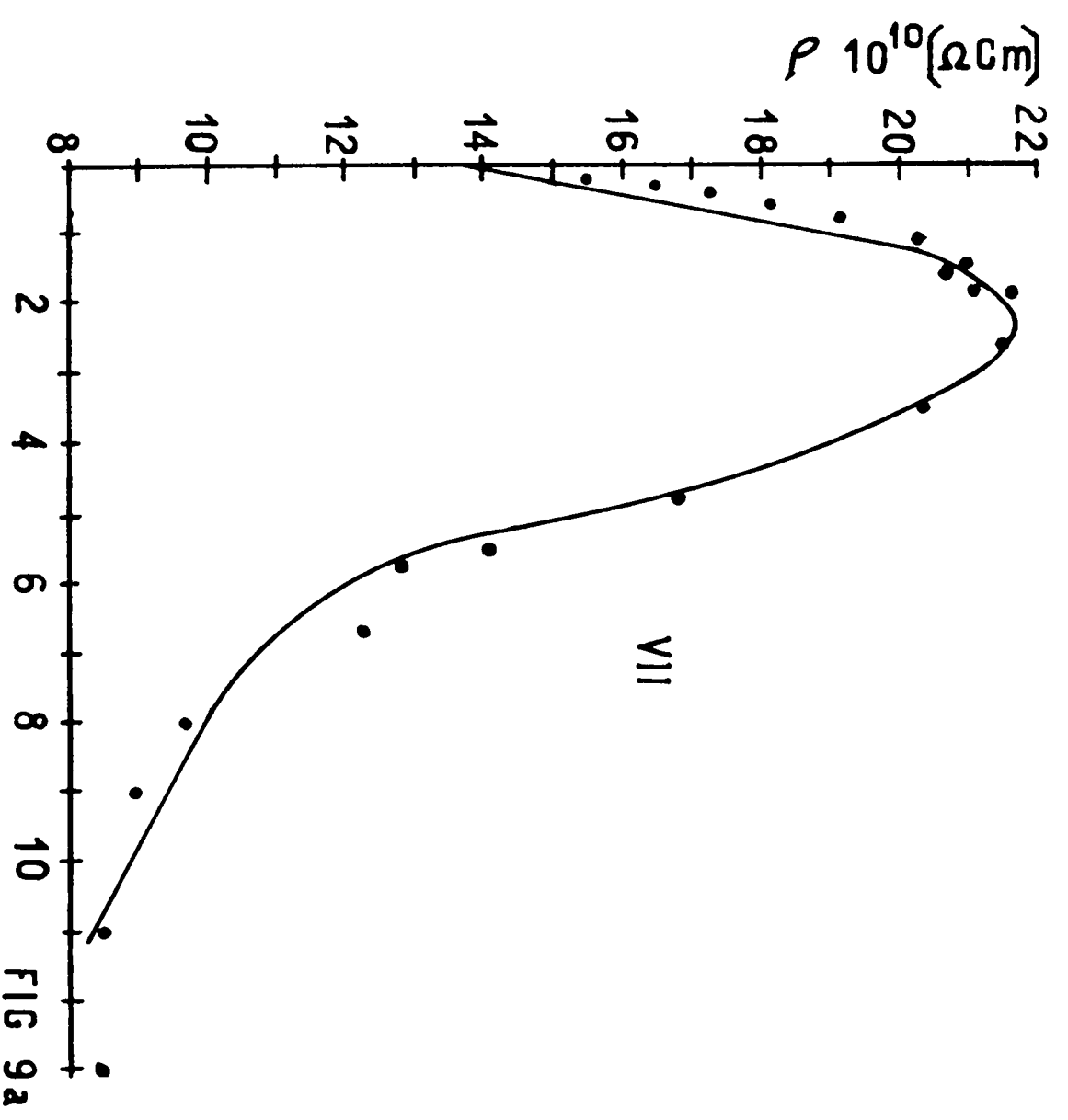


FIG 9a

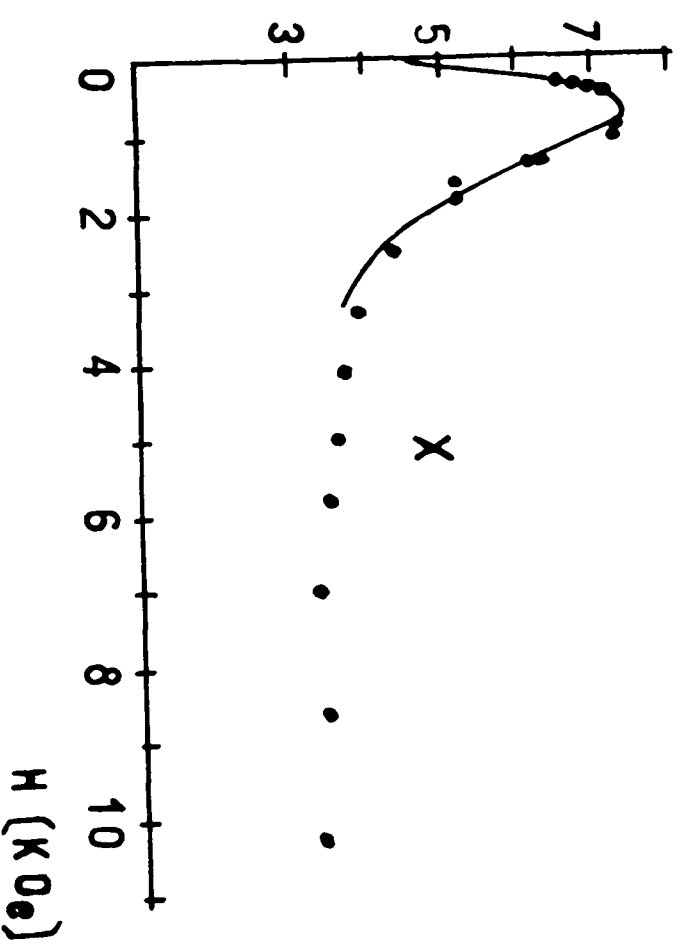
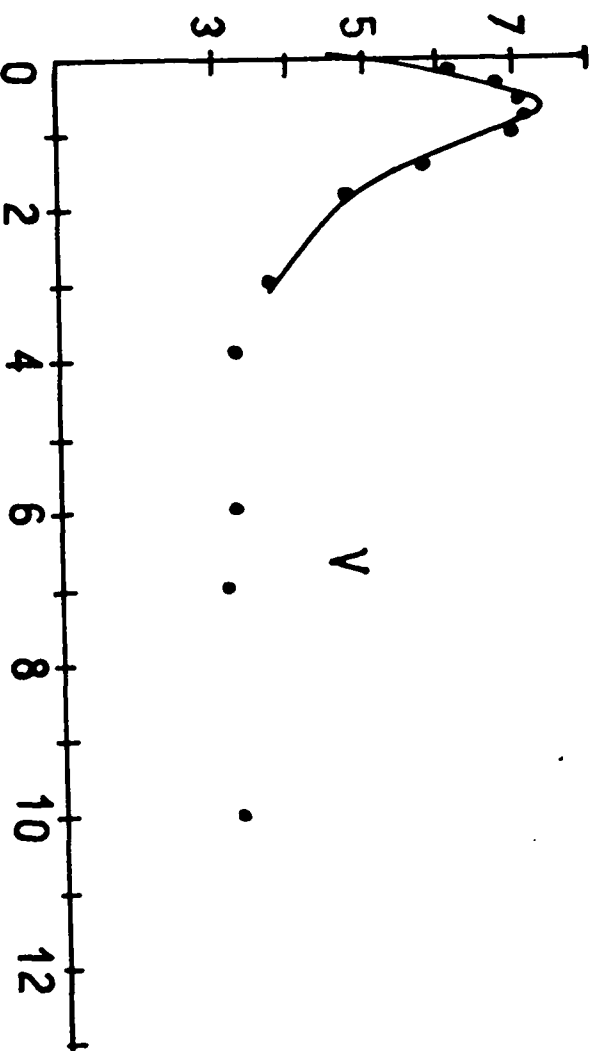
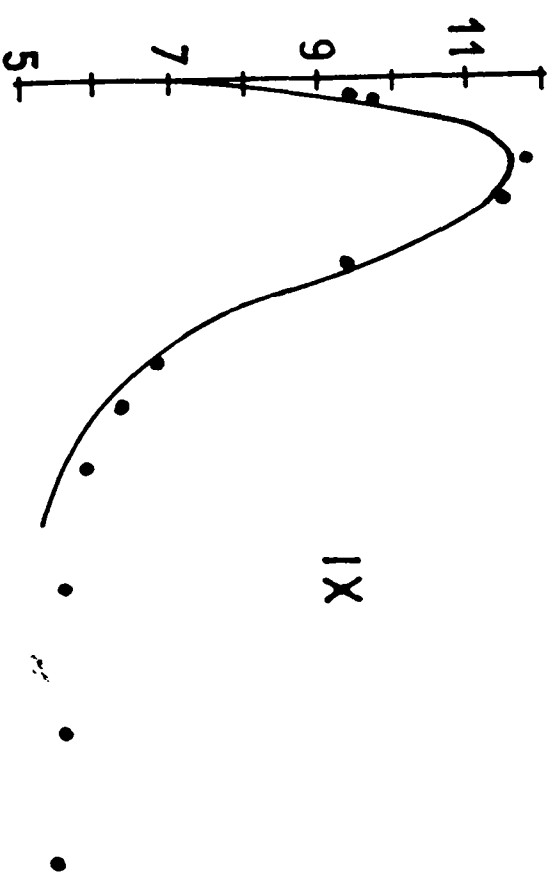
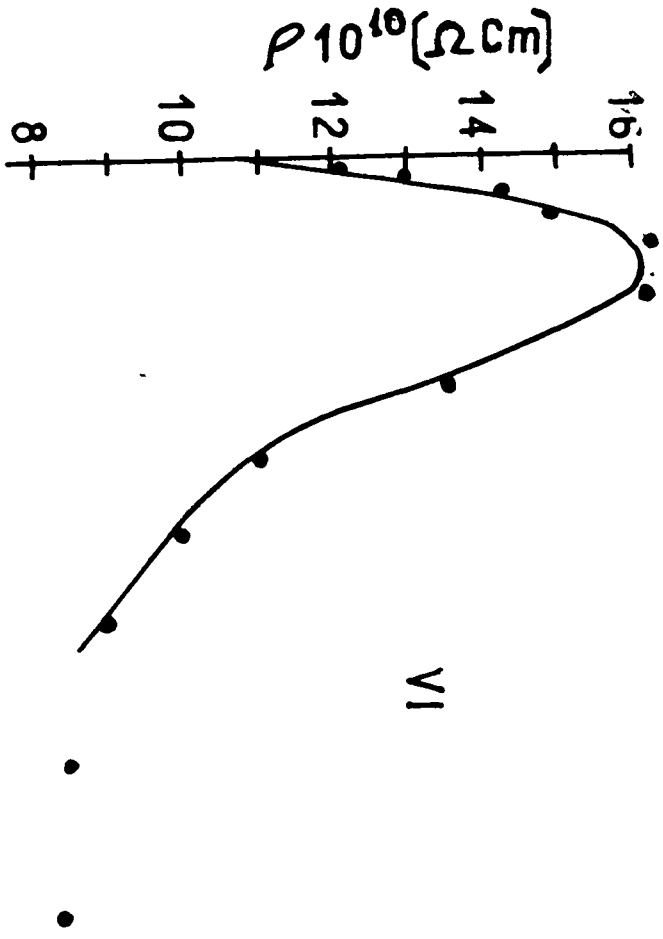
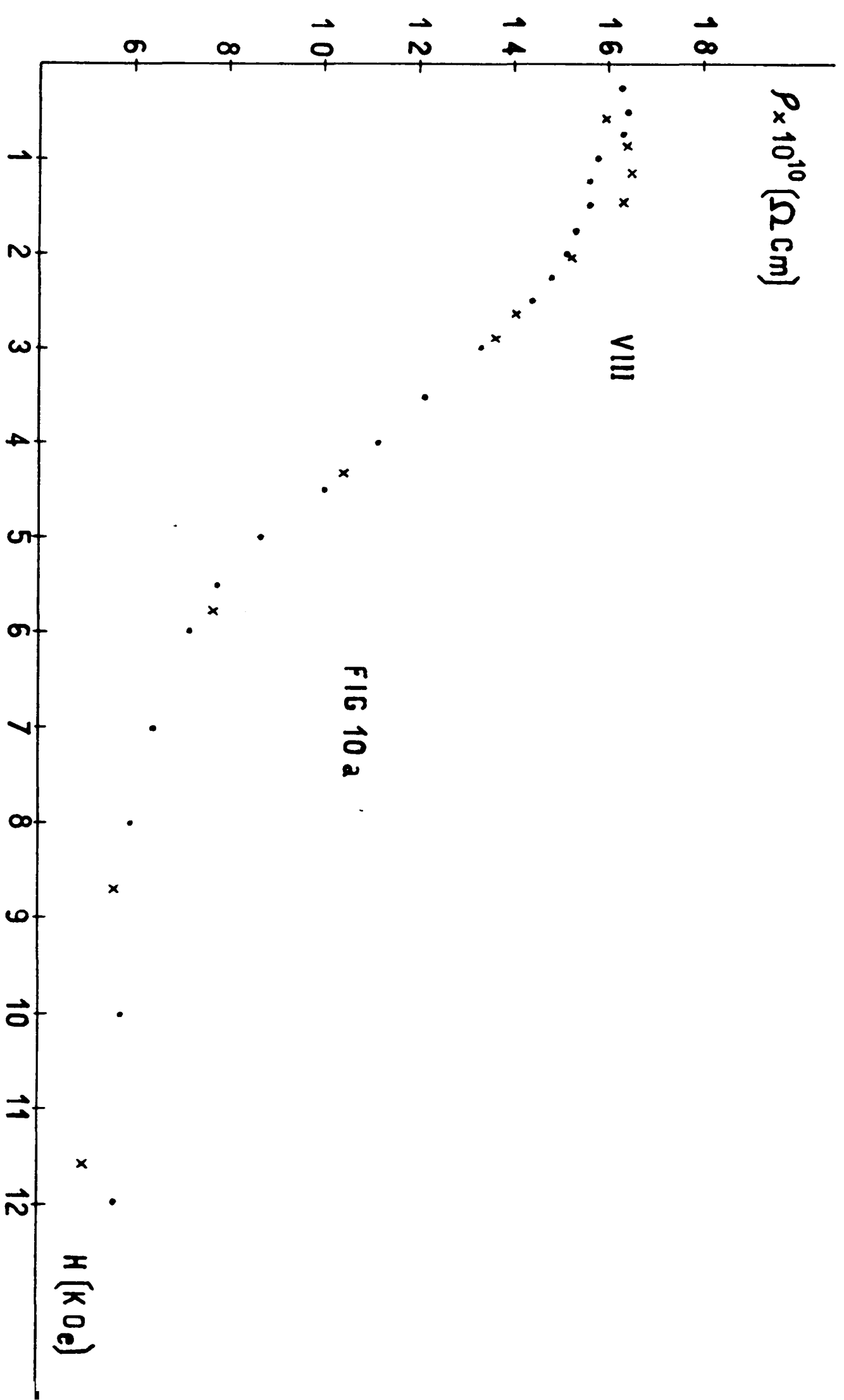


FIG 9b



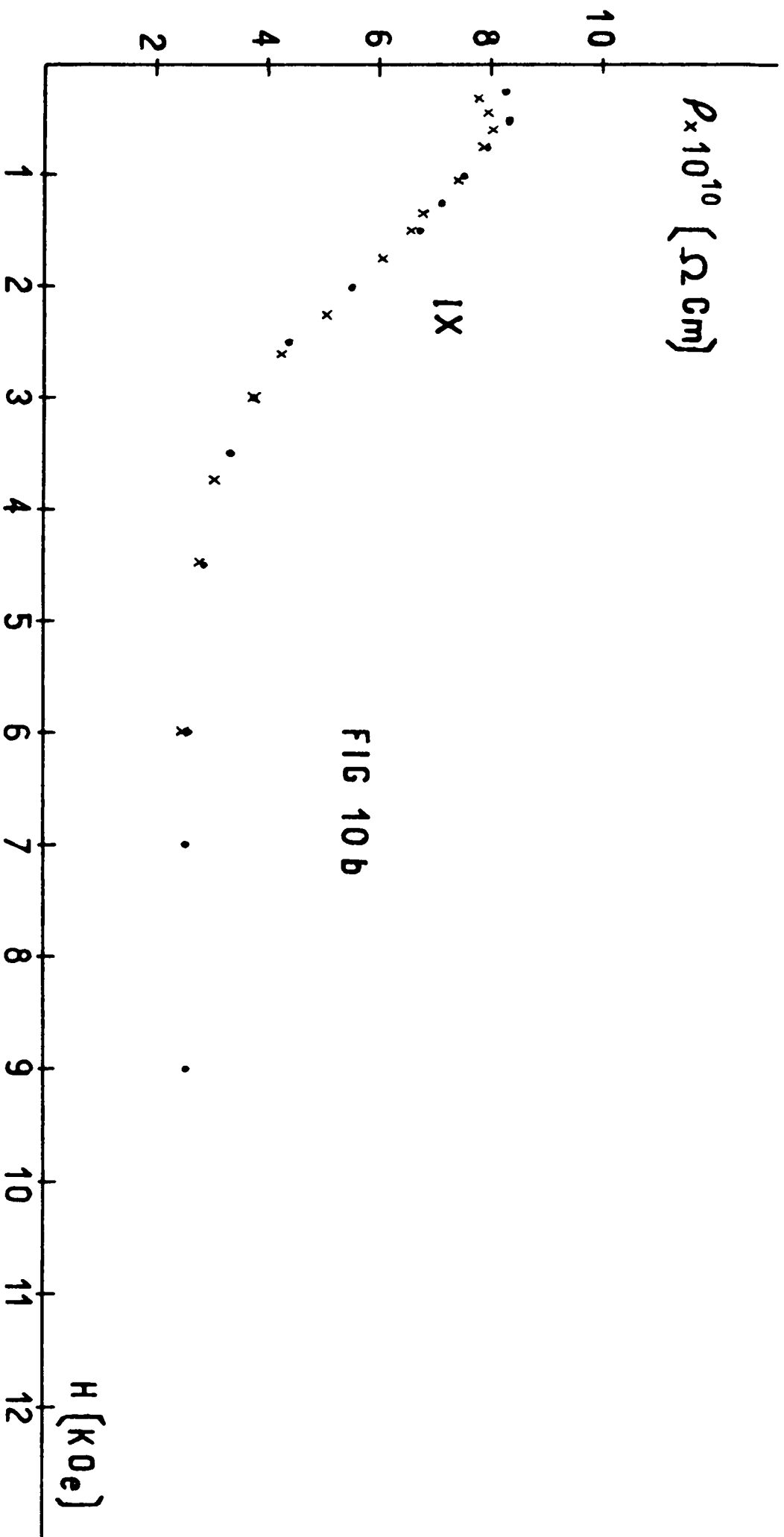


FIG 10b

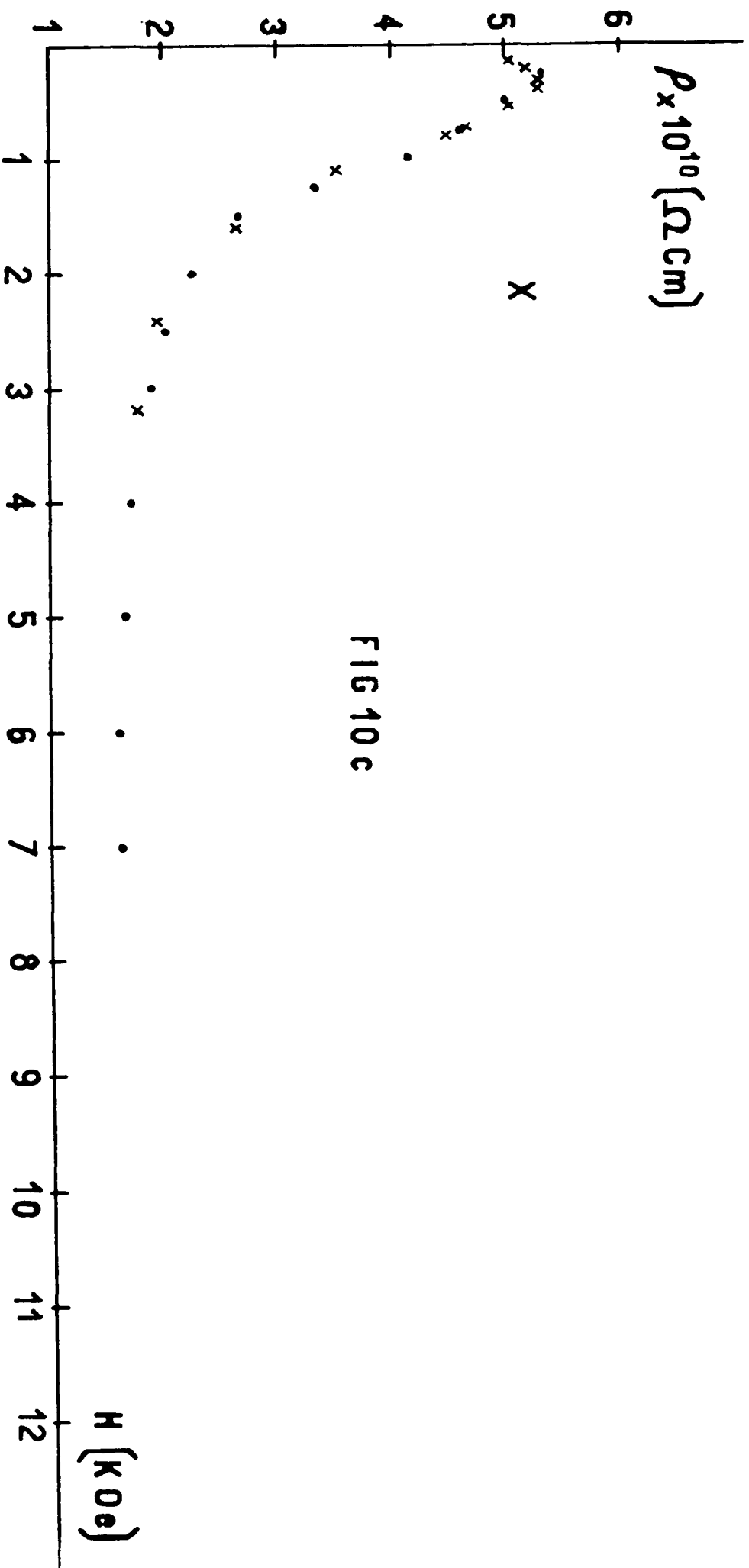


FIG 10c

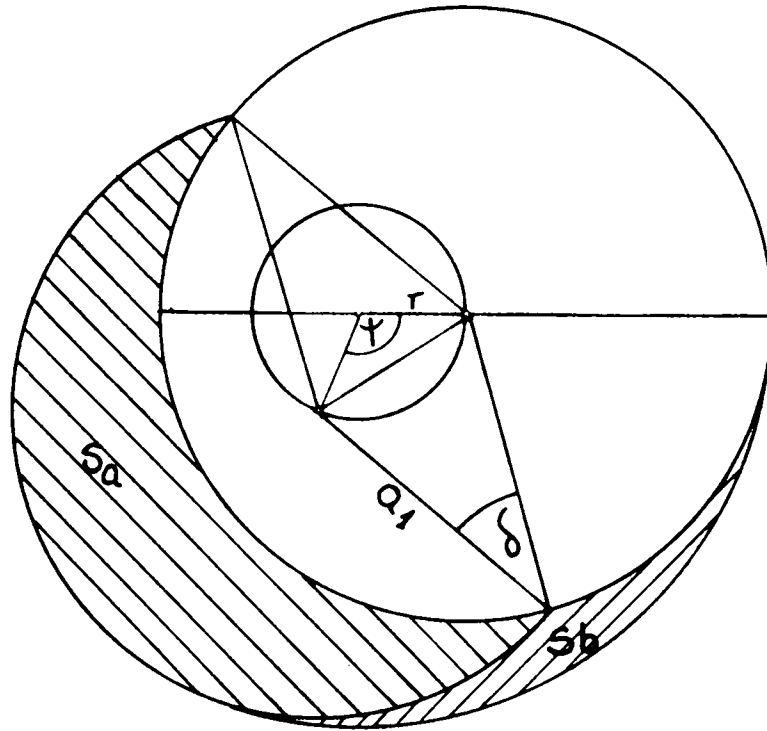


FIG A-1

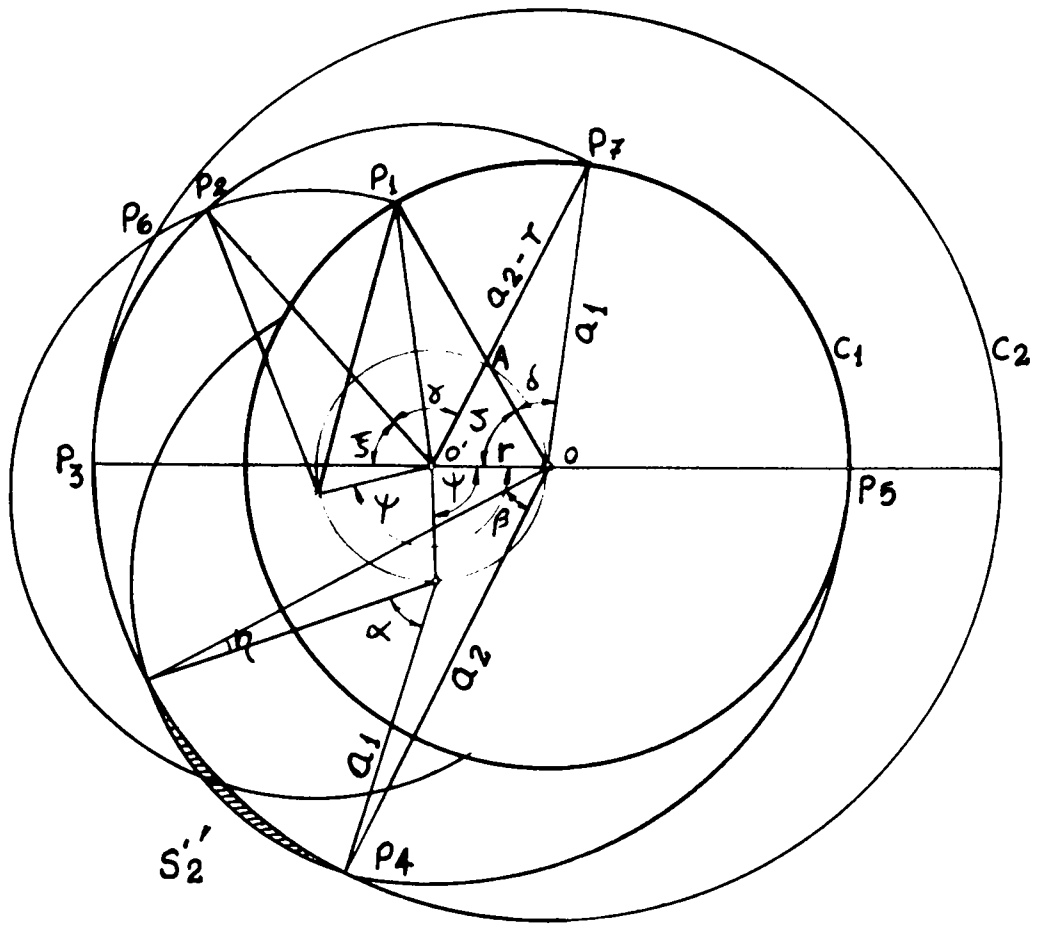


FIG A-2

