

01.80.36

I B

Teoría de Campos

sobre una red

R. DEZA

01.80.

TEORIA DE CAMPOS SOBRE UNA RED

Tesis presentada ante el Instituto Balseiro, Universidad Nacional de Cuyo, para optar al título de Doctor en Física.



Dr. Luis Masperi
Asesor Científico



Lic. Roberto R. Peza
Doctorando

San Carlos de Bariloche

- 1980 -

RESUMEN

En este trabajo se muestra la utilidad de los métodos de la Mecánica Estadística en la resolución de problemas de Teoría Cuántica de Campos. Especial énfasis es puesto en la versión hamiltoniana de las teorías de campos sobre la red, a las que se llega mediante el formalismo de Matriz de Transferencia. Esta versión hamiltoniana clarifica especialmente la estructura del vacío y las excitaciones de las diversas teorías de campos, permitiendo caracterizar sus fases, y sirve de marco para métodos derivados de la Mecánica Cuántica. La aplicación de dos de estos métodos a teorías de interés es el objeto de esta Tesis:

- a) Se aplica un método variacional del tipo de campo promedio a la teoría de medida $Z(2)$. El requerimiento de invariancia de medida del estado fundamental lleva a un modelo de Ising análogo que es resuelto por desarrollos de alta y baja temperaturas. Se obtiene una adecuada descripción de la transición entre una fase en que las cargas eléctricas están confinadas y otra en que están libres. Dichas fases están caracterizadas por un comportamiento tipo área o perímetro respectivamente de la función de correlación invariante de medida (lazo de Wilson). La transición se observa a través del comportamiento del parámetro variacional y a través de las discontinuidades en las derivadas de la energía del estado fundamental respecto del acoplamiento. Se obtiene una transición de segundo orden cuando el número de dimensiones espacio-temporales es tres, para un valor $\lambda_c \approx 2,23$ del acoplamiento, y una de primer orden en el caso cuadrimensional, siendo el valor obtenido de $\lambda_c \approx 0,94$, muy próximo al valor autodual. Se obtiene una estimación de la intersección crítica del Pomeron a partir de valores realistas de los parámetros en la Teoría de Campos de Reggeones (TCR) por el método de grupo de renormalización. Se calculan numéricamente con gran precisión los autovalores y elementos de matriz de los campos reggeónicos en los primeros estados cuánticos del problema de un sitio y luego se obtiene el diagrama de fases de la teoría con sus líneas críticas y puntos fijos para diversas construcciones de bloques de spins. De estos métodos, aquéllos que dan

un acoplamiento crítico para el modelo cuántico de spin análogo a la TCR próximo al obtenido por desarrollo de alta temperatura, predicen una intersección crítica perfectamente compatible con el valor medido a las presentes energías que es 1,95. Este hecho sugiere que el comportamiento asintótico de las secciones eficaces estaría regido por la TCR crítica.

ABSTRACT

In this work it is shown how the methods from Statistical Mechanics are useful in the solution of Quantum Field theoretical problems. Special emphasis is posed in the hamiltonian version of field theories on the lattice, to which one arrives through the Transfer Matrix formalism. This hamiltonian version sheds more light over the structure of vacuum state and excitations in the various lattice field theories, permitting thus the phase characterization, and serves as a framework for methods derived from Quantum Mechanics. The application of two of these methods to theories of interest is the object of this Thesis:

a) A variational method, similar to that of Mean Field, is applied to $Z(2)$ gauge theory. The requirement that the ground state must be gauge invariant leads to an analog Ising model, which is solved through high- and low-temperature expansions. One obtains an adequate description of the transition between two phases, confining and non-confining respectively. Those phases are characterized by an area- or perimeter behaviour of the gauge invariant correlation function (Wilson's loop). The transition can be observed through the behaviour of the variational parameter, as well as through the discontinuities in the derivatives of the ground state energy with respect to coupling. A second order transition for three space-time dimensions is obtained for a value $\lambda_c \approx 2.23$ of the coupling, and one of first order in the four-dimensional case appears at $\lambda_c \approx 1.94$, close to that expected from autoduality.

b) An estimate of the Pomeron critical intercept is obtained starting from realistic values of the parameters in Reggeon Field Theory (RFT) through the renormalization group method. Eigenvalues and matrix elements of reggeonic fields between the first quantum states in the one-site problem are accurately calculated, and then the phase diagram of the theory is mapped and critical lines and fixed points are found for several realizations of spin-blocks. Out of these methods, those which yield a critical coupling for the analog quantum spin model of RFT close to that

obtained through high-temperature expansion, lead to a critical Pomeron intercept consistent with the one measured at the present energies, i.e. ~ 1.75 . This fact means in turn that the asymptotic behaviour of cross sections should be governed by a critical Pomeron exchange.

INDICE

Introducción	1
<u>Capítulo I</u> - Teoría de Campos y Mecánica Estadística	9
I-1: Formulaci3n operatorial de la Teoría de Campos	10
I-2: Formalismo de integrales de camino	15
I-3: Teoría de Campos sobre la red como un problema de Mecánica estadística	17
I-4: Formalismo de Matriz de Transferencia	19
I-5: Interpretaci3n Mecánico-estadístico de algunas magnitudes de la TC	23
<u>Capítulo II</u> - El modelo de Ising	26
II-1: Fenomenología de las transiciones de fase	28
II-2: Teoría de puntos fijos	34
II-3: Autodualidad del modelo de Ising bidimensional	38
II-4: Forma Hamiltoniana del modelo de Ising en dos dimensiones	40
II-5: Autodualidad desde el punto de vista cuántico	42
II-6: Orden y desorden. Condensaci3n de Kinks	43
II-7: Resoluci3n exacta del modelo cuántico	45
II-8: Relaci3n con la teoría	49
<u>Capítulo III</u> - Métodos de resoluci3n de problemas en ME	52
III-1: Métodos variacionales	53
III-2: Métodos de grupo de renormalizaci3n	54
III-3: Técnicas de desarrollos en serie	60
III-4: Método de simulaci3n de Monte Carlo	67
<u>Capítulo IV</u> - Teoría con invariancia de medida $Z(2)$	68
IV-1: Construcci3n de un modelo de Ising con simetría local	69
IV-2: Teorema de Elitzur	70
IV-3: Funci3n de correlaci3n invariante de medida	72
IV-4: Forma hamiltoniana	74
IV-5: Transformaciones de dualidad	
a) dos dimensiones espaciales	75
IV-6: Transformaciones de dualidad	
b) tres dimensiones espaciales	78

IV-7: Fase desordenada y confinamiento de cargas externas	80
IV-8: Análisis de la transición de fase	82
Capítulo V - Método variacional en el modelo Z(2)	86
V-1: Modelo tridimensional en variables directas y duales.	
Comportamiento límite del lazo de Wilson	87
V-2: Analogía con un modelo de Ising clásico	89
V-3: Desarrollos de baja temperatura	92
V-4: Desarrollos de alta temperatura	96
V-5: Discusión de los resultados numéricos	101
V-6: Conclusiones	104
Capítulo VI - Teoría de Campos de Reggeones	106
VI-1: Polos de Regge	107
VI-2: Motivación y formulación de TCR	109
VI-3: Análisis de la TCR	112
Capítulo VII - Cálculo de la Intersección crítica del Pomeron	117
VII-1: Cálculo de autovalores y elementos de matriz del campo en el problema de un sitio	
a) definición del problema de autovalores	118
b) Cálculo de los elementos de matriz	120
c) Resultados numéricos	121
VII-2: Análisis de la interacción entre sitios	
a) $D=1$	124
b) $D=2$	127
c) Inclusión de los términos diagonales de en la interacción entre sitios	130
VII-3: Cálculo de c_1 ($D=2$)	131
VII-4: Conclusiones	132
Apéndice 7 A -	134
Referencias	

INTRODUCCION

La Teoría Cuántica de Campos es en este momento en la Física de Partículas Elementales una herramienta teórica insustituible. Su bien ganado prestigio se debe, fundamentalmente, a la asombrosa concordancia de sus predicciones con los datos experimentales en el terreno de la interacción electromagnética, en un rango de energías que va desde los pocos eV a las decenas de GeV.¹ Y esa predictibilidad se logra a pesar de ciertas dificultades teóricas como la divergencia de casi todos los términos de la serie perturbativa y de la serie en sí misma.

Mediante recursos de teoría de campos se ha logrado también la unificación de dos tipos de interacción aparentemente distintos, como son la electromagnética y la débil.²

En el terreno de la interacción fuerte, si bien la teoría de campos tuvo hace unos años un vigoroso competidor en la teoría de matriz S,³ en la actualidad hay cada vez más evidencia de que los hadrones son estados ligados de otras partículas, los llamados quarks, cuyo tratamiento más natural parece ser el de la teoría de campos. Gran parte de esa evidencia proviene de los experimentos de colisión profundamente inelástica de hadrones y leptones:⁴ para grandes transferencias de impulso el leptón parece interactuar no con el hadrón en sí, sino con partes individuales dentro del mismo, que Feynman llamó partones, y que interactúan como si estuvieran libres dentro del hadrón.⁵ ¿Pero entonces cómo se explica que no se hayan visto? La única explicación parece ser que el tipo de interacción entre estos componentes es tal que al aumentar su separación aumenta también el acoplamiento mutuo, de modo que resulta energéticamente más favorable la creación de otro hadrón que la separación de sus componentes.⁶

Se postuló para los quarks una interacción a través de bosones de medida, similar a la electrodinámica, pero el grupo de simetría es en este caso SU(3), no abeliano.⁷ Se ha demostrado que las teorías de medida no abelianas presentan el fenómeno observado de pequeñez del acoplamiento a grandes energías, denominado libertad asintótica.⁸ En este régimen se puede, efectivamente, realizar cálculos perturbativos, y los efectuados en la teoría SU(3), denominada Cromodinámica Cuántica, concuerdan bas

tante bien con la experiencia hasta el momento.⁹ Pero evidentemente, para poder afirmar que la Cromodinámica Cuántica es la teoría de las interacciones fuertes, esta debe poder predecir:

- a) el confinamiento de los quarks dentro de los hadrones,
- b) el espectro hadrónico y
- c) las características de las interacciones entre hadrones, tradicionalmente llamadas interacciones fuertes, y que sin embargo serían sólo la interacción residual de la que une a los quarks dentro del hadrón. Ninguno de estos efectos es accesible al cálculo perturbativo, sino que son consecuencia de los términos no lineales en las ecuaciones de campo.

En los últimos años se han buscado denodadamente métodos no perturbativos para extraer información de las teorías de campos. Así se buscaron nuevas soluciones a las ecuaciones clásicas, alrededor de las cuales se puede cuantizar de la manera canónica, identificándose de este modo sectores en la teoría con distintas características topológicas, y por tanto inaccesibles entre sí a través del cálculo perturbativo.¹⁰ Esta línea, que podríamos llamar semiclásica, parece haberse agotado.¹¹

Hay otra línea, muy promisoría, y es la que seguiremos en esta Tesis: fue propuesta en 1974 por Wilson y Kogut¹² y se basa en las analogías que existen entre la Teoría de Campos y la Mecánica Estadística, que en principio permiten a aquélla hacer uso de los métodos no perturbativos de ésta. Quizás en el futuro se logre dilucidar si existe vinculación profunda entre ambas teorías, pero para nuestros propósitos basta la analogía formal. Esto se logra a través de los dos siguientes artificios:

- a) prolongación de todas las magnitudes de la teoría a tiempo imaginario (este artificio es también usado en la línea semiclásica) y
- b) discretización del espacio-tiempo, por lo que llamamos a ésta Teoría de Campos sobre la Red. Esta discretización del espacio-tiempo (en métrica Euclídea) se puede interpretar como una manera de regularizar las divergencias ultravioletas de la teoría de campos. Mediante el formalismo de Matriz de Transferencia,¹³ desarrollado para la Mecánica Estadística, se puede pasar a una versión operatorial de la teoría de campos sobre la red que permite mostrar algunas de las propiedades físicas de la teoría de manera más directa.

El programa de la Teoría de Campos sobre la Red se puede enunciar entonces de la siguiente manera:

"Buscar un modelo sobre la red que describa fermiones en interacción, a través de bosones de medida no abelianos, que presente una fase confinante y tal que en el continuo se recuperen las propiedades conocidas de invariancia de Lorentz y libertad asintótica". Veremos que sólo es posible el paso al continuo si los parámetros de la teoría corresponden a un punto crítico,¹⁴ o sea un punto de transición de fase continua, dado que en éstos la longitud de correlación del sistema es infinita. Otro problema es el reconocimiento de fases en modelos con simetría de medida, es decir local. Debemos definir funciones de correlación invariantes de medida.¹⁵ En este programa se hace necesario el estudio de transiciones de fase en una variedad de modelos, con diversas simetrías y en diverso número de dimensiones.

El modelo más simple de teoría de medida sobre la red es la teoría con invariancia local $Z(2)$. Esta, que deriva del modelo de Ising, fue formulada en 1971 por F. Wegner,¹⁶ quien buscaba modelos que presentaran transiciones de fase sin ruptura espontánea de simetría, es decir, sin un parámetro de orden local. Si bien este modelo no tiene ninguna realización física conocida, (aunque con ciertas modificaciones constituye la teoría de los llamados "vidrios de spin"¹⁷ y también tiene relación con el problema de fusión de cristales bidimensionales), su interés desde el punto de vista teórico es grande. Recientemente ha sido sugerido que las configuraciones de campo relevantes para el confinamiento son las que corresponden al centro del grupo de medida; el centro de las teorías $SU(N)$ es precisamente $Z(N)$. Pero aún descontando esta interesante posibilidad, las teorías $Z(N)$ interesan como un primer peldaño hacia la comprensión de las teorías de medida no abelianas, puesto que ya $Z(2)$ presenta una fase confinante.²⁰

El problema que nos ocupará en la presente Tesis es el estudio del orden de la transición de fase para la teoría $Z(2)$ en cuatro dimensiones. A este respecto, existe discrepancia entre los resultados obtenidos por métodos numéricos (simulación de Monte Carlo)²¹ y los que revelan las técnicas de grupo de renormalización.²² Mediante la técnica de simulación de Monte Carlo se encuentra para el modelo $Z(2)$ una transición de primer orden; éste es una técnica muy poderosa, pero evidentemente brinda

poca información física acerca del fenómeno que lleva a la transición de fase. Por otra parte los métodos de grupo de renormalización indican una transición de segundo orden. Veremos después que estos métodos se basan en la proximidad a un punto crítico en el cual, como dijimos, la longitud de correlación es infinita, que no es el caso de una transición de primer orden.²³ Además, el tipo de aproximaciones comunes en estos métodos consiste en descartar en cada paso un cierto número de estados, supuestos irrelevantes para el problema. La ausencia de magnetización espontánea en las teorías de medida sobre la red es consecuencia de un teorema general,²⁴ según el cual los estados cuánticos fundamentales del sistema deben ser invariantes de medida. Esta condición sobre los estados hace a los métodos de grupo de renormalización sumamente engorrosos, y poco justificables las aproximaciones introducidas.

En esta Tesis proponemos el análisis de dicha transición de fase a través de un método mucho más simple e intuitivo.²⁵ Se trata de un método variacional del tipo de campo promedio, pero que tiene en cuenta la invariancia de medida del estado fundamental del sistema. Trabajando en el modelo hamiltoniano sobre una red tridimensional (el tiempo se ha hecho continuo a través del formalismo de Matriz de Transferencia) y haciendo uso de la autodualidad del modelo, es posible reconocer dos fases en el sistema, una de ellas confinante, a través del comportamiento de la función de correlación invariante de medida, el llamado "lazo de Wilson". También es posible obtener el valor de la constante de acoplamiento para el cual se produce la transición de fase, y dicho valor está de acuerdo con el esperado por autodualidad. En cuanto al orden de la transición, encontramos que ésta es de primer orden y está caracterizada cualitativamente por un salto en el valor del parámetro variacional que minimiza la energía del estado fundamental.

También aplicamos nuestro método al modelo $Z(2)$ en $2+1$ dimensiones, obteniendo en este caso una transición de segundo orden, de acuerdo esta vez con los métodos numérico y de grupo de renormalización, aunque con la técnica variacional la constante de acoplamiento crítica resulta menor que la que debería ser, teniendo en cuenta que este modelo es dual al de Ising en $2+1$ dimensiones. Nuevamente la transición puede ser observada a tra.

vés de la variación, esta vez continua, del parámetro variacional. El siguiente objetivo en esta línea es considerar también la presencia de campos de materia en el modelo, tarea que se está efectuando pero que no será objeto de la presente Tesis.

Hasta aquí nos hemos referido al objetivo principal de la teoría de campos sobre la red, cual es el de demostrar el confinamiento de los quarks, y por ende la validez de la Cromodinámica Cuántica como teoría fundamental de las interacciones fuertes. Pero dado que la interacción entre hadrones, responsable entre otras cosas de la formación del núcleo atómico, viene a ser como la interacción de Van der Waals de la cromodinámica, y puesto que aquélla es la que se puede observar en los laboratorios, interesa describirla desde un punto de vista más fenomenológico, que obviamente requerirá a posteriori su fundamentación en la Cromodinámica Cuántica.

Una poderosa técnica que permite el análisis de las reacciones hadrónicas a altas energías sin necesidad de tomar en cuenta a sus constituyentes fundamentales, es la Teoría de Campos de Reggeones (TCR).²⁶ En la década del 60 se observó que las secciones eficaces hadrónicas variaban según una potencia de la energía,²⁷ y que existía una relación entre la (masa)² y el spin de los hadrones,²⁸ cuando éstos poseían el mismo conjunto de números cuánticos. Ambos fenómenos pudieron ser explicados a través de la existencia de singularidades en el plano complejo del impulso angular, los llamados "polos de Regge",²⁹ cuya ubicación dependía de la transferencia de impulso. Estas "trayectorias" eran precisamente la continuación analítica de las que daban la mencionada relación masa-spin, y por tanto tenían conjuntos específicos de números cuánticos. La que contribuye a los procesos elásticos en el canal cruzado tiene los números cuánticos del vacío y se denominó "trayectoria de Pomernchuk" o "Pomerón".³⁰ La aproximada constancia de las secciones eficaces totales a energías del orden de 10 GeV se explicó a través de la dominancia de esta trayectoria, cuyo valor para transferencia de impulso $t=0$, la llamada "intersección", debía ser $J=1$. Pero pronto se vio que el Pomerón debía ser una singularidad más complicada que un polo, puesto que en ese caso la matriz de dispersión S no cumplía la condición de unitariedad.³¹ El intercambio de Pomerones entre los hadrones daba lugar a la formación de cortes en el plano comple

jo J , que interactuaban con los polos dando lugar a las singularidades que se manifestaban a más altas energías.

La Teoría de Campos de Reggeones es una manera de asegurar la unitariedad de la matriz S en el canal t . Las ecuaciones de discontinuidad en los cortes se pueden interpretar como gráficos de Feynman de una teoría de cuasipartículas en un espacio bidimensional que corresponde al parámetro de impacto, y cuya variable temporal es iy , donde y es la rapidez: $y = \ln(s)$, con $s = (\text{energía de centro de masa})^2$. A través de la transformación de Mellin, que expresa la amplitud parcial $F(J, t)$ en términos de $\text{Im } T_{AB}(s, t)$ se puede ver que la variable canónicamente conjugada a y será $E = 1 - J$, y las conjugadas a \vec{x} corresponden a la transferencia de impulso \vec{k} , que es tal que $|\vec{k}|^2 = -t$.

Postulando para el Reggeón desnudo una trayectoria lineal correspondiente a un polo simple, se obtiene una relación energía-impulso no relativista:

$$E = \alpha_0 |\vec{k}|^2 + \Delta_0$$

siendo $\Delta_0 = 1 - \alpha_0$ y α_0 la intersección desnuda del Reggeón. En cuanto a la interacción, en principio hay de varios tipos: absorptivas, difractivas y poliperiféricas,³² y que surgen de escribir para el Pomerón un término

$$-i\frac{1}{2}r_0 \bar{\psi}(\bar{\psi} + \psi)\psi$$

en el Lagrangiano, siendo ψ el campo del Pomerón; para los Reggeones secundarios, que tienen $\alpha_0 < 1$, la principal interacción (en el sentido de la TCR) será con el Pomerón. El carácter imaginario del acoplamiento entre Pomerones proviene de que las correcciones absorptivas dominan sobre las difractivas. Una consecuencia del carácter imaginario del acoplamiento es que el Hamiltoniano de los Reggeones resulta ser no hermitico. Otra característica del acoplamiento es que se debilita exponencialmente con la transferencia de impulso,³³ hecho que podemos aproximar por un cutoff abrupto. La manera más natural de tener en cuenta este fenómeno es plantear el problema sobre una red en parámetro de impacto, lo que sumado al carácter imaginario de la variable temporal hacen de éste un problema de Mecánica Estadística. Hay otro fenómeno que apunta a esta consideración: especializándonos en el caso del Pomerón, que como hemos dicho es el que domina el comportamiento de las secciones eficaces totales a altas energías, un teorema debido a Froissart³⁴ impone una cota a la variación de aquéllas con la energía:

$$\sigma \lesssim y^2$$

esto requiere que la intersección renormalizada del Pomerón no sea mayor que 1. El valor 1 sólo puede ocurrir para valores de α_0 a partir de un cierto valor α_{0c} , que se ha demostrado que debe ser mayor que 1.³⁵ Se ha encontrado un fenómeno crítico³⁶ bastante análogo al que presenta, por ejemplo, el modelo de Ising; en éste, a partir de un cierto valor crítico de la constante de acoplamiento, la diferencia de energía entre los estados fundamental y primer excitado, que se interpreta como la masa de las partículas asociadas a la teoría se anula, a la vez que aparece una magnetización espontánea. En la TCR lo que aparece es un elemento de matriz del campo entre los estados inferiores.

Nuestro objetivo en esta Tesis será calcular a través de las técnicas de grupo de renormalización el valor de α_{0c} partiendo de los valores de los parámetros de la teoría (a^2 , n_0 y el parámetro de red b) que se conocen por medición a las presentes energías.³⁷ Este valor puede ser comparado con el α_0 medido a estas energías puesto que, debido a la existencia de un umbral en rapidez para los efectos asociados con el Pomerón,³⁸ se deduce que en esta región corresponde a la intersección desnuda del Pomerón; de esta manera se puede juzgar si la Naturaleza eligió la fase crítica o supercrítica, lo que determinará que el comportamiento asintótico con la energía de las secciones eficaces totales sea como $y^{-\gamma}$ (γ es un índice crítico) o como y^2 respectivamente, saturando esta última el límite de Froissart.

Para ello formulamos un modelo de spin análogo a la TCR y separamos el problema en dos partes:³⁹

- a) cálculo de los autovalores de energía para el problema de un sitio. Es esta la primera resolución exacta y a partir de valores realistas de este problema. Para ello usamos representación de Bargmann⁴⁰ y resolvemos la ecuación diferencial resultante, imponiendo a las soluciones el comportamiento asintótico adecuado.
- b) análisis de la interacción entre sitios, llevado a cabo mediante diversas técnicas de construcción de bloques de spin. Como ocurre generalmente, distintas definiciones de los bloques de spin arrojan como resultado distintos valores de la constante de acoplamiento crítica, pero afortunadamente existe un cálculo bastante confiable de dicho valor,⁴¹ basado en desarrollos de alta y baja temperaturas, y se observa que aquellas definiciones de bloques de spin cuyo resultado es próximo al que se puede extrapo-

lar de aquél para valores realistas de los parámetros, llevan a un valor de α_0 próximo a 1.05, que es el medido a las presentes energías, afirmando la hipótesis de un Pomeron crítico frente a uno supercrítico.

El programa de esta Tesis será el siguiente:

En el capítulo I, luego de repasar brevemente los dos métodos de cuantización en Teoría de Campos, tomando como ejemplo el campo escalar con autointeracción ϕ^4 , estableceremos las analogías entre una teoría de campos sobre la red y un sistema de Mecánica Estadística en cuatro dimensiones; mostrando además la equivalencia de ambos métodos de cuantización a través del formalismo de Matriz de Transferencia, desarrollado para la Mecánica Estadística.

En el capítulo II centraremos nuestra atención en el modelo de Ising, por ser éste el modelo más estudiado de sistemas que presentan transición de fase y porque, por tener solución exacta en dos dimensiones es un buen campo de prueba para los métodos aproximados cuya efectividad se quiere estudiar. Deduiremos a partir del modelo de Ising en d dimensiones un modelo de Ising cuántico con campo transversal en $d-1$ dimensiones, usando Matriz de Transferencia. Veremos que este último representa la versión sobre la red de la teoría ϕ^4 con ruptura espontánea de simetría; que en el punto crítico describe una teoría de fermiones relativistas sin masa, y analizaremos algunas cuestiones como la autodualidad y el significado topológico de las excitaciones.

Los métodos de resolución más frecuentes en Teoría de Campos sobre la Red son analizados en el capítulo III. Entre ellos citaremos los métodos variacionales, perturbativos, numéricos y de grupo de renormalización. Estos son ilustrados mediante su aplicación al modelo de Ising.

Los restantes capítulos son aplicaciones especiales de los métodos variacional y grupo de renormalización, y contienen las contribuciones originales de la presente Tesis. Los capítulos IV y V están dedicados a la teoría de medida $Z(2)$, y los dos restantes a la Teoría de Campos de Reggeones.

Capítulo I - TEORÍA DE CAMPOS Y MECÁNICA ESTADÍSTICA

En la Teoría de Campos existen dos métodos equivalentes de cuantización:

El llamado método canónico consiste en imponer relaciones de conmutación entre el campo y su impulso canónicamente conjugado. Estos, y por ende las magnitudes construidas con ellos y en particular el Hamiltoniano, pasan a ser operadores que actúan sobre un espacio de estados abstracto (espacio de Fock). El Hamiltoniano de campo libre puede ser diagonalizado en este espacio y sus autoestados se interpretan como estados con número de partículas definido. El estado de cero partículas se denomina "vacío". Una magnitud de primordial importancia en este marco es el valor medio del producto de dos operadores de campo en el vacío, llamado propagador puesto que tiene la siguiente interpretación: en un punto se crea una partícula en un cierto instante, que se propaga hasta ser destruida en otro punto en un instante posterior. Otro ingrediente que surge cuando uno efectúa cálculos perturbativos es el vértice, donde interactúan las partículas (interacción local).

El otro método de cuantización es mediante integrales de camino, que consiste en lo siguiente: puesto que la configuración clásica del campo es la que minimiza la acción, los efectos cuánticos estarán asociados con todas las otras posibles configuraciones de campo y debemos entonces tomarlas en consideración, pero cada una con un peso proporcional a $\exp(iS/\hbar)$, donde S es la acción correspondiente a dicha configuración. Así para $\hbar \rightarrow 0$ se tiene la configuración clásica como fundamental, y las otras representan sólo fluctuaciones alrededor de ésta. En este esquema el propagador se calcula como el promedio del producto de dos campos entre todas las configuraciones. Por ser el propagador una función analítica del tiempo puede ser prolongada a valores imaginarios del mismo. Pero entonces este promedio resulta ser uno de Mecánica Estadística en un conjunto canónico, si hacemos el reemplazo $S \rightarrow E$; $\hbar \rightarrow kT$. Más aún, el límite clásico de la Teoría de Campos presenta un paralelo con el límite $T \rightarrow 0$ de la Mecánica Estadística. Ambos casos están caracterizados por la ausencia de fluctuaciones.

En lo que sigue delinearemos con cierto detalle los procesos de cuantización canónica y por integrales de camino, en la teoría perturbativa, tomando como ejemplo la teoría relativista del campo escalar con autointeracción cuártica, y luego mostraremos su equivalencia a través del formalismo de Matriz de Transferencia.

I-1: Formulación operatorial de la Teoría de Campos

Consideremos la teoría definida por la siguiente densidad Lagrangiana:

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} (\partial_\mu \phi \partial^\mu \phi - m^2 \phi^2) - \lambda \phi^4 \quad \text{con } \phi \text{ real y } \lambda > 0. \quad (1-1)$$

Para $m^2 > 0$ y $\lambda = 0$, con la condición de contorno $\phi \rightarrow 0$ se obtiene $|x| \rightarrow \infty$

como ecuación de Euler-Lagrange la ecuación de Klein-Gordon:

$$(\square + m^2) \phi = 0 \quad (1-2)$$

que tiene como soluciones ondas planas $\exp(\pm ik \cdot x)$ con $k^2 = m^2$, que forman un sistema ortonormal y completo.

El impulso canónicamente conjugado de ϕ es:

$$\pi \equiv \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\phi}} = \dot{\phi} \quad (1-3)$$

y la densidad Hamiltoniana

$$\mathcal{H} \equiv \pi \dot{\phi} - \mathcal{L} = \frac{1}{2} \pi^2 + \frac{1}{2} \vec{\nabla} \phi \cdot \vec{\nabla} \phi + \frac{1}{2} m^2 \phi^2 + \lambda \phi^4 \quad (1-4)$$

Para m^2 y $\lambda > 0$, la solución que minimiza la energía es $\phi = 0 \forall x$.

Las únicas invariancias de \mathcal{L} son la traslacional y la rotacional, de modo que, en virtud del teorema de Noether, las únicas cantidades conservadas (con interpretación física) son el Hamiltoniano

$$H = \int d\vec{x} \mathcal{H}$$

el impulso lineal $\vec{P} = - \int d\vec{x} (\pi \vec{\nabla} \phi)$

y el impulso angular $M^{ij} = \int d\vec{x} (\tau^{0i} x^j - \tau^{0j} x^i)$, con $\tau^{0i} = \pi \partial_i \phi$ (1-5)

En este modelo el spin es cero y no hay cargas.

En este formalismo la cuantización se obtiene, como dijimos, requiriendo que ϕ y π sean operadores que satisfacen las siguientes relaciones de conmutación en el esquema de Schrödinger, o en el de Heisenberg a tiempos iguales:

$$[\phi(x), \pi(x')] = i\delta(x-x') \quad ; \quad [\phi(x), \phi(x')] = [\pi(x), \pi(x')] = 0 \quad (1-6)$$

Se puede verificar a través de los conmutadores con ϕ que H ,

\vec{P} y M^{ij} son respectivamente los generadores de traslaciones temporales, espaciales y rotaciones infinitesimales del campo. También se verifica que $[H, \vec{P}] = [H, M^{ij}] = 0$ (1-7)

Para interpretar las excitaciones cuánticas del campo debemos diagonalizar el Hamiltoniano. Si no existiera el término $\lambda\phi^4$ tendríamos en cada punto un oscilador armónico, que sabemos cuantizar, aunque éstos están acoplados entre sí por el término

$$\frac{1}{2} \vec{\nabla}\phi \cdot \vec{\nabla}\phi$$

Supondremos que $\lambda \ll 1$ de modo que podamos tratar la interacción como una perturbación sobre los autoestados de H y \vec{P} .

Para diagonalizar el Hamiltoniano en el caso $\lambda \neq 0$ escribimos ϕ y π en representación de impulso de la siguiente manera:

$$\phi(x) = \int \frac{d^3k}{\sqrt{2\omega(k)}(2\pi)^3} (a(k)e^{-ik \cdot x} + a^\dagger(k)e^{ik \cdot x})$$

$$\pi(x) = \int \frac{d^3k}{\sqrt{2\omega(k)}(2\pi)^3} (a(k)e^{-ik \cdot x} + a^\dagger(k)e^{ik \cdot x}) (-i\omega(k))$$

(1-8)

con $\omega(k) \equiv \sqrt{k^2 + m^2} = k^0$

Las anteriores relaciones de conmutación entre ϕ y π se satisfacen si requerimos para estos nuevos operadores las siguientes:

$$[a(k), a^\dagger(k')] = \delta(k - k') \quad ; \quad [a(k), a(k')] = [a^\dagger(k), a^\dagger(k')] = 0$$

(1-9)

En términos de estas nuevas variables el Hamiltoniano y el impulso del campo se escriben

$$H = \int d^3k \omega(k) [a^\dagger(k) a(k) + \frac{1}{2}] \quad ; \quad \vec{P} = \int d^3k \vec{k} a^\dagger(k) a(k) \quad (1-10)$$

y los autoestados de estos operadores son el producto sobre todos los valores posibles de k de los autoestados del operador $n(k) = a^\dagger(k) a(k)$, que efectivamente pueden ser hallados y tienen una interpretación simple: $n(k)$ representa un estado con n partículas libres con impulso \vec{k} y energía $\omega(k)$, y por ende, de masa m . La acción de los operadores $a^\dagger(k)$ y $a(k)$ sobre estos estados es crear o destruir, respectivamente, una de tales partículas.

De la expresión del Hamiltoniano en términos de los operadores a y a^\dagger vemos que al estado $|0\rangle$, comunmente llamado vacío, corresponde una energía infinita. Como ésta no es obser-

vable, podemos efectuar una redefinición de la energía de modo que al vacío corresponda el valor cero. Esto se logra con la prescripción de ordenamiento normal de los campos y sus impulsos conjugados en el Hamiltoniano, de modo que todos los operadores a se encuentren a la derecha de los a^\dagger . Se denota $:H:$.

Hay una magnitud que nos interesará para el cálculo perturbativo y es el propagador de Feynman del campo. Este es simplemente la función de Green del operador de Klein-Gordon, con el requerimiento físico que sólo partículas con energía positiva pueden propagarse en el sentido creciente del tiempo. Este puede escribirse en la forma

$$i\Delta_F(x'-x) = \langle 0 | T(\phi(x')\phi(x)) | 0 \rangle = \langle 0 | \phi(x')\phi(x) | 0 \rangle \theta(t'-t) + \langle 0 | \phi(x)\phi(x') | 0 \rangle \theta(t-t') \quad (1-11)$$

que se denomina producto temporalmente ordenado, y en representación de impulso

$$i\Delta_F(x'-x) = i \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \cdot \frac{e^{-ik \cdot (x'-x)}}{k^2 - m^2 + i\epsilon} \quad (1-12)$$

donde la prescripción $i\epsilon$ tiene en cuenta la condición mencionada.

Si ahora consideramos $\lambda \neq 0$ la ecuación clásica del campo es

$$(\square + m_0) \phi(x) = \lambda \phi^3(x) \quad (1-13)$$

llamando ahora m_0 a la masa que aparece en el Lagrangiano. Ya no podemos interpretar a ϕ como un operador que crea o destruye partículas libres, pero sí podemos construir con él un operador que haga esto. Puesto que el término de interacción existe siempre, estas partículas no pueden tener masa m_0 sino otro valor m . El formalismo que estamos desarrollando pretende describir procesos de colisión entre partículas físicas libres, suponiendo que su interacción representa una perturbación sobre estos estados, y que se produce en un intervalo limitado de tiempo. De acuerdo con esto podemos definir operadores ϕ_{in} y ϕ_{out} con los cuales construir estos estados en el pasado y futuro remotos. El elemento de matriz $S_{\beta\alpha} = \langle \beta_{out} | \alpha_{in} \rangle$ es el que nos permitirá hallar la probabilidad de transición entre estos estados debida a la interacción. La técnica de reducción LSZ nos permite expresar estos elementos de matriz en términos de integrales de las cantidades

$$\tau(x_1, \dots, x_n) = \langle 0 | T(\phi(x_1) \dots \phi(x_n)) | 0 \rangle \quad (1-14)$$

que son las funciones de Green exactas del problema para n partículas; $\tau(x, x')$ es entonces el propagador de Feynman completo de la teoría.

Ahora bien, suponiendo como estamos que la teoría de perturbaciones es aplicable a nuestro problema, los operadores ϕ y ϕ_{in} (ϕ_{out}) están en correspondencia uno a uno y pueden ser relacionados por una transformación unitaria

$$\phi(\vec{x}, t) = U^{-1}(t) \phi_{in}(\vec{x}, t) U(t) \quad (1-15)$$

Definiendo luego el operador $U(t, t') = U(t) U^{-1}(t')$, se observa que éste evoluciona según

$$i \frac{\partial U(t, t')}{\partial t} = H_I(t) U(t, t') \quad (1-16)$$

con $H_I(t) = H_I(t) + E_0(t)$, donde E_0 conmuta con $\phi_{in}(x, t), \pi_{in}(x, t)$ y

$$H_I(t) = H_I(\phi_{in}(t), \pi_{in}(t)) = H(\phi_{in}, \pi_{in}) - H_{in}(\phi_{in}, \pi_{in}) \quad (1-17)$$

En ésta $H(\phi_{in}, \pi_{in})$ es el Hamiltoniano completo expresado en términos de los campos iniciales y H_{in} es el Hamiltoniano de campo libre.

Esto nos permite resolver formalmente

$$U(t, t') = 1 - i \int_{t'}^t dt_1 H_I(t_1) U(t_1, t') \quad (1-18)$$

e iterando podemos expresar finalmente $\tau(x_1, \dots, x_n)$ en términos de los campos ϕ_{in} de la siguiente manera:

$$\tau(x_1, \dots, x_n) = \frac{\langle 0 | T(\phi_{in}(x_1) \dots \phi_{in}(x_n) \exp[-i \int_{-\infty}^{\infty} d^4y \mathcal{L}_I(y)]) | 0 \rangle}{\langle 0 | T(\exp[-i \int_{-\infty}^{\infty} d^4y \mathcal{L}_I(y)]) | 0 \rangle} \quad (1-19)$$

que podemos calcular por desarrollo en serie debido a nuestra hipótesis perturbativa.

Para poder efectuar cálculos debemos pasar del ordenamiento temporal al normal, de modo de eliminar los operadores en la expresión de $\tau(x_1, \dots, x_n)$. El procedimiento está indicado por el teorema de Wick, que se puede expresar de la siguiente manera:

$$\begin{aligned} T(\phi(x_1) \dots \phi(x_n)) &= : \phi(x_1) \dots \phi(x_n) : + \\ \langle 0 | T \phi(x_1) \phi(x_n) | 0 \rangle &: \phi(x_2) \dots \phi(x_n) : + \text{permutaciones} + \\ \langle 0 | T \phi(x_1) \phi(x_2) | 0 \rangle \langle 0 | T \phi(x_3) \phi(x_4) | 0 \rangle &: \phi(x_5) \dots \phi(x_n) : + \text{perm} + \dots + \end{aligned}$$

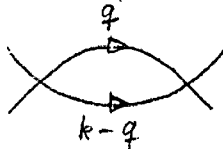
$$+ \begin{cases} \langle \dots \langle 0 | T \phi(x_{n-1}) \phi(x_n) | 0 \rangle + \text{perm} & n \text{ par} \\ \langle \dots \langle 0 | T \phi(x_{n-2}) \phi(x_{n-1}) \phi(x_n) | 0 \rangle + \text{perm} & n \text{ impar} \end{cases} \quad (1-20)$$

Evidentemente al considerar el valor de expectación en el vacío de este producto temporalmente ordenado, sólo el último término en el desarrollo contribuirá, puesto que para los otros $\langle 0 | : \dots : | 0 \rangle = 0$. De esta manera obtenemos en el numerador y denominador simplemente sumas de productos de propagadores de Feynman. En este proceso debemos recordar que los $H_I(t)$ ya están por definición normalmente ordenados.

Se puede representar gráficamente cada uno de estos términos asignando a los propagadores líneas y a los H_I vértices a los que concurren estas líneas. Esto es mejor hacerlo en representación de impulso, dado que entonces es inmediato efectuar las integrales espacio-temporales indicadas en el elemento de matriz $S_{\beta\alpha}$, que dan como resultado la conservación de energía e impulso para todo el proceso y en cada vértice. Estos son los llamados gráficos de Feynman, y de la construcción explícita de algunos de ellos se pueden deducir las reglas para la construcción de cualquier gráfico de la teoría.

En el numerador aparecen dos tipos de términos: los "conectados" y los "desconectados", que no contribuyen al proceso de colisión. Estos últimos puede demostrarse que se cancelan con los que aparecen en el denominador.

Un tipo de gráficos a los que debemos prestar atención es el siguiente:



en el que hay una variable de impulso interna que no queda fijada por las condiciones de conservación de energía e impulso en cada vértice. En esta situación debemos calcular una integral del tipo:

$$\int \frac{d^4 q}{(2\pi)^4} \frac{1}{q^2 - m^2 + i\epsilon} \frac{1}{(k-q)^2 - m^2 + i\epsilon} \quad (1-21)$$

que diverge logarítmicamente. En el caso de esta teoría, la divergencia puede ser atribuida a los parámetros "desnudos", es decir los que figuran en el Lagrangiano, mientras que los parámetros que corresponden a las partículas físicas, vestidas por la autointeracción, son finitos. Una teoría con estas características se dice "renormalizable".

I-2: Formalismo de integrales de camino

En este caso la cuantización se introduce no en términos operatoriales, sino probabilísticos.

Para la teoría ϕ^4 que estamos analizando será

$$S[\phi] = \int d^4x \mathcal{L}(\phi, \partial_\mu \phi) \quad (1-22)$$

Introducimos como cantidad fundamental la siguiente funcional (generatriz de las funciones de Green completas)

$$G[\eta] = \langle \exp\{i \int \eta(x) \phi(x) d^4x\} \rangle$$

tal que
$$i \frac{\delta G}{\delta \eta(x_1) \dots \delta \eta(x_n)} \Big|_{\eta(x) = 0} = \tau(x_1, \dots, x_n) \quad (1-23)$$

aquí $\eta(x)$ es una función arbitraria, y definimos el promedio sobre configuraciones de campo de la siguiente manera

$$\langle A[\phi] \rangle = \frac{\int \mathcal{D}[\phi] A[\phi] \exp iS[\phi]}{\int \mathcal{D}[\phi] \exp iS[\phi]} \quad \text{donde } \mathcal{D}[\phi] = \lim_{\substack{V \rightarrow \infty \\ \lambda \rightarrow 0}} \prod_i d\phi_i \quad (1-24)$$

suponiendo que consideramos un gran cubo de volumen V en R^4 , dividido en N^4 cubitos iguales de volumen v_i en los que tomamos $\phi(x) = \text{constante}$ para $x \in i$. En realidad no está probado que este límite exista, pero aún así podemos calcular formalmente $G[\eta]$ en el caso libre $\lambda = 0$.

Tenemos en el numerador una acción efectiva (que depende funcionalmente de η). Todos los términos son cuadráticos en ϕ salvo el que depende de η , que es lineal. Como sólo sabemos calcular integrales gaussianas debemos eliminar el término lineal en ϕ , y para esto efectuamos un cambio de variables en las integrales, pasando de $\phi(x)$ a $\phi(x) + \phi_0(x)$, determinando $\phi_0(x)$ de modo tal que se anule el término lineal, y esto lleva, suponiendo la condición de contorno $\phi_0, \phi \rightarrow 0$, a la ecuación

$$(\square + m^2) \phi_0(x) = \eta(x) \quad x \rightarrow \infty \quad (1-25)$$

cuya solución compatible con los requerimientos físicos es

$$\phi(x) = -\int \Delta_F(x, y) \eta(y) d^4y \quad (1-26)$$

donde $\Delta_F(x, y)$ es la función de Green causal del operador de Klein-Gordon:

$$\Delta_F(x', x) = \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{\exp -ik \cdot (x' - x)}{k^2 - m^2 + i\epsilon} \quad (1-27)$$

Ahora podemos efectuar la integral funcional y obtenemos

$$G_0[n] = \exp\left\{-i\frac{1}{2} \int dx dy n(x)n(y)\Delta_F(x,y)\right\} \quad (1-28)$$

y podemos también verificar que sus derivadas son efectivamente las funciones de Green correspondientes al caso libre. Por ejemplo

$$i\tau(x,y) = \langle \phi(x)\phi(y) \rangle = i\Delta_F(x,y)$$

que nos permite identificar ambos formalismos a través de

$$\langle \dots \rangle_0 \equiv \langle 0 | T \dots | 0 \rangle \quad (1-29)$$

Calculando explícitamente estos promedios observamos que para un número impar de campos es $\langle \dots \rangle_0 = 0$, mientras que para un número par

$$\langle \phi(x_1)\phi(x_2)\dots\phi(x_{n-1})\phi(x_n) \rangle_0 = \langle \phi(x_1)\phi(x_2) \rangle_0 \dots \langle \phi(x_{n-1})\phi(x_n) \rangle_0 + \text{permutaciones} \quad (1-30)$$

resultado análogo al del teorema de Wick en el formalismo operatorial.

Nuevamente podemos resolver el caso con interacción en forma perturbativa haciendo

$$(1-31)$$

$$\exp\{iS\} = \exp\{iS_0\} \exp\{iS_1\} = \exp\{iS_0\} \sum_0^{\infty} \frac{(-i\lambda)^n}{n!} \int \phi^4(x_1) \dots \phi^4(x_n) dx_1 \dots dx_n$$

y dividiendo numerador y denominador en las expresiones de las funciones de Green por $\exp\{iS_0\}$. De esta manera obtenemos para $\tau(x_1, \dots, x_n)$ una expresión que es cociente de sumas de productos de propagadores de Feynman. Es obvio que a partir de aquí podemos construir gráficos de Feynman y que aparecerá el mismo tipo de divergencias.

Un tipo de diagramas que en el formalismo operatorial no aparecían gracias al ordenamiento normal de los campos es el siguiente



Aquí debemos cancelarlos explícitamente agregando al Lagrangiano un contratérmino apropiado.

I-3: Teoría de Campos sobre la red como un problema de Mecánica Estadística

Hemos visto en la teoría ϕ^4 un ejemplo de un problema muy común en Teoría de Campos: la aparición de diagramas divergentes. En las teorías renormalizables estas divergencias representan una dificultad estrictamente matemática, y debido a ellas se hace necesaria para el cálculo la utilización de un parámetro regularizador o cutoff. Este cutoff puede ser introducido desde el principio planteando la teoría sobre una red espacio-temporal. Evidentemente, dado que uno está interesado en los resultados de una teoría de campos (TC) formulada sobre el espacio-tiempo continuo, entonces la red es de interés secundario y es necesario saber cómo recobrar la física de la teoría en el continuo luego de haber usado la red como un andamiaje sobre el cual formularla con precisión. Otro problema que apunta a la utilización de la red es la necesidad de dar sentido matemático a la integral funcional. En la sección anterior la hemos definido como el límite de una cierta operación efectuada sobre una red, de la que cada sitio está en correspondencia biunívoca con un cubito v_i , considerando por ejemplo condiciones de contorno periódicas.

Hay otro artificio que contribuye a la mejor definición de la integral funcional: hemos visto que el peso de cada configuración está dado por la $\exp(iS/\hbar)$. Si el valor de S es pequeño, entonces configuraciones próximas tendrán una fase parecida, reforzando su efecto; en cambio para S grande, el factor de fase variará tanto entre configuraciones próximas que el resultado será incoherente, asignando poco peso a dichas configuraciones. Una manera mucho más simple de tener en cuenta este efecto es prolongar analíticamente la integral funcional y con ella todas las funciones de Green a tiempo imaginario: $t \rightarrow t' = -i\tau$. En este caso, el peso de cada configuración será $\exp(-S_E/\hbar)$, siendo ahora S_E la acción definida en un espacio-tiempo euclídeo. Pero entonces la integral funcional

$$Z = \int_{-\infty}^{\infty} \prod_{i=1}^{N^4} d\phi_i \exp(-S_E/\hbar) \quad (1.32)$$

no es otra cosa que la función de partición de un problema de Mecánica Estadística (ME) en una red cuatridimensional, donde

Los grados de libertad de un sitio están dados por ϕ_i y donde el rol de la energía es jugado por S_T y el de la temperatura, al menos formalmente, por \hbar (veremos enseguida que este rol es jugado en realidad por alguna de las constantes de acoplamiento de la acción definida sobre la red). Este hallazgo es extremadamente importante puesto que nos permite ir más allá del tradicional esquema perturbativo de la TC, utilizando los métodos de la ME. En particular podremos efectuar desarrollos para constante de acoplamiento fuerte, lo que en general no es posible hacer en la teoría cuántica definida en el continuo, y por ende reconocer transiciones de fase, que son de esperar en los complejos sistemas de muchos cuerpos que describe la TC.

Volvamos ahora a la teoría ϕ^4 , la que formularemos en una red rectangular en el espacio-tiempo, con condiciones periódicas de contorno, con parámetro de red a en las direcciones espaciales y τ en la temporal. Esto lo hacemos pensando en el formalismo de Matriz de Transferencia que desarrollaremos en la sección siguiente. Designaremos los sitios de la red por un conjunto $n = (n_0, n_1, n_2, n_3)$ de números enteros (también escribiremos $n = (n_0, \vec{n})$), y las direcciones de las uniones por un índice μ que puede tomar los valores 0 y k con $k=1, 2, 3$. También, para mayor claridad y generalidad del cálculo que sigue diremos que el número de dimensiones es d , aunque tenemos en mente que $d=4$. Recordemos que el Lagrangiano definido en el continuo (en métrica de Minkowski) es

$$L = \int d^{d-1}x \left[\frac{1}{2} (\partial\phi/\partial t)^2 - \frac{1}{2} (\vec{\nabla}\phi)^2 - \frac{1}{2} m^2 \phi^2 - \lambda \phi^4 \right] \quad (1-33)$$

y la acción $S = \int dt \cdot L$

Para escribir la acción sobre una red definimos en cada punto $\phi(n) = \int d^d x \phi(x)$ (integral sobre v_n),

reemplazamos las derivadas por diferencias finitas

$$\partial_\mu \phi(x) \rightarrow (1/a_\mu) \cdot \Delta_\mu \phi(n) = (1/a_\mu) [\phi(n+\hat{\mu}) - \phi(n)]$$

donde $a_0 = \tau$ y $\hat{\mu}$ es un versor en la dirección definida por el índice μ , y pasando a tiempo imaginario tenemos

$$S = \sum_n \left\{ (1/2\tau) a^{d-1} [\Delta_0 \phi(n)]^2 + \frac{1}{2} \tau a^{d-3} \sum_k [\Delta_k \phi(n)]^2 + \frac{1}{2} \tau a^{d-1} m^2 \phi^2(n) + \tau a^{d-1} \lambda \phi^4(n) \right\} \quad (1-34)$$

Visto como un problema de ME, se trata de un sistema con

acoplamiento entre primeros vecinos, con dos constantes de acoplamiento:

$$K_z = (1/2z) a^{d-1}, \quad K = \frac{1}{2} z a^{d-3}$$

y dos parámetros que definen la energía de cada sitio:

$$b_0 = \frac{1}{2} z a^{d-1} m_0^2, \quad u_0 = z a^{d-1} \lambda_0$$

Sólo si $z=a$ será $K_z=K$. Con estas definiciones tenemos:

$$S = \sum_n [K_z (\Delta_0 \phi)^2 + K \sum_k (\Delta_k \phi)^2 + b_0 \phi^2 + u_0 \phi^4] \quad (1-35)$$

y como ya hemos visto: $Z = \int_{-\infty}^{\infty} \prod_n d\phi(n) e^{-S}$, donde hemos tomado $\hbar=1$, ya que no tiene relevancia en el problema, y \prod_n es una manera sucinta de escribir

$$\prod_{\mu=0}^3 \prod_{n_j=1}^N$$

I -4: Formalismo de Matriz de Transferencia

Prendemos ahora deducir de este problema de ME en cuatro dimensiones uno de TC sobre una red espacial tridimensional, cuántico, que se encuentra estrechamente vinculado con el formalismo operatorial desarrollado en la primera sección, con la salvedad de que se trata de un problema sobre la red y con tiempo imaginario. En particular, al tener $z \rightarrow 1$ se recupera la versión sobre la red del Hamiltoniano canónico. Este hecho, además de ser otra muestra de la equivalencia entre los métodos de cuantización canónica y por integrales de camino, nos permite establecer relaciones precisas entre ciertas magnitudes de la TC con otras de la ME, y se revela como un método poderoso para tratar problemas de ME, al que recurriremos en varias etapas de esta Tesis. La clave de esta conexión está en el formalismo de Matriz de Transferencia.

Dado que la Acción (1-35) acopla sólo primeros vecinos en la dirección temporal, es posible escribir la integral funcional (1-36) en la forma

$$Z = \int_{-\infty}^{\infty} \prod_{n_0} \left\{ \prod_{\vec{n}} d\phi(n_0, \vec{n}) \right\} T(n_0+1, n_0) \quad (1-37)$$

$$\text{con } T(n_0+1, n_0) = \exp \left[-\sum_{\vec{n}} \left(K_z [\phi'(\vec{n}) - \phi(\vec{n})]^2 + \frac{1}{2} K \sum_k \{ [\phi'(\vec{n}+\hat{k}) - \phi(\vec{n})]^2 + [\phi(\vec{n}+\hat{k}) - \phi(\vec{n})]^2 \} + \frac{1}{2} b_0 [\phi'^2(\vec{n}) + \phi^2(\vec{n})] + \frac{1}{2} u_0 [\phi'^4(\vec{n}) + \phi^4(\vec{n})] \right) \right] \quad (1-38)$$

donde \hat{k} representa un vector en la dirección asociada con el índice k . El exponente en (1-38) no es otra cosa que el Lagrangiano del sistema al tiempo n_0 .

Llamando $\phi(\vec{n}) = \phi(n_0, \vec{n})$ y $\phi'(\vec{n}) = \phi(n_0+1, \vec{n})$ podemos describir esta situación como un problema cuántico, suponiendo que son los autovalores de un operador $\hat{\phi}(\vec{n})$ que tiene un impulso canónicamente conjugado $\hat{\pi}(\vec{n})$ tal que $[\hat{\pi}(\vec{n}'), \hat{\phi}(\vec{n})] = -i\delta_{\vec{n}', \vec{n}}$ (esquema de Schrödinger). Supongamos ahora que los autoestados de $\hat{\phi}$, que corresonden a configuraciones definidas del campo:

$$\hat{\phi}(\vec{n}) |\phi\rangle = \phi(\vec{n}) |\phi\rangle \quad \forall \vec{n}$$

forman un sistema ortonormal

$$\langle \phi' | \phi \rangle = \delta^M(\phi' - \phi) \quad \text{con } M = N^3 \quad (1-39)$$

y completo

$$\int \prod_{\vec{n}} d\phi(\vec{n}) |\phi\rangle \langle \phi| = 1 \quad (1-40)$$

lo mismo suponemos para los autoestados de $\hat{\pi}(\vec{n})$.

La idea es construir con estos operadores otro operador \hat{T} (Matriz de Transferencia) con la propiedad

$$T(n_0+1, n_0) = \langle \phi' | \hat{T} | \phi \rangle \quad (1-41)$$

Desde ya observamos la estrecha analogía que existe entre este operador y el de evolución temporal de la Teoría Cuántica de Campos. La parte de \hat{T} asociada con K, b_0, u_0 en (1-38) se encuentra trivialmente. Los términos del tipo $[\phi'(\vec{n}) - \phi(\vec{n})]$ deben estar relacionados con aquella parte del Hamiltoniano que no depende de $\hat{\phi}$. En efecto, utilizando la relación de completitud para los autoestados de $\hat{\pi}$ y viendo que

$$\langle \pi | \phi \rangle = (2\pi)^{-M/2} \exp \left[-i \sum_{\vec{n}} \pi(\vec{n}) \phi(\vec{n}) \right]$$

es fácil mostrar que

$$\langle \phi' | \exp \left[-\sum_{\vec{n}} (1/4K_z) \hat{\pi}^2(\vec{n}) \right] | \phi \rangle = \text{cte.} \exp \left\{ -K_z \sum_{\vec{n}} [\phi'(\vec{n}) - \phi(\vec{n})]^2 \right\} \quad (1-42)$$

con lo que se obtiene para \hat{T} la siguiente expresión

$$\hat{T} = \exp \left[-\frac{1}{2} \sum_{\vec{n}} \left\{ K \sum_k [\hat{\phi}(\vec{n}+\hat{k}) - \hat{\phi}(\vec{n})]^2 + b_0 \hat{\phi}^2(\vec{n}) + u_0 \hat{\phi}^4(\vec{n}) \right\} \right] \quad (1-43)$$

$$\exp \left[-\sum_{\vec{n}} (1/4K_z) \hat{\pi}^2(\vec{n}) \right] \cdot \exp \left[-\frac{1}{2} \sum_{\vec{n}} \left\{ K \sum_k [\hat{\phi}(\vec{n}+\hat{k}) - \hat{\phi}(\vec{n})]^2 + b_0 \hat{\phi}^2(\vec{n}) + u_0 \hat{\phi}^4(\vec{n}) \right\} \right]$$

Usando este operador, la relación de completitud (1-40) y la condición de contorno, podemos expresar la integral funcional en una forma que es familiar en ME:

$$Z = \text{tr}(T^M) \quad (1-44)$$

donde la traza viene de haber sumado sobre todas las configuraciones iniciales (y finales) del campo.

En general \hat{T} no puede ser expresado como la exponencial de un operador simple y familiar; esto se ve usando la identidad

$$\exp(\hat{A}) \cdot \exp(\hat{B}) = \exp(\hat{A} + \hat{B} + \frac{1}{2} [\hat{A}, \hat{B}] + \dots)$$

Si $\mathcal{Z} = a$ (red simétrica en cuatro dimensiones), el problema de ME resulta más elegante porque $K_z = K$. Si queremos escribir

$Z = \text{tr}(e^{-\beta H_s})$ con $\beta = \hbar a$, podemos hacerlo pero el precio es trabajar con un "Hamiltoniano" complicado H_s , que por supuesto no tiene la interpretación cuántica de generador de traslaciones temporales infinitesimales. Dicha interpretación cuántica puede en cambio lograrse en el límite $\mathcal{Z} \rightarrow 0$. En ese caso, llamando

$$\hat{B}(\vec{n}) = -\frac{1}{2} K \sum_k [\hat{\phi}(\vec{n}+\hat{k}) - \hat{\phi}(\vec{n})]^2 + b_0 \hat{\phi}^2(\vec{n}) + u_0 \hat{\phi}^4(\vec{n})$$

y

$$\hat{A}(\vec{n}) = 1/(4K_z) \hat{\pi}^2(\vec{n})$$

resulta

$$[\hat{A}, \hat{B}] = \mathcal{O}(K/K_z) = \mathcal{O}(\mathcal{Z}^2) \text{ y}$$

$$\hat{T} = \exp \left\{ \mathcal{Z} \left[\sum_{\vec{n}} (\hat{A}(\vec{n}) + 2\hat{B}(\vec{n})) / \mathcal{Z} \right] + \mathcal{O}(\mathcal{Z}^2) \right\} \quad (1-46)$$

Pero

$$\frac{1}{\mathcal{Z}} [\hat{A}(\vec{n}) + 2\hat{B}(\vec{n})] = a^{d-1} \left\{ \frac{1}{2} \frac{\hat{\pi}^2(\vec{n})}{a^{2(d-1)}} + \frac{1}{2} \sum_k \frac{[\hat{\phi}(\vec{n}+\hat{k}) - \hat{\phi}(\vec{n})]^2}{a^2} + \frac{1}{2} m_0^2 \hat{\phi}^2(\vec{n}) + \lambda_0 \hat{\phi}^4(\vec{n}) \right\} \quad (1-47)$$

que podemos comparar con la familiar densidad hamiltoniana (1-4). A partir de ésta podríamos haber escrito (1-47) mediante las siguientes prescripciones:

1) Considerar el espacio $(d-1)$ -dimensional como una red cúbica simple de espaciado a .

2) Definir en cada sitio de la red $\hat{\phi}(\vec{n}) = \int_{V_n} d^{d-1}x \cdot \hat{\phi}(\vec{x})$

y su impulso canónicamente conjugado.

Verifiquemos que la definición $\frac{\hat{\pi}(\vec{n})}{a^{d-1}} = \int_{V_n} d^{d-1}x \hat{\pi}(\vec{x})$

es consistente con la relación de conmutación $[\hat{\pi}(\vec{n}'), \hat{\phi}(\vec{n})] = -i\delta_{n,n'}$ (esquema de Schrödinger)

$$\begin{aligned} [\hat{\pi}(\vec{n}'), \hat{\phi}(\vec{n})] &= \frac{1}{a^{d-1}} \int_{V_{n'}} d^{d-1}x' \int_{V_n} d^{d-1}x [\hat{\pi}(\vec{x}'), \hat{\phi}(\vec{x})] = -\frac{i}{a^{d-1}} \int_{V_{n'}} d^{d-1}x' \int_{V_n} d^{d-1}x \delta^{(d-1)}(\vec{x}' - \vec{x}) \\ &= -\frac{i}{a^{d-1}} \int_{V_{n'}} d^{d-1}x' \delta_{n,n'} = -i\delta_{n,n'} \end{aligned}$$

3) Reemplazar derivadas espaciales por diferenciales finitas:

$$\partial_k \hat{\phi}(\vec{x}) \rightarrow \frac{1}{a} [\hat{\phi}(\vec{n}+\hat{k}) - \hat{\phi}(\vec{n})]$$

En definitiva, para $z \rightarrow 0$ con a fijo resulta: $\hat{T} = \exp(-z\hat{H}) = 1 - z\hat{H} + \dots$

$$H = a^{d-1} \sum_{\vec{n}} \left\{ \frac{1}{2} \frac{\hat{\pi}^2(\vec{n})}{a^{2(d-1)}} + \frac{1}{2a^2} \sum_k [\hat{\phi}(\vec{n}+\hat{k}) - \hat{\phi}(\vec{n})]^2 + \frac{1}{2} m_0^2 \hat{\phi}^2(\vec{n}) + \lambda_0 \hat{\phi}^4(\vec{n}) \right\} \quad (1-48)$$

El límite $z \rightarrow 0$ significa considerar el problema de \mathbb{H} con $K_z \rightarrow \infty$ y $K, b_0, u_0 \rightarrow 0$ tales que

$$K_z \cdot K = \frac{1}{4} a^{2(d-2)} = cte ; \quad K_z \cdot b_0 = \frac{1}{4} a^{2(d-1)} m_0^2 = cte ; \quad K_z u_0 = \frac{1}{2} a^{2(d-1)} = cte$$

Analizaremos en el siguiente capítulo el significado de este requerimiento en términos de la constancia de la función de correlación entre puntos equidistantes. Por ahora notemos solamente que hemos logrado reducir el número de grados de libertad del problema de \mathbb{H}^4 a $2\mathbb{H}^3$.

I-5: Interpretación Mecánico-estadística de algunas magnitudes de la TC.

Una de las ventajas del formalismo de Matriz de Transferencia es que nos permite establecer una conexión detallada entre ciertas magnitudes de la ME y otras de la TC en formulación operatorial.

Queremos establecer las siguientes correspondencias:

- a) Densidad de energía libre \longleftrightarrow densidad de energía del vacío
- b) Función de correlación \longleftrightarrow propagador causal
- c) (Longitud de correlación)⁻¹ \longleftrightarrow masa de las partículas asociadas al campo.

Esta última relación nos dirá cómo recuperar el límite continuo de la TC. Trabajaremos en la red simétrica $z=a$ por facilidad de presentación.

- a) Dado que \hat{T} es hermítica, admite una descomposición espectral

$$\hat{T} = \sum_i |i\rangle \exp(-E_i \tau) \langle i| \text{ con } E_i \text{ reales. De aquí}$$

$$\hat{T}^N = \sum_i |i\rangle e^{-N\tau E_i} \langle i| \text{ y la función de partición será}$$

$Z = \text{Tr} \hat{T}^N = \sum_i \exp(-N\tau E_i)$. Si ahora consideramos porciones de red sucesivamente mayores ($N \rightarrow \infty$) el primer término dominará sobre los otros, de modo que

$$Z \simeq e^{-E_0 T} = e^{-\omega_0 VT} \tag{1-49}$$

siendo $V = (4a)^3$ y $T = N\tau$.

Pero desde el punto de vista de la ME

$Z = e^{-F} = e^{-\beta VT}$ siendo VT el volumen cuatridimensional que estamos considerando, entonces

$$f = \omega_0 \tag{1-50}$$

Hay que notar que la correspondencia se hace con la energía libre y no con la energía interna del sistema. Esto se debe a que la energía libre del sistema contiene efectos de entropía, asociados con las degeneraciones de los distintos niveles de energía, en la forma $\sum_i P_i \ln P_i$. En esta demostración hemos supuesto que el estado fundamental (vacío) es no degenerado. A la luz de la relación (c) y de la equivalencia entre la teoría ϕ^4 y el modelo de Ising, que analizaremos en el capítulo siguiente, esto significa que el sistema debe estar en su fase de alta temperatura.

b) Consideremos el propagador de Feynman en una red simétrica en el espacio de Minkowski, en el esquema de Heisenberg

$$\Delta_F(\vec{x}, t) = \langle 0 | \hat{\phi}(\vec{x}, t) \hat{\phi}(0, 0) | 0 \rangle \theta(t) + \langle 0 | \hat{\phi}(0, 0) \hat{\phi}(\vec{x}, t) | 0 \rangle \theta(-t) \quad (1-51)$$

donde $|0\rangle$ es autestado exacto de \hat{H}_S y \vec{x}, t son un conjunto de variables discretas ($|\vec{x}| = n_0 \mathbf{z}; \vec{x} = \vec{n}a$). Limitándonos al primer término ($t > 0$) y escribiendo $\hat{\phi}(\vec{x}, t)$ en términos del correspondiente al esquema de Schrodinger

$$\hat{\phi}(\vec{x}, t) = e^{i\hat{H}_S t} \hat{\phi}(\vec{x}) e^{-i\hat{H}_S t}$$

resulta

$$\Delta_F(\vec{x}, t > 0) = \langle 0 | \hat{\phi}(\vec{x}) e^{-i\hat{H}_S t} \hat{\phi}(0) | 0 \rangle e^{iE_0 t} \quad (1-52)$$

Si ahora consideramos la función de correlación en el problema de ϕ^4 sobre la red simétrica en espacio euclídeo

$$\Gamma(n_0, \vec{n}) = Z^{-1} \int \prod_{n'_0, \vec{n}'} d\phi(n'_0, \vec{n}') \phi(n_0, \vec{n}) \phi(0, 0) e^{-S} \quad (1-53)$$

vernos que el numerador difiere de la función de partición sólo para $n'_0 = 0$ $n'_0 = n_0$, por lo que podemos escribir

$$Z \Gamma(n_0, \vec{n}) = \int_{-\infty}^{\infty} \prod_{n'_0 = -\frac{M}{2}}^{\frac{M}{2}-1} \prod_{\vec{n}'} d\phi(n'_0, \vec{n}') \langle \phi_{\frac{M}{2}} | \hat{T}^{\frac{M}{2} - n_0} | \phi_{n_0} \rangle \langle \phi_{n_0} | \hat{T}^{n_0} | \phi_0 \rangle \langle \phi_0 | \hat{T}^{\frac{M}{2}} | \phi_{-\frac{M}{2}} \rangle \phi(0, 0) \phi(n_0, \vec{n})$$

con $\phi(+M/2, n) = \phi(-M/2, n)$, y observando que $|\phi_{n_0}\rangle = |\phi(n_0, \vec{n})\rangle \prod_{\vec{n}' \neq \vec{n}} |\phi(n_0, \vec{n}')\rangle$ (y análogamente para $|\phi_0\rangle$) y que $\hat{\phi} = \int d\phi |\phi\rangle \phi \langle \phi|$

resulta

$$\Gamma(n_0, \vec{n}) = \frac{\text{tr} \left\{ \hat{T}^{\frac{N}{2}} \hat{\phi}(\vec{n}_0) \hat{T}^{n_0} \hat{\phi}(0) \hat{T}^{\frac{N}{2}} \right\}}{\text{tr} \left\{ \hat{T}^N \right\}} = \frac{\sum_i e^{-E_i(N-n_0)\tau} \langle i | \hat{\phi}(\vec{n}) e^{-n_0\tau \hat{H}_s} \hat{\phi}(0) | i \rangle}{\sum_j e^{-E_j N\tau}}$$

y para $N \rightarrow \infty$ $\Gamma(n_0, \vec{n}) \sim e^{n_0\tau E_0} \langle 0 | \hat{\phi}(\vec{n}) e^{-n_0\tau \hat{H}_s} \hat{\phi}(0) | 0 \rangle$ (1-55)

La comparación de (1-52) y (1-55) nos permite identificar (para $n \gg 1$)

$$\Gamma(n_0, \vec{n}) = \Delta_F(-in_0\tau, \vec{n}a) \quad (1-56)$$

Si $n_0 < 0$ está claro que en (1-54) aparecerá $|\phi_{n_0}\rangle \langle \phi_{n_0}|$ a la derecha de $|\phi_0\rangle \langle \phi_0|$, dando como resultado el ordenamiento temporal de los campos.

c) Si en (1-56) hacemos $\vec{n}=0$ y recordamos que, por una parte $\Gamma(n_0, 0) \sim \exp(-|n_0|/\xi)$ (1-57) (fuera del punto crítico) y por otra, introduciendo sistemas completos de autoestados de \hat{H}_s en (1-52)

$$\Delta(-in_0\tau, 0) = \sum_l \exp[-(E_l - E_0)n_0\tau] |\langle 0 | \hat{\phi}(0) | l \rangle|^2 \quad (1-58)$$

$$\underset{n_0\tau \gg 1}{\approx} \exp(-mn_0\tau)$$

obtenemos $m=1/\xi a$ (red simétrica) (1-59)

En (1-58) hemos supuesto que dominan los primeros estados del continuo que comienza en $E - E_0 = m$ y que $\langle 0 | \hat{\phi}(0) | l \rangle \neq 0$ siendo $|l\rangle$ uno de estos estados. La suposición de que E_0 es no degenerado implica que m es finita, lo que por (1-59) implica que ξ es finita. Si ahora queremos recuperar el límite continuo $a \rightarrow 0$, la teoría debe ser puesta en el punto crítico ($\xi \rightarrow \infty$) para que m se conserve finita.

Capítulo II - EL MODELO DE ISING

Es bien conocido por todos los físicos que es éste el modelo de spin más simple que presenta transición ferromagnética, es decir que posee una fase con magnetización espontánea, y que consiste en un campo escalar sobre la red $S(i)$ con la condición $|S(i)|=1$. En este sentido puede ser visto como un modelo de Heisenberg (campo vectorial de n componentes $\vec{S}(i)$ tal que $|\vec{S}(i)|=1$) con $n=1$. Pero también puede pensarse que los valores posibles de $S(i)$ son los autovalores de la matriz de Pauli σ_3 , elemento del álgebra de $SU(2)$, y como tales son elementos del grupo $Z(2)$, centro de $SU(2)$. En efecto, al aplicar una rotación de 2π alrededor del eje 3, éstos transforman entre sí. También es sabido que el modelo de Ising presenta transición de fase para $d>1$ y que para $d=2$ tiene solución exacta: la solución de Onsager.

La razón por la que nos ocuparemos en este capítulo del modelo de Ising es porque su relativa simplicidad y el gran conocimiento que de él se tiene nos permiten discutir conceptos importantes como el de dualidad, orden y desorden, que nos serán extremadamente útiles en el desarrollo de teorías de campos de medida sobre la red, y porque estas características lo convierten en un fértil campo experimental para probar la efectividad y limitaciones de las técnicas aproximadas que deberemos necesariamente utilizar en aquellas teorías de las que no se conoce solución exacta. Una ligera revista de las más importantes de estas técnicas será efectuada en el capítulo siguiente.

En este capítulo comenzaremos por definir las magnitudes relevantes que determinan el comportamiento de un ferromagneto en sus distintas fases. Asignaremos especial importancia a los índices críticos, cuya condición de universalidad y relaciones se entienden a la luz de la teoría de grupo de renormalización. Luego de observar la autodualidad del modelo de Ising clásico en dos dimensiones, derivaremos del modelo clásico d -dimensional uno cuántico $(d-1)$ -dimensional con campo transversal mediante el formalismo de Matriz de Transferencia. En este modelo, que es autodual en $d-1=1$, es fácil interpretar el desorden del sistema en términos de condensación de kinks,

entes topológicos creados por un operador de desorden que es por definición no local. Seguidamente presentaremos una resolución exacta del modelo cuántico en una dimensión espacial y una temporal debida a Pfeuty, basada en la observación de que éste puede ser escrito en términos de operadores fermiónicos. El principal objetivo de este cálculo es mostrar cómo se puede recuperar una teoría relativista en el continuo a partir de una teoría de campos sobre la red en el punto crítico. Como último punto derivaremos el modelo cuántico a partir de la teoría ϕ^4 con $m^2 < 0$, lo que en cierto modo representa una prueba más de la legitimidad del modelo de Ising como teoría de campos sobre la red, y por otra parte ayuda a entender la manera como derivaremos el modelo cuántico de spin para la TCR sobre la red.

II -1: Fenomenología de las transiciones de fase

Comenzaremos recolectando algunas definiciones de la ME. Usaremos el modelo de Ising bidimensional en una red simétrica como ilustración. La Acción del modelo es

$$A\{s(n)\} = -J \sum_{n, \mu} s(n) s(n + \hat{\mu}) \quad (2-1)$$

con $n = (n_0, n_1)$, $\mu = 0, 1$; $\hat{\mu}_0 = (1, 0)$, $\hat{\mu}_1 = (0, 1)$; $J > 0$

de modo que la Acción favorece las configuraciones de spins alineados.

Las propiedades importantes del modelo son:

- 1) El acoplamiento es sólo entre primeros vecinos (la acción es la más local posible en una red).
- 2) El modelo tiene simetría $Z(2)$ global (inversión de todos los spins); esta simetría se rompe si los spins están bajo la influencia de un campo magnético externo, puesto que se agrega a la Acción un término

$$-B \sum_n s(n)$$

que "elija" una orientación preferencial para los spins.

Supuesto el sistema en equilibrio térmico a temperatura T , todas las propiedades termodinámicas son derivables de la función de partición

$$Z = \sum_{\{s(n)\}} \exp(-\beta A\{s(n)\}) \quad \text{con} \quad \beta = \frac{1}{kT} \quad (2-2)$$

En una red de N sitios el número de configuraciones será 2^N . El conocimiento de Z nos da en principio información detallada sobre la probabilidad de ocurrencia de cada configuración en el conjunto canónico, pero macroscópicamente no necesitamos tanta información. Desde el punto de vista termodinámico el estado del sistema está determinado por tres parámetros: la temperatura T , el campo magnético aplicado B y el número de sitios en la red N . (estrictamente, el límite termodinámico se tiene para $N \rightarrow \infty$). Las magnitudes que caracterizan el comportamiento del sistema (funciones de estos parámetros) son la energía media U , la energía libre F (supuesto $N = \text{constante}$), la entropía S ,

el calor específico a campo magnético constante C , la magnetización M y la susceptibilidad χ a temperatura constante. Veremos la definición de cada una de ellas en función de Z , sus propiedades y comportamiento crítico:

La acción media del sistema (energía interna) es

$$U = \langle A \rangle = \frac{1}{Z} \sum_{\{\Delta(n)\}} A\{\Delta(n)\} \cdot \exp(-\beta A\{\Delta(n)\}) = -\frac{\partial}{\partial \beta} (\ln Z) \quad (2-3)$$

La magnitud $F = -(1/\beta) \ln Z$ es la energía libre. En función de F , podemos expresar:

$$U = \frac{\partial}{\partial \beta} (\beta F) = F + \beta \frac{\partial F}{\partial \beta}$$

La magnitud $\beta \frac{\partial F}{\partial \beta} = \frac{1}{kT} \frac{\partial F}{\partial T} \frac{\partial T}{\partial \beta} = -T \frac{\partial F}{\partial T} = -TS$ define la entropía.

de modo que $F = U - TS \quad (2-4)$

Desde el punto de vista de la Teoría de la Información, la entropía se interpreta como la información media por configuración. Definiendo

$$I\{\Delta(n)\} = \ln \frac{1}{P\{\Delta(n)\}} \quad (2-5)$$

como la información que nos brinda la aparición cierta de una determinada configuración, y siendo

$$P\{\Delta(n)\} = (1/Z) \exp(-\beta A\{\Delta(n)\}) \quad (2-6)$$

sus probabilidades en el conjunto canónico, será

$$I\{\Delta(n)\} = \ln Z + \beta A\{\Delta(n)\}$$

y $S_I = \sum_{\{\Delta(n)\}} P\{\Delta(n)\} I\{\Delta(n)\} = \ln Z + \beta U \quad (2-7)$

de aquí $F = U - \frac{1}{\beta} S_I = U - TS$ con $S = k S_I$

de modo que una definición de entropía que nos puede servir es

$$S = -k \sum_{\{\Delta(n)\}} P\{\Delta(n)\} \ln P\{\Delta(n)\} \quad (2-8)$$

En ésta no se hace mención del reservorio, aunque para sistemas de ME está implícita en (2-6)

El calor específico a campo magnético constante se define como

$$C = -T \frac{\partial S}{\partial T} = -T \frac{\partial^2 F}{\partial T^2} \quad (2-9)$$

Es costumbre en Termodinámica clasificar las transiciones de fase como de primer orden si S tiene comportamiento singular, de segundo si es C el que lo muestra, etc.

Las magnitudes que nos resta analizar son las que más interés nos despertarían en el análisis posterior del modelo de I-sing, especialmente por cuanto nos abocaremos a la búsqueda de sus magnitudes equivalentes en los modelos de simetría local.

Definiremos la magnetización media por spin como

$$M = \frac{1}{N} \frac{\partial F}{\partial B} \quad (2-10)$$

pero de acuerdo con (2-4), ésta no es otra cosa que

$$\left\langle \frac{1}{N} \sum_n s(n) \right\rangle = \langle \Delta(0) \rangle \quad (2-11)$$

En la última igualdad hemos usado la simetría traslacional de la Acción (condiciones de contorno periódicas). Si el valor de M es finito para $B=0$ se dice que el sistema presenta "magnetización espontánea". Una medida de la respuesta de los spins a un campo magnético externo infinitesimal^{da} la susceptibilidad específica

$$\chi = \left. \frac{\partial M}{\partial B} \right|_{B=0} \quad (2-12)$$

A partir de (2-11) se puede ver que

$$\chi = (1/NkT) [\langle S_{tot}^2 \rangle - \langle \Delta_{tot} \rangle^2] = (1/NkT) \langle (\Delta_{tot} - \langle \Delta_{tot} \rangle)^2 \rangle \quad (2-13)$$

Con $\Delta_{tot} = \sum_n s(n)$ lo que permite interpretar a χ como una medida de las fluctuaciones en los spins. Puesto que χ está asociada con los efectos disipativos del sistema (ej. fenómenos de histeresis), el resultado (2-13) es un ejemplo del teorema de fluctuación-disipación. También podemos escribir (2-13) en la forma

$$\chi = (1/NkT) \left[\sum_{n,m} \langle s(n)s(m) \rangle - \left\langle \sum_n s(n) \right\rangle^2 \right] \quad (2-14)$$

que nos dice que χ es también una medida de las correlaciones entre spins. Definiendo la función de correlación conectada

$$\Gamma_{con}(n) = \langle s(0)s(n) \rangle - \langle s(0) \rangle^2 \quad (2-15)$$

y usando nuevamente la invariancia traslacional de la Acción de los spins podemos escribir

$$\chi = (1/kT) \sum_n \Gamma_{con}(n) \quad (2-16)$$

Si $\Gamma_{con}(n)$ decrece rápidamente con n , χ se mantendrá finita, pero divergerá si el rango de $\Gamma_{con}(n)$ es mayor. Uno encuentra precisamente este efecto cuando la temperatura es próxima a un valor crítico T_c , que separa dos fases o regímenes de temperatura en que el sistema se comporta de manera distinta. Por debajo de T_c aparece una magnetización espontánea, que tiende a cero en la forma

$$M \sim (T_c - T)^\beta \quad (2-17)$$

La función de correlación entre spins lejanos varía en esta fase de baja temperatura como

$$\Gamma_{con}(n) \sim \exp[-|n|/\xi(T)] \quad |n| \gg 1 \quad (2-18)$$

donde $\xi(T)$ es un parámetro que mide el rango de la correlación y que diverge para $T \rightarrow T_c$ en la forma

$$\xi(T) \sim |T - T_c|^{-\nu} \quad (2-19)$$

La longitud de correlación $\xi(T)$ puede interpretarse como una medida del tamaño de los dominios de spins alineados. Es evidente por razones energéticas que el sistema preferirá la formación de estos dominios, al menos en la fase de baja temperatura. Sólo si el tamaño medio de estos dominios es suficientemente grande el $\langle s(n)s(0) \rangle$ diferirá apreciablemente de $\langle s(0) \rangle^2$ para n grande. Esto es así porque de otro modo la probabilidad de una configuración con $\langle s(n) \rangle \neq \langle s(0) \rangle$ es sumamente pequeña si n es suficientemente grande.

Para $T = T_c$

$$\Gamma_{con}(n) \sim |n|^{-(d-2+\eta)} \quad (2-20)$$

y las correlaciones son de rango infinito. En estas condiciones, si uno n cambia la escala con que observa el sistema y define nuevos spins en término de los anteriores, verá que apa

recen las mismas configuraciones con la misma distribución de probabilidades en términos de los nuevos spins. El sistema resulta invariante ante cambios de escala. Esto no sucede por ej. para $T < T_c$. En ese caso, al observar el sistema con una unidad de longitud mayor que el propio parámetro de red a (suponiendo N muy grande), encontrará que la distribución de probabilidades de las distintas configuraciones corresponde a un sistema en equilibrio a una temperatura $T' < T$. Los comportamientos (2-18) y (2-20) son compatibles si

$$\Gamma_{con}(n) \propto |n|^{-(d-2+\eta)} \exp[-|n|/\xi(T)] \quad (2-21)$$

En esta expresión toda la dependencia en la temperatura está en ξ , y está regida, según (2-19) por el exponente ν . Esta afirmación se ve reforzada al observar que el calor específico, magnitud puramente térmica, varía como

$$C \sim |T - T_c|^{-\alpha} \quad (2-22)$$

con
$$\alpha = 2 - \nu d \quad (2-23)$$

La dependencia en el número de dimensiones puede ser rastreada desde (2-1), donde el costo de acción involucrado en la operación de dar vuelta un spin es $4d$.

Veremos que el exponente η está asociado con la dependencia en el campo magnético. En efecto, para $T = T_c$ la magnetización varía como

$$M \sim B^{1/6} \quad \text{con} \quad \delta = (d+2+\eta)/(d-2+\eta) \quad (2-24)$$

Finalmente, al crecer ξ la susceptibilidad (2-16) diverge como

$$\chi \sim |T - T_c|^{-\delta} \quad (2-25)$$

con
$$\delta = \nu(2 - \eta)$$

y el exponente $\beta = \frac{1}{2} \nu(d-2+\eta)$ puesto que, como δ , también está asociado a la variación con la temperatura de una magnitud de tipo magnético.

Estos exponentes críticos pueden ser obtenidos experimentalmente y se observa que distintas sustancias ferromagnéticas arrojan distintos valores para T_c , pero los exponentes críticos son los mismos. Esta característica se denomina "universalidad"

y expresa que los exponentes críticos dependen de características muy generales como son el número de dimensiones y la simetría de las variables dinámicas, y no de detalles como el tipo y espaciado de red o tipo de términos en la Acción. Se ve por ejemplo en las relaciones entre exponentes críticos que éstas sólo dependen del número de dimensiones. El 2 está asociado con el hecho de que estamos observando la función de correlación de dos puntos, o más generalmente, derivadas segundas de la energía libre.

Las relaciones entre exponentes críticos se aclaran a luz de la teoría de puntos fijos, que es la base de los métodos de grupo de renormalización*. Pero primeramente notemos que el punto crítico $T=T_c$, $H=0$ para el cual $\xi=\infty$, es un punto fijo porque sólo en él el sistema presenta invariancia de escala. En efecto, si $H \neq 0$, al hacer un cambio de escala el sistema se vería como uno a $T < T_c$, $H' > H$.

* y que veremos en la sección siguiente.

II-2: Teoría de puntos fijos

El carácter universal de los exponentes críticos respecto de los términos en la Acción se entiende a través de la dominancia de ciertos parámetros, que llamaremos "relevantes", y que definiremos enseguida.

Cualesquiera que sean los términos de interacción entre sitios en la expresión original de la Acción (siempre que correspondan a una simetría no mayor que $Z(2) \times T_a^{(N)}$ siendo $T_a^{(N)}$ el grupo de traslaciones en a módulo N), al efectuar cambios de escala con la consecuente redefinición de los spins (lo que en adelante llamaremos "transformaciones de grupo de renormalización" TGR), se generarán nuevos acoplamientos.

Podemos pensar en un espacio de parámetros de dimensión muy grande: la expresión original de la Acción corresponde a un punto \vec{K} en este espacio, con muchas de sus coordenadas iguales a cero. Al efectuar una TGR obtendremos un nuevo punto

$$\vec{K}' = R(\vec{K}) \quad (2-28)$$

Un punto fijo \vec{K}^* de estas transformaciones está definido por $\vec{K}^* = R(\vec{K}^*)$. En general $R(\vec{K})$ será una transformación muy complicada, no lineal. Pero podemos suponer que al menos ésta es analítica en la vecindad de \vec{K}^* . Esto nos permite linealizar (2-28) para $\vec{K} \approx \vec{K}^*$:

$$K'_\alpha - K_\alpha^* = \sum_\beta T_{\alpha\beta} (K_\beta - K_\beta^*) \quad \text{con} \quad T_{\alpha\beta} = \left. \frac{\partial K'_\alpha}{\partial K_\beta} \right|_{\vec{K} = \vec{K}^*} \quad (2-29)$$

Nada requiere que $T_{\alpha\beta}$ sea simétrica, pero al menos tiene autovectores con autovalores reales a izquierda y a derecha, aun que éstos sean distintos. Puesto que $T_{\alpha\beta}$ actúa a derecha respecto de $(\vec{K} - \vec{K}^*)$, si consideramos los autovectores a izquierda

$$\sum_\alpha \phi_\alpha^{(i)} T_{\alpha\beta} = \lambda_i \phi_\beta^{(i)} \quad (2-30)$$

podemos definir los productos escalares

$$U_i = \sum_\alpha \phi_\alpha^{(i)} (K_\alpha - K_\alpha^*) \quad (2-31)$$

que llamaremos "variables de escala", puesto que ante una TGR

cambiarán de manera multiplicativa

$$u'_i = \lambda_i u_i \quad (2-32)$$

Las variables u_i son precisamente los apartamientos del punto fijo en la dirección de un autovector. Si $\lambda_i > 1$, u_i se dice relevante, e irrelevante si $\lambda_i < 1$.

El punto importante es que en los modelos con simetría global $Z(2)$ sólo son relevante los apartamientos en la dirección J y en la dirección H . Es común hablar de una variación en J como de una variación en T , puesto que lo relevante a la distribución de probabilidades es βA .

Es evidente que si ciertas magnitudes termodinámicas tienen comportamiento singular en el punto crítico, esta información está contenida en la función de partición, y por ende en la energía libre. Al efectuar una TGR, la función de partición cambiará, porque el nuevo sistema tiene menos configuraciones, y sus pesos relativos son distintos. Pero su expresión en términos de \vec{K}' , $Z(\vec{K}')$, diferirá de $Z(\vec{K})$ sólo en un factor que es función de \vec{K} , asociado con la reducción de un número finito de grados de libertad, y que por ende es regular para $\vec{K} = \vec{K}^*$. Considerando la energía libre por sitio de la red $\phi(\vec{K}) = (1/N) F(\vec{K})$, será

$$\phi(\vec{K}) = g(\vec{K}) + b^{-d} \phi(\vec{K}') \quad (2-33)$$

donde b es el factor de escala, dado que $\phi(\vec{K}') = (1/Nb^{-d}) F(\vec{K}')$ en la nueva red.

Cerca del punto crítico sólo interesa la parte singular de ϕ ; entonces, en términos de las variables de escala y aplicando n TGR:

$$\phi_s(u_1, u_2, \dots) = b^{-nd} \phi_s(\lambda_1^n u_1, \lambda_2^n u_2, \dots) \quad (2-34)$$

Aún siendo $\lambda_1 > 1$, podemos elegir \vec{K} suficientemente próximo a \vec{K}^* de modo que $\lambda_1^n u_1 = A \ll 1$. De esta manera estamos seguros de que aún vale la aproximación lineal. Siendo $n = \frac{\ln A - \ln u_1}{\ln \lambda_1}$.

escribimos

$$i_s(u_1, u_2, \dots) = b \frac{(d \ln A)}{\ln \lambda_i} b \frac{d \ln u_i}{\ln \lambda_i} f_s(A, \lambda_2^n u_2, \dots) \quad (2-35)$$

y siendo $b^{\ln u_1} = u_1^{\ln b}$, $\lambda_2^{\ln u_1} = u_1^{\ln \lambda_2}$

y definiendo $y_i = \frac{\ln \lambda_i}{\ln b}$

tendremos la siguiente ley de escala;

$$i_s(u_1, u_2, \dots) = u_1^{d/y_1} \phi(u_2/u_1^{y_2/y_1}, \dots) \quad (2-36)$$

específicamente, si $u_1 = t = \frac{T-T_c}{T_c}$ y $u_2 = H$, será

$$i_s(t, H, \dots) = \begin{cases} t^{d/y_1} \phi_1(H/t^{y_2/y_1}) & t > 0 \\ (-t)^{d/y_1} \phi_2(H/(+t)^{y_2/y_1}) & t < 0 \end{cases} \quad (2-37)$$

de aquí se obtiene $\alpha = 2 - (d/y_1)$, $\beta = (d - y_2)/y_1$, $\delta = (2y_2 - d)/y_1$

$$\delta = y_2 / (d - y_2)$$

y por ende

$$\alpha + 2\beta + \delta = 2$$

$$\alpha + \beta(\delta + 1) = 2$$

Para calcular la función de correlación introducimos en la Acción un término espurio $-\sum_i H_i \delta_i$ con H_i arbitrario (pero pequeño) en cada sitio. Entonces, siendo $r = |i-j|a$; $t = (T - T_c)/T_c$

$$G(r, t) = \frac{1}{Z} \frac{\partial^2 Z}{\partial H_i \partial H_j} \Big|_{H=0} \quad (2-39)$$

Esto es cierto al menos en la fase $t > 0$, donde $\langle s_i \rangle = 0$

Siendo H_i pequeño, podemos suponer $H_i = \text{cte}$ al menos en una distancia del orden ba.

Al efectuar una transformación de GR obtendremos un

$H'_{i'} = f(H_i) \approx \lambda_2 H_i$; y al diferenciar $Z(\vec{K}')$ de $Z(\vec{K})$ en un factor que no depende de $H'_{i'}$, tenemos

$$G(r/b, \lambda_1, t) = \frac{1}{Z(\vec{K}')} \frac{\partial^2 Z(\vec{K}')}{\partial H'_{i'} \partial H'_{j'}} = \frac{1}{Z(\vec{K})} \frac{1}{\lambda_2^2} \frac{\partial^2 Z(\vec{K})}{\partial H_i \partial H_j} \xrightarrow{r \rightarrow \infty} \frac{b^{2d}}{\lambda_2^2} G(r, t) \quad (2-40)$$

de modo que $G(r, t) = \frac{\lambda_2^{2n}}{b^{2dn}} G(r/b^n, \lambda_1^n, t)$

y procediendo como antes

$$\mathcal{G}(r, t) = t^{-(2y_2/y_1) + (2d/y_1)} \psi(r/t^{-1/y_1}) \quad (2-41)$$

donde es fácil reconocer $\mathcal{G} \sim t^{-1/y_1}$ y de aquí

$$\nu = 1/y_1 \quad (2-42)$$

También podemos escribir (2-41) en la forma

$$G(r, t) = r^{2y_2 - 2d} \tilde{\psi}(r^{y_1} t)$$

que para $t=0$ nos permite identificar

$$\eta = 2 + d - 2y_2 \quad (2-43)$$

Como dato ilustrativo podemos ver que los exponentes críticos en el modelo de Ising bidimensional, que han sido calculados en forma exacta, obedecen todas las relaciones expuestas. Estos son:

Índice crítico	Relación	Valor en el modelo de Ising (d=2)
β	$M \sim (T_c - T)^\beta$	1/8
ρ	$\rho(n) \sim n ^{-(d-2+\eta)}$, (T=T _c)	1/4
ν	$\xi \sim (T - T_c)^{-\nu}$	1
δ	$\chi \sim (T - T_c)^{-\delta}$	1.75
α	$C \sim (T - T_c)^{-\alpha}$	0 (diverg. logarítm.)
δ	$M \sim B^{1/\delta}$, (T=T _c)	15

II -3: Autodualidad del modelo de Ising bidimensional

Veremos ahora cómo en el modelo de Ising en dos dimensiones es posible obtener en forma exacta la temperatura crítica aún a partir de métodos aproximados, usando una propiedad del modelo llamada autodualidad. Discutiremos más en detalle esta notable propiedad en relación con el modelo cuántico que derivaremos en la sección siguiente, de modo que por ahora nos limitaremos a observar que se trata de una correspondencia entre los comportamientos de alta y baja temperatura. Restringiéndonos a la red simétrica, vemos que a cada cuadrado elemental o "plaqueta" en la red podemos asignar en forma biunívoca un sitio de una nueva red, llamada dual. La función de partición (para $H=0$) admite desarrollo en potencias de $(th K)$ si $K \ll \beta J$ es pequeño, y de $\exp(-2K)$ si K es grande. Este último consiste, obviamente, en considerar sucesivamente configuraciones con acción creciente a partir de la totalmente ordenada, o sea configuraciones con un spin revertido, dos, etc; en cambio para K pequeño debemos considerar caminos cerrados en la red, tales que se pase a lo sumo una vez por cada unión. Estos caminos cerrados involucrarán una cierta cantidad de plaquetas. El hecho es que en dos dimensiones, cada plaqueta involucrada equivale a un sitio de la red dual en el que se ha revertido un spin, por lo que se observa (efectuaremos los cálculos en el capítulo siguiente) que ambos desarrollos son formalmente idénticos, o sea:

$$\begin{aligned} Z(K) &= (ch K)^{-2N} = F(th K) \\ Z(K) \cdot \exp(-2NK) &= F(e^{-2K}) \end{aligned} \quad (2-44)$$

con la misma F , de modo que si requerimos que a K en la red directa corresponda K^* en la red dual tal que

$$th K = e^{-2K^*}$$

o lo que es lo mismo (para $K, K^* > 0$)

$$\operatorname{senh}(2K) \cdot \operatorname{senh}(2K^*) = 1 \quad (2-45)$$

encontramos que

$$\frac{Z(K^*)}{\sinh^{\frac{1}{2}}(2K^*)} = \frac{Z(K)}{\sinh^{\frac{1}{2}}(2K)} \quad (2-46)$$

La transición entre los comportamientos de alta temperatura (K pequeño) y de baja temperatura (K^* pequeño) se tendrá cuando $K=K^*=K_c$, y (2-46) nos dice que

$$\sinh^2(2K_c) = 1 \quad (2-48)$$

de modo que $e^{2K_c} = \sqrt{2} + 1$ y $T_c = 2J / \ln(\sqrt{2} + 1)$ lo que permite entender por qué la temperatura crítica varía con la sustancia.

La ecuación (2-48) representa simplemente un punto de la línea crítica encontrada por kramers y wannier en 19 . Si proponemos cualquier otro tipo de red plana (con simetría traslacional) tendremos espaciados de red distintos en dos direcciones ortogonales que llamaremos \hat{x} y \hat{z} . Para que el modelo describa la misma física (por ejemplo se tenga la misma $\Gamma_{\text{con}}(|\vec{x}|)$ con $\vec{x} = n_x \hat{x} + n_z \hat{z}$) que en el caso simétrico, las constantes de acoplamiento en ambas direcciones deben estar relacionadas, y su relación crítica estará dada por $\text{sh}(2K_x) \cdot \text{sh}(2K_z) = 1$ (2-49)

Esta ecuación define una curva en el plano K_x, K_z , tal que por debajo de ella el sistema está en su fase desordenada, y por encima, en la ordenada. Ello nos permite parametrizar el estado del sistema (para $H=0$) en la forma

$$\text{senh}(2K_x) \cdot \text{senh}(2K_z) = \lambda \quad (2-50)$$

En el caso simétrico, λ está relacionado con la temperatura en la forma

$$\lambda^{\frac{1}{2}} = \text{senh}(2J/kT) \quad (2-51)$$

esta parametrización, que parece muy complicada en el caso simétrico, es la más simple en el caso ^{muy}asimétrico que analizaremos en la próxima sección; pero previamente observemos que (2-45) y (2-51) implican $\lambda^{\frac{1}{2}} = \text{sh}(2K^*)$, como es de esperar, de modo que

$\lambda > 1$ significa fase ordenada en la red directa y desordenada en la dual.

II-4: Forma Hamiltoniana del Modelo de Ising en dos dimensiones

Consideremos una red plana rectangular. Definimos la Acción del modelo como

$$A = -\sum_n [J_z \sigma_3(n+\hat{x}) \sigma_3(n) + J_z \sigma_3(n+\hat{z}) \sigma_3(n)] \quad (2-52)$$

donde respecto de (2-1), estamos llamando $\hat{x} \equiv \hat{\mu}_0$, $\hat{z} \equiv \hat{\mu}_1$, $\sigma_3 \equiv s$ y los espaciamentos de red son \underline{x} y \underline{a} . Queremos construir la Matriz de Transferencia del modelo y encontrar un Hamiltoniano para $z \rightarrow 0$.

Podemos escribir

$$A = \frac{1}{2} J_z \sum_n [\sigma_3(n+\hat{x}) - \sigma_3(n)]^2 - J_z \sum_n \sigma_3(n+\hat{z}) \sigma_3(n) \quad (2-53)$$

puesto que la diferencia es una constante irrelevante al calcular las magnitudes termodinámicas. Además, para construir la matriz de transferencia, nos conviene expresar A como suma de La grangianos que relacionan las filas n, n_0+1 en la red.

Llamando $m \equiv n_1$, $\sigma_3(m) = \sigma_3(n_0, m)$, $s_3(m) = \sigma_3(n_0+1, m)$

escribimos

$$L = \frac{1}{2} J_z \sum_m [s_3(m) - \sigma_3(m)]^2 - \frac{1}{2} J_z \sum_m [\sigma_3(m+1) \sigma_3(m) + s_3(m+1) s_3(m)] \quad (2-54)$$

Si el número de sitios por fila es M, la matriz de transferencia será de dimensión $2^M \times 2^M$. Los elementos diagonales de \hat{T} serán aquellos que relacionen configuraciones idénticas en ambas filas ($s_3(m) = \sigma_3(m) \forall m$); entonces

$$T_d = \exp [K_z \sum_m \sigma_3(m+1) \sigma_3(m)] \quad (2-55a)$$

Llamaremos elementos subdiagonales a aquéllos que relacionan configuraciones que difieren en el valor de un solo spin:

$$T_{sd} = \exp(-2K_z) \exp\left\{\frac{1}{2} K_z [\sigma_3(m+1) \sigma_3(m) + s_3(m+1) s_3(m)]\right\} \quad (2-55b)$$

y así sucesivamente. Consideremos ahora el límite $z \rightarrow 0$: en el caso simétrico, fijado el valor de λ teníamos fijo el parámetro ξ que medía, en unidades de a , la distancia máxima dentro de la cual podíamos esperar correlaciones importantes. Queremos mantener este esquema en el caso asimétrico, para lo cual K_z debe crecer y K_z decrecer de tal forma que se mantenga λ constante (ecuación (2-50)). Para $z \rightarrow 0$ ésta implica

$$K_z = \lambda \exp(-2K_z) \quad (2-56)$$

Queremos escribir $\hat{T} = 1 - z\hat{H}$ para $z \rightarrow 0$. Esto es posible si identificamos

$$z = \exp(-2K_z) \quad (2-57)$$

de modo que podemos escribir (2-55) al primer orden en z como

$$T_d = 1 + z \sum_m \sigma_3(m+1) \sigma_3(m)$$

$$T_{sd} = z$$

y siendo los demás elementos de orden superior en z , podemos despreciarlos, y obtenemos para \hat{T} una representación en la que sólo existen elementos diagonales y subdiagonales. El espacio base de esta representación es el simple producto directo de spinores de Pauli en todos los sitios m . En esta base podemos identificar fácilmente

$$\hat{H} = - \sum_m \hat{\sigma}_1(m) - \lambda \sum_m \hat{\sigma}_3(m+1) \hat{\sigma}_3(m) \quad (2-58)$$

con $\hat{\sigma}_1, \hat{\sigma}_3$ matrices de Pauli. El término $\sum_m \hat{\sigma}_1(m)$ se puede interpretar como debido a la acción de un campo magnético que tiende a orientar los spins en la dirección de σ_1 . Los autoestados de $\hat{\sigma}_1$ son las combinaciones simétrica y antisimétrica de autoestados de $\hat{\sigma}_3$.

Debemos justificar la elección (2-57): la relación (2-56) parecería implicar que las correlaciones en la dirección z serán más débiles que en la dirección z en un factor $\lambda \exp(-2K_z)$; pero por autodualidad $\xi(\lambda) = \xi(1/\lambda)$ de modo que esto no puede ser cierto. Parece razonable sin embargo suponer que el factor sea $\exp(-2K_z)$. Si queremos que la función de correlación tenga simetría rotacional para distancias macroscópicas, como en el caso simétrico, deberá ser $z = \exp(-2K_z) a$.

11 - 5: Autodualidad desde el punto de vista Cuántico

En el modelo cuántico unidimensional descrito por el Hamiltoniano (2-58) definimos la red dual como aquella cuyo sitio \tilde{n} ^{corresponde} a la unión de los sitios $n, n+1$ en la red directa.

El álgebra de los operadores $\hat{\sigma}_1(n)$, $\hat{\sigma}_3(m)$ es

$$\hat{\sigma}_1^2(n) = \hat{\sigma}_3^2(n) = 1, \quad \{\hat{\sigma}_1(n), \hat{\sigma}_3(n)\} = 0 \quad \forall n$$

y

$$[\hat{\sigma}_i(m), \hat{\sigma}_j(n)] = 0 \quad \text{para } n \neq m \text{ con } i, j = 1 \text{ ó } 3 \quad (2-59)$$

Queremos definir operadores duales $\hat{\mu}_1(\tilde{n})$, $\hat{\mu}_3(\tilde{n})$ que satisfagan la misma álgebra. Estos operadores residirán en las uniones de la red directa y serán funciones, claro está de los operadores $\hat{\sigma}_1$ y $\hat{\sigma}_3$. Se puede ver que la elección

$$\begin{aligned} \hat{\mu}_1(\tilde{n}) &= \hat{\sigma}_3(n+1) \hat{\sigma}_3(n) \\ \hat{\mu}_3(\tilde{n}) &= \prod_{m \leq n} \hat{\sigma}_1(m) \end{aligned} \quad (2-60)$$

satisface las relaciones (2-59). Por ejemplo, para la menos trivial

$$\begin{aligned} \{\hat{\mu}_1(\tilde{n}), \hat{\mu}_3(\tilde{n})\} &= [\hat{\sigma}_3(n+1) \hat{\sigma}_3(n)] \cdot \left[\prod_{m \leq n} \hat{\sigma}_1(m) \right] + \\ &+ \left[\prod_{m \leq n} \hat{\sigma}_1(m) \right] \cdot [\hat{\sigma}_3(n) \hat{\sigma}_3(n+1)] = \left[\prod_{m < n} \hat{\sigma}_1(m) \right] \hat{\sigma}_3(n+1) \{\hat{\sigma}_1(n), \hat{\sigma}_3(n)\} = 0 \end{aligned}$$

Con esta definición, escribimos

$$\hat{H} = - \sum_{\tilde{n}} \hat{\mu}_3(\tilde{n}) \hat{\mu}_3(\tilde{n}+1) - \lambda \sum_{\tilde{n}} \hat{\mu}_1(\tilde{n}) = \lambda \left[- \sum_{\tilde{n}} \hat{\mu}_1(\tilde{n}) - \frac{1}{\lambda} \sum_{\tilde{n}} \hat{\mu}_3(\tilde{n}) \hat{\mu}_3(\tilde{n}+1) \right]$$

donde estamos suponiendo, como siempre, condición de contorno periódica o red infinita, según convenga.

La relación anterior nos dice que

$$\hat{H}(\hat{\sigma}, \lambda) = \lambda \hat{H}(\hat{\mu}, 1/\lambda) \quad (2-61)$$

y por supuesto, esto vale también para el espectro de \hat{H} . En particular, para la diferencia de energía entre los estados fundamental y primer excitado (masa de las excitaciones) escribimos

$$\Delta(\lambda) = \lambda \Delta(\lambda^{-1}) \quad (2-62)$$

que nos dice que si $\Delta=0$ ($\xi=\infty$) para algún valor de λ , también se anula para λ^{-1} . Luego, si la teoría tiene un único punto crítico, como en el caso del modelo de Ising, éste debe ser $\lambda_c=1$. Más adelante calcularemos $\Delta(\lambda)$ en forma exacta, y veremos que es de la forma

$$\Delta(\lambda)=2|1-\lambda| \quad (2-63)$$

que cumple la relación (2-62).

II- 6: Orden y desorden. Condensación de Kinks.

El resultado más importante que podemos extraer de la autodualidad es la relación entre el desorden de la red directa y el orden de la dual. Así como podemos considerar a $\hat{\sigma}_3(n)$ como un operador de orden, puesto que $\langle \sigma_3(n) \rangle \neq 0$ $|\sigma_3(n)| \neq 0$

en la fase ordenada, también podemos decir que $\mu_3(n)$ ($=\mu_3(\tilde{n})$ puesto que la asignación $n \leftrightarrow \tilde{n}$ es biunívoca) es un operador de desorden. La acción de $\hat{\mu}_3(n)$ es revertir todos los spins a la izquierda del sitio n , incluso n .

Consideremos $\lambda \rightarrow \infty$: el estado fundamental (vacío) es doblemente degenerado, y corresponde al producto de autoestados idénticos de $\hat{\sigma}_3$. Estos vacíos están desconectados entre sí debido a la condición de contorno $\sigma_3(N+1)=\sigma_3(1)$, puesto que el único operador que podría realizar esta conexión es $\hat{\mu}_3(N)$. Por consiguiente, para que la teoría esté bien definida debemos formularla a partir de uno de estos vacíos. Este mecanismo por el cual el estado fundamental pierde la simetría explícita del Hamiltoniano es lo que se denomina "ruptura espontánea de simetría". Es claro que, de no ser por la condición de contorno, el primer estado excitado sería de la forma $\hat{\mu}_3(\tilde{n}) |0\rangle \equiv |1 \text{ kink}(\tilde{n})\rangle$ o bien $|1 \text{ antikink}(n)\rangle$, que resulta de aplicar $\hat{\mu}_3(\tilde{n})$ al otro vacío. Estas configuraciones de kink interpolarían entre ambos vacíos de la teoría, dando como resultado un estado con distintas características topológicas que cualquiera de los vacíos.

Si la condición de contorno fuese antiperiódica, el estado fundamental (para $\lambda=\infty$) sería $2N$ veces degenerado, correspondiendo

a las distintas configuraciones de un kink o un antikink. Pero la condición de contorno periódica (para $N \rightarrow \infty$ $\sigma_3(-\infty) = \sigma_3(+\infty)$) obliga a que para $\lambda = \infty$ el primer estado excitado sea de la forma $|1 \text{ kink}(\tilde{n}), 1 \text{ antikink}(\tilde{n}')\rangle$ con $\tilde{n}' > \tilde{n}$ y por consiguiente $\Delta(\lambda \rightarrow \infty) \approx 2\lambda$. Esto corresponde precisamente a configuraciones con un dominio de spins revertidos. Este estado será $\sim 1/2$ veces degenerado, y es evidente que en este conjunto serán más probables los dominios de tamaño pequeño. También podemos ver que $\lim_{\infty} \langle 0 | \hat{\sigma}_3(n) | 0 \rangle_{\infty} = 1$ en cambio $\lim_{\infty} \langle 0 | \hat{\mu}_3(n) | 0 \rangle_{\infty} = 0$. Mediante la técnica de desarrollos en serie se puede probar que estas características valen en general para $\lambda > 1$, definiendo la fase ordenada

$$\Delta(\lambda) = 2(\lambda - 1), \quad \langle 0 | \hat{\sigma}_3(n) | 0 \rangle_{\lambda} = (1 - 1/\lambda^2)^{1/8}, \quad \langle 0 | \hat{\mu}_3(n) | 0 \rangle \quad (2-64)$$

Veamos que para λ finito se rompe la degeneración del primer estado excitado debido a la acción del término $\sum_n \hat{\sigma}_1(n)$ y $\Delta(\lambda \neq \infty)$ corresponde al estado kink-antikink con impulso cero.

Para $\lambda \rightarrow 0$ hay un único estado fundamental: el producto directo de combinaciones simétricas de autoestados de $\hat{\sigma}_3(n)$ que son los autoestados con autovalor $+1$ de $\hat{\sigma}_1(n)$. La alineación es aquí debido al "campo transversal" y no al apareamiento. La condición de contorno en este límite nos dice que $\sigma_1(N+1) = \sigma_1(1)$ que es compatible con la presencia de kinks no apareados. Ahora es

$$\hat{\sigma}_3(n) = \hat{\sigma}_3(1) \prod_{\tilde{m} < \tilde{n}} \hat{\mu}_1(\tilde{m}) \quad \text{el que revierte spins:}$$

$$\hat{\sigma}_3 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \hat{\sigma}_1 \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}; \quad \hat{\sigma}_3(n) \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}_n = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$$\text{de modo que } \langle 0 | \hat{\sigma}_3(n) | 0 \rangle_0 = 0, \quad \text{en cambio } \langle 0 | \hat{\mu}_3(n) | 0 \rangle_0 = \langle 0 | \prod_{m \leq n} \hat{\sigma}_1(m) | 0 \rangle = 1$$

El primer estado excitado (N veces degenerado) es aquél que en algún sitio n tiene $|\sigma_1(n)\rangle = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}_n$ mientras los restantes son $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}_{n \neq n}$

y su energía (referida a la del estado fundamental) será $\Delta(\lambda \rightarrow 0) = 2$. Naturalmente se puede mostrar que para $\lambda < 1$ vale

$$\langle 0 | \hat{\sigma}_3(n) | 0 \rangle = 0, \quad \langle 0 | \hat{\mu}_3(n) | 0 \rangle \neq 0, \quad \Delta(\lambda) = 2(1 - \lambda) \quad (2-65)$$

Este estado corresponde a la combinación de spins revertidos (ondas de spin) con impulso 0.

La posibilidad de tener kinks desapareados en esta fase de sordenada nos permite interpretar la transición de fase como de bida a la condensación de kinks. En efecto en esta fase puede existir cualquier número de kinks aún en el estado fundamental, lo que implica que éstos tienen masa nula a partir de $\lambda=1$. Esto es consistente con (2-64) para $\lambda>1$, puesto que en este límite la energía necesaria para crear un par de kinksantikink es pequeña, habrá un gran número de dominios y el sistema se verá cada vez más desordenado. El desorden es total para $\lambda\leq 1$. También se puede ver que para $\lambda>1$ son las excitaciones tipo onda de spin las que no tendrán masa, puesto que de los estados $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ y $\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ sólo interesa su proyección sobre $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ (o sobre $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$) que es la misma.

II-7: Resolución exacta del modelo cuántico

La representación (2-58) de H fue escrita en términos de los autoestados de $\hat{\sigma}_3$. Otra representación igualmente válida (esta vez en términos de los autoestados de $\hat{\sigma}_1$) es

$$\hat{H} = - \sum_n \hat{\sigma}_3(n) - \lambda \sum_n \hat{\sigma}_1(n) \hat{\sigma}_1(n+1) \quad (2-66)$$

(de aquí en adelante omitiremos el símbolo de operador).

En realidad no hay nada de importante en utilizar una u otra representación, salvo que en ésta nos resultarán más familiares algunas de las fórmulas que siguen. La idea es mostrar que este modelo, definido por (2-66) y (2-59), es también la teoría de un campo de Majorana libre, autoconjugado de carga. Para mostrar en forma explícita estos fermiones, usamos la transformación de Wigner-Jordan. Designaremos los sitios de la red por $n=-N, \dots, N$. Escribimos $\sigma_1(n) = \sigma^+(n) + \sigma^-(n)$.

y recordamos que $[\sigma^+(n)]^2 = [\sigma^-(n)]^2 = 0$ y

$$\begin{cases} \sigma^-(n) \sigma^+(n) = \frac{1}{2} [1 - \sigma_3(n)] \\ \sigma^+(n) \sigma^-(n) = \frac{1}{2} [1 + \sigma_3(n)] \end{cases}$$

de modo que

$$\{\sigma^+(n), \sigma^-(n)\} = 1 \quad (2-67)$$

como los fermiones; pero a diferencia de éstos, σ^+ y σ^- conmutan en sitios distintos.

Podemos construir operadores estrictamente fermiónicos de la siguiente manera:

$$c(n) = \prod_{j=-N}^{n-1} \exp[i\pi\sigma^+(j)\sigma^-(j)] \sigma^-(n) = \prod_{j=-N}^{n-1} [-\sigma_3(j)] \sigma^-(n) \quad (2-68)$$

$$c^\dagger(n) = \sigma^+(n) \prod_{j=-N}^{n-1} \exp[-i\pi\sigma^+(j)\sigma^-(j)] = \sigma^+(n) \prod_{j=-N}^{n-1} [-\sigma_3(j)]$$

Esta definición deja inalteradas las relaciones (2-67), pero ahora c y c^\dagger anticonmutan en sitios distintos.

Es inmediato a partir de (2-67) y (2-68) que

$$\sigma_3(n) = 2\sigma^+(n)\sigma^-(n) - 1 = 2c^\dagger(n)c(n) - 1 \quad (2-69)$$

Para los términos de acoplamiento entre sitios:

$$\sigma_3(n)\sigma_3(n+1) = [\sigma^+(n) + \sigma^-(n)][\sigma^+(n+1) + \sigma^-(n+1)]$$

observamos que

$$\begin{aligned} c^\dagger(n)c(n+1) &= \sigma^+(n)\sigma^-(n+1) \\ c(n)c^\dagger(n+1) &= -\sigma^-(n)\sigma^+(n+1) \\ c^\dagger(n)c^\dagger(n+1) &= \sigma^+(n)\sigma^+(n+1) \\ c(n)c(n+1) &= -\sigma^-(n)\sigma^-(n+1) \end{aligned} \quad (2-70)$$

de modo que $\sigma_3(n)\sigma_3(n+1) = [c^\dagger(n) - c(n)][c^\dagger(n+1) + c(n+1)]$

Entonces podemos escribir el Hamiltoniano, a menos de una constante, en la forma

$$H = -2 \sum_n c^\dagger(n) c(n) - \lambda \sum_n [c^\dagger(n) - c(n)] [c^\dagger(n+1) + c(n+1)] \quad (2-71)$$

Para diagonalizar este Hamiltoniano es conveniente pasar a representación de impulso, definiendo

$$a_k = (2N+1)^{-1/2} \sum_{n=-N}^N \exp(ikn) \cdot \dots$$

$$a_k^\dagger = (2N+1)^{-1/2} \sum_{n=-N}^N \exp(-ikn) \cdot c^\dagger(n) \quad (2-72)$$

Es fácil ver que a_k, a_k^\dagger obedecen las mismas relaciones de anti-conmutación que $c(n), c^\dagger(n)$, usando las relaciones de completitud

$$(2N+1)^{-1} \sum_k e^{-ik(n-m)} = \delta_{n,m}$$

$$(2N+1)^{-1} \sum_n e^{in(k-l)} = \delta_{k,l} \quad (2-73)$$

En términos de estos operadores resulta

$$H = -2 \sum_k (1 + \lambda \cos k) a_k^\dagger a_k - \lambda \sum_k (e^{-ik} a_k^\dagger a_{-k}^\dagger - e^{ik} a_k a_{-k}) =$$

$$= -2 \sum_{k>0} (1 + \lambda \cos k) (a_k^\dagger a_k + a_{-k}^\dagger a_{-k}) + 2i\lambda \sum_{k>0} \sin k (a_k^\dagger a_{-k}^\dagger + a_k a_{-k}) \quad (2-74)$$

Sólo nos resta hacer una transformación canónica para eliminar los términos que mezclan a_k con a_{-k} .

$$\eta_k = u_k a_k + i v_k a_{-k}^\dagger \quad \eta_{-k} = u_k a_{-k} - i v_k a_k^\dagger$$

$$\eta_k^\dagger = u_k a_k^\dagger - i v_k a_{-k} \quad \eta_{-k}^\dagger = u_k a_{-k}^\dagger + i v_k a_k \quad (2-75)$$

con u_k, v_k reales, con lo que resulta

$$H = \sum_{k>0} [-2(1+\lambda \cos k)(u_k^2 - v_k^2) + (4\lambda \sin k) u_k v_k] (\eta_k^\dagger \eta_k + \eta_{-k}^\dagger \eta_{-k}) +$$

$$\sum_{k>0} [4i(1+\lambda \cos k) u_k v_k + 2i\lambda \sin k (u_k^2 - v_k^2)] (\eta_k^\dagger \eta_{-k}^\dagger + \eta_k \eta_{-k}) \quad (2-76)$$

Determinanemos u_k, v_k a partir de los siguientes requisitos:

1) η_k, η_k^\dagger deben satisfacer las mismas relaciones que a_k, a_k^\dagger . Esto requiere que $u_k^2 + v_k^2 = 1$, por lo que podemos parametrizar

$$u_k = \cos \theta_k, \quad v_k = \sin \theta_k \quad (2-77)$$

2) η_k, η_k^\dagger deben diagonalizar el Hamiltoniano, es decir

$$H = \sum_k \Lambda_k \eta_k^\dagger \eta_k \quad (2-78)$$

Esto implica que

$$2(1+\lambda \cos k) \cdot \sin 2\theta_k + 2\lambda \sin k \cdot \cos 2\theta_k = 0$$

o sea
$$\tan 2\theta_k = -\frac{\lambda \sin k}{(1+\lambda \cos k)} \quad (2-79)$$

Es fácil obtener de aquí $\sin 2\theta_k$ y $\cos 2\theta_k$ en términos de $\lambda \sin k$ y $(1+\lambda \cos k)$, y eligiendo apropiadamente los signos resulta

$$\Lambda_k = 2 \sqrt{1+2\lambda \cos k + \lambda^2} \quad (2-80)$$

El mínimo de Λ_k se obtiene para $k = \pm\pi$ y es precisamente

$$\Lambda_{\pm\pi} = 2|1-\lambda| \quad (2-81)$$

Volvemos ahora a las unidades físicas para mostrar un hecho muy importante:

$$k \rightarrow ka \quad E(k) \rightarrow E(k)/a$$

Si medimos k a partir del valor para el cual Λ_k es mínimo;

$$k = \pi + k' a$$

y definimos $E(k') = \frac{\Lambda_k}{2a}$, resulta, para $a \rightarrow 0$

$$E(k') = \sqrt{\frac{(1-\lambda)^2}{a^2} + \lambda k'^2} \quad (2-82)$$

Si $\lambda \neq 1$, $E \sim 1/a \xrightarrow{a \rightarrow 0} \infty$. Sólo para $\lambda = 1$ tenemos una relación energía-impulso no trivial para $a \rightarrow 0$. Esta es $E(k') = |k'|$ correspondiente a partículas relativistas de masa nula. Este ejemplo nos muestra una lección muy importante: para poder estudiar el límite continuo de la teoría, sus parámetros deben corresponder al punto crítico (entendiéndose por tal uno de transición continua de fases). Para poder explicar el confinamiento en Cromodinámica Cuántica se espera que dicho punto crítico corresponda a ocoflamiento cero (algo similar ocurre con el modelo de Ising unidimensional).

11-8: Relación con la teoría ϕ^4 .

Estudiando el Hamiltoniano (1-4) para $m_0^2 < 0$ encontramos que la solución que minimiza la energía es ahora $\phi = \pm \frac{m_0^2}{4\lambda_0} \quad \forall x$

y el vacío es doblemente degenerado. Si consideramos como antes $\lambda_0 \ll 1$, esta degeneración no puede ser removida por efecto túnel debido al término $\frac{1}{2} \vec{\nabla} \phi \cdot \vec{\nabla} \phi$ y la teoría debe "elegir" un vacío, produciéndose una ruptura espontánea de simetría. En este límite uno puede proceder como antes con sólo redefinir el campo, y encuentra excitaciones cuánticas con masa real. Pero también existen soluciones clásicas, estables e independiente del tiempo, los kinks, cuya energía no es mucho mayor que la de las excitaciones cuánticas y que interpolan entre ambos vacíos. Igual que en el caso $m_0^2 > 0$, no podemos tratar esta teoría en el continuo más que en el límite $\lambda_0 \ll 1$, pero sin embargo observamos que

existe una estrecha analogía entre la situación aquí descrita y la que*, con ciertas aproximaciones, este modelo representa la versión sobre la red de la teoría ϕ^4 con $m_0^2 < 0$. Más aún, puede verse que estas aproximaciones están justificadas puesto que ambas teorías pertenecen a la misma clase de universalidad, dado que ϕ^4 surge de escribir la función de partición del modelo de Ising la aproximación gaussiana.

Reescribamos el Hamiltoniano (1-48) para $d=2$ en términos de variables adimensionales en la forma

$$aH = \sum_{j=-N}^N \left[\frac{1}{2} p_j^2 + \lambda_0 (x_j - f_0^2)^2 \right] + \sum_{j=-N}^{N-1} \frac{1}{2} (x_{j+1} - x_j)^2 \quad (2-83)$$

Investiguemos el caso $f_0^2 > 0$, que corresponde a $m_0^2 < 0$ en (1-48). El mínimo del potencial efectivo en cada sitio corresponde a: $x_j = f_0$.

Estudiando el primer término de (2-83) vemos que tenemos en cada sitio un problema cuántico (oscilador doble) con posibilidad de efecto túnel. Este efecto rompe la degeneración entre ambos mínimos del potencial (de modo que el estado fundamental corresponde a la combinación simétrica de las soluciones de más baja energía en cada pozo) en un valor que es proporcional a la amplitud de transición entre ambos mínimos, esto es

$$\Delta E \sim \lambda_0^{\frac{1}{2}} f_0 \exp(-\lambda_0^{\frac{1}{2}} f_0^3) \quad (2-84)$$

Si λ_0, f_0 son suficientemente grandes de modo que $\lambda_0^{\frac{1}{2}} f_0^3 \gg 1$ (2-85) tendremos

$$\Delta E \ll \lambda_0^{\frac{1}{2}} f_0 \ll \lambda_0 f_0^4 \quad (2-86)$$

y los demás estados excitados tendrán energía mucho mayor (del orden de $\lambda_0^{\frac{1}{2}} f_0$), de modo que podemos restringir el espectro en cada sitio a los dos primeros niveles, y la base que diagonaliza a este término del Hamiltoniano es el producto directo sobre todos los sitios de autoestados de $\sigma_z(j)$, identificando

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = |sim\rangle \quad ; \quad \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = |antisim\rangle \quad (2-87)$$

Si ahora consideramos el término de interacción entre sitios tendremos que, en esta base

$$|\langle \text{sim} | x_j | \text{antisim} \rangle|^2 \approx f_0^2 \quad (2-88)$$

y sólo podemos tratar este término como una perturbación si

$$f_0^2 \ll \lambda_0^{4/3} f_0 \exp(-\lambda_0^{1/2} f_0^3) \quad (2-89)$$

Esta condición sólo es compatible con (2-85) si $f_0^2 \sim 1$ y $\lambda_0 \gg 1$. Este es precisamente el límite opuesto al que podía estudiar se en el continuo. De (2-87) surge que podemos escribir

$$x_j = f_0 \sigma_1(j) \quad (2-90)$$

y por tanto

$$aH = \sum_{j=-N}^N \left[\frac{1}{2} E_0 \sigma_3(j) \right] - \sum_{j=-N}^N \Delta_0 \sigma_1(j) \sigma_1(j+1) \quad (2-91)$$

donde hemos llamado $E_0 \equiv \Delta E$ (2-84) y $\Delta_0 \equiv f_0^2$ y como siempre suponemos condiciones periódicas y despreciamos constantes aditivas. Salvo un factor $\frac{1}{2} E_0$ que fija la escala de energía del problema, ^{hemos} encontrado un Hamiltoniano de la misma forma que (2-66) con $\lambda = 2 \Delta_0 / E_0$. Este es un ejemplo de cómo la red nos ayuda a resolver problemas de teoría de campos. Las excitaciones tipo partícula corresponden a combinaciones con impulso definido de estados con un spin revertido.

*acontece en el modelo de Ising con campo transversal (2-66) para $\lambda \gg 1$. En efecto veremos que

Capítulo 111 - Métodos de resolución de problemas en ME.

Nuestro principal objetivo en teoría de campos sobre la red será encontrar el diagrama de fases y puntos críticos de los modelos que analicemos. No son pocas las dificultades que encontraremos en este programa. En primer lugar debemos aprender a caracterizar las fases en los diversos modelos: hemos visto en el modelo de Ising la utilidad de conceptos tales como Hualidad, parámetros de orden, funciones de correlación, excitaciones topológicas, y es claro que nos convendrá buscar sus análogos en otros casos. De este modo lograremos saber si existe o no fase confinante en las distintas teorías de medida sobre la red, o cuál será el comportamiento asintótico de las secciones eficaces en la Teoría de Campos de Reggeones. Una idea más cuantitativa de estos aspectos la obtendremos mediante el cálculo de los exponentes críticos, que nos dan leyes de escala que en general pueden ser contrastadas con la experiencia en los modelos que tienen realización física, como así también las correcciones a estas leyes de escala. También es de primordial importancia la determinación precisa de los puntos, líneas o superficies críticas, como la caracterización de las distintas transiciones de fase.

Es evidente que dada la variedad de los modelos que analizaremos no podemos esperar contar con técnicas universales para extraer de ellos la información que necesitamos, y bien puede ocurrir que métodos muy útiles y confiables en algunas situaciones sean inapropiados en otras. Con todo, podemos clasificar a grandes rasgos las técnicas más comunes en cuatro grupos principales, siendo claro que dentro de éstos existe una gran variedad y que también son posibles técnicas combinadas, además del hecho de que existen muchas técnicas de aplicación más restringida, como las transformaciones de dualidad que no caen dentro de esta clasificación. Estos grupos son:

- a) métodos variacionales
- b) métodos de grupo de renormalización
- c) métodos de desarrollos en serie
- d) métodos de simulación numérica

En este capítulo mostraremos como ejemplo algunas de estas técnicas en su aplicación al modelo de Ising, con el objeto de estudiar sus posibilidades y limitaciones, conocimiento necesario para encarar el análisis de modelos de los que no se conoce so-

lución exacta. Salvo en los puntos (c) y (d) limitaremos casi exclusivamente nuestro análisis al modelo hamiltoniano por razones de brevedad, por ser éste el modelo más novedoso en relación con las técnicas empleadas, y con miras a las aplicaciones especiales que conforman la contribución original de esta Tesis.

111 - 1) Métodos variacionales

Este es quizás el método más simple de tener en cuenta el comportamiento colectivo de los grados de libertad de un sistema de ME. Es bien conocida de todos la aplicación de la aproximación de campo promedio al modelo de Heisenberg. Esta aproximación consiste en suponer que en promedio todos los spins se comportan de la misma manera, permitiendo esto reducir el problema de N grados de libertad al de uno solo en el campo generado por todos los otros. La principal limitación del método radica en la ignorancia de las fluctuaciones estadísticas, o en el modelo hamiltoniano que analizaremos, cuánticas. Esta aproximación es tanto más justificada cuanto mayor sea el número de dimensiones, puesto que entonces será mayor la correlación entre spins.

Postulamos que, cualquiera sea el valor de λ en el Hamiltoniano (2-58), el estado fundamental del sistema es el simple producto directo

$$|\theta\rangle = \prod_{n=1}^{N_s} \begin{pmatrix} \cos \frac{1}{2}\theta \\ \sin \frac{1}{2}\theta \end{pmatrix}_n \quad (3-1)$$

y escogemos el valor de θ de modo que minimice la energía

$$E(\theta) = \langle \theta | H | \theta \rangle = -N_s (\sin \theta + \lambda \cos^2 \theta) \quad (3-2)$$

Esto nos lleva a la ecuación $\cos \theta \cdot (1 - 2\lambda \sin \theta) = 0$
cuya solución compatible con $-1 \leq \sin \theta \leq 1$ es

$$\begin{cases} \cos \theta = 0 & \lambda \leq \frac{1}{2} \\ \sin \theta = \frac{1}{2\lambda} & \lambda \geq \frac{1}{2} \end{cases} \quad (3-3)$$

marcando por ende una transición de fase de segundo orden como

era de esperar, pero para un valor equivocado de λ . En realidad podíamos esperar que el valor crítico obtenido por este método fuera menor que el verdadero, precisamente por la ignorancia de las fluctuaciones. En términos de las variables duales escribimos

$$|\tilde{\theta}\rangle = \prod_{\tilde{n}=1}^{N_{\tilde{e}}} \begin{pmatrix} \cos \frac{1}{2} \tilde{\theta} \\ \sin \frac{1}{2} \tilde{\theta} \end{pmatrix}_{\tilde{n}}$$

$$E(\tilde{\theta}) = -J_{\rho} [\sin \tilde{\theta} + (1/\lambda) \cos^2 \tilde{\theta}] \quad \text{y} \quad \begin{cases} \cos \tilde{\theta} = 0 & \lambda \geq 2 \\ \sin \tilde{\theta} = \lambda/2 & \lambda \leq 2 \end{cases} \quad (3-4)$$

respetando al menos la autodualidad.

Respecto del parámetro de orden, en términos de las variables de la red directa tenemos

$$\langle \theta | \sigma_3(n) | \theta \rangle = \cos \theta = \begin{cases} 0 & \lambda \leq 1 \\ (1 - 1/\lambda^2) & \lambda \geq 1 \end{cases} \quad (3-5)$$

en buen acuerdo con el resultado exacto $\langle \sigma_3 \rangle = (1 - 1/\lambda^2)^{\frac{1}{2}}$ para $\lambda \gg 1$. Está claro que es precisamente en este límite que la aproximación está plenamente justificada; no obstante, el método también predice magnetización nula en la fase desordenada. En términos de las variables duales, en cambio, los resultados no son buenos para el parámetro de orden, pero sí para el de desorden.

Este método, que en su aplicación al modelo de Ising parece una trivialidad, no lo es tanto al considerar teorías de medida debido al requerimiento de invariancia de medida del estado fundamental, como veremos en los siguientes capítulos.

111 - 2) Métodos de grupo de renormalización

Este es un método muy poderoso, como se puede deducir del análisis efectuado en el capítulo anterior. En realidad la aplicación de este método está plenamente justificada sólo en el caso de transiciones de orden superior al primero, puesto que requiere la proximidad de un punto o conjunto de puntos donde la longitud de correlación sea infinita, pero aún así ha permitido obtener resultados razonables en algunos casos de transiciones discontinuas.

La realización práctica de este método consiste en hallar un procedimiento para reducir sistemáticamente el número de grados de libertad del problema conservando la forma del Hamiltoniano, lo cual es en la mayoría de los casos una tarea impropia. Entre las transformaciones de grupo de renormalización perfeccionadas para el modelo en versión lagrangiana podemos citar la de decimación, de Migdal-Kadanoff, regla de la mayoría al estilo Niemeijer-Van Leeuwen, etc.

Centraremos nuestra atención sobre los procedimientos diseñados para el modelo hamiltoniano. Como los anteriores, estos consisten también en la formación de bloques de spin, pero en lugar de definir el spin del bloque de alguna manera como la suma de los spins internos, lo que se hace en este caso es diagonalizar el Hamiltoniano del bloque y quedarse con los estados cuánticos de menor energía, definiendo de esta manera el nuevo spin como en (2-87).

Los términos de acoplamiento entre bloques surgen de calcular en esta base truncada el elemento de matriz de G_1 para sitios que son primeros vecinos pero que pertenecen a bloques distintos. El procedimiento de truncación puede verse como equivalente a un método variacional en el que elegimos una función de prueba definida sobre un subconjunto del espacio de Hilbert completo, y calculamos el Hamiltoniano efectivo en este subespacio. Retener los niveles más bajos en cada bloque es una forma de minimizar la energía del estado fundamental en dicho bloque.

Si el Hamiltoniano escrito en términos de variables de bloque reproduce la forma del Hamiltoniano original, con parámetros E_1 y Δ_1 , este procedimiento puede iterarse hasta que la relación entre los parámetros renormalizados corresponda al punto fijo estable que domina la fase correspondiente. Esto permite determinar la relación crítica entre los parámetros iniciales con sólo observar la tendencia hacia uno u otro punto fijo. En el modelo que estamos analizando la cuestión es más simple aún, puesto que el punto crítico es en sí mismo un punto fijo (inestable) de la teoría, y por tanto se verá como un cero de la función $\beta(\lambda)$ que definiremos enseguida.

Comenzamos definiendo bloques de dos sitios: considerando el Hamiltoniano (2-91), el estado fundamental para un sitio sería $|1\rangle = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, entonces tomaremos como base para describir los

estados de bloque el conjunto $|++\rangle, |++\rangle, |++\rangle, |++\rangle$. (3-6)

Denotando los bloques por un índice p descomponemos (2-91) en la forma $H=H_1+H_2$ con

$$H_1 = \sum_p \left\{ \frac{\epsilon_0}{2} [\sigma_3(1,p) + \sigma_3(2,p)] - \Delta_0 \sigma_1(1,p) \sigma_1(2,p) \right\}$$

$$H_2 = -\Delta_0 \sum_p \sigma_1(2,p) \sigma_1(1,p+1) \quad (3-7)$$

A partir de (3-6) construimos la base que diagonaliza un término $H_1(p)$ de H_1 . Debido a la forma de la interacción entre sitios en $H_1(p)$, la matriz que lo representa en la base (3-6) se divide en dos bloques que asocian respectivamente $|++\rangle$ con $|++\rangle$ y $|++\rangle$ con $|++\rangle$. Es fácil obtener entonces los autoestados de $H_1(p)$. Denotando por $a_0 = 1/\Delta_0 (\sqrt{\epsilon_0^2 + \Delta_0^2} - \epsilon_0)$:

ESTADO	ENERGIA	
$ \uparrow\rangle \equiv \psi_0(p)\rangle \equiv (++\rangle + a_0 ++\rangle) \frac{1}{\sqrt{1+a_0^2}}$	$-\sqrt{\epsilon_0^2 + \Delta_0^2}$	
$ \psi\rangle \equiv \psi_1(p)\rangle \equiv (++\rangle + ++\rangle) \frac{1}{\sqrt{2}}$	$-\Delta_0$	
$(++\rangle - ++\rangle) \frac{1}{\sqrt{2}}$	Δ_0	(3-8)
$(-a_0 ++\rangle + ++\rangle) \frac{1}{\sqrt{1+a_0^2}}$	$\sqrt{\epsilon_0^2 + \Delta_0^2}$	

Limitándonos a los autovalores más bajos de la energía en cada bloque podemos escribir

$$H_1(p) = \sum_p \begin{pmatrix} -\Delta_0 & 0 \\ 0 & -\sqrt{\epsilon_0^2 + \Delta_0^2} \end{pmatrix} = \sum_p \left\{ -\frac{1}{2} [\Delta_0 + \sqrt{\epsilon_0^2 + \Delta_0^2}] \sigma_1(p) + [\sqrt{\epsilon_0^2 + \Delta_0^2} - \Delta_0] \frac{1}{2} \sigma_3(p) \right\} \quad (3-9)$$

en la base $|\psi\rangle = \Pi |\psi(p)\rangle$. El primer término de (3-9) nos dará simplemente una constante aditiva en la energía, que podemos olvidar.

Calculamos ahora

$$\sigma_1(2,p) |\psi_1(p)\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} [|++\rangle + |++\rangle]$$

$$\sigma_1(2,p) |\psi_0(p)\rangle = \frac{1}{\sqrt{1+a_0^2}} [|++\rangle + a_0 |++\rangle] \quad (3-10)$$

que nos dice que

$$\langle \psi_0(p) | G_1(2,p) | \psi_1(p) \rangle = \langle \psi_1(p) | G_1(2,p) | \psi_0(p) \rangle = \frac{1+a_0}{\sqrt{2(1+a_0^2)}}$$

$$\langle \psi_0(p) | G_1(2,p) | \psi_0(p) \rangle = \langle \psi_1(p) | G_1(2,p) | \psi_1(p) \rangle = 0 \quad (3-11)$$

De modo que podemos definir $G_1(p)$ y $G_1(p+1)$ a través de

$$G_1(2,p) = \frac{1+a_0}{\sqrt{2(1+a_0^2)}} \cdot G_1(p)$$

$$G_1(1,p+1) = \frac{1+a_0}{\sqrt{2(1+a_0^2)}} G_1(p+1) \quad (3-12)$$

lo que nos permite escribir

$$H_2^{(n)} = - \frac{\Delta_0(1+a_0)^2}{2(1+a_0^2)} \sum_p G_1(p) G_1(p+1) \quad (3-13)$$

Las ecuaciones (3-9) y (3-13) definen en términos de estos nuevos spins un Hamiltoniano formalmente idéntico al de partida, sólo que el número de grados de libertad se ha reducido a la mitad y los parámetros

$$E_1 = \frac{1}{2} \left[\sqrt{E_0^2 + \Delta_0^2} - \Delta_0 \right]$$

$$\Delta_1 = \frac{\Delta_0(1+a_0)^2}{2(1+a_0^2)}$$

$$\text{con } a_0 = \frac{1}{\Delta_0} (\sqrt{E_0^2 + \Delta_0^2} - E_0) \quad (3-14)$$

Definen en general un acoplamiento λ' distinto de $\lambda = 2\Delta_0/E_0$. En particular, λ' puede ser tal que el problema admita ya solución aproximada por desarrollo en serie u otro método. Si no, es posible iterar el procedimiento descrito tantas veces como sea necesario (si la red es suficientemente grande), hasta entrar en este régimen. Las relaciones (3-14) nos permiten ver que para λ mayor que un cierto valor λ_c , será $\lambda' > \lambda$, y viceversa. Hemos que $\lambda = 0$ y $\lambda = \infty$ son puntos fijos estables de la transformación, mientras λ_c es punto fijo inestable. Podemos descubrir fácilmente el valor de λ_c definiendo, en el paso n-ésimo:

$$\beta(\lambda^{(n)}) = \lambda^{(n+1)} - \lambda^{(n)} \quad (3-15)$$

Como función de λ , esta magnitud tendrá un cero en $\lambda = 0$ y otro en $\lambda = \lambda_c$, será negativa entre estos valores, y positiva y creciente para $\lambda > \lambda_c$. De esta manera encontramos por este método un valor $\lambda_c \sim 0,8$.

Existe una modificación del método expuesto que consiste en tomar para el Hamiltoniano de bloque igual número de términos de un sitio que de acoplamiento. Se justifica en que para el modelo que estamos considerando también el Hamiltoniano de bloque resulta autodual. Partiendo del Hamiltoniano

$$H = \sum_i \left[-\frac{\epsilon}{2} \sigma_3(i) - \Delta \sigma_1(i) \sigma_1(i+1) \right] \quad (3-16)$$

y formando como antes bloques de dos sitios construimos ahora la base que diagonaliza a

$$B = \epsilon \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} (2) - \Delta \sigma_1(1) \sigma_1(2) \quad (3-17)$$

para el bloque p . Nuevamente la matriz en la base (3-6) se divide en bloques, pero esta vez idénticos, con lo que el estado fundamental del bloque resulta degenerado, o sea que su energía

$$E_{0b} = \frac{\epsilon}{2} - \sqrt{\frac{\epsilon^2}{4} + \Delta^2} \quad (3-18)$$

es compartida por los estados

$$| \uparrow \uparrow \rangle = \frac{1}{\sqrt{1+c^2}} (b | \downarrow \downarrow \rangle + | \uparrow \uparrow \rangle) \quad ; \quad | \downarrow \downarrow \rangle = \frac{1}{\sqrt{1+b^2}} (b | \uparrow \downarrow \rangle + | \downarrow \uparrow \rangle) \quad (3-19)$$

con $b = -E_{0b}/\Delta$. El procedimiento de truncación consiste en quedarse precisamente con estos estados, puesto que el otro par, también degenerado, tiene energía $\frac{\epsilon}{2} + \sqrt{\frac{\epsilon^2}{4} + \Delta^2}$.

La degeneración del estado fundamental es removida por el término de sitio que omitimos, puesto que su valor de expecta-

ción en uno y otro estado será distinto. Por consiguiente podemos calcular el nuevo valor de ϵ a través de la diferencia

$$\epsilon' = \epsilon \left[\langle \downarrow | \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} | \downarrow \rangle - \langle \uparrow | \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} | \uparrow \rangle \right] = \frac{\epsilon(1-b^2)}{1+b^2} \quad (3-20)$$

En cuanto a los elementos de matriz de σ_1 , claramente éstos dependerán ahora del sitio al que corresponda. A partir de (3-19) podemos ver que

$$z_1 = \langle \downarrow | \sigma_1(1) | \uparrow \rangle = 1 \quad (3-21)$$

$$z_2 = \langle \downarrow | \sigma_1(2) | \uparrow \rangle = \frac{2b}{1+b^2}$$

de donde

$$\Delta' = \Delta \cdot z_1 z_2 = \Delta \frac{2b}{1+b^2} \quad (3-22)$$

y observando que $1-b^2 = (2/\lambda)b$ con $\lambda = 2\Delta/\epsilon$, resulta

que tiene como punto fijo no trivial el valor exacto $\lambda^* = \lambda_c = 1$. También se observa que el exponente térmico

$$y_T = \frac{\ln \lambda_T}{\ln n} \quad \text{con} \quad \lambda_T = \left. \frac{d\lambda'}{d\lambda} \right|_{\lambda=\lambda^*} \quad (3-24)$$

y n (# de spins por bloque) tiene el valor exacto $y_T = 1$.

III -3: Técnicas de desarrollos en serie

Estas técnicas, también llamadas perturbativas, son de las más utilizadas en cualquier campo de la Física Teórica, y brindan información teórica útil como radios de convergencia etc.

Comenzamos analizando el tipo de técnicas que se utilizan en la versión lagrangiana de los diferentes modelos. En general estas consisten en desarrollos en serie de la función de partición directamente.

Consideremos la función de partición del modelo de Ising sin campo magnético:

$$Z(K) = \sum_{\sigma_N = \pm 1} \dots \sum_{\sigma_1 = \pm 1} \exp \left\{ K \sum_{\langle ij \rangle} \sigma_i \sigma_j \right\} \quad (3-24)$$

donde el símbolo $\langle ij \rangle$ indica suma sobre primeros vecinos.

Siendo $\sigma_i^2 = 1$, podemos expresar

$$\exp(K\sigma) = \cosh K + \sigma \sinh K \quad (3-25)$$

de modo que

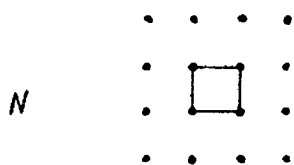
$$\begin{aligned} Z(K) &= \sum_{\sigma_N} \dots \sum_{\sigma_1} \prod_{\langle ij \rangle} (\cosh K + \sigma_i \sigma_j \sinh K) \\ &= (\cosh K)^{2N} \sum_{\sigma_N} \dots \sum_{\sigma_1} \prod_{\langle ij \rangle} (1 + \sigma_i \sigma_j \tanh K) \end{aligned} \quad (3-26)$$

Este producto $\prod_{\langle ij \rangle} (1 + \sigma_i \sigma_j \tanh K)$ nos dará una suma de términos que podemos ordenar según potencias crecientes de $(\tanh K)$. Si K es pequeño bastarán algunos de estos términos para calcular $Z(K)(\cosh K)^{-2N}$ con buena aproximación. Al efectuar las sumas de estos productos sobre los valores de las variables σ_i debemos recordar que

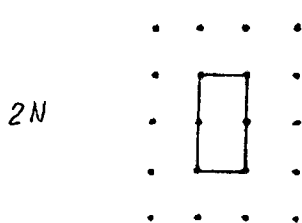
$$\begin{aligned} \sum_{\sigma = \pm 1} \sigma &= 0 \\ \sum_{\sigma = \pm 1} \sigma^2 &= 2 \end{aligned} \quad (3-27)$$

de modo que sólo darán contribución no nula a estas sumas aque

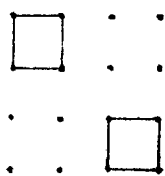
llos términos de los correspondientes productos en los que figuren potencias pares de todas las variables σ_i . Podemos representar gráficamente estos términos por caminos cerrados sobre la red, con la condición de que sólo pasen una vez por cada unión. El cálculo de la función de partición se reduce entonces al conteo de todos los posibles diagramas que pueden contribuir hasta un determinado orden (obviamente par en una red cuadrada) en thK . Por ejemplo, hasta el orden octavo tendremos las siguientes contribuciones:



puesto que a cada sitio de la red está asociada una única plaqueta (dualidad en dos dimensiones)



teniendo en cuenta el resultado anterior de dualidad y el hecho de que a cada sitio podemos asociar dos uniones (las que corresponden, por ej., a los versores de la red)



$$\frac{1}{2} N(N-1) - 2N = \frac{1}{2} N(N-5)$$

que dan hasta este orden

$$Z(K) \cdot (ch K)^{-2N} \cdot 2^{-N} = 1 + N th^4 K + 2N th^6 K + \frac{1}{2} N(N-5) th^8 K + \dots \quad (3-28)$$

Si K es grande, la variable del desarrollo en serie será la propia

$$\exp \left\{ K \sum_{\langle ij \rangle} \sigma_i \sigma_j \right\}$$

dado que configuraciones que contengan sucesivamente más spins

revertidos tendrán un peso menor respecto de la que tiene todos los spins alineados (cuyo peso será $\exp(2NK)$, puesto que, como dijimos, con cada sitio hay asociadas dos uniones). Nuevamente podemos representar estos términos por gráficos que corresponden a tener spins revertidos en distintos sitios:

$$\begin{array}{ccc}
 \begin{array}{c} \cdot \cdot \cdot \\ N \cdot x \cdot \\ \cdot \cdot \cdot \end{array} & ; & \begin{array}{c} \cdot \cdot \cdot \\ 2N \cdot x \cdot x \cdot \\ \cdot \cdot \cdot \end{array} & ; & \begin{array}{c} x \cdot \cdot \\ \frac{1}{2} N(N-5) \cdot x \cdot \\ \cdot \cdot \cdot \end{array}
 \end{array}$$

y puesto que por cada unión de spins no apareados hay una variación $\Delta A=2$ en la acción, tenemos

$$Z(K).e^{-2NK} = 1 + N e^{-8K} + 2N e^{-12K} + \frac{1}{2} N(N-5) e^{-16K} + \dots \quad (3-29)$$

desarrollo que es formalmente idéntico a (3-28)

En la versión Hamiltoniana los desarrollos para grande y pequeña constante de acoplamiento son más o menos los típicos del cálculo de perturbaciones en Mecánica Cuántica. Como ejemplo calcularemos la brecha de energía entre los estados fundamental y primer excitado (más de las excitaciones) para $\lambda < 1$ y la magnetización para $\lambda > 1$.

Para el primero de estos cálculos agregaremos por comodidad una constante al Hamiltoniano, de modo que la energía del estado fundamental para $\lambda=0$ sea cero, esto es:

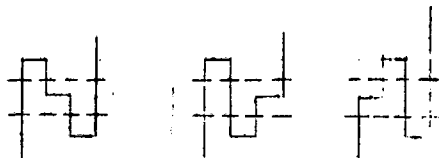
$$H = \sum_n [1 - \sigma_3(n)] - \lambda \sum_n \sigma_3(n) \sigma_3(n+1) = H_0 + \lambda V \quad (3-30)$$

Para $\lambda=0$, la base que rompe la degeneración del primer estado excitado es

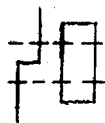
$$|1_k\rangle = \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_n e^{ikn} |1_n\rangle \quad (3-31)$$

y para ϵ_3 :

$$\frac{\langle 1_0 | V | 3_0 \rangle \langle 3_0 | V | 3_0 \rangle \langle 3_0 | V | 1_0 \rangle}{2 \cdot 6} = -3 \times 2 \times \left(\frac{1}{4}\right)^2$$

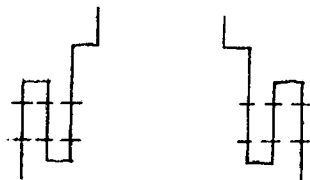


$$-2(N-3) \left(\frac{1}{4}\right)^2$$



$$-\frac{\langle 1_0 | V | 1_0 \rangle \langle 1_0 | V | 3_0 \rangle}{(2 \cdot 6)^2} = 2 \left[\frac{2}{16} + \frac{(N-2)}{16} \right]$$

En definitiva, al tercer orden en λ tenemos



$$\Delta(\lambda) = \left[2 - 2\lambda - \frac{N}{4} \lambda^2 - \left(\frac{2N-2N}{16} \right) \lambda^3 \right] - \left[0 + 0 \cdot \lambda - \frac{N}{4} \lambda^2 + 0 \lambda^3 \right] = 2(1-\lambda) + O(\lambda^4) \quad (3-33)$$

y prosiguiendo el cálculo uno encontraría que $O(\lambda^4) = 0$, etc, de modo que el resultado es exacto. Este es un caso muy afortunado, lo que en general no es dable esperar.

Calculemos ahora la magnetización para $\lambda > 1$. Una consecuencia importante de este desarrollo será mostrar que tiene radio de convergencia finito, lo cual implica la existencia de una transición entre una fase con $\langle \sigma_3 \rangle \neq 0$ y otra con $\langle \sigma_3 \rangle = 0$.
Escribimos ahora

$$\frac{H}{\lambda} = - \sum_n \sigma_3(n) \sigma_3(n+1) - \frac{1}{\lambda} \sum_n \sigma_1(n) = H_0 + \frac{1}{\lambda} V \quad (3-34)$$

y el cálculo se reduce a encontrar la corrección de H_1 al estado fundamental:

$$|0\rangle_\lambda = |0\rangle_\infty + \frac{\lambda^{-1}}{E_0 - H_0} V |0\rangle_\infty + \dots = |0\rangle_\infty - \frac{\lambda^{-1}}{4} \sum_n |1_n\rangle \quad (3-35)$$

para luego calcular en el estado corregido el valor medio de $\sigma_3(m)$; a orden λ^{-2} encontramos

$$\begin{aligned} \frac{\lambda \langle 0 | \sigma_3(m) | 0 \rangle_\lambda}{\lambda \langle 0 | 0 \rangle_\lambda} &= \langle 0 | \sigma_3(m) | 0 \rangle_\infty \left(1 - \frac{N}{16\lambda^2} \right) + \frac{\lambda^{-2}}{16} \sum_n \langle 1_n | \sigma_3(m) | 1_n \rangle \\ &= \left(1 - \frac{N}{16\lambda^2} \right) + \frac{1}{16\lambda^2} [(N-1) - 1] = 1 - \frac{1}{8\lambda^2} \end{aligned} \quad (3-36)$$

y a orden λ^{-4} :

$$\langle \sigma_3 \rangle = 1 - \frac{1}{8\lambda^2} - \frac{7}{128\lambda^4} \approx \left(1 - \frac{1}{\lambda^2} \right)^{\frac{1}{8}} \quad (3-37)$$

En realidad éste es otro caso afortunado: si bien la serie no se corta, es fácil reconocer a qué función corresponde. En general, para determinar si una serie dada es compatible con un comportamiento tipo potencia podemos aplicar la prueba del co-

ciente:

$$\text{Si } f(x) = \sum_n a_n x^n \underset{x \rightarrow x_c}{\sim} b(x_c - x)^{-\delta} \Rightarrow R_l = \frac{q_l}{a_{l-1}} = \left(\frac{1}{x_c}\right) \left[1 + \frac{\delta-1}{l}\right] \quad (3-38)$$

que nos muestra una relación lineal entre R_l y $1/l$, con ordenada al origen $1/x_c$ y pendiente $\delta-1$. Dos cantidades útiles para esta prueba son el "extrapolante lineal"

$$E_l = l R_l - (l-1) R_{l-1}$$

y la "pendiente en cada punto"
$$S_l = \frac{(R_l - R_{l-1})}{[1/l - 1/(l-1)]} \quad (3-39)$$

que valdrán, respectivamente $1/x_c$ y $1/x_c(\delta-1)$ si se cumple (3-38). Pero debemos aclarar que si existen singularidades subdominantes de tipo potencia, estas cantidades ya no serán tan útiles, puesto que se vuelven muy irregulares.

Otra forma en que podríamos haber calculado la magnetización es agregando al Hamiltoniano un término $h \sum_n \sigma_z(n)$ y calculando $E_0(h)$ perturbativamente en $1/\lambda$ para luego hacer

$$M = \frac{1}{N} \left. \frac{\partial E_0}{\partial h} \right|_{h=0} \quad (3-40)$$

Para finalizar esta sección queremos hacer una breve referencia a un método muy usado en la actualidad y que tiene la virtud de acelerar en la mayoría de los casos la convergencia de series de potencias. Se trata del uso de aproximantes racionales o de Padé. Su definición en términos de los coeficientes de la serie es la siguiente:

Siendo

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$$

una serie de potencias y

$$f_n(z) = \sum_{i=0}^n a_i z^i$$

su polinomio aproximante de orden n , el aproximante de Padé $[l, l]$ está determinado por el cociente de los siguientes determinantes de orden $N+1$:

$$\begin{aligned}
 N, M(z) &= \frac{\begin{vmatrix} \delta_M(z) & \dots & z^N \delta_{(M-N)}(z) \\ a_{M+1} & \dots & a_{M+1-N} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{M+N} & \dots & a_M \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & \dots & z^N \\ a_{M+1} & \dots & a_{M+1-N} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{M+N} & \dots & a_M \end{vmatrix}} \quad (3-41)
 \end{aligned}$$

donde se entiende $a_j = \delta_j = 0$ para $j < 0$. También existen métodos re
cursivos para calcularlos, que en general son más rápidos.

Como un ejemplo de la utilidad del método digamos que podemos detectar una singularidad tipo punto de ramificación a través de un cero en el polinomio denominador de un aproximante de Padé para la derivada logarítmica de la serie en cuestión.

III - 4; Método de simulación de Monte Carlo

La idea de este método es calcular aproximadamente cualquier promedio estadístico como un promedio aritmético sobre configuraciones del sistema que son generadas en secuencia y de modo que sus frecuencias correspondan aproximadamente a sus probabilidades en equilibrio a una cierta temperatura. El proceso de generación de estas secuencias es esencialmente dinámico, y caben esperar estados metaestables, etc. La limitación del método está esencialmente en el tiempo de máquina que requiere, pero por lo demás es tan exacto cuanto uno quiera. Además permite realizar numéricamente cálculos de grupo de renormalización, aplicando transformaciones de grupo de renormalización a las configuraciones de una cierta secuencia, supuesto alcanzado el equilibrio térmico, y calculando ciertas funciones de correlación entre ambos conjuntos de configuraciones; de este modo se obtienen sucesivas aproximaciones a los elementos de matriz $T_{\alpha\beta}$ de las transformaciones linealizadas, cuyos autovalores nos darán sucesivas aproximaciones a los índices críticos.

Dada una configuración cualquiera podemos generar a partir de ella infinidad de secuencias o cadenas de Markov. El procedimiento consiste en alterar una variable dinámica por vez y aceptar la nueva configuración si la energía disminuye; si la energía aumenta, se acepta o no la configuración de acuerdo a una probabilidad

$$W = \exp(-\beta \Delta E)$$

Esta "probabilidad de transición", propiamente normalizada, cumple la condición de balance detallado que a su vez nos garantiza en el límite de secuencias infinitas las probabilidades de las distintas configuraciones serán las de equilibrio a la temperatura T . Se observan entonces procesos de relajación, y el método tiene muchas características de un experimento, con la ventaja de que permite trabajar con modelos que no tienen realización física.

Capítulo IV - TEORÍA CON INVARIANCIA DE MEDIDA $Z(2)$

Consideramos este modelo, también llamado modelo de Ising invariante de medida, como un primer paso hacia la formulación de la teoría de las interacciones fuertes sobre la red. Queremos acoplar los grados de libertad del modelo de Ising de modo que la invariancia global $Z(2)$ que éste presenta pase a ser local.

Si la invariancia global implicaba una degeneración doble del estado fundamental, uno esperaría una altísima degeneración en este caso. Veremos que no es así, y esto es debido a que como el número de grados de libertad involucrado en una transformación local es finito, existe posibilidad de efecto túnel que remueve esta degeneración. El estado fundamental resulta ser entonces invariante de medida y esto trae como consecuencia que el valor de expectación en este estado de cualquier operador que no sea invariante ante transformaciones de medida, en particular la magnetización, sea 0 para cualquier régimen de acoplamientos. Pero esto no significa que el sistema no presente transición de fase: hemos visto que una manera de detectar una transición de fase es mediante desarrollos de alta y baja temperaturas de la función de partición. Estos desarrollos existen y tienen radio de convergencia finito si el número de dimensiones espacio-temporales es mayor que dos.

Debemos entonces pensar cómo identificar las fases de la teoría. Veremos que esto es posible a través del comportamiento de las funciones de correlación invariantes de medida, que definiremos. Pero estas funciones de correlación no nos dicen nada acerca del mecanismo que lleva a la transición de fase: definiendo el modelo hamiltoniano podremos ver que, como en el caso del modelo de Ising, esta transición de fase es debida a la condensación de excitaciones topológicas, no locales.

IV -1: Construcción de un modelo de Ising con simetría local

Consideremos una red cúbica en d dimensiones espacio-temporales. La idea es definir ahora variables de Ising sobre las uniones de esta red. De esta manera podemos definir una transformación local $Z(2)$ como aquélla consistente en invertir los spins de todas las uniones que llegan a un sitio

$$G(n) = \prod [-G_3(l)] \quad (4-1)$$

Podemos identificar las uniones por un sitio n y un versor μ de modo que (n, μ) se aleje del sitio n en la dirección positiva μ , pero a veces puede ser conveniente escribir la misma unión como $(n+\mu, -\mu)$. Al respecto notemos que las uniones involucradas en la transformación de medida son $2d$ y no sólo las d que uno asociaría unívocamente al sitio n .

Queremos escribir una forma de acoplamiento entre estas variables que sea lo más local posible y que quede inalterada ante una transformación de medida. Tratándose de una red cúbica, lo más sencillo es postular

$$S = -J \sum_{n, \mu, \nu} G_3(n, \mu) \cdot G_3(n+\mu, \nu) \cdot G_3(n+\nu, \mu) \cdot G_3(n, \nu) \quad (4-2)$$

puesto que entonces una transformación de medida en el sitio n invertirá un número par de spins, en este caso $G_3(n, \mu)$ y $G_3(n, \nu)$, manteniendo el signo del producto. En general, el producto de G_3 sobre cualquier camino cerrado en la red será invariante de medida, pero elegimos escribir la acción en término de plaquetas elementales para hacerla lo más local posible.

Estas plaquetas jugarán el papel de las uniones en el modelo de Ising. Así como entonces llamábamos "rota" a una unión tal que $G_3(n) G_3(n+\mu) = -1$ y "no rota" en caso contrario, aquí llamaremos, siguiendo una terminología debida a Anderson, "frustrada" a una plaqueta tal que $\prod_{l \in P} G_3(l) = -1$ y "no frustrada" si es $+1$.

IV -2: Teorema de Elitzur

Mostraremos que este modelo no puede tener magnetización espontánea para ningún valor de la temperatura. La magnetización espontánea está definida como el

$$\lim_{h \rightarrow 0} \langle \sigma_3(n, \nu) \rangle_h \quad (4-3)$$

donde h es un campo magnético externo que agrega a la acción del sistema un término

$$-h \sum_{n, \mu} \sigma_3(n, \mu) \quad (4-4)$$

Este término rompe la simetría global y local de la acción, que se recupera sólo para $h=0$.

Según lo dicho, debemos calcular

$$\langle \sigma_3(n, \nu) \rangle_h = \frac{\sum_{\{\sigma_3\}} \sigma_3(n, \nu) \exp\{K \sum \sigma_3 \sigma_3 \sigma_3 \sigma_3 + \beta h \sum \sigma_3\}}{\sum_{\{\sigma_3\}} \exp\{K \sum \sigma_3 \sigma_3 \sigma_3 \sigma_3 + \beta h \sum \sigma_3\}} \quad (4-5)$$

Si aplicamos una transformación de medida en el sitio n , sólo se altera el término (4-4).

Llamando $\{l_n\}$ al conjunto de las uniones que emergen del sitio n , tendremos

$$\delta \sigma_3(l) = \begin{cases} 0 & l \notin \{l_n\} \\ -2\sigma_3(l) & l \in \{l_n\} \end{cases} \quad (4-6)$$

Podemos reescribir (4-5) en términos de las nuevas variables

$$G'_3(l) = G_3(l) + \delta G_3(l) :$$

$$\begin{aligned} \langle G_3(n, \nu) \rangle_h &= \frac{\sum_{\{G'_3\}} [-G'_3(n, \nu)] \exp \left\{ K \sum G'_3 G'_3 G'_3 G'_3 + \beta h \sum G'_3 - \beta h \sum \delta G_3 \right\}}{\sum_{\{G_3\}} \exp \left\{ K \sum G_3 G_3 G_3 G_3 + \beta h \sum G_3 \right\}} \\ &= \langle -G_3(n, \nu) \exp \left\{ -\beta h \sum_{\{l_n\}} \delta G_3 \right\} \rangle_h \end{aligned} \quad (4-6b)$$

donde hemos rebautizado la variable muda $G'_3 \rightarrow G_3$

El valor máximo de $\sum_{\{l_n\}} \delta G_3$ será $(-2) \cdot 2d$, de modo que podemos acotar

$$\begin{aligned} |\langle G_3(n, \nu) \rangle_h - \langle -G_3(n, \nu) \rangle_h| &= |\langle -G_3(n, \nu) [\exp \left\{ -\beta h \sum_{\{l_n\}} \delta G_3 \right\} - 1] \rangle_h| \\ &\leq |e^{4d\beta} - 1| \cdot |\langle G_3(n, \nu) \rangle_h| \end{aligned} \quad (4-7)$$

pero

$$|e^{4d\beta} - 1| \xrightarrow{h \rightarrow 0} 0$$

de modo que

$$\langle G_3(n, \nu) \rangle_{h \rightarrow 0} = \langle -G_3(n, \nu) \rangle_{h \rightarrow 0}$$

lo que implica

$$\langle G_3(n, \nu) \rangle = 0 \quad (4-8)$$

IV -3: Función de correlación invariante de medida

El resultado (4-8) se extiende a cualquier magnitud que no sea invariante ante transformaciones de medida. Veremos en la siguiente sección que esto es una consecuencia de que el estado fundamental de la teoría hamiltoniana debe ser invariante de medida. Pero antes de pasar a la forma hamiltoniana del modelo queremos ver cómo podemos identificar las distintas fases de la teoría, suponiendo que las hay. Por ejemplo en el modelo XY, en que tampoco existe magnetización espontánea (por razones distintas de las que nos ocupan), las fases se reconocen por un diferente comportamiento de la función de correlación spin-spin. En nuestro caso este criterio tampoco sirve por no ser invariante de medida, pero nos da idea de la relevancia de las funciones de correlación. En efecto Wegner, guiado por este concepto, definió la función de correlación a lo largo de un camino cerrado

$$\Gamma_c = \langle \prod_{l \in c} G_3(l) \rangle \quad (4-9)$$

Esta función de correlación depende del camino, pero para lazos suficientemente grandes se encuentra que

$$\Gamma_c \sim \begin{cases} \exp(-A) & \text{en la fase de alta temperatura} \\ \exp(-P) & \text{" " " " baja " } \end{cases} \quad (4-10)$$

siendo P el perímetro y A el área mínima encerrada por el lazo, siempre que el número de dimensiones espacio-temporales sea $d > 2$. Para $d=2$ lo que sucede es que el sistema es equivalente a un conjunto de sistemas de Ising unidimensionales, y por consiguiente sólo existe en su fase desordenada.

Para ver esto, recordaremos que las configuraciones que entran en la función de partición se dividen en clases de equivalencia que afortunadamente tienen el mismo número de elementos, de modo que para calcular promedios de magnitudes invariantes de medida nos basta con tomar un representante de cada clase. Para $d=2$, cada clase está representada en forma unívoca por una configuración tal que en todas las uniones "temporales"

es
$$G_3(n, \hat{z}) = 1 \quad (4-11)$$

Cuando escribimos la función de partición en términos de estas configuraciones decimos que hemos elegido la medida temporal. En esta medida escribimos (4-2) como

$$S = -J G_3(n, \hat{x}) G_3(n + \hat{z}, \hat{x}) \quad (4-12)$$

de modo que sólo hay acoplamiento en la dirección \hat{z} . Consideremos ahora un contorno rectangular de dimensiones R, T . En medida temporal podemos escribir

$$\prod_{l \in C} G_3(l) = \prod_{n_1=0}^R G_3(0, n_1; \hat{x}) G_3(T, n_1; \hat{x}) \quad (4-13)$$

y siendo

$$\langle G_3(T, n_1; \hat{x}) G_3(0, n_1; \hat{x}) \rangle \underset{T \rightarrow \infty}{\sim} \exp(-T/\xi) \quad \forall n_1 \quad (4-14)$$

resulta

$$\langle \prod_c G_3 \rangle \sim [\exp(-T/\xi)]^R \sim \exp(-A/\xi) \quad \text{con } A = RT \quad (4-15)$$

para cualquier valor finito de β .

II' -4: Forma hamiltoniana

Si $d > 2$, la condición (4-11) no define unívocamente la medida, puesto que aún es compatible con la aplicación de transformaciones de medida simultáneamente en todos los puntos que difieren sólo en su índice temporal (transformaciones independientes del tiempo).

Para escribir el modelo en su forma hamiltoniana seguimos bastante estrechamente los pasos de la sección (II-4): escribimos la acción en forma anisotrópica

$$S = -K_Z \sum_{\{P_Z\}} \sigma_3 \sigma_3 \sigma_3 \sigma_3 - K \sum_{\{P_S\}} \sigma_3 \sigma_3 \sigma_3 \sigma_3 \quad (4-16)$$

donde P_Z representa a aquellas plaquetas que contienen uniones temporales y P_S a las restantes. Con la condición (4-11) y a menos de una constante aditiva, podemos escribir

$$S = \frac{1}{2} K_Z \sum_{\{P_Z\}} [\sigma_3(n+\hat{e}, \hat{t}) - \sigma_3(n, \hat{t})]^2 - K \sum_{\{P_S\}} \sigma_3 \sigma_3 \sigma_3 \sigma_3 \quad (4-17)$$

y a partir de aquí podemos construir la matriz de transferencia y tomar el límite $\tau \rightarrow 0$ con $K_Z \rightarrow \infty$; y $K \rightarrow \lambda \exp(-2K_Z) = \lambda \tau$ para encontrar

$$H = -\sum_{\vec{n}, i} \hat{\sigma}_i(\vec{n}, \hat{t}) - \lambda \sum_{\{P_S\}} \hat{\sigma}_3 \hat{\sigma}_3 \hat{\sigma}_3 \hat{\sigma}_3 \quad (4-18)$$

con $\hat{\sigma}_i$, $\hat{\sigma}_3$ matrices de Pauli y sobre una red puramente espacial.

Las transformaciones de medida independientes del tiempo son realizadas ahora por un operador

$$\hat{G}(\vec{n}) = \prod_{\pm i} \hat{\sigma}_i(\vec{n}, \hat{t}) \quad (4-19)$$

$$\text{que conmuta con el Hamiltoniano: } \hat{G}(\vec{n}) H \hat{G}(\vec{n}) = H \quad (4-20)$$

puesto que conmuta con $\hat{\sigma}_i$ en cualquier unión, y respecto de $\hat{\sigma}_3$

$$G^{-1}(\vec{n}) G_3(m, \hat{i}) G(\vec{n}) = \begin{cases} G_3(\vec{m}, \hat{i}) & \vec{m} \neq \vec{n} \\ -G_3(\vec{m}, \hat{i}) & \vec{m} = \vec{n} \end{cases} \quad (4-21)$$

puede haber sólo un cambio de signo, irrelevante para la forma de (4-18).

Veamos que, como adelantáramos en la sección anterior, el resultado (4-8) puede ser deducido de la condición

$$G(\vec{n}) |\Psi\rangle = |\Psi\rangle \quad (4-22)$$

En efecto, a la luz de (4-21)

$$\langle \Psi | G_3(n, i) | \Psi \rangle = \langle \Psi | G(n) G^{-1}(n) G_3(n, i) G(n) G^{-1}(n) | \Psi \rangle = -\langle \Psi | G_3(n, i) | \Psi \rangle \quad (4-23)$$

que implica $\langle \Psi | G_3(n, i) | \Psi \rangle = 0 \quad (4-24)$

IV -5: Transformaciones de dualidad : a) Dos dimensiones espaciales.

Mostraremos que el modelo de Ising invariante de medida en $d=2+1$ dimensiones es dual al modelo de Ising ordinario de la misma dimensionalidad.

Limitándonos al subespacio invariante de medida (4-22), tenemos una identidad operatorial

$$G(n) = \prod_{\pm i} G_i(n, i) = 1 \quad (4-25)$$

o sea $G_1(n, \hat{y}) G_2(n, -\hat{y}) G_3(n, \hat{x}) G_4(n, -\hat{x}) = 1 \quad (4-26)$

que nos permite escribir

$$G_1(n, \hat{y}) = G_1(n, \hat{x}) G_3(n, \hat{x}) G_4(n, -\hat{y}) \quad (4-27)$$

pero a su vez

$$\sigma_1(n, -\hat{y}) = \sigma_1(n-\hat{y}, \hat{y}) = \sigma_1(n-\hat{y}, \hat{x}) \sigma_1(n-\hat{y}, -\hat{x}) \sigma_1(n-\hat{y}, -\hat{y}) \quad (4-28)$$

y así sucesivamente, de modo que podemos eliminar a todos los operadores σ_i en uniones que apunten en la dirección \hat{y} de la lista de variables independientes del problema. Entonces, las variables σ_3 correspondientes a estas uniones, al conmutar ahora con todos los operadores en Π , pueden ser elegidas constantes

$$\sigma_3(n, \hat{y}) = 1 \quad \forall n \quad (4-29)$$

de modo que las únicas variables independientes del problema son $\sigma_1(n, \hat{x})$ y $\sigma_3(n, \hat{x})$.

En este caso podemos definir la transformación de dualidad de la siguiente manera:

- 1) asociamos un sitio \tilde{n} de la red dual con cada plaqueta de la red directa.
- 2) definimos un operador $\mu_1(\tilde{n}) = \sigma_3 \sigma_3 \sigma_3 \sigma_3$ que revertirá el spin del sitio \tilde{n} . (4-30a)
- 3) dicho spin será autoestado de un operador

$$\mu_3(\tilde{n}) = \prod_{n \geq 0} \sigma_1(\tilde{n} - n\hat{y}, \hat{x}) \quad (4-30b)$$

que en la red directa corresponde a invertir los spins de todas las uniones que están por debajo de (n, \hat{x}) , incluyendo ésta.

Luevamente, como en la sección (II-5) podemos ver que

$$\begin{aligned} \mu_1^2(\tilde{n}) &= \mu_3^2(\tilde{n}) = 1 \\ \mu_1(\tilde{n}) \mu_3(\tilde{n}) &= -\mu_3(\tilde{n}) \mu_1(\tilde{n}) \\ \mu_1(\tilde{n}) \mu_3(\tilde{m}) &= \mu_3(\tilde{m}) \mu_1(\tilde{n}) \quad \tilde{n} \neq \tilde{m} \end{aligned} \quad (4-31)$$

Las definiciones (4-30) nos permiten escribir

$$\mu_3(\tilde{n}) \mu_3(\tilde{n}-\hat{y}) = \sigma_1(n, \hat{x}) \quad (4-32)$$

y de la cadena (4-27), (4-28)...podemos escribir

$$\mu_3(\tilde{n}) \mu_3(\tilde{n}-\hat{x}) = \sigma_1(n, \hat{y}) \quad (4-33)$$

de modo que

$$\begin{aligned} H &= -\sum_{\tilde{n}, i} \mu_3(\tilde{n}) \mu_3(\tilde{n}+i) - \lambda \sum_{\tilde{n}} \mu_1(\tilde{n}) \\ &= \lambda \left\{ -\sum_{\tilde{n}} \mu_1(\tilde{n}) - (1/\lambda) \sum_{\tilde{n}, i} \mu_3(\tilde{n}) \mu_3(\tilde{n}+i) \right\} \end{aligned} \quad (4-34)$$

o sea, para la simetría $Z(\)$ en 2+1 dimensiones tenemos

$$H(\text{local}; \lambda) = \lambda H(\text{global}; \lambda^{-1}) \quad (4-35)$$

Sabemos que el modelo de Ising en 2+1 dimensiones tiene una transición de fase de segundo orden y que en su fase ordenada $=(\lambda^* = \lambda^{-1} > 1)$ presenta magnetización espontánea. ¿Cómo se traduce esto al modelo con simetría local?

Consideremos el modelo de Ising dual en un campo magnético externo

$$H = -\sum_{\tilde{n}} \mu_1(\tilde{n}) - \lambda^{-1} \sum_{\tilde{n}, i} \mu_3(n) \mu_3(n+i) + h \sum_{\tilde{n}} \mu_3(\tilde{n}) \quad (4-36)$$

y escribamos este Hamiltoniano en términos de las variables σ :

$$H = \frac{1}{\lambda} H(\text{local}; \lambda) + h \sum_{\underline{m}} \prod_{n \geq 0} \sigma_1(\vec{m} - n\hat{y}, \hat{x}) \quad (4-37)$$

Considerando el término magnético como una perturbación tenemos, a primer orden en las respectivas bases:

$$\lambda^* \langle \tilde{0} | \mu_3(\tilde{m}) | \tilde{0} \rangle_{\lambda^*} = \langle 0 | \prod_{n \geq 0} \sigma_1(\vec{m} - n\hat{y}, \hat{x}) | 0 \rangle_{\lambda} \quad (4-38)$$

La relación (4-35) nos permite identificar al segundo miembro como un parámetro de desorden, puesto que será distinto de cero para $\lambda < \lambda_c$. De su definición (4-30b) vemos que este operador es no local y tiene una interpretación similar a la del operador de kink del modelo de Ising. En nuestra terminología invariante de medida decimos que este operador introduce una frustración en la plaqueta \underline{m} . Por ser éste un operador no local, puede tener valor de expectación distinto de cero sin violar el teorema de Elitzur.

IV-6 Transformaciones de dualidad: b) Tres dimensiones espaciales

Queremos ahora mostrar que el modelo invariante de medida en 3+1 dimensiones es autodual, es decir que definiendo variables duales en forma análoga a (4-30) podemos escribir el Hamiltoniano en la misma forma en términos de variables directas y duales, y resulta

$$H(\sigma; \lambda) = \lambda H(\mu; \lambda^{-1}) \quad (4-39)$$

que relaciona la física de $\lambda > 1$ con la de $\lambda < 1$.

El procedimiento es esencialmente el mismo que describimos en el punto anterior, pero lo repetiremos para aclarar algunas sutilezas relacionados con la medida. Dada la condición (4-25) podemos escribir las variables σ_i en uniones que apuntan en la dirección \hat{x}_3 en términos de las σ_i en las uniones tipo \hat{x}_1, \hat{x}_2 exclusivamente, de modo que podemos elegir, como en (4-29)

$$\sigma_3(n, \hat{x}_3) = 1 \quad \forall n \quad (4-40)$$

que denominaremos "medida axial": La sutileza que mencionábamos está relacionada con que ahora queremos definir variables duales en las uniones de la red dual, y queremos mantener la medida axial en la transformación.

Definimos entonces la transformación de la siguiente manera:

$$1) \text{ Asociamos } \begin{cases} \text{sitios} \longleftrightarrow \text{cubos} \\ \text{uniones} \longleftrightarrow \text{plaquetas} \end{cases}$$

Por ejemplo a una plaqueta de la red directa corresponde la unión dual que la atraviesa, y a una unión en la red directa corresponde la plaqueta dual que es atravesada por aquélla.

2) Las variables μ_1 se definen en términos de la plaqueta asociada independientemente de que se trate de una unión axial o transversal:

$$\mu_1 = \sigma_3 \sigma_3 \sigma_3 \sigma_3 \quad (4-41a)$$

3) Las variables μ_3 se definen

$$\mu_3 = \begin{cases} 1 & \text{unión axial} & \hat{\lambda} = \hat{\lambda}_3 \\ \prod_{n'_3 \leq n_3} \sigma_1(n_1, n_2, n'_3; \hat{\lambda}_2) & & \hat{\lambda} = \hat{\lambda}_1 \\ \prod_{n'_3 \leq n_3} \sigma_1(n_1, n_2, n'_3; \hat{\lambda}_1) & & \hat{\lambda} = \hat{\lambda}_2 \end{cases} \quad (4-41b)$$

Es fácil ver que las variables μ_1 y μ_3 en uniones transversales satisfacen el álgebra de Pauli análogamente a (4-31) y que se cumplen las siguientes relaciones

$$\prod_{\tilde{\lambda}} \mu_1(\tilde{\lambda}) = 1 \quad (4-42)$$

siendo $\tilde{\lambda}$ las uniones que emergen de un sitio dual, y

$$\mu_1 = \mu_3 \mu_2 \mu_3 \mu_2 \quad (4-43)$$

entre las variables de una unión directa y las de la plaqueta dual correspondiente. Las relaciones (4-41a) y (4-43) llevan a (4-39).

IV-7: Fase desordenada y confinamiento de cargas externas

El estado fundamental de (4-18) para $\lambda=0$ es el simple producto directo de los autoestados de σ_i con autovalor +1. Este estado es único e invariante de medida. Las excitaciones se obtienen de aplicar σ_3 en las distintas uniones y sólo algunas de ellas serán invariantes de medida: aquéllas del tipo

$$\prod_{l \in C} \sigma_3(l) |0\rangle \quad (4-44)$$

donde C debe ser cerrado o bien cruzar la red de extremo a extremo en alguna dirección. En el primer caso tendrán energía finita proporcional al perímetro del contorno, mientras que en el segundo la energía es proporcional al tamaño de la red.

Podemos interpretar este segundo caso como debido a la creación de dos cargas externas colocadas en los extremos de la red. Esto significaría que la energía del campo de medida asociado con dichas cargas crece linealmente con la distancia entre ellas. La tensión o fuerza por unidad de longitud de la red es 2 para $\lambda=0$. Más aún, podemos pensar que esta "cuerda" proviene de un lazo cerrado yacente en el plano determinado por esa dirección y la dirección temporal, de la que nos despreocupamos al pasar a la versión hamiltoniana.

Considerando C cerrado es claro que para $\lambda=0$ será

$$\langle 0 | \prod_{l \in C} \sigma_3(l) | 0 \rangle = 0 \quad (4-45)$$

pero para $\lambda < 1$ finito el estado fundamental adquirirá correcciones provenientes de plaquetas frustradas y se tendrá

$$\langle 0 | \prod_{l \in C} \sigma_3(l) | 0 \rangle \sim \lambda^n \quad (4-46)$$

para un n suficientemente alto que corresponde precisamente a llenar el área encerrada por el contorno C con plaquetas (comportamiento tipo área). Otro efecto que se tiene para λ finito es la disminución de la tensión de la cuerda.

Esta relación entre comportamiento tipo área de la función de correlación invariante de medida y el confinamiento de cargas externas, creadoras de líneas de fuerza del campo de medida se ve más claramente en el paso siguiente al que nos ocupa, o sea cuando las variables angulares, que en el modelo de Ising

invariante de medida sólo pueden valer 0 ó 2π pueden adoptar cualquier valor entre 0 y 2π . Este caso puede ser reconocido como la versión sobre la red de la Electrodinámica Cuántica con sólo escribir $J = \frac{1}{2e^2}$, $\phi_\mu(n) = aeA_\mu(r)$ y en ese caso (4-9) se escribe en la forma

$$\Gamma_c = \langle \exp(i e \oint_c A_\mu dx^\mu) \rangle \quad (4-47)$$

y se interpreta a través del acoplamiento $e \int A_\mu(x) J_\mu(x) d^4x$ con una corriente que forma un lazo cerrado, y por ende conserva la carga. Por una parte el formalismo de Matriz de Transferencia nos permite interpretar (4-47) como que en un instante tenemos dos cargas opuestas separadas una cierta distancia R , y por otra

$$\Gamma_c = \frac{Z(J)}{Z(0)} = \exp\{-[F(J) - F(0)]\} = \exp[V(R)T] \quad (4-48)$$

puesto que consideramos carga estáticas, y de este modo un comportamiento tipo área de (4-47) nos lleva a

$$V(R) \sim |R| \quad (4-49)$$

IV - 8: Análisis de la transición de fase

Queremos referirnos brevemente en esta sección a los métodos con que se atacó el problema de la transición de fase en el modelo invariante de medida $Z(\mathbb{Z})$, especialmente en $3+1$ dimensiones que es el caso más interesante, y los resultados, en parte contradictorios, a que se arribó. En realidad esta contradicción tiene larga data, pues se manifestó ya entre los resultados de Migdal, quien mediante relaciones de recurrencia aproximadas indicaba la existencia de una analogía total entre sistemas de medida en 4 dimensiones y sistemas de spin en 2 dimensiones, con los resultados de Balian et al, que mediante técnicas de camino promedio obtenían para el modelo $Z(\mathbb{Z})$ de medida una transición de primer orden. Si bien el método usado por ellos quedó invalidado por el teorema de Elitzur, el resultado es sin embargo el correcto, de acuerdo a consideraciones de entropía y como muestran especialmente los cálculos numéricos de Creutz et al. Utilizando el método de simulación de Monte Carlo para sistemas en equilibrio térmico descrito en la sección (III-4) encuentran una transición de fase de primer orden en el valor β_c predicho por autodualidad en los modelos $Z(\mathbb{N})$ con $\mathbb{N} \leq 4$ y los de segundo orden, una para $\beta \neq 1$ y otra en un valor β_c creciente con \mathbb{N} para $\mathbb{N} > 4$, siempre en cuatro dimensiones. En cambio encuentran una transición de segundo orden, como era de esperarse, para $Z(\mathbb{Z})$ en tres dimensiones.

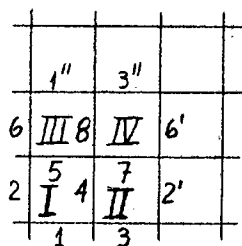
Creutz et al efectúan lo que denominan un ciclo térmico, "calentando" y "enfriando" el sistema de manera cuasiestática, y estudian la variación con la temperatura de la acción media por plaqueta o "energía interna" U , encontrando un salto ΔU y un efecto de histéresis asociado, indicativo de metaestabilidad. Es necesario aclarar que también en el caso de transiciones de segundo orden se observan ciclos de histéresis, debido al incremento del tiempo de relajación en proximidad de la temperatura crítica, pero la variación en este caso es menor, y los ciclos menos abruptos. Un hecho que netamente revela el carácter discontinuo de la transición es que, a la temperatura

crítica las configuraciones de equilibrio obtenidas partiendo de la configuración totalmente ordenada o de una con los spins al azar corresponden a dos valores bien distintos de U .

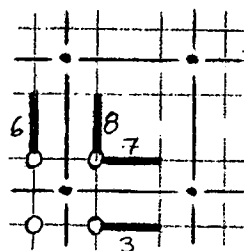
Por otra parte se efectuaron cálculos de grupo: de renormalización en este modelo en versión hamiltoniana, encontrándose una transición de segundo orden aún en 3+1 dimensiones. Sin embargo un pequeño análisis de esta técnica nos muestra cómo el requerimiento de invariancia de medida del estado fundamental fuerza la introducción de muchas aproximaciones resultando el método menos confiable que de costumbre y siendo dable esperar que al menos no pueda detectar una transición discontinua. Con todo, el valor de λ_c es muy próximo al esperado por autodualidad.

Analizaremos el método en su aplicación al caso 2+1- dimensional por simplicidad, pero su extensión al caso 3+1- dimensional es directa. La formación de bloques de spin se lleva a cabo en dos etapas: en la primera se construye un Hamiltoniano de bloque que conmuta sólo con el producto de los generadores de transformaciones de medida que corresponden a los sitios que luego estarán asociados con los vértices de la nueva red (invariancia de medida semilocal). Los parámetros de este hamiltoniano se ajustan de modo que la energía de su estado fundamental coincida con la energía de vacío del verdadero Hamiltoniano del bloque, al cual éste reemplaza. Este Hamiltoniano tiene menos variables que el original, las adecuadas para llevar a cabo la segunda etapa del proceso: la definición de variables de bloque, que deben éstas sí respetar la simetría local y en términos de las cuales quisiéramos poder escribir un Hamiltoniano de la misma forma que el original.

Dividimos la red en grupos de cuatro plaquetas como I-II-III-IV en la figura A



A



B

descomponiendo el Hamiltoniano

$$aH = -\alpha \sum_l G_l(l) - (\alpha/\lambda) \sum_p \prod_{l_p=1}^4 G_3(l_p) \quad (4-50)$$

como suma de Hamiltonianos h asociados con estos grupos,

siendo $h = h^{(0)} + h^{(1)} + h^{(2)}$ con

$$\begin{aligned} ah^{(0)} &= -\alpha \sum_{l=1}^8 G_l(l) \\ ah^{(1)} &= -(\alpha/\lambda) \sum_{p=I}^{III} \prod_{l_p} G_3(l_p) \\ ah^{(2)} &= -(\alpha/\lambda) \prod_{l_{IV}} G_3 = -(\alpha/\lambda) G_3(7) G_3(8) G_3(3'') G_3(6') \end{aligned} \quad (4-51)$$

Luego definimos otra teoría reemplazando h por

$h_1^{(0)} + h_1^{(1)} + h_1^{(2)}$ tal que

$$\begin{aligned} ah_1^{(0)} &= -2\alpha [\sigma_1(3) + \sigma_1(7) + \sigma_1(6) + \sigma_1(8)] \\ ah_1^{(1)} &= -\delta [\sigma_3(3) \sigma_3(7) + \sigma_3(6) \sigma_3(8)] \\ ah_1^{(2)} &= ah^{(2)} \end{aligned} \quad (4-52)$$

Este h_1 conmuta con el producto de los generadores asociados a los sitios marcados en la figura B y $h_1^{(0)} + h_1^{(1)}$ puede ser diagonalizado en el conjunto de estados correspondientes a las uniones 3, 6, 7, 8, quedando $h_1^{(2)}$ como el único término de interacción.

La energía del estado fundamental de $h_1^{(0)} + h_1^{(1)}$ es

$$E_0^{(h)} = -(2/a) \sqrt{\delta^2 + 16\alpha^2} \quad (4-53)$$

Ajustaremos δ de modo que esta energía coincida con la del estado fundamental de $h^{(0)} + h^{(1)}$. Pero esta sólo puede ser conocida perturbativamente. Encontramos

$$\delta^2 = \alpha^2 F^2(\lambda) \quad (4-54)$$

donde $F^2(\lambda)$ es una serie en λ^{-2} .

La segunda etapa del proceso es, como dijimos, la definición de variables de bloque (queremos pasar a la superred marcada en la figura B). Definimos

$$\bar{G}_1(3,7) = G_1(3) G_1(7) \quad (4-55)$$

Puesto que el valor $\bar{G}_1 = 1$ puede provenir de cualquier combinación de $|++\rangle$ y $|--\rangle$, elegimos la que da la menor energía

$$|1\rangle = \cos \varphi |++\rangle + \sin \varphi |--\rangle; \quad \text{tg } \varphi = \frac{\sqrt{F^2+16}-4}{F}; \quad E_+ = -\frac{\alpha}{a} \sqrt{F^2+16} = \frac{1}{2} E_0^{(h)} \quad (4-56)$$

entendiendo $F = \sqrt{F^2}$. Análogamente

$$|-1\rangle = \frac{\sqrt{1}}{2} (|+-\rangle + |-+\rangle) \quad ; \quad E_- = \frac{\alpha F}{a} \quad (4-57)$$

Ahora definimos el operador $\bar{G}_3(3,7)$ como aquel objeto que conecta los estados $|1\rangle$ y $|-1\rangle$ de $\bar{G}_1(3,7)$. Procediendo como en (3-12) diremos que $G_3(3) = K \bar{G}_3(3,7)$ con

$$K = \langle -1 | G_3(3) | 1 \rangle = \frac{\sqrt{1}}{2} (\cos \varphi + \sin \varphi) \quad (4-58)$$

Tenemos ahora una nueva red con espaciado $\bar{a} = 2a$, operadores \bar{G}_1 y \bar{G}_3 en las uniones y podemos escribir entonces el Hamiltoniano como suma de términos asociados a sitios de esta nueva red

$$\bar{a} \bar{h} = -\bar{\delta} - \bar{\alpha} [\bar{G}_1(3,7) + \bar{G}_1(6,8)] - \frac{\bar{\alpha}}{\lambda} [\bar{G}_3(3,7) \bar{G}_3(6,8) \bar{G}_3(3'',7'') \bar{G}_3(6',8')] \quad (4-59)$$

donde los parámetros renormalizados surgen de pedir que las energías sean las mismas para el bloque en términos de las variables viejas o nuevas

$$\frac{2\bar{\alpha} + \bar{\delta}}{\bar{a}} = E_0^{(h)} = \frac{2\alpha}{a} \sqrt{F^2+16}$$

$$\frac{2\bar{\alpha}}{\bar{a}} = E_- - E_+ = (\alpha/a) (\sqrt{F^2+16} - F) \quad (4-60)$$

$$\frac{\bar{\alpha}}{\bar{a}\lambda} = \frac{\alpha}{a\lambda} K^4$$

y de aquí
$$\frac{\bar{\lambda}}{\lambda} = \frac{\bar{\alpha}}{\bar{a}} \frac{a}{\alpha} \frac{1}{K^4} = \frac{\sqrt{F^2+16} - F}{2K^4} \quad (4-61)$$

Vemos que el método, si bien es ingenioso, lleva implícitas muchas aproximaciones.

Capítulo V - METODO VARIACIONAL EN EL MODELO Z(2)

En este capítulo analizaremos el modelo con invariancia de medida Z(2) en versión hamiltoniana en dos y tres dimensiones espaciales utilizando la técnica más simple que puede poner en evidencia las características de la transición de fase. Se trata de un método variacional del tipo de campo promedio, pero que respeta la invariancia de medida del estado fundamental. Si bien no esperamos mediante esta técnica obtener resultados muy precisos en cuanto a temperatura crítica, especialmente para dos dimensiones, tenemos en cambio la esperanza de poder distinguir entre una transición de primer orden y una de segundo.

Veremos en efecto que es posible observar la transición a través de tres fenómenos:

- a) un cambio de comportamiento en la función de correlación invariante de medida (lazo de Wilson)
- b) la variación con el acoplamiento del valor del parámetro variacional que minimiza la energía del estado fundamental.
- c) la variación con el acoplamiento de la energía del estado fundamental.

Precisamente (b) y (c) resultarán en el caso tridimensional característicos de una transición de primer orden, mientras que en dos dimensiones serán más bien indicativos de una transición continua.

Puesto que nos interesa especialmente analizar el caso tridimensional, haremos uso frecuente de la autodualidad del modelo en este caso. En particular el efecto (a) se observará claramente en términos de las variables duales dado que por su definición inducen una superposición entre las funciones de onda de los distintos sitios, compensando de este modo el efecto simplificador del método. Un hecho notable es que el valor crítico del acoplamiento obtenido en tres dimensiones es muy próximo al valor autodual $\lambda_c = 1$.

V- 1: Modelo tridimensional en variables directas y duales.
Comportamiento límite del lazo de Wilson.

Comenzamos recolectando algunas fórmulas de las secciones (IV-4) y (IV-6).

En variables directas tenemos un Hamiltoniano

$$H = - \sum_l G_l - \lambda \sum_p G_3 G_3 G_3 G_3 \quad (5-1)$$

que conmuta con el operador local

$$G_s = \prod_{l=1}^6 G_l \quad (5-2)$$

donde s, l, p representan respectivamente sitios uniones y plaquetas en la red.

Construiremos un estado $|0\rangle_\lambda$ tal que

$$G_s |0\rangle_\lambda = |0\rangle_\lambda \quad \forall s \quad (5-3)$$

y tomaremos como parámetro de orden no local e invariante de medida el valor de expectación

$$C_\Gamma = \frac{\langle 0 | \prod_{l \in \Gamma} G_2(l) | 0 \rangle_\lambda}{\langle 0 | 0 \rangle_\lambda} \quad (5-4)$$

siendo Γ cerrado.

Las transformaciones de dualidad

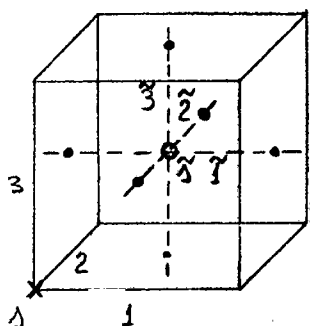
$$\begin{aligned} \tilde{G}_1 &= G_3 G_3 G_3 G_3 & ; & \quad \tilde{G}_3(1) = \prod_{\langle X_3 \rangle} G_1(2) \\ \tilde{G}_3(3) &= 1 & \quad \tilde{G}_3(2) &= \prod_{\langle X_3 \rangle} G_1(1) \end{aligned} \quad (5-5)$$

nos llevan a

$$\tilde{H} = H/\lambda = - \sum_{\tilde{l}} \tilde{G}_1 - \lambda^{-1} \sum_{\tilde{p}} \tilde{G}_3 \tilde{G}_3 \tilde{G}_3 \tilde{G}_3 \quad (5-6)$$

que conmuta con

$$\tilde{G}_s = \prod_{\tilde{l}=1}^6 \tilde{G}_l \quad \tilde{G}_1 = \prod_{p=1}^6 (G_3 G_3 G_3 G_3) \quad (5-7)$$



$$\Delta = (X_1, X_2, X_3)$$

En términos de estas variables duales podemos construir un estado $|\tilde{0}\rangle_\lambda$ invariante por aplicación de \tilde{G}_3 y calcular el valor de expectación C_p en este estado

$$C_p \approx \frac{\langle \tilde{0} | \prod_{l \in \Gamma} G_3(l) | \tilde{0} \rangle_\lambda}{\langle \tilde{0} | \tilde{0} \rangle_\lambda} = \frac{\langle \tilde{0} | \prod_{l \in \Gamma} \tilde{G}_l | \tilde{0} \rangle_\lambda}{\langle \tilde{0} | \tilde{0} \rangle_\lambda} \quad (5-8)$$

donde \tilde{l} son las uniones duales a las plaquetas interiores al contorno Γ .

Es claro que si pudiéramos resolver el modelo exactamente sería $\tilde{C}_p = C_p$. En nuestro caso construiremos $|0\rangle_\lambda$ y $|\tilde{0}\rangle_\lambda$ por simetrización de un simple producto directo del tipo (3-1), pero esta vez sobre uniones (directas o duales). Es fácil observar el comportamiento de C_p y \tilde{C}_p respectivamente en los límites $\lambda \rightarrow \infty$ y $\lambda \rightarrow 0$, porque es en estos casos que pueden despreciarse los términos de interferencia en el numerador y denominador de (5-4) y (5-8):

a) para $\lambda \rightarrow \infty$ el parámetro variacional en variables directas $\theta \rightarrow 0$, con lo cual podemos despreciar las distintas potencias de $\sin \theta$ y obtenemos

$$C_p \xrightarrow{\lambda \rightarrow \infty} (\cos \theta)^P = \exp(P \ln \cos \theta) \approx \exp(-cP) \quad (5-9)$$

siendo P el perímetro del contorno Γ .

b) para $\lambda \rightarrow 0$ ocurre lo propio en variables duales $\tilde{\theta} \rightarrow 0$, pero en este caso los \tilde{G}_l en (5-8) llevan a que todos los términos co tengan potencias de $\sin \tilde{\theta}$, pero evidentemente serán de mayor orden las correspondientes a términos de interferencia, de modo que

$$C_r \xrightarrow{\lambda \rightarrow 0} (\text{sen } \tilde{\theta})^\lambda = \exp(\lambda \ln \text{sen } \tilde{\theta}) \cdot \exp(-c' \lambda) \quad (5-10)$$

obteniendo un comportamiento tipo área.

Para ir más allá de los casos límites debemos buscar un modo de considerar sistemáticamente los innumerables términos de interferencia que aparecerán tanto en los promedios como al calcular la norma del estado fundamental variacional. Para ello nos valdremos en la sección siguiente de una analogía.

V-2: Analogía con un modelo de Ising clásico

Partiendo del estado no invariante de medida

$$|\theta\rangle = \prod_i \begin{pmatrix} \cos \theta/2 \\ \text{sen } \theta/2 \end{pmatrix}_i \quad (5-11)$$

obtenemos el estado invariante de medida aplicándole un operador de simetrización:

$$|0\rangle_\lambda = S |\theta\rangle_\lambda$$

$$S = \frac{1}{2} \prod_\Delta (1 + G_\Delta) \quad (5-12)$$

por lo que $|0\rangle_\lambda$ contendrá 2^{N_s} términos, todos de norma 1. Puesto que por definición S consiste en aplicar a un estado todas las transformaciones de simetría del modelo, igualmente atribuiremos a $|0\rangle_\lambda$ a partir de cualquier transformado de medida de $|\theta\rangle_\lambda$, y esto significa que al calcular $\langle 0 | 0 \rangle_\lambda$ el conjunto de 2^{2N_s} términos se dividirá en 2^{N_s} subconjuntos idénticos. Podemos definir variables de Ising μ_s en los sitios de la red "escribiendo

$$S = \frac{1}{2} \prod_s \sum_{\mu_s} G_s^{\frac{1}{2}(1-\mu_s)} \quad (5-13)$$

entonces la norma del estado fundamental puede ser escrita

como la función de partición de un modelo de Ising (sólo será revertido el spin de la unión \underline{l} si se ha aplicado G_s a uno solo de sus extremos)

$$\lambda \langle 0|0 \rangle_\lambda = 2^{N_b-1} \sum_{\{\mu_s\}} \prod_l (\text{sen } \theta)^{\frac{1}{2}(1-\mu_1\mu_2)} = 2^{N_b-1} (\text{sen } \theta)^{\frac{N_b}{2}} \sum_{\{\mu_s\}} \prod_l e^{\beta \mu_1 \mu_2} \quad (5-14)$$

con el reemplazo $e^{-2\beta} = \text{sen } \theta$

(los índices 1 y 2 designan a los sitios ligados por la unión l y N_b es el número de uniones en la red.) De este modo tenemos las siguientes correspondencias

$$\begin{aligned} \lambda \rightarrow \infty &\iff \beta \rightarrow \infty \\ \lambda \rightarrow 0 &\iff \beta \rightarrow 0 \end{aligned} \quad (5-15)$$

El valor de expectación de H (5-1) en el estado $|0\rangle_\lambda$ será

$$\begin{aligned} E(\theta) &= \frac{\lambda \langle 0|H|0\rangle_\lambda}{\lambda \langle 0|0\rangle_\lambda} = \\ &= -N_l \frac{\lambda \langle 0|G_l(l)|0\rangle_\lambda}{\lambda \langle 0|0\rangle_\lambda} - \lambda \frac{(d-1)}{2} N_l \frac{\lambda \langle 0|\prod_{l' \in P} G_l(l')|0\rangle_\lambda}{\lambda \langle 0|0\rangle_\lambda} \end{aligned} \quad (5-16)$$

donde l y p son cualesquiera, y el factor $(d-1)/2$ es la relación entre el número de plaquetas y el de uniones en d dimensiones (para comparar con el caso $d=2$)

La idea es buscar el valor de θ que minimiza (5-16) para un dado valor de λ y calcular para este preciso valor de θ el promedio C_T .

El primer término de (5-16) será

$$\frac{\lambda \langle 0|G_l(l)|0\rangle_\lambda}{\lambda \langle 0|0\rangle_\lambda} = \frac{\sum_{\{\mu_s\}} (\text{sen } \theta)^{(\mu_1\mu_2)_l} \prod_{l'} e^{\beta(\mu_1\mu_2)_{l'}}}{\sum_{\{\mu_s\}} \prod_{l'} e^{\beta(\mu_1\mu_2)_{l'}}} = \langle e^{-2\beta(\mu_1\mu_2)_l} \rangle \quad (5-17)$$

puesto que en este caso sólo aparecerá un factor $\text{sen } \theta$ cuando $(\mu_1\mu_2)_l = +1$. Si $(\mu_1\mu_2)_l = -1$ el factor será 1. En cambio para el segundo término tendremos un $\text{cós } \theta$ por cada G_3 si $(\mu_1\mu_2)_l = +1$ y cero en caso contrario, por lo que

$$\frac{\langle \lambda | \prod_{l \in P} G_3(l) | 0 \rangle_\lambda}{\langle \lambda | 0 \rangle_\lambda} = (\cos \theta)^4 \frac{\sum_{\{\mu_i\}} \prod_l e^{\beta \mu_1 \mu_2} \delta_{\mu_1 \mu_2; l \in P}}{\sum_{\{\mu_i\}} \prod_l e^{\beta \mu_1 \mu_2}} = (\cos \theta)^4 \langle \delta_{\mu_1 \mu_2; l \in P} \rangle \quad (5-18)$$

Analogamente

$$C_P = (\cos \theta)^P \langle \delta_{\mu_1 \mu_2; l \in P} \rangle \quad (5-19)$$

siendo P el perímetro del contorno Γ (esta ecuación permite ver claramente el límite (5-9)).

De igual manera podemos a partir de (5-7) construir el estado $| \tilde{0} \rangle_\lambda$ (para $d=3$ que es el caso de interés) y nuevamente podemos definir un modelo de Ising análogo con variables $\tilde{\mu}_i$ que residen en los sitios duales. A partir de (5-8) podemos ver que

$$\tilde{C}_P = (\sin \tilde{\theta})^A \langle \prod_l e^{2\tilde{\beta}(1-\tilde{\mu}_1\tilde{\mu}_2)} \rangle \quad (5-20)$$

donde como antes \tilde{l} es dual a una plaqueta interior a Γ .

Las correspondencias serán ahora

$$\begin{aligned} \lambda \rightarrow 0 & \iff \tilde{\beta} \rightarrow \infty \\ \lambda \rightarrow \infty & \iff \tilde{\beta} \rightarrow 0 \end{aligned} \quad (5-21)$$

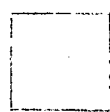
Respecto de la energía, la expresión de $\tilde{E}(\tilde{\theta})$ resulta ser dual de la que surge de (5-16) - (5-18) para $E(\theta)$, con el reemplazo $\lambda \rightarrow 1/\lambda$. Por esta razón para el cálculo de la energía nos restringimos a variables directas.

V- 3: Desarrollos de baja temperatura

Queremos calcular los promedios (5-17)-(5-19). Podemos hacerlo en forma aproximada para $\exp(-2\beta) \ll 1$ y $\tanh \beta \ll 1$. La esperanza es que estos desarrollos de baja y alta temperatura sean aún suficientemente buenos en la zona intermedia. Eventualmente se podrá mejorar la convergencia utilizando aproximantes de Padé.

Tenemos el propósito de comparar los casos bi- y tridimensional para observar la diferencia cualitativa que podría haber en las respectivas transiciones de fase. Las contribuciones al desarrollo de baja temperatura se pueden calcular independientemente del número de dimensiones. Puesto que no nos interesa calcular la función de partición en sí sino como un auxiliar para calcular promedios, no necesitaremos expresar todas las contribuciones en términos del número de sitios N_s .

Las primeras contribuciones serán (el factor 2 cuenta ambos estados degenerados), representando cada spin invertido por una cruz y una unión por una línea de trazos:



$$2 e^{\beta N_s}$$

Tabla 5-1



$$2 N_s e^{\beta(N_s - 4d)}$$



$$2 N_s e^{\beta[N_s - 2(2d-1)]}$$

$$N_s = d N_s$$



$$2 \binom{N_s}{2} e^{\beta(N_s - 8d)}$$

$$\binom{N_s}{2} = N_s \frac{N_s - 1}{2} [N_s - (2 \cdot 1 + 1)]$$



$$2 N_s e^{\beta\{N_s - 2[2(2d-1) + (2d-2)]\}}$$

$$N_s = 4 N_s + d N_s = d(2d-1) N_s$$



$$2 N_s e^{\beta\{N_s - 2[2(2d-1) + 2d]\}}$$

$$N_s = d N_s (N_s - 4d)$$

$$\begin{array}{|c|} \hline \begin{array}{c} x \\ \text{---} \\ x \end{array} \\ \hline \end{array} \quad 2 \binom{1}{3}^{1_s} e^{-N_{2,1}-N_3} e^{\beta(N_{\ell}-12d)}$$

$$\begin{array}{|c|} \hline \begin{array}{c} x-x \\ \text{---} \\ x-x \end{array} \\ \hline \end{array} \quad 2N_{\ell} e^{\beta\{N_{\ell}-2[4 \cdot 2d-8]\}} \quad N_{\ell} = \frac{d(d-1)}{2} 1_s = \binom{d}{2} 1_s$$

$$\begin{array}{|c|} \hline \begin{array}{c} x-x \\ \text{---} \\ x \end{array} \\ \hline \end{array} \quad 2^4_4 e^{\beta\{N_{\ell}-2[4 \cdot 2d-6]\}}$$

entonces, designando $x = e^{-2\beta} = \text{sen } \theta$

$$Z = 2e^{N_{\ell}} (1 + N_s x^{2d} + N_{\ell} x^{2(2d-1)} + \frac{N_s}{2} [N_s - (2d+1)] x^{4d} + \dots) \quad (5-22)$$

Para el cálculo del numerador de (5-17) nos conviene escribir

$$e^{-2\beta(\mu_1 \mu_2)_{\ell}} = \text{sen } \theta e^{2\beta(1-\mu_1 \mu_2)_{\ell}} \quad (5-23)$$

entonces marcando una unión en la red, deberemos distinguir los términos en (5-22) en que uno solo de los sitios unidos por esta tiene un spin revertido, pues estos términos contribuirán con una potencia adicional x^{-2} . Las primeras contribuciones al numerador de (5-17) serán (a menos de un factor $2 e^{\beta 1_{\ell}}$)

Tabla 5-2

$$\begin{array}{|c|} \hline \text{---} \\ \hline \end{array} \quad 1$$

$$\begin{array}{|c|} \hline \text{---} \\ \hline \end{array} \quad 2x^{-2} x^{2d}$$

$$\begin{array}{|c|} \hline \text{---} \\ \text{---} \\ \hline \end{array} \quad \binom{1_s}{2} x^{2d}$$


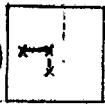


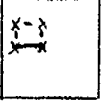

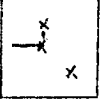

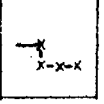
$$\begin{array}{|c|} \hline \text{---} \\ \text{---} \\ \hline \end{array} \quad 2(2d-1)x^{-2} x^{2(2d-1)}$$

$$\begin{array}{|c|} \hline \text{---} \\ \text{---} \\ \hline \end{array} \quad 1 x^{2(2d-1)}$$

$$\begin{array}{|c|} \hline \text{---} \\ \text{---} \\ \hline \end{array} \quad [1_{\ell} - 4d + 1] x^{2(2d-1)}$$

$$\begin{array}{|c|} \hline \text{---} \\ \text{---} \\ \hline \end{array} \quad 2 \left[1_s - (2d+1) \right] x^{-2} x^{4d}$$

$$\begin{array}{|c|} \hline \text{---} \\ \text{---} \\ \hline \end{array} \quad \frac{\binom{1_s}{2} - 4}{2} \left[1_s - (2d+1) \right] x^{4d}$$

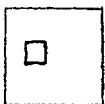
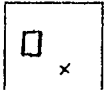
	$2(2d-1)(3d-2)x^{-2}x^{2(3d-2)}$		$2(2d-1)x^{2(3d-2)}$
	$[N_3 - 2(2d-1)(3d-1)]x^{2(3d-2)}$		$4(d-1)^2 x^{-2} x^{8(d-1)}$
	$2(d-1)x^{8(d-1)}$		$[N_p - 2(d-1) - 4(d-1)^2]x^{8(d-1)}$
	$2(2d-1)(N_\delta - 4d)x^{-2}x^{6d-2}$		$2[N_\ell - 4d^2]x^{-2}x^{6d-2}$
	$122x^8$		$(d=2)$

y entonces tenemos, desarrollando hasta cuatro spins revertidos de manera consistente:

$$\langle e^{2\beta(H_1 + H_2)} \rangle \approx \begin{cases} 1 + 2x^4 - 2x^6 + 10x^8 - 24x^{10} + 84x^{12} - 246x^{14} & d=3 \\ & (5-24) \\ 1 + 2x^2 + 4x^4 + 12x^6 + 24x^8 & d=2 \end{cases}$$

Para el numerador del promedio (5-18) simplemente debemos restar de los correspondientes términos del denominador aquellos en los que hay spins invertidos en la plaqueta marcada (a menos que sean simultáneamente los cuatro vértices). Las primeras contribuciones serán:

Tabla 5-3

	1
	$(N_\delta - 4)x^{2d}$



$$[N_p - 4(2d-1)] x^{2(2d-1)}$$



$$\left\{ \frac{(N_p - 8)}{2} [N_p - (2d+1)] + 2 \right\} x^{4d}$$



$$\left\{ N_p - 4 \left[(2d-2)(2d-1) + 2(2d-2) + 1 + \binom{2d-2}{2} \right] \right\} x^{6d-4}$$



$$(N_p - 8) x^8 \quad d=2$$

con lo que, al mismo orden que en los términos anteriores

$$\langle \delta\mu_1 \mu_2; \lambda \epsilon P \rangle \approx \begin{cases} 1 - 4x^6 - 20x^{10} + 30x^{12} - 140x^{14} & d=3 \\ 1 - 4x^4 - 12x^6 - 30x^8 & d=2 \quad (5-25) \end{cases}$$

Recolectando los resultados (5-16) - (5-18) y (5-23) - (5-25) tenemos la expresión de

$$f(x) = -\frac{E(\theta)}{N_p} = x \langle e^{2\beta(\mu_1 \mu_2)_x} \rangle + \lambda \frac{(d-1)}{2} (1-x^2)^2 \langle \delta\mu_1 \mu_2; \lambda \epsilon P \rangle \quad (5-26)$$

que graficaremos como función de $\cos^2 \theta$, juntamente con el desarrollo de alta temperatura $f(y)$ para distintos valores de λ , tratando de encontrar el valor de θ para el cual f es máximo.

Para el lazo de Wilson el cálculo es análogo al de (5-25). Para los dos primeros términos no triviales basta reemplazar en la tabla 5-3, 4 por P (perímetro del lazo) y tenemos

$$C_P \approx \begin{cases} (\cos \theta)^P [1 - P(x^6 + 5x^{10})] & d=3 \\ (\cos \theta)^P [1 - P(x^4 + 3x^6)] & d=2 \end{cases} \quad (5-27)$$

que de acuerdo a la correspondencia (5-15) significa una extensión del resultado (5-9) para volver finitos de $\lambda \gg 1$.
 Vemos también que si λ es suficientemente grande como para que (5-25) pese más en $f(x)$ que (5-24), tendremos un máximo para valores pequeños de x ($\theta \sim 0$).

V- 4: Desarrollos de altas temperaturas

Para el cálculo de la función de partición debemos considerar separadamente los casos bi- y tridimensional. Mientras en el primero el desarrollo surge del resultado (5-22) por autodualidad, el segundo es mucho más rico en diagramas, pudiendo tenerse ya al sexto orden contornos cerrados alabeados. Denotando $y = \lambda \beta$ tenemos entonces para $d=2$, al orden octavo

$$Z = (ch \beta)^{N_s} \cdot 2^{N_s} \cdot (1 + N_s y^4 + N_s y^6 + \frac{N_s(N_s-5)}{2} y^8 + N_s y^8) \quad (5-28)$$

Para $d=3$ desarrollamos sólo al orden sexto (lo justificaremos en la sección siguiente) y llamaremos N_6 al número total de circuitos de seis tramos y $N_p = 3N_s$ al número de circuitos de cuatro (plaquetas).

Escribimos el numerador de (5-17) en la forma

$$\sum_{\{\mu_s\}} e^{-\beta(\mu_1, \mu_2)} \prod_{l \neq 1} e^{\beta(\mu_l, \mu_1)} = (ch \beta)^{N_s} \sum_{\{\mu_s\}} [1 - (\mu_1, \mu_2)_1 y] \prod_{l \neq 1} [1 + (\mu_l, \mu_2)_l y] \quad (5-29)$$

de modo que aquellos circuitos que contengan la unión $\underline{1}$ contribuirán negativamente. Las primeras contribuciones serán entonces, indicando con una línea de trazos a un término $y(\mu_1, \mu_2)_1$,

Tabla 5-4

	1	
□	$2(d-1)y^4$	
□	$[N_p - 2(d-1)]y^4$	
□ ●	$[3d(d-1)^2 + 8\delta_{d,3}]y^6$	
□ ●	$[16 - 3d(d-1)^2 - 8\delta_{d,3}]y^6$	
□ ● ●	$14y^8$	} $d=2$
□ ● ●	$[N_s - 14]y^8$	
□ □	$2(N_s - 5)y^8$	
□ □	$\frac{(N_s - 4)(N_s - 5)}{2}y^8$	

con lo que $\langle e^{-2\beta(\mu_1, \mu_2)_L} \rangle \sim \begin{cases} 1 - 8y^4 - 88y^6 & d=3 \\ 1 - 4y^4 - 12y^6 - 36y^8 & d=2 \end{cases} \quad (5-30)$

La condición $\delta_{\mu_1, \mu_2} \leq p$ en el numerador de (5-18) tiene dos efectos: por una parte se puede extraer un factor

$$2\left(\frac{1+y}{2}\right)^4$$

del desarrollo, y por otra permite considerar circuitos no cerrados siempre que estén adosados a la plaqueta en cuestión.

El factor $(\cos \theta)^4$ puede ser expresado en términos de y mediante la relación

$$\text{sen } \theta = \frac{1 - \text{th } \beta}{1 + \text{th } \beta}$$


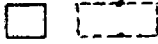


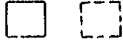
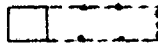


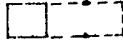
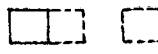
y resulta

$$(\cos \theta)^4 = \frac{16y^2}{(1+y)^4} \quad (5-31)$$

Este factor y^2 nos permite entonces llegar al orden y^9 (y^7) para $d=2$ (3) con sólo calcular hasta el orden y^7 (y^5).

Las primeras contribuciones serán entonces

Tabla 5-5

	1		$(4d-16)y^6$	}
	$2d(d-1)y^3$		$6y^6$	
	$[1 - 2d(d-1) - 1]y^4$		$48y^7$	
	$8y^4$ (d=3)		$4y^6$	
	$12 \left[\frac{d(d-1)}{2} \right]^2 y^5$		$4(11d-8)y^7$	

de modo que

$$\langle \delta_{\mu_1, \mu_2}; l \in p \rangle \propto \begin{cases} \frac{1}{8}(1+y)^4 (1+12y^3 - 5y^4 + 108y^5) & d=3 \\ \frac{1}{8}(1+y)^4 (1+4y^3 - 5y^4 + 12y^5 - 6y^6 + 16y^7) & d=2 \end{cases} \quad (5-32)$$

y por tanto

$$z(y) = -\frac{E(\theta)}{N_f} = \langle e^{-2\beta(\mu_1/\mu_2)} \rangle + \lambda(d-1) \frac{y^2}{(1+y)^4} \langle \delta_{\mu_1, \mu_2}; l \in p \rangle \quad (5-33)$$

Si λ es suficientemente pequeño como para que (5-30) pese más en $z(y)$ que (5-32) tendremos un máximo para valores pequeños de y ($\theta \sim \pi/2$). Para algún valor intermedio de λ el máximo absoluto de z pasará de observarse en el desarrollo de alta temperatura a verse en el de baja, y este fenómeno es lo que interpretamos como transición de fase en este método. Puede ocurrir que esta transición se observe de manera continua o que resulte de una competencia entre dos máximos relativos, lo que interpre-

taremos como una transición de fase de primer orden.

Respecto del lazo de Wilson (5-19) tenemos por una parte

$$(\cos \theta)^P = \left[\frac{4y}{(1+y)^2} \right]^{P/2}$$

(5-34)

y por otra $\langle \delta_{\mu, \mu_2; i, l, e, p} \rangle \sim 2 \left(\frac{1+y}{2} \right)^P [1 + 4y^2 + 2(d-1)Py^3]$

al menos para lazos rectangulares y de perímetro grande como para despreciar los efectos de las esquinas. Vemos que en términos de las variables directas no podemos observar por este método un cambio en el comportamiento del lazo de Wilson, aunque sí veremos la transición a través del mínimo de la energía y de sus derivadas respecto de λ .

En términos de las variables duales (para $d=3$) es fácil obtener para $\tilde{x} \ll 1$, usando en (5-20) los tres primeros diagramas de la tabla 5-2.

$$\tilde{C}_P \underset{\tilde{x} \ll 1}{\simeq} (\text{sen } \tilde{\theta})^A [1 + 2A\tilde{x}^4 - 2A\tilde{x}^6] \quad (5-35)$$

que es simplemente una extensión de (5-10). Lo interesante es que para $\tilde{\beta} \rightarrow 0$, utilizando la generalización obvia de (5-29) y teniendo en cuenta que sólo contribuirán negativamente aquellos circuitos que contengan un número impar de uniones interiores al lazo (es decir una sola), resulta, hasta el orden y^6

$$\tilde{C}_P \underset{\tilde{y} \ll 1}{\simeq} 1 - 2Py^4 (1 + 16y^2) \quad (5-36)$$

que es una ley tipo perímetro, como se puede ver también gráficamente por comparación con (5-27).

Es de hacer notar que tenemos aquí un fenómeno parecido al observado en la sección III-1 para el modelo de Ising: en ese caso el método variacional reproducía bastante bien el comportamiento del parámetro de orden en variables directas, pero no

en variables duales.

Ahora, por ser el parámetro de orden no local, la descripción en términos de variables duales es mejor por contener efectos de correlación entre spins.

V-5: Discusión de los resultados numéricos

En las figuras (5-1) y (5-2) hemos representado simultáneamente $f(x)$ y $f(y)$ como función de $\cos^2 \theta$ para $d=2$, $\lambda=2,2$ y para $d=3$, $\lambda=1$, respectivamente. Las líneas llenas corresponden a las expresiones completas, las de trazos a quitar un término y así sucesivamente. De estos gráficos podemos observar las siguientes características de las series:

Para $d=2$ todas las líneas de $f(x)$ y $f(y)$ parecen encontrarse al rededor de $\cos^2 \theta = 0,8$. Esto era de esperar debido a la equivalencia de nuestro tratamiento variacional con un modelo de Ising clásico: para $d=2$, el resultado (2-48) se traduce en $\cos^2 \theta_c = 0,828$. De igual manera debemos esperar que para $d=3$ los rangos de validez de $f(x)$ y $f(y)$ estén determinados por $\cos^2 \theta_c = 0,578$ resultante del valor estimado $\beta_c = 0,22$ para el modelo de Ising tridimensional.

Ahora bien, mientras para $d=2$ es $x_c = y_c (= \sqrt{2}-1)$, para $d=3$ resulta $x_c > y_c^*$ y esto se traduce en que para θ_c ya $f(x)$ no tenga buena convergencia, como puede verse en la figura (5-2) a través del hecho que para $x > 0,5$ mientras más términos consideramos más rápida es la divergencia. Por otra parte bastarán unos pocos términos para tener una buena aproximación a $f(y)$, lo que justifica que hagamos desarrollado $f(y)$ en $d=3$ a un orden menor en y que para $d=2$.

Por la razón expuesta, tanto para $f(x)$ y $f(y)$ en $d=2$ como para $f(y)$ en $d=3$ podemos tomar como una buena aproximación al resultado exacto el simple promedio aritmético de los valores que corresponden a la línea llena y a la de trazos, mientras que para $f(x)$, $d=3$ deberemos recurrir a aproximantes de Padé. Tratándose de un polinomio de orden x^{14} , consideraremos el aproximante diagonal $[7,7]$ que representamos en la figura (5-2) por una línea de punto y doble trazo. El hecho de que esta expresión encuentra a la de $f(y)$ para un valor de $\cos^2 \theta$ próximo al esperado para el modelo de Ising tridimensional nos da confianza en el criterio adoptado.

Un hecho muy remarcable es que mientras para $d=2$, $f(x)$ es

* $x_c \approx 0,64$, $y_c \approx 0,22$

esencialmente constante en esta zona crítica, para $d=3$ presenta un mínimo muy notorio. Estas características se observan claramente comparando las figuras (5-3) y (5-4) en las que representamos $f(\theta, \lambda)$ para valores de λ alrededor de los respectivos valores críticos en dos y tres dimensiones. En ambas figuras indicamos con un punto la posición del máximo. Vemos que, contrariamente a lo que sucedía en la aplicación del método variacional al modelo de Ising, aquí el máximo de f abandona rápidamente la posición $\cos\theta=0$ al crecer λ desde cero para mantenerse su posición alrededor de θ_c hasta $\lambda=\lambda_c$ en que comienza a avanzar nuevamente hacia $\cos\theta=1$. Es claro que no podemos asegurar con precisión la ubicación y por ende el valor del máximo en la zona intermedia, pero sí es dable ver claramente una diferencia cualitativa en la forma en que este máximo pasa de encontrarse en la zona intermedia a verse en la zona del desarrollo de bajas temperaturas en que podemos asegurar con precisión el valor del máximo: mientras que en el caso bidimensional esta variación de posición es esencialmente continua (dentro de lo que se puede asegurar en la zona $\theta \sim \theta_c$), para $d=3$ hay un notorio salto en la posición del máximo de $f(\theta)$ que resulta claramente de la competencia de dos máximos relativos separados por un mínimo cuya presencia es indiscutible a pesar de estar ubicado más allá de la zona netamente convergente del desarrollo de baja temperatura. Precisamente en $d=3$ tenemos un elemento más de comparación y son los cálculos perturbativos: a orden λ^4 tenemos

$$-\frac{E_0}{N_f} = \begin{cases} 1 + (1/8)\lambda^2 + (3/512)\lambda^4 & \lambda < 1 \\ \lambda [1 + (1/8)\lambda^2 + (3/512)\lambda^4] & \lambda > 1 \end{cases} \quad (5-37)$$

cuyo valor está representado por un delgado trazo horizontal en la figura (5-4). Es de notar que la convergencia de (5-37) es muy buena puesto que aún para $\lambda=1$ la corrección introducida por el tercer término es del orden de 5×10^{-3} . Sólo para valores de λ entre 0,8 y el valor $\lambda_c=0,94$ que obtenemos por nuestro método: para $d=3$, resulta el valor perturbativo de f un poco mayor que el variacional

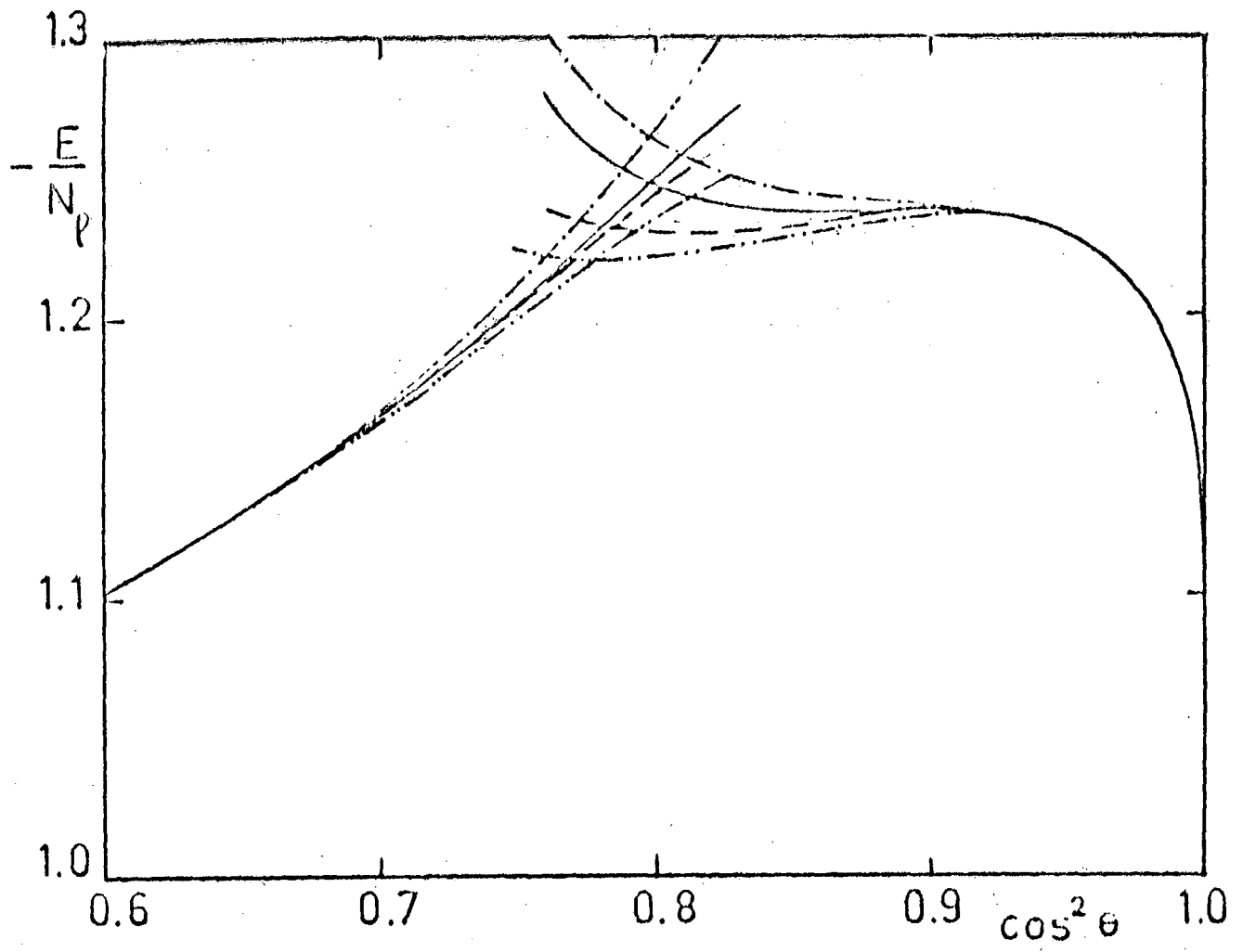


Fig. 5-1

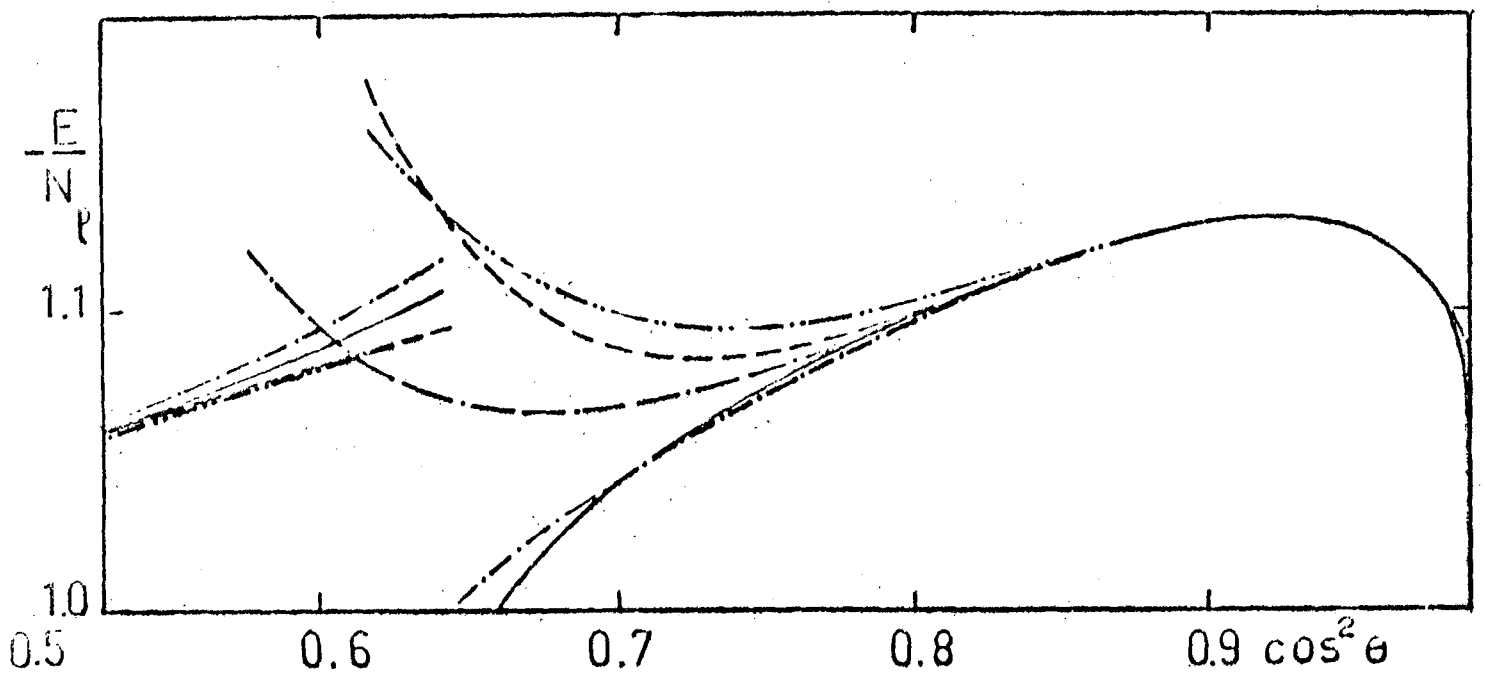


Fig. 5-2

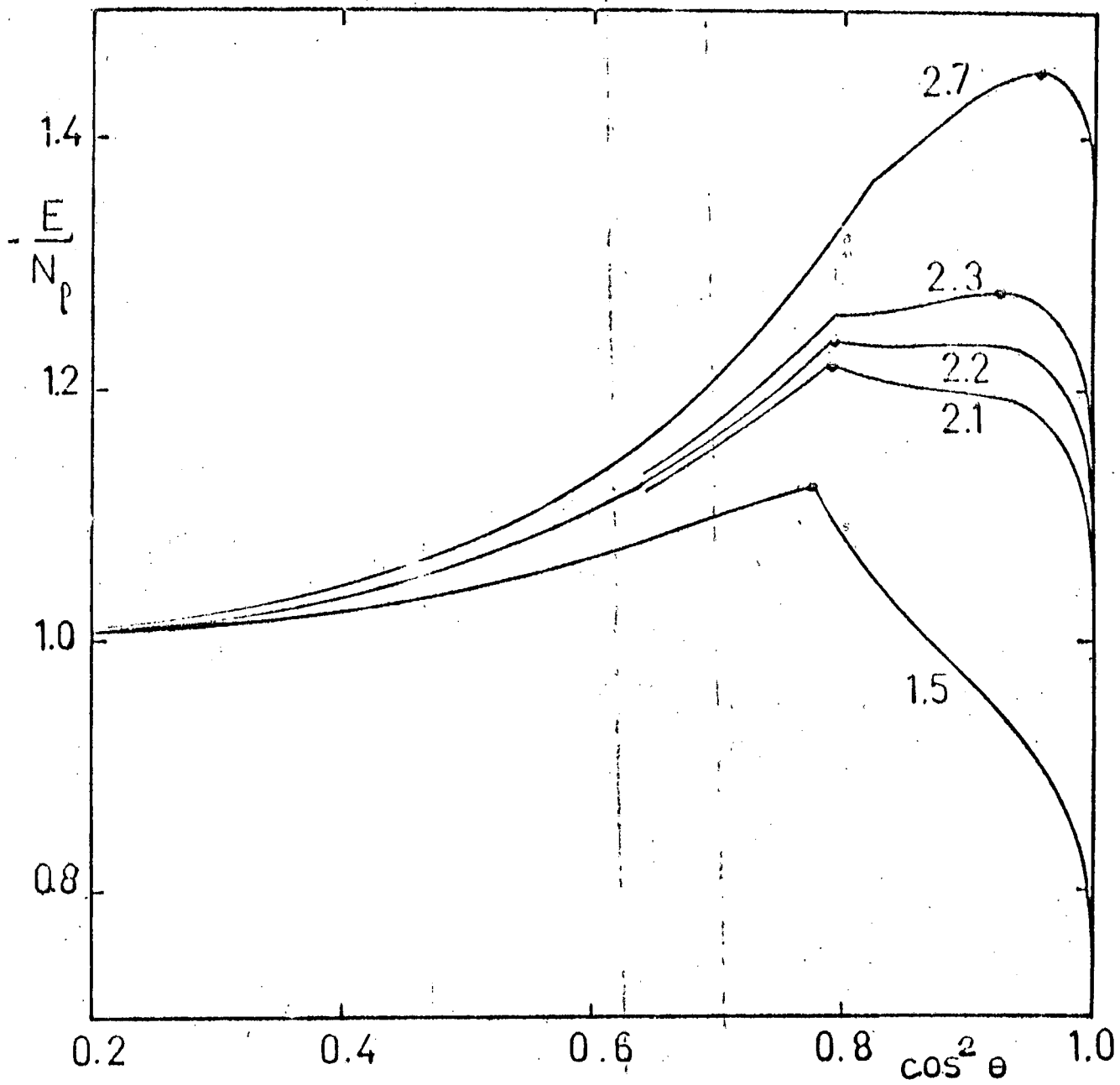


Fig. 5 - 3

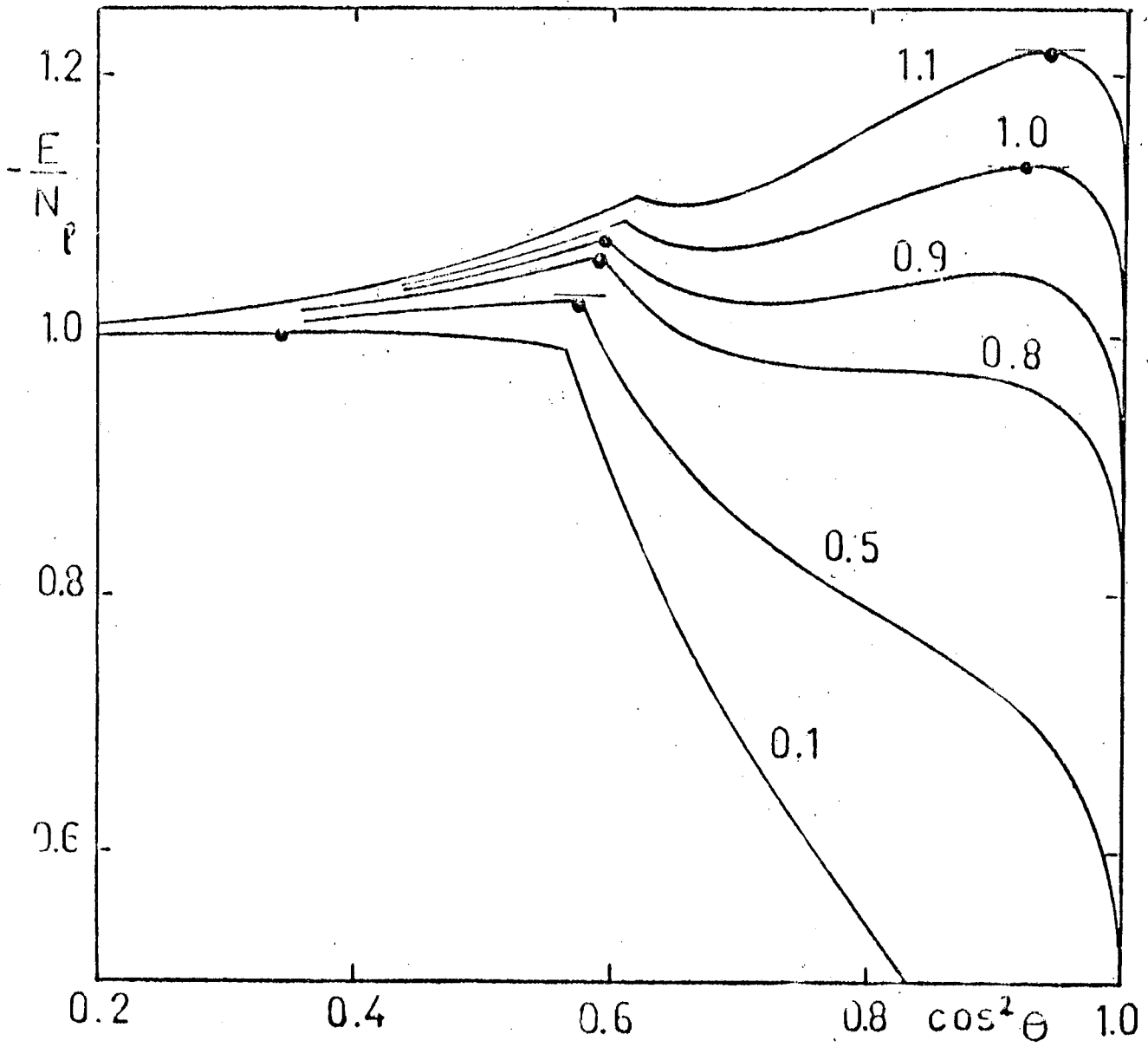


Fig. 5-4

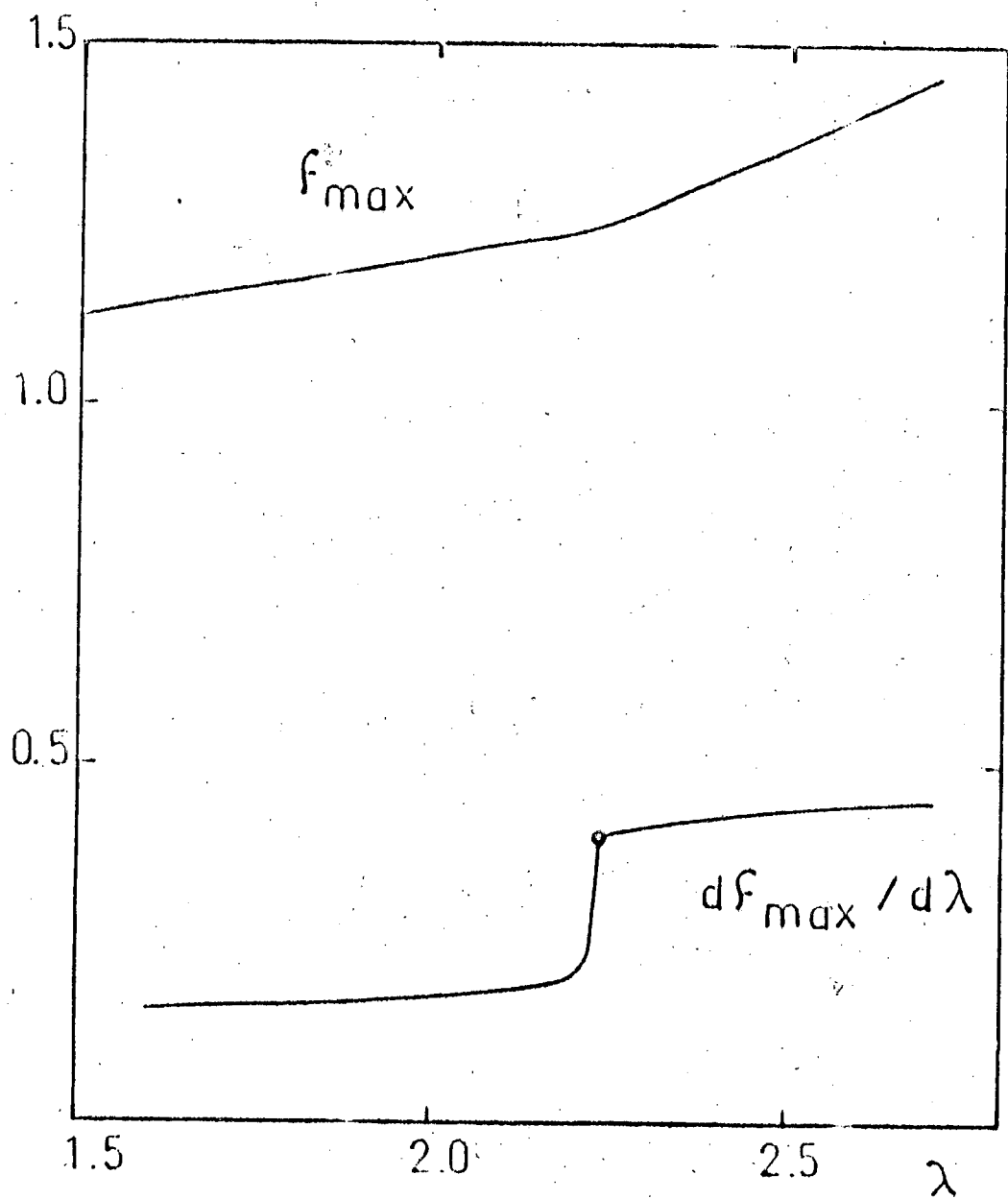


Fig. 5-5

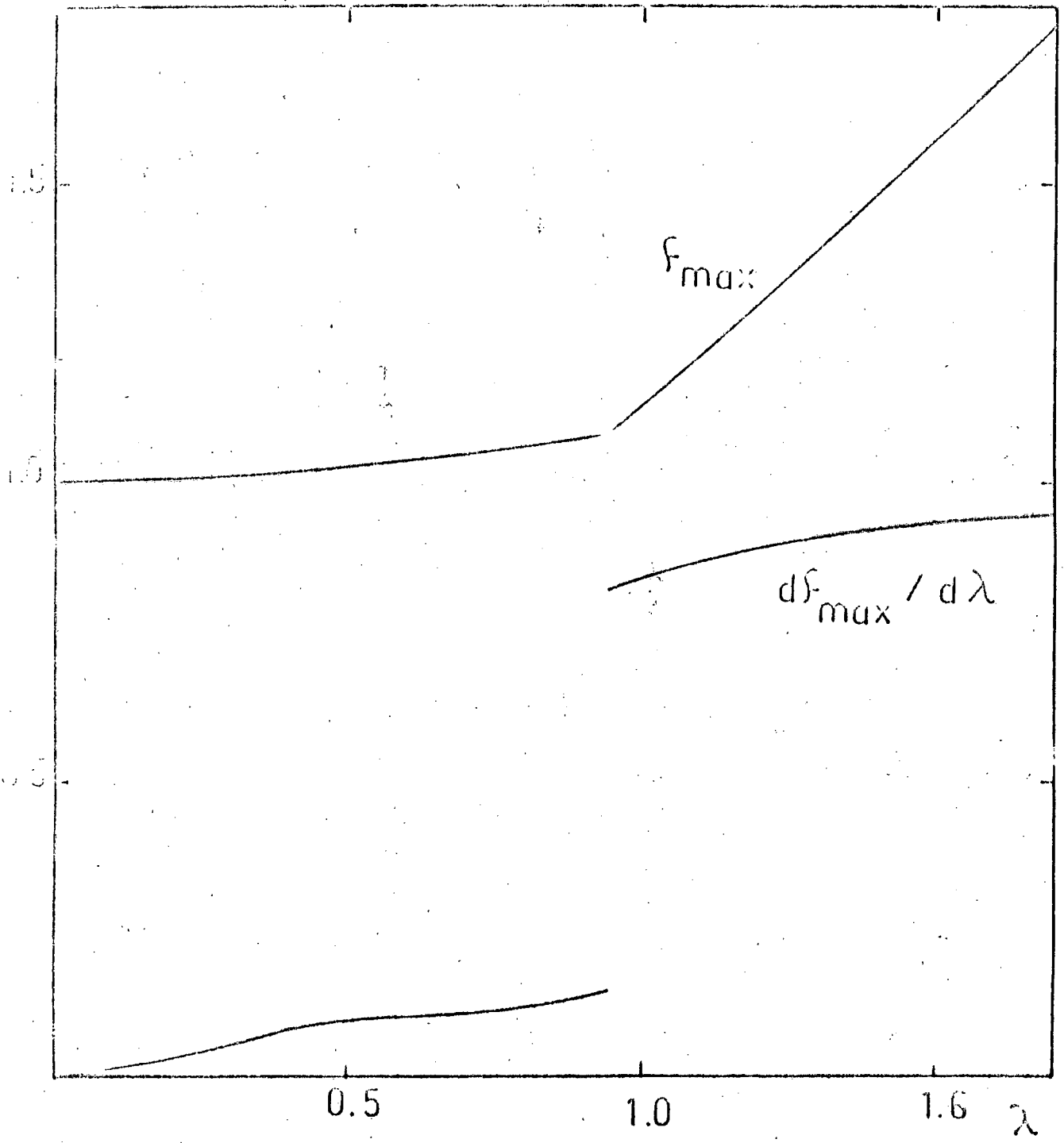


Fig. 5-6

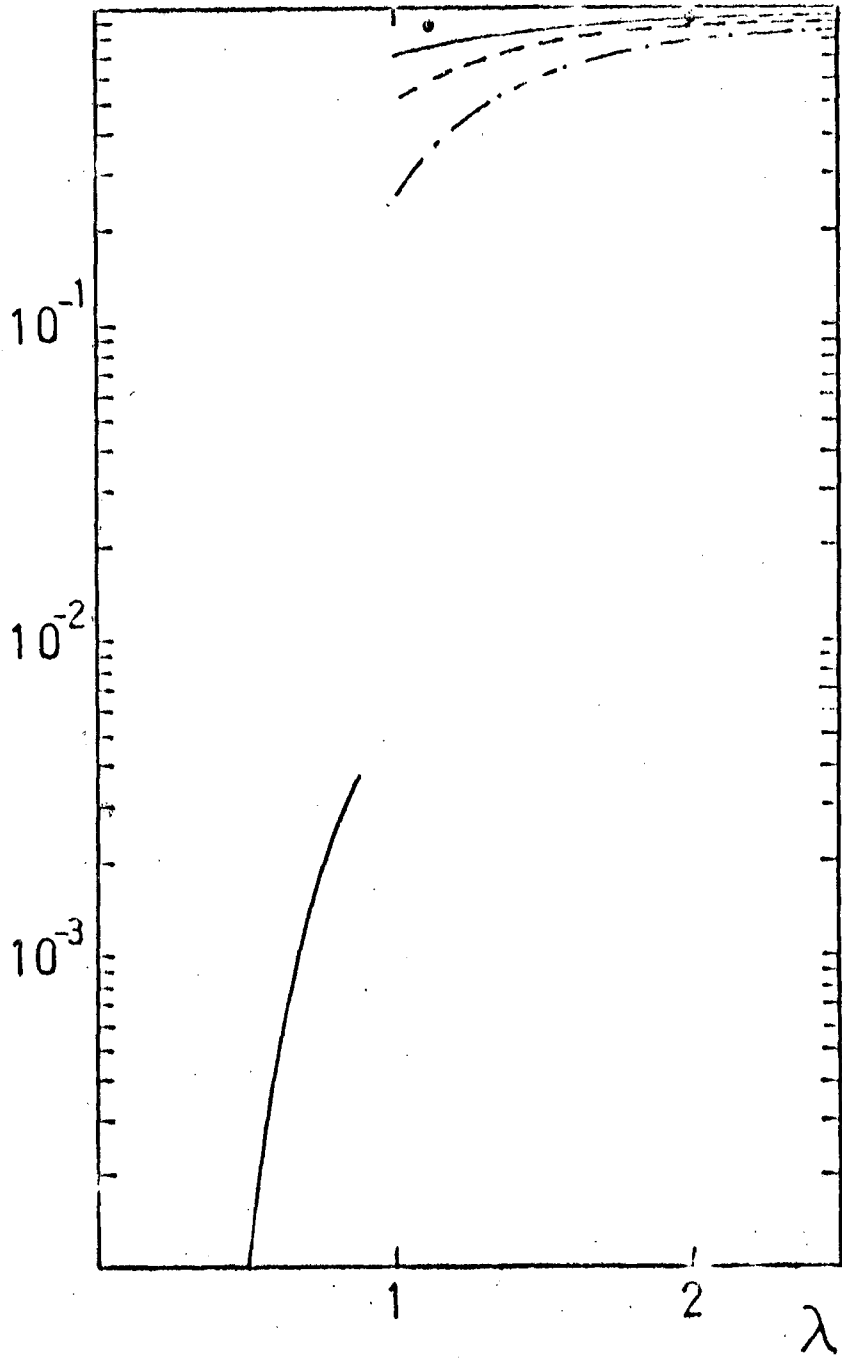
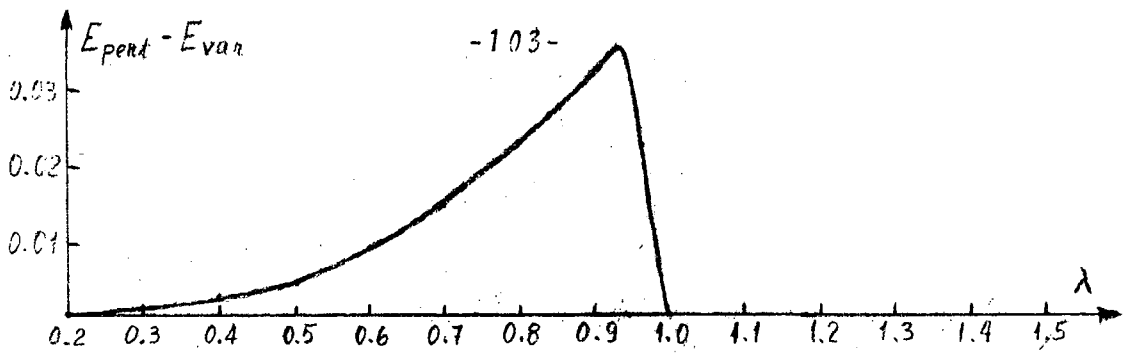


Fig. 5-7



En las figuras (5-5) y (5-6) mostramos el valor del máximo como función de λ , y la derivada de esta función, que en virtud de la analogía (1-50) entre las densidades de energía y de energía libre, resulta ser la magnitud adecuada que nos dirá el orden de la transición. Lamentablemente la precisión de $(\lambda_{\text{máx}})'$ es baja debido a los cálculos numéricos, especialmente en la zona de la transición, pero con todo es clara la diferencia entre los casos bi- y tridimensional, correspondiendo el segundo claramente a una transición de primer orden y el primero más bien a una de segundo, con discontinuidad en la segunda derivada (notar que la curva de $\lambda_{\text{máx}}(\lambda)$ no tiene puntos angulosos para $d=2$).

Estimamos $\lambda_c \simeq 2,2$ en dos dimensiones. Evidentemente este valor es bastante inferior al obtenido en el modelo Z(2) y en el modelo de Ising Hamiltoniano por métodos de grupo de renormalización, que es $\lambda_c \simeq 3,28$. Sin embargo observamos que el valor que obtuvimos en el caso tridimensional es muy próximo al valor autodual.

Finalmente la figura (5-7) nos muestra el comportamiento del lazo de Wilson en gráfico logarítmico. Las tres líneas de la derecha corresponden al desarrollo (5-27) en variables directas, para $P=8, 16, 32$ respectivamente de arriba hacia abajo mientras que la línea llena de la izquierda y los tres puntos de la derecha a los desarrollos (5-35) y (5-36) en variables duales para $\Lambda=4$ ($P=8$), todos calculados para el valor de x ó y que hace máximo a \underline{L} .

Notamos que ya para $\lambda=2$ los desarrollos (5-27) y (5-36) coinciden plenamente, es decir que las variables duales continúan mostrar efectivamente un comportamiento tipo perimétrico para $\lambda > \lambda_c$.

11-6: Conclusiones

Vemos por tanto que el método variacional, propiamente adaptado para tener en cuenta la invariancia de medida del estado fundamental, es capaz de poner en evidencia la naturaleza de la transición de fase, y más aún, ya para $d=3$ el valor crítico resulta muy próximo al esperado por autodualidad. Resumimos brevemente los principales logros de nuestro método en el análisis del modelo $Z(2)$ de medida:

i) Del requerimiento de invariancia de medida del estado fundamental resulta la analogía con un modelo de Ising clásico en el mismo número de dimensiones de las espaciales de nuestro modelo hamiltoniano. Esta analogía nos permite utilizar las técnicas de desarrollo de alta y baja temperatura, que efectuamos en variables directas dada la autodualidad en $d=3$. Sólo en el desarrollo de baja temperatura en tres dimensiones nos vemos obligados a usar aproximantes de Padé.

ii) Para $d=3$ el parámetro variacional muestra un salto brusco para un valor λ_c de la constante de acoplamiento, lo cual es indicativo de una transición de primer orden, de acuerdo con los resultados numéricos de Creutz et al. Para $d=2$ el cambio en el valor del parámetro variacional es continuo, observándose sólo una discontinuidad en la segunda derivada de la energía (variacional) del estado fundamental respecto del acoplamiento, indicando una transición de segundo orden. Esto está de acuerdo con el hecho de que este modelo resulta ser dual al de Ising (hamiltoniano) en dos dimensiones espaciales.

iii) Es posible caracterizar las fases del modelo por el comportamiento de la función de correlación invariante de medida, el llamado *loop* de Wilson. Usando el estado variacional en variables duales, que exhibe una superposición de estados individuales de variables directas, podemos observar la transición de un comportamiento tipo $\exp(-\text{área})$ (fase confinante de cargas eléctricas) a uno de tipo $\exp(-\text{perímetros})$ (cargas eléctricas libres).

iv) Para $d=3$ el tratamiento en variables directas predice un

iv) Para $d=3$ el tratamiento en variables directas predice un valor crítico de la constante de acoplamiento $\lambda_c \approx 0,94$, muy próximo al valor autodual $\lambda=1$. Para $d=2$ el resultado variacional es $\lambda_c \approx 2,22$, mientras que los de grupo de renormalización en el mismo modelo y su dual resultan ser $\sim 3,28$.

v) Para $d=3$ encontramos un acuerdo excelente entre el valor de la energía variacional y el obtenido por cálculos perturbativos.

Capítulo VI - TEORÍA DE CAMPOS DE REGGEONES

En este capítulo revisaremos brevemente la motivación de la Teoría de Campos de Reggeones como herramienta fenomenológica en el estudio de reacciones Hadrónicas a altas energías, su formulación y análisis en el caso crítico y supercrítico, y además discutiremos la relevancia de los parámetros desnudos de la teoría en la descripción de los datos experimentales a las presentes energías.

Comenzamos analizando la importancia de las singularidades de la matriz S en el plano complejo del impulso angular J y del intercambio de números cuánticos en el canal cruzado entre las dos partículas intervinientes en una reacción elástica. Estas singularidades, cuya ubicación depende de la transferencia de impulso, dominan el comportamiento de las secciones eficaces por altas energías a partir de aproximadamente 5 GeV, cuando ya no se observan resonancias, e incluso interpolan a éstas a energías más bajas.

A energías relativamente bajas, alrededor de 10 GeV, el comportamiento de las secciones eficaces totales es descrito razonablemente bien a través del intercambio de polos, cada uno relacionado con un conjunto de resonancias, y uno con los números cuánticos del vacío, denominado Pomeron, domina las secciones eficaces totales, que parecen tender a una constante. A energías más altas éstas comienzan a crecer y es necesario tener en cuenta los cortes en el plano J debidos al intercambio de várices Pomerones, así como una "interacción" entre Pomerones, que resulta del análisis fenomenológico. Desde el punto de vista teórico, el requerimiento de unitariedad de la matriz S en el canal cruzado lleva naturalmente a enmarcar estos hechos en una teoría de campos. Postulando que el Pomeron "desnudo" es un polo simple con trayectoria lineal en t y requiriendo que el Pomeron "vestido" corresponda a $J=1$ para $t=0$, encontramos un fenómeno crítico del tipo del que se observa, por ejemplo, en el modelo de Ising. Analizamos finalmente cómo se manifiestan las distintas fases en el comportamiento asintótico de las secciones eficaces.

VI - 1: Polos de Regge

Hemos dicho ya que nuestro principal objetivo en el estudio de las teorías de campos sobre la red es poder extraer información no perturbativa de la Cromodinámica Cuántica, especialmente en el sentido de demostrar el confinamiento de los quarks y calcular el espectro y las principales características de la interacción hadrónica, de la misma manera que se calcula para los átomos en la Electrodinámica. Si bien en la actualidad estos cálculos se vislumbran como posibles a corto o medio plazo, no debemos perder de vista otro enfoque de las interacciones fuertes que en la década del sesenta, cuando los quarks eran a la clasificación SU(3) lo que el éter a la Electrodinámica clásica, fue favorito: nos referimos a la teoría de matriz S, la que aún hoy algunos creen capaz de predecir el espectro y características de la interacción hadrónicas.

La teoría de matriz S surgió como alternativa a la teoría de campos, la que en ausencia de métodos no perturbativos y considerando a los hadrones como partículas elementales, era incapaz de describir los procesos de interacción fuerte. De especial interés resultó el estudio de las propiedades de analiticidad de la matriz S en el plano complejo de la energía que llevaron al planteo de relaciones de dispersión que resultaron de suma utilidad.

Un problema del que adolecían estas relaciones de dispersión era el desconocimiento del comportamiento asintótico con la energía de la amplitud de dispersión: no existía un mecanismo que explicara la variación suave con la energía de las secciones eficaces una vez abiertos los canales inelásticos. Fue entonces cuando merced a los trabajos de Regge en la teoría potencial se vio la importancia del estudio de la analiticidad también en el plano complejo del impulso angular.

En el dominio relativista, describiendo la cinemática por las variables de Mandelstam s, t y suponiendo que las únicas singularidades en el plano del impulso angular son polos $\alpha_n(t)$, tenemos el siguiente resultado

$$T(s, t) = \sum_{n=0}^{\infty} \gamma'_n(t) \frac{1 + \epsilon_n \exp[i\pi\alpha_n(t)]}{\text{sen } \pi\alpha_n(t)} \left(\frac{s}{s_0}\right)^{\alpha_n(t)} \quad (6-1)$$

donde $T(s, t)$ es la amplitud de dispersión ξ_n es el llamado factor de signatura relacionado con efectos de intercambio, $\gamma'_n(t)$ contiene entre otros factores el residuo en el polo $\alpha_n(t)$ que tiene la importante propiedad de factorizabilidad y s_0 es un factor de escala arbitrario.

En virtud del teorema óptico

$$\sigma_T = \frac{cte}{p\sqrt{s}} \operatorname{Im} T(s, 0) \underset{s \rightarrow \infty}{=} \frac{cte}{s} \operatorname{Im} T(s, 0) \quad (6-2)$$

tenemos el siguiente resultado fundamental

$$\sigma_T \underset{s \rightarrow \infty}{=} \frac{cte}{s} \sum_n \xi_n \gamma'_n(0) (s/s_0)^{\alpha_n(0)-1} \quad (6-3)$$

Los trabajos de Regge sugirieron la posibilidad de que estas trayectorias interpolaran para $t \geq 0$ a los hadrones observados y en efecto se encontraron trayectorias aproximadamente rectas de pendiente $\sim 1 \text{ GeV}^{-2}$ con números cuánticos definidos, todas ellas con $\alpha(0) < 1$. El hecho de tener números cuánticos definidos, a más de la factorizabilidad del residuo que permite pensarlo como constante de acoplamiento con las partículas externas, hizo que estas singularidades intercambiadas en el canal cruzado se pensaran como partículas (los Reggeones) mucho antes de verse la necesidad de una TCR (recordemos que una partícula puede verse como un polo en el plano s).

Notemos que si (6-3) es válida, para s suficientemente grande σ estará dominada por aquella trayectoria con el mayor valor de $\alpha(0)$. Se encontró que a energías de laboratorio entre 10 y 100 GeV resultaba σ prácticamente constante y pensando que se había arribado al régimen asintótico esto apuntaba a la existencia de una trayectoria, con $\alpha(0) = 1$ y signatura positiva. Esta trayectoria, en el esquema de polos únicamente, era lo máximo permitido por la cota de Troissart

$$\sigma_T \leq (\ln s)^2 \quad (6-4)$$

En los gráficos masa-spin no cabía una trayectoria tal, a menos que tuviera los números cuánticos del vacío, lo cual era por supuesto posible, cumpliéndose así automáticamente el teorema de Pomeranchuk

$$\sigma_T(AB) - \sigma_T(\bar{A}\bar{B}) \underset{s \rightarrow \infty}{\rightarrow} 0 \quad (6-5)$$

siendo \bar{A} la antipartícula de A , por lo que se denominó a esta trayectoria Pomerón.

VI- 2: Motivación y formulación de la TCR.

Hemos visto en la sección anterior cómo los complicados procesos hadrónicos a altas energías, imposibles de tratar mediante el cálculo de perturbaciones, pueden ser descriptos fenomenológicamente en forma sencilla mediante el intercambio de Reggeones en el canal cruzado. Lamentablemente en la actualidad hay mucha evidencia de que un esquema tan simple como el planteado en la sección anterior es por lo menos incompleto. Desde el punto de vista experimental existe una serie de fenómenos que no pueden ser descriptos mediante el intercambio de polos solamente (en el plano J), de los cuales el crecimiento de las secciones eficaces totales es el más notable. Pero aún antes de observarse estos fenómenos ya se había notado la inconsistencia de una matriz S meromorfa en el plano J desde el punto de vista de la unitariedad en el canal s .

Si pretendemos entender los procesos hadrónicos mediante el análisis de las singularidades en el plano J debemos tener en cuenta por lo menos los cortes que surgen del intercambio de dos o más Reggeones. Más aún, el análisis fenomenológico requiere que estos Reggeones interactúen (por ejemplo, una descripción del proceso de disociación difractiva lleva naturalmente a una interacción de tres Pomerones). De todo esto surge que en el plano J aparecen en realidad singularidades bastante complicadas.

En 1968 Gribov mostró, estudiando clases de diagramas híbridos de Feynman (es decir diagramas en los que se consideran partículas externas y Reggeones sin hacer referencia a ningún modelo específico del cual puedan surgir estos Reggeones) cómo se podía esperar que una teoría de las interacciones fuertes satisficiera unitariedad en términos de Reggeones. Encontró un cálculo perturbativo en el plano J que es análogo a la solución per-

relativa de Feynman-Dyson para la unitariedad convencional, y en particular derivó las reglas de Feynman para el cálculo de las amplitudes parciales debidas al intercambio de n Reggeones. Esto lleva naturalmente a tratar a los Reggeones como cuasipartículas o las que se puede describir formalmente en el marco de una teoría de campos. Un enfoque más moderno de esta motivación proviene de la observación de que una teoría que satisfaga unitariedad en términos de Reggeones, también satisfará la unitariedad en el canal t . Desde este punto de vista, la Teoría de Campos de Reggeones es una construcción explícita para satisfacer la unitariedad de la matriz S en el canal cruzado.

La idea es entonces tratar al Reggeón, que en realidad es un objeto compuesto de partículas, las que a su vez son estados ligados de quarks, como una cuasipartícula, en la misma forma que se trata las excitaciones colectivas en la física del sólido. Del análisis de Gribov surge que los Reggeones deben tener un impulso bidimensional \vec{k} tal que

$$|\vec{k}|^2 = -t$$

y una energía $E(k) = 1 - \alpha(t)$ (6-6)

Las magnitudes conjugadas a estas variables (a través de la transformación de Mellin que expresa el desarrollo en ondas parciales de la amplitud de dispersión) serán el parámetro de impacto

$$\vec{x} \equiv \vec{b}$$

y la rapidez: $\tau = -iy = -i \ln s$ (6-7)

El límite en $s \rightarrow \infty$ corresponde a $E \rightarrow 0$ y $t = -|\vec{k}|^2 \rightarrow 0$ corresponde a $x \rightarrow \infty$

Postulamos que la trayectoria "desnuda" del Reggeón es la correspondiente a un polo simple con dependencia lineal en t

$$\alpha(t) = \alpha_0 + \alpha' t$$
 (6-8)

y esto nos lleva a una relación energía-impulso no relativista

$$E(k) = \alpha_0' k + \Delta_0$$
 (6-9)

con $\Delta_0 = 1 - \alpha(0)$. La ecuación de movimiento compatible con esta relación energía-impulso es

$$i \frac{\partial}{\partial \tau} \Psi(\vec{x}, \tau) = -\alpha_0' \nabla^2 \Psi(\vec{x}, \tau) + \Delta_0 \Psi(\vec{x}, \tau)$$
 (6-10)

que puede ser derivada de una densidad Lagrangiana

$$\mathcal{L}_0(\vec{x}, z) = \frac{i}{2} \bar{\Psi}(\vec{x}, z) \frac{\partial}{\partial z} \Psi(\vec{x}, z) - \alpha_0' \vec{\nabla} \bar{\Psi} \cdot \vec{\nabla} \Psi - \Delta_0 \bar{\Psi} \Psi \quad (6-11)$$

donde $\bar{\Psi} \vec{\nabla} \Psi \equiv \bar{\Psi}(\vec{\nabla} \Psi) - (\vec{\nabla} \bar{\Psi}) \Psi$ y donde $\bar{\Psi}(\vec{x}, z)$ y $\Psi(\vec{x}, z)$ son los campos asociados al reggeón. Por tratarse de una teoría no relativista, $\bar{\Psi}$ contendrá sólo operadores de creación y Ψ sólo operadores de aniquilación.

Respecto de la interacción, la más importante que surge del análisis fenomenológico es la de tres Pomerones

$$\mathcal{L}_{int} = -i \frac{1}{2} r_0 \bar{\Psi}(\bar{\Psi} + \Psi) \Psi \quad (6-12)$$

En efecto, se puede ver que es una de las dos únicas renormalizables y es la que domina asintóticamente, y por ende es la que determina el comportamiento crítico de la TCP. Notemos el factor i , que hará al Hamiltoniano de la TCP no hermitico. Este factor asegura un signo menos relativo entre la contribución del intercambio de un Pomeron y la del corte debido a dos Pomerones, y está de acuerdo con las reglas de corte de AGK, que permiten contabilizar los pesos relativos de las contribuciones difractivas, absorptivas y poliperiféricas a la amplitud.

Otra consecuencia del carácter imaginario del acoplamiento es que $\bar{\Psi}(\vec{x}, z)$ no es el conjugado hermitico de $\Psi(\vec{x}, z)$ para todo z , aunque sí podemos imponer esa condición para un dado valor de la rapidez y . Sin embargo $\bar{\Psi}$ y Ψ^\dagger (y por ende $\|$ y $\|^\dagger$) están relacionados para cualquier valor de z por un operador unitario: Esta propiedad es llamada "pseudohermiticidad".

VI -3: Análisis de la TCR

Una vez formulada la Teoría de Campos de Peggones, queremos calcular las funciones de Green para n Pomerones entrantes y m salientes:

$$G^{n,m} [(\vec{x}_1, z_1), \dots, (\vec{x}_{n+m}, z_{n+m})] = \langle 0 | T [\bar{\Psi}_1 \dots \bar{\Psi}_n \Psi_{n+1} \dots \Psi_{n+m}] | 0 \rangle \quad (6-13)$$

y en particular queremos conocer el propagador "vestido" del Pomerón, que nos dirá cuál es la singularidad que tiene relevancia asintóticamente. En principio, esta deberá tener $\alpha(0)=1$, dado que por una parte debe respetar el límite de Froissart, y por otra, si $\alpha(0) < 1$ se tendrían secciones eficaces totales decrecientes con la energía, lo cuál parece inconsistente con la experiencia. Lo que se espera es que las secciones eficaces crezcan como una potencia de la rapidez $y = \ln s$, cuyo exponente puede valer a lo sumo 2.

Si $\Delta_0 > 0$ ($\alpha_0 < 1$) el problema puede ser tratado perturbativamente mediante técnicas de matriz S, sin recurrir a la TCR, pero de este modo se obtiene siempre $\alpha(0) < 1$ aunque se tenga en cuenta la contribución de algunos cortes. Para obtener $\alpha(0)=1$ debemos partir por lo menos de $\alpha_0 \geq 1$. En este caso es imprescindible el uso de la TCR, pero está claro que ésta debe ser resuelta de manera no perturbativa, debido a que todos los cortes se acumulan en $E=0$, y se tiene un problema infrarrojo similar al de la Electrodinámica. El menor valor de α_0 para el cual la intersección renormalizada del Pomerón es $\alpha(0)=1$ es lo que llamaremos "intersección crítica" α_{0c} . Se ha visto que los valores calculados de α_{0c} se encuentran en el rango 1.01-1.1 (precisamente el objeto de nuestro trabajo será una mejor acotación de este valor).

Por supuesto que el problema infrarrojo mencionado se tiene sólo para $y \rightarrow \infty, t \rightarrow 0$: para energías no demasiado altas, la contribución de los cortes puede ser evaluada perturbativamente dado que experimentalmente se observa un umbral en energía para los efectos asociados con el Pomerón. Por otra parte, se observa un debilitamiento exponencial del triple acoplamiento del Pomerón con la transferencia de impulso. El primero de los hechos

mencionados otorga relevancia fenomenológica al cálculo de la intersección crítica, puesto que a las presentes energías se es está observando ni más ni menos que el Pomeron desnudo, mientras que el debilitamiento exponencial, siendo aproximable por un cutoff en el impulso de los Reggeones, brinda legitimidad a la formulación de la TCR sobre una red en parámetro de impacto, que se manifiesta como un método poderoso especialmente en el análisis de la fase supercrítica $\alpha_0 > \alpha_{0c}$.

El análisis de la TCR en el punto crítico fue efectuado di rectamente en el continuo mediante desarrollo en el número de dimensiones alrededor de $d=4$ (análogamente a lo que se hace en la teoría ϕ^4 pensada como proveniente del modelo de Ising a tra ves de la aproximación gaussiana). Se encontró una ley de escala para el comportamiento de la amplitud elástica, siendo el compor tamiento dominante del tipo

$$T(s, t) \approx i N_A(t) N_B(t) (\ln s)^{-\delta} \cdot b [t (\ln s)^z] \quad (6-14)$$

con $-\delta \approx 1/6$ y $z \approx 13/12$.

Estos exponentes críticos δ y z juegan en la TCR un rol análogo al η en el modelo de Ising. También η puede pensarse como una susceptibilidad.

El estudio de la fase supercrítica es más conveniente efec tuarlo directamente sobre la red en parámetro de impacto, lo cual representa la versión hamiltoniana de la teoría. Se hicieron también intentos de estudiar la teoría en versión lagra ngia na, pero se pierde claridad.

El Hamiltoniano de la TCR sobre la red es

$$H = \sum_i \left[\Delta_0 \bar{\psi}_i \psi_i + \frac{i}{2} v_0 b^{-D/2} \bar{\psi}_i (\bar{\psi}_i + \psi_i) \psi_i + b^2 \alpha_0' (\bar{\psi}_{i+k} - \bar{\psi}_i) (\psi_{i+k} - \psi_i) \right] \quad (6-15)$$

con $\psi_i = b^{D/2} \psi(x_i)$ tales que $[\psi_i, \bar{\psi}_j] = \delta_{ij}$ si $[\psi(x), \bar{\psi}(x')] = \delta(x-x')$

y donde b es obviamente el parámetro de red, relacionado con el cutoff en transferencia de impulso por $t = \pi^2/b^2$. Este Hamiltoniano puede ser obtenido siguiendo las reglas indicadas en la sección I-4. El valor físico de D es 2.

La idea es ahora construir un modelo cuántico de spin que se encuentre en la misma clase de universalidad que la TCR. Es to es precisamente lo que haremos en las primeras secciones del capítulo siguiente, partiendo de valores realistas de los parámetros α'_0 , r_0 , b , para determinar α_{0c} . Pero como por el momento sólo nos interesa analizar las consecuencias de un Pomeron supercrítico, y como veremos, esta fase está dominada por un punto fijo que corresponde a $\Delta_0/r_0 \rightarrow -\infty, \alpha'_0 \rightarrow 0$, nos restringiremos a este rango de los parámetros. En este régimen se encuentra que la brecha de energía entre el estado fundamental $\Psi_i |0\rangle_i = 0$ y el primer excitado $|1\rangle_i$ para el problema de un sitio es

$$E \propto \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{\Delta_0^2 b^{3/2}}{|r_0|} \exp\left(-\frac{2\Delta_0^2 b^D}{r_0^2}\right) \quad (6-16 a)$$

siendo la energía de los demás estados excitados $\mathcal{O}(|\Delta_0|)$, y los elementos de matriz del campo

$$\begin{aligned} {}_i\langle 0 | \Psi_i | 1 \rangle_i &= {}_i\langle 1 | \bar{\Psi}_i | 0 \rangle_i = \frac{2|\Delta_0| b^{3/2}}{r_0} \\ {}_i\langle 1 | \Psi_i | 1 \rangle_i &= {}_i\langle 1 | \bar{\Psi}_i | 1 \rangle_i = 2i' \frac{|\Delta_0| b^{3/2}}{r_0} \\ {}_i\langle 1 | \Psi_i | 0 \rangle_i &= {}_i\langle 0 | \bar{\Psi}_i | 1 \rangle_i = 0 \end{aligned} \quad (6-16 b)$$

con lo que identificando $|0\rangle \equiv \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $|1\rangle \equiv \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ podemos formular un modelo de spin definido por el Hamiltoniano no hermitico:

$$H = E \sum_i c_i - K \sum_{\langle ij \rangle} (\bar{a}_i a_j + \bar{a}_j a_i) \quad (6-17)$$

con $c = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$; $a = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ c & i \end{pmatrix}$; $\bar{a} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & i \end{pmatrix}$

$$K = 4\alpha'_0 b^{D-2} \left(\frac{\Delta_0}{r_0}\right)^2 ; \quad \left. \begin{matrix} \Psi \\ \bar{\Psi} \end{matrix} \right\} = \frac{2|\Delta_0| b^{3/2}}{r_0} \begin{Bmatrix} a \\ \bar{a} \end{Bmatrix}$$

(observemos que $\bar{a}_i \cdot a_i = 0$) cuya fase supercrítica $\epsilon \ll 1, K \gg 1$ describe la fase supercrítica de la TCR y está dominada por el punto fijo $E/K=0$. Cualquiera que sean los valores iniciales de E y K (siempre en esta región), mediante transformaciones de grupo de renormalización se terminará siempre en este punto fijo, y esto significa que la brecha de masa en esta fase es cero. Es claro

Capítulo VII - Cálculo de la intersección crítica del Pomeron

Habiendo analizado en el capítulo anterior las consecuencias de las diversas fases en la Teoría de Campos de Reggeones nos proponemos en este capítulo determinar la intersección crítica del Pomeron por el método de grupo de renormalización en la versión hamiltoniana de la teoría, partiendo de valores realistas para los parámetros r_0, α' y el parámetro de red b , relacionado con el debilitamiento exponencial observado en r_0 al crecer $|t|$. Esto es de suma importancia, dado que un cálculo preciso de α_c permitiría conocer, por comparación con el valor de α_0 que ajusta los datos experimentales a las presentes energías, cuál es la fase que elige la teoría, y por ende predecir el comportamiento asintótico de las secciones eficaces con la energía.

La transición de fase ha sido estudiada partiendo desde la zona muy supercrítica (Cardy) (Amati et al), y también se intentó partir de valores más realistas usando autovectores de un sitio obtenidos de los correspondientes a $\alpha_0 < 1$ a través de un procedimiento variacional, aunque en este caso no se pudo arribar a la transición para los valores más realistas de b , debido a que la aproximación para los estados de un sitio dejaba de ser válida.

Nuestro cálculo se realiza en dos etapas:

Primera se estudian los autovalores y elementos de matriz del campo en el problema de un sitio en forma numérica, desarrollando las autofunciones en series de potencias y exigiendo el comportamiento asintótico compatible con su normalización. De esta manera podemos determinar para qué rango de parámetros es buena la aproximación de representar el Hamiltoniano en el espacio de los dos primeros estados de cada sitio.

Luego analizaremos diversas realizaciones de bloques de spin en una y dos dimensiones en el espacio de parámetro de impacto, y consideramos dos definiciones alternativas para los términos de interacción entre sitios. Las temperaturas críticas obtenidas por los diversos métodos varían en un rango bastante amplio para $D = 2$, pero se observa que aquellos métodos que arrojan un va-

lor de T_c próximo al obtenido por desarrollos de alta temperatura predicen una intersección crítica consistente con la observada en el actual rango de energías.

VII - 1: Cálculo de autovalores y elementos de matriz del campo en el problema de un sitio

a) Definición del problema de autovalores

El Hamiltoniano de un sitio puede ser escrito en términos de operadores de creación y aniquilación ($\bar{\psi} \equiv a^\dagger$, $\psi \equiv a$) en la forma

$$H_s = \tilde{\Delta} a^\dagger a + \frac{i}{2} \tilde{\eta} a^\dagger (a^\dagger + a) a \quad (7-1)$$

siendo $\tilde{\Delta} = \Delta_0 + \frac{2D\alpha_0}{b^2}$ y $\tilde{\eta} = \eta_0/b^{3/2}$

notemos que en la definición de $\tilde{\Delta}$ estamos incluyendo los términos diagonales que surgen de la aproximación de $\nabla \bar{\psi} \cdot \nabla \psi$.

Podemos representar este Hamiltoniano en el espacio de Bargmann (funciones holomorfas de una variable compleja z) proyectando los estados $|\psi\rangle$ sobre una base de estados coherentes. De esta manera tenemos el problema de autovalores definido sobre un auténtico espacio de Hilbert. Para los autoestados $|n\rangle$ de H_s tendremos entonces

$$\langle z^* | n \rangle = \phi_n(z) = \langle 0 | e^{az} | n \rangle \quad (7-2)$$

La relación de completitud de los estados coherentes

$$\int \frac{dz dz^*}{2\pi i} e^{-zz^*} |z^*\rangle \langle z^*| \quad (7-3)$$

induce un producto escalar

$$\langle \phi | \psi \rangle = \int \frac{dz dz^*}{2\pi i} e^{-zz^*} \phi^*(z) \psi(z) \quad (7-4)$$

En esta representación tenemos

$$a \rightarrow \frac{d}{dz} \quad a^\dagger \rightarrow z \quad (7-5)$$

y la ecuación de autovalores $a|n\rangle = En|n\rangle$ puede ser escrita como una ecuación diferencial de segundo orden

$$z \left[P + i \left(z + \frac{d}{dz} \right) \right] \frac{d}{dz} \phi_n(z) = \lambda_n \phi_n(z) \quad (7-6)$$

con $P = 2\tilde{\Delta}/\tilde{\hbar}$ y $\lambda = 2E_n/\tilde{\hbar}$

que tiene dos puntos singulares: uno regular $z=0$ y otro irregular $z=\infty$.

Para $z \rightarrow 0$ las soluciones linealmente independientes son

$$\begin{aligned} \phi^1(z) &\sim c_1 + c_2 \ln z \\ \phi^2(z) &\sim z \end{aligned} \quad (7-7)$$

sólo si $\lambda=0$ será aceptable $\phi^1(z)$ porque la singularidad logarítmica estará ausente; esto significa que el vacío (normalizado) para el problema de un sitio será

$$\langle z^*|0\rangle = \phi_0(z) = 1 \quad (7-8)$$

en cambio para $\lambda \neq 0$ escribiremos la solución en la forma

$$\phi(z) = z \sum_{m=0}^{\infty} c_m z^m \quad (7-9)$$

con la relación de recurrencia

$$c_{m+1} = \frac{-m c_{m-1} + i[(m+1)P - \lambda] c_m}{(m+2)(m+1)} \quad (7-10)$$

Dado que $\phi(z)$ pertenece al espacio de Bargmann, debe satisfacer las siguientes condiciones:

- i) $\phi(z)$ debe ser una función entera de z (sin singularidades a distancia finita)
- ii) $\phi(z)$ debe ser normalizable según (7-4)

$$\langle \phi | \phi \rangle = N(\text{finito}) \quad (7-11)$$

Para $|z| \rightarrow \infty$, los dos posibles comportamientos asintóticos son

$$\begin{aligned} \phi^a(z) &\sim \text{constante} \\ \phi^b(z) &\sim \frac{1}{z} \exp\left[-\frac{1}{2}z^2 + iPz\right] \end{aligned} \quad (7-12)$$

y la solución será en general una combinación lineal de ϕ^a y ϕ^b . Observemos sin embargo que debido a que

$$e^{-|z|^2} \left| \frac{1}{z} \exp\left[-\frac{1}{2}z^2 + iPz\right] \right|^2 = \frac{1}{|z|^2} \exp[-2(\text{Re}z)^2] \exp(-2P\text{Im}z) \quad (7-13)$$

el comportamiento ϕ^b es incompatible con la condición (ii) para $z \rightarrow -i\infty$. Justamente es esta condición la que nos permitirá encontrar los autovalores: para $P > 0$ requeriremos que

$$\phi_n(z) \xrightarrow{z \rightarrow -i\infty} \text{constante} \quad (7-14)$$

y en virtud de un teorema debido a Poincaré, las soluciones obtenidas de este modo deben ser continuables analíticamente a valores negativos de P . En resumen, el problema de autovalores del Hamiltoniano de un sítio queda reducido a buscar para cada valor de P los valores de λ tales que el desarrollo (7-9) con C_m definidos por (7-10) a partir de $C_0=1$ tienda a una constante para valores grandes de z sobre el eje imaginario.

b) Cálculo de los elementos de matriz

Es claro que a partir de aquí podríamos normalizar ϕ_n según (7-11) y esto llevaría simplemente a una redefinición de C_0 , pero la no hermiticidad del Hamiltoniano hace poco práctico este tipo de normalización (si bien es imprescindible para el cálculo de los autovalores, como vimos).

Para evaluar los elementos de matriz del campo necesitamos también conocer los autoestados de H_1 actuando a la izquierda, que no son simplemente los conjugados de los que hemos hallado. Podemos encontrar esos autoestados planteando el problema de autovalores para H_1^\dagger ; ahora bien, de (7-1) vemos que

$$H_1^\dagger(\tilde{r}) = H_1(-\tilde{r}) \quad (7-15)$$

y pasando a la representación de Bargmann vemos de (7-6) que

$$H_1(-\tilde{r}, z) = H_1^*(\tilde{r}, z^*) \quad (7-16)$$

de modo que las autofunciones de H_1^\dagger se obtienen de la ecuación conjugada de la que resulta de (7-6) cambiando z por z^* . Llamando $\bar{\phi}_n$ a las autofunciones de H_1^\dagger escribimos

$$\bar{\phi}_n(z, \tilde{r}) = \phi_n(z, -\tilde{r}) = \phi_n^*(z^*, \tilde{r}) \quad (7-17)$$

Los autovalores de H_1 a izquierda y a derecha son los mismos por eso "normalizamos" las autofunciones de la siguiente manera

$$\langle \bar{\phi}_n | \phi_n \rangle = \int \frac{dz dz^*}{2\pi i} e^{-zz^*} \phi_n(z^*) \phi_n(z) = 1 \quad (7-18)$$

mientras que $\langle \bar{\phi}_n | \phi_m \rangle = 0$ para $n \neq m$ entonces

$$\langle n | \bar{\psi} | m \rangle = \langle m | \bar{\psi} | n \rangle = \int \frac{dz dz^*}{2\pi i} e^{-zz^*} \phi_m(z^*) z \phi_n(z) \quad (7-19a)$$

y haciendo un cambio de variables y usando $\int f(x) \delta'(x-a) dx = f'(a)$

$$\langle n | \bar{\psi} | 0 \rangle = \langle 0 | \bar{\psi} | n \rangle = \left. \frac{d\phi_n(z)}{dz} \right|_{z=0} = c_0 \quad (7-19b)$$

finalmente, otro elemento de matriz que calcularemos será

$$\langle 1 | \bar{\psi} \psi | 1 \rangle = \int \frac{dz dz^*}{2\pi i} e^{-zz^*} \phi_1(z^*) z \frac{d}{dz} \phi_1(z) \quad (7-19c)$$

c) Resultados numéricos

Mediante la relación de recurrencia (7-10) calculamos 100 coeficientes del desarrollo (7-9) (este límite es impuesto por la pequeñez de los mismos). Se observa que

$$\frac{c_{m+1}}{c_m} = -i\alpha \quad \text{con } \alpha < 1 \text{ real} \quad (7-20)$$

Investigaremos el comportamiento de este polinomio de grado 100 sobre eje imaginario negativo. Incrementando λ a partir de cero se observa que la función adquiere un nodo para λ mayor que un cierto valor, luego dos, etc; alrededor de estos valores deben encontrarse los autovalores buscados. Por tratarse de un polinomio de grado tan alto la divergencia es muy violenta a menos que λ esté muy próximo al autovalor, lo que permite acotar λ_n con extremada precisión (al menos para $P > 0$). Un inconveniente es que esta aproximación polinómica deja de ser válida a partir de $|z| \approx 4$; esto no es obstáculo sin embargo, ni siquiera para el cálculo de las integrales (7-18), (7-19), para las que basta con llegar hasta $|z| = 3$. Más aún, se observa que en general no es necesario tomar 100 términos en la serie, bastando con 20 para $P = 5$ y 55 para $P = -1$.

En la tabla I reproducimos los autovalores λ_1 y los elementos de matriz necesarios para la aproximación de spin. Graficamos éstos conjuntamente con los relativos al segundo excitado en las figuras 1-a y 1-b, lo que nos permite saber para qué rangos de P es válida esta aproximación (los números nm en la figura 1-b representan $\langle n | \psi | m \rangle$ y los nn indican $\langle n | \bar{\psi} | n \rangle$).

Se observa que la precisión disminuye para $P \ll 0$, no pudiendo asegurar para $P = -5$ más que el orden de magnitud de λ_1 y de $\langle 1 | \bar{\psi} \psi | 1 \rangle$, pero aún así se puede ver que los valores están de acuerdo con (6-16), es decir

$$\lambda_1 \approx \frac{1}{\sqrt{2\pi}} P^2 \exp\left(-\frac{1}{2} P^2\right) \quad (7-21)$$

$$|\langle 0 | \psi | 1 \rangle| \approx |\langle 1 | \bar{\psi} | 1 \rangle| \approx |P|$$

En lo que respecta a λ_2 , éste parece no haber alcanzado todavía su valor límite $|P|$ en la región considerada, aunque por lo menos el valor obtenido es mayor que el estimado por el método semicuántico (apéndice 7A) que es ~ 6 para $P = -10$.

En la región muy subcrítica $P \approx 5$ podemos comparar nuestros resultados con los valores calculados perturbativamente a partir de (7-1) para $P \gg 1$ (apéndice 7B). Esta comparación es expuesta en la tabla II, en la que también incluimos los resultados del método semicuántico, que en esta región son mejores que en la zona supercrítica. Observamos que nuestros resultados concuerdan

razonablemente con ambos métodos, siendo en general menores que los perturbativos y mayores que los semicuánticos.

En la región intermedia $P \approx 0$, que como veremos en la sección siguiente corresponde a la zona crítica, podemos notar en la figura 1-a que

$$\lambda_1 - \lambda_0 < \lambda_2 - \lambda_1 \quad (7-22)$$

y además, de la tabla I observamos que

$$\langle 1 | \bar{\psi} \psi | 1 \rangle \approx |\langle 0 | \psi | 1 \rangle|^2 - |\langle 1 | \bar{\psi} | 1 \rangle|^2 \quad (7-23)$$

para todo el rango analizado de P , indicando que los elementos de matriz $\langle 1 | \bar{\psi} | n \rangle$ con $n > 1$ son pequeños. Estos hechos justifican en buena medida la aproximación de spin aún a pesar de que como vemos en la figura 1-b, los elementos de matriz $\langle 0 | \psi | 2 \rangle$ y $\langle 2 | \bar{\psi} | 2 \rangle$ son comparables en esta región a los $\langle 0 | \psi | 1 \rangle$ y $\langle 1 | \bar{\psi} | 1 \rangle$ y el $\langle 1 | \psi | 2 \rangle$ es decididamente mayor, y más aún, crecen para $P < 0$.

VII -2: Análisis de la interacción entre sitios

Si bien los elementos de matriz asociados al segundo estado excitado no son suficientemente pequeños, mucho menos en la zona supercrítica, su inclusión en un modelo de spin nos llevaría a un problema con demasiados parámetros, muy difícil de tratar por métodos de grupo de renormalización. Por otra parte se ha demostrado que tomándolos en cuenta en la primera iteración, los dos niveles más bajos de la celda no son afectados en demasía. Por otras razones conservamos sólo el estado fundamental y el primer excitado de cada sitio para construir nuestro modelo de spin. Esto significa que tendremos tres parámetros, que denominaremos

$$\epsilon = E_1 = \frac{\lambda_1 z_0}{2 b^{D/2}}$$

$$K = \frac{\alpha_0^2}{b^2} |\langle 01 | \Psi | 1 \rangle|^2$$

$$iz = \frac{\langle 11 | \bar{\Psi} | 1 \rangle}{\langle 01 | \Psi | 1 \rangle} \tag{7-24}$$

y por ende escribimos

$$H = \sum_j \left\{ \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \epsilon \end{pmatrix} - K \sum_{\hat{x}} \left[\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ i & iz \end{pmatrix}_j \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & iz \end{pmatrix}_{j+\hat{x}} + \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & iz \end{pmatrix}_j \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & iz \end{pmatrix}_{j+\hat{x}} \right] \right\} \tag{7-25}$$

$$= \sum_j \left\{ \epsilon c_j - K \sum_{\hat{x}} [\bar{\alpha}_j \alpha_{j+\hat{x}} + \alpha_j \bar{\alpha}_{j+\hat{x}}] \right\}$$

con \hat{x} un vector en la dirección positiva 1 ó 2 para $D=2$.

Comenzamos analizando el caso más simple $D=1$ para luego pasar a la situación realista $D=2$.

a) $D=1$: el primero de los métodos descritos en la sección III-2 fue utilizado por Cardy, quien encuentra una relación crítica $T_c = \epsilon/K = 1.15$ para $d=1$. La línea crítica en el plano $\epsilon/K, z$ está representada en la figura 2 por la línea de punto y trazo. El asterisco indica el punto fijo. Comparado con el resultado del desarrollo de alta temperatura de Brower, Furman, Moshe, que parece muy confiable, este valor resulta ser muy alto. Nosotros abordaremos el problema con el segundo de los métodos, debido a Fernandez Pacheco, porque aunque la TCR no es autodual, consideramos adecuado mantener para los bloques la misma proporción entre sitios y uniones que para la cadena completa.

Escribimos entonces el hamiltoniano de bloque en la forma

$$H_b = \epsilon C_2 - K [\bar{\alpha}_1 \alpha_2 + \alpha_1 \bar{\alpha}_2] \quad (7-26)$$

En este caso la matriz de H_b en el espacio $|\uparrow\uparrow\rangle, |\uparrow\downarrow\rangle, |\downarrow\uparrow\rangle, |\downarrow\downarrow\rangle$ no se descompone en dos bloques idénticos como en el modelo de Ising, sino que aparece un autovalor 0 correspondiente al vacío $|0\rangle_b = |\uparrow\uparrow\rangle$, y los demás autovalores surgen de resolver la ecuación cúbica

$$\epsilon_b^3 - 2(\epsilon + Kz^2)\epsilon_b^2 + [(\epsilon + Kz^2)^2 - K^2(1-z^2)^2]\epsilon_b + \epsilon K^2(1-z^2) = 0 \quad (7-27)$$

El autovector normalizado correspondiente a la raíz menor de esta ecuación es

$$|1\rangle_b = \frac{A_1|\uparrow\uparrow\rangle + A_2|\uparrow\downarrow\rangle + A_3|\downarrow\downarrow\rangle}{|\vec{A}|} \quad (7-28)$$

con

$$\begin{aligned} A_1 &= [\epsilon_b - (\epsilon + Kz^2)]^2 + K^2z^2(1-z^2) & ; & \quad A_2 = -K[\epsilon_b - (\epsilon + Kz^2)] \\ A_3 &= -iKz[\epsilon_b - (\epsilon + K)] & ; & \quad |\vec{A}|^2 = \sum_{l=1}^3 A_l^2 \end{aligned} \quad (7-29)$$

Calculando en este subespacio la energía del sitio omitido tenemos la brecha de energía renormalizada

$$\epsilon' = \langle 1 | (H_b + \epsilon C_1) | 1 \rangle_b = \epsilon_b + \frac{A_1^2 + A_3^2}{|\vec{A}|^2} \quad (7-30)$$

El nuevo acoplamiento K' surge de calcular los elementos de matriz de $\alpha, \bar{\alpha}$ en la base $|0\rangle_b, |1\rangle_b$. Obtenemos

$$\bar{\alpha}_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ \frac{A_1}{|\vec{A}|} & \frac{i z (A_1^2 + A_3^2) + A_2 A_3}{|\vec{A}|^2} \end{pmatrix} ; \quad \alpha_1 = \bar{\alpha}_1^\dagger \quad (7-31)$$

Los elementos de matriz de $\alpha_2, \bar{\alpha}_2$ surgen del intercambio $A_1 \leftrightarrow A_2$.
De este modo

$$K' = K \frac{A_1 A_2}{|A|^2} \quad (7-32)$$

El valor renormalizado de τ obtenido de α_1 .

$$i\tau'_1 = \frac{i\tau(A_1^2 + A_3^2) + A_2 A_3}{A_2 |A|} \quad (7-33a)$$

difierirá en general del calculado a partir de α_2

$$i\tau'_2 = \frac{i\tau(A_2^2 + A_3^2) + A_1 A_3}{A_1 |A|} \quad (7-33b)$$

de modo que este método no conserva estrictamente la forma del Hamiltoniano, pero esta diferencia desaparece cuando $|z| \rightarrow 1$ (por ejemplo, para $z=0,5$ y $\epsilon/K=1$, serán $\tau'_1=0,56$ y $\tau'_2=0,64$, mientras que para $z=0,9$ y $\epsilon/K=1$ tenemos $\tau'_1=0,92$ y $\tau'_2=0,96$). Como a partir de valores realistas de los parámetros resulta $\tau > 0,6$ (ver tabla I para $P \approx 0$) tomamos para τ' el promedio de τ_1 y τ_2 en cada iteración. Debemos remarcar que aunque los valores de τ son en realidad negativos, sólo τ^2 interesa para el cálculo de ϵ_b, A_1, A_2 , mientras que en (7-33) τ se factoriza, dado que A_3 también lo contiene, de modo que el signo es irrelevante en el proceso de renormalización obteniéndose los mismos resultados de $\epsilon', K', |\tau'|$ cualquiera sea éste.

El cálculo numérico arroja una línea de valores críticos en el plano $T = \epsilon/K, \tau$ que representamos en la figura 2 por una línea de trazos. Es interesante notar que para $|z|=1$, el autovalor correspondiente a $|\lambda_b$ se degenera con el vacío y

$$\epsilon' = \epsilon \frac{T(T+2)}{(T+1)^2} \quad ; \quad K' = \frac{K}{T+1} \quad ; \quad |\tau'| = 1 \quad (7-34)$$

de donde

$$T' = \frac{T(T+2)}{T+1} \quad (7-35)$$

que lleva al punto fijo

$$T_c = \frac{(-1 + \sqrt{5})}{2} = 0,618 \quad (7-36)$$

Este valor ^{está} en notable acuerdo con el obtenido por el desarrollo de alta temperatura para $D=1$ que es $T_c=0.606$.

b) $D=2$

Este caso también ha sido considerado por Cardy por el método de formar bloques incluyendo la energía de ambos sitios. La realización más simple en dos dimensiones es formar bloques de dos sitios acoplado alternativamente en una y otra dirección. Refiriéndonos a la figura 3-a, vemos que en la dirección x hay una sola unión entre bloques, mientras que en la dirección y hay dos. Este efecto puede ser tenido en cuenta más sencillamente si utilizamos en todos los pasos la misma relación de recurrencia para K' (como en el caso $D=1$) pero con un factor adicional $\sqrt{2}$. El valor calculado de este modo es $T_c=2,87$, que no es demasiado lejano al obtenido por el desarrollo de alta temperatura que es $T_c=2,43$. La línea crítica está representada por la línea llena (a) en la figura 2, donde el asterisco marca el punto fijo. Nosotros emplearemos el mismo método pero omitiendo la energía de uno de los sitios en la formación de bloques. Surgen dos maneras de acoplar los bloques en la dirección y (están indicadas en las figuras 3-b y 3-b') donde los cuadrados sombreados indican el sitio omitido). En el primero de los casos, por ser todas las uniones ^{del mismo} tipo, surge simplemente un factor $\sqrt{2}$ en (7-32) en cambio en el segundo se tienen dos distintos tipos de acoplamiento en la dirección y, y aún distintos del que se tiene en la dirección x. La relación (7-32) cambia entonces por

$$K' = \frac{K \sqrt{A_1 A_2 (A_1^2 + A_2^2)}}{|A|^2} \quad (7-37)$$

Las líneas críticas son expuestas en la figura 2. Vemos que en ambos casos el punto fijo corresponde a $|K|=1$. Las temperaturas críticas son $T_c=0,93$ y $T_c=1,08$ para los casos b y b' respectivamente, los cuales son valores muy bajos. La impresión es entonces que el método de acoplamiento alternativo de bloques de dos spin arroja valores muy bajos de T_c cuando se obtiene el valor correcto para $D=1$. El resultado relativamente bueno de Cardy

parece ser más bien debido a compensación de este efecto por el alto valor obtenido para $D=1$

Una manera mucho más complicada de formar los bloques de spins, pero que esperamos que arroje mejores resultados es considerar celdas de cuatro sitios. Nuevamente podemos pensar en incluir la energía de todos los sitios u omitir alguno de ellos (podríamos también omitir dos no adyacentes, lo que también res-petaría la isotropía del acoplamiento, pero diagonalizando el Ha-miltoniano del bloque para $|z|=1$ y luego agregando los valores de expectación de dichos sitios en el espacio de los dos niveles más bajos, éstos permanecen degenerados, siendo imposible por consiguiente continuar el proceso al no poder definir ϵ'). Las dos posibilidades que abordaremos son las de las figuras 3-c y 3-d. En ambos casos la matriz del Hamiltoniano de bloque es de 16×16 . Podemos considerarlos simultáneamente definiendo una variable x que valdrá 1 en el caso c y 0 en el d. Diagonalizando numéricamente esta matriz obtenemos, aparte del vacío

$$|0\rangle_b = | \begin{pmatrix} \uparrow & \uparrow \\ \uparrow & \uparrow \end{pmatrix} \rangle \quad (7-38)$$

un estado primer excitado con energía ϵ_b de la forma

$$\begin{aligned} |1\rangle_b = & b_2 \begin{pmatrix} \downarrow & \uparrow \\ \uparrow & \downarrow \end{pmatrix} + b_3 \begin{pmatrix} \uparrow & \downarrow \\ \downarrow & \uparrow \end{pmatrix} + b_4 \begin{pmatrix} \downarrow & \downarrow \\ \downarrow & \downarrow \end{pmatrix} + b_5 \begin{pmatrix} \downarrow & \uparrow \\ \uparrow & \uparrow \end{pmatrix} + b_6 \begin{pmatrix} \uparrow & \downarrow \\ \uparrow & \downarrow \end{pmatrix} \\ & + b_7 \begin{pmatrix} \uparrow & \uparrow \\ \uparrow & \downarrow \end{pmatrix} + b_8 \begin{pmatrix} \uparrow & \uparrow \\ \downarrow & \uparrow \end{pmatrix} + b_9 \begin{pmatrix} \downarrow & \downarrow \\ \uparrow & \uparrow \end{pmatrix} + b_{10} \begin{pmatrix} \uparrow & \downarrow \\ \uparrow & \downarrow \end{pmatrix} + b_{11} \begin{pmatrix} \uparrow & \uparrow \\ \downarrow & \downarrow \end{pmatrix} \\ & + b_{12} \begin{pmatrix} \downarrow & \uparrow \\ \downarrow & \uparrow \end{pmatrix} + b_{13} \begin{pmatrix} \uparrow & \downarrow \\ \uparrow & \downarrow \end{pmatrix} + b_{14} \begin{pmatrix} \uparrow & \downarrow \\ \downarrow & \downarrow \end{pmatrix} + b_{15} \begin{pmatrix} \downarrow & \uparrow \\ \downarrow & \downarrow \end{pmatrix} + b_{16} \begin{pmatrix} \downarrow & \uparrow \\ \uparrow & \uparrow \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (7-39)$$

Los paréntesis en (7-38), (7-39) no indican matrices, sino que son una forma de representar el bloque. Para $x=1$, el valor ϵ' es simplemente ϵ_b , mientras que para $x=0$

$$\epsilon' = \epsilon_b + \epsilon (b_2^2 + b_4^2 + b_5^2 + b_9^2 + b_{12}^2 + b_{13}^2 + b_{15}^2 + b_{16}^2) \quad (7-40)$$

donde los coeficientes corresponden obviamente a los estados en que el spin del sitio 1 está invertido.

El nuevo valor de z será

$$z' = \frac{\langle 1 | \alpha | 1 \rangle_b}{\langle 0 | \alpha | 1 \rangle_b}$$

Este valor es el mismo para todos los sitios en el caso C, mientras que en el d sólo coinciden los correspondientes a los sitios 2 y 4. Por ejemplo para el sitio 1 se tiene

$$\begin{aligned} \langle 1|\alpha_1|1\rangle_b &= \langle 1|\bar{\alpha}_1|1\rangle \\ &= iz(b_2^2 + b_4^2 + b_5^2 + b_9^2 + b_{12}^2 + b_{13}^2 + b_{15}^2 + b_{16}^2) \\ &\quad + b_2 b_7 + b_4 b_{14} + b_9 b_6 + b_{12} b_8 + b_{13} b_{10} + b_{15} b_{11} + b_{16} b_3 \end{aligned} \quad (7-41)$$

Los términos cruzados claramente asocian estados que difieren sólo en el spin del sitio 1. Para preservar la forma del Hamiltoniano tomamos nuevamente el promedio. De la misma manera, como el estado que difiere del vacío en dicho spin es el asociado al coeficiente b_5

$$\langle 0|\alpha_1|1\rangle_b = b_5 = \langle 1|\bar{\alpha}_1|0\rangle_b \quad (7-42)$$

Debido a la isotropía en el acoplamiento podemos tomar por ejemplo la interacción entre las celdas I y IV para definir el nuevo K . Esta es

$$K(\bar{\alpha}_1 \alpha_4 + \bar{\alpha}_2 \alpha_3 + \bar{\alpha}_4 \alpha_1 + \bar{\alpha}_3 \alpha_2) \quad (7-43)$$

Entonces, dado que K está asociado al elemento de matriz no diagonal

$$K' = K \begin{pmatrix} b_5 & b_8 + b_6 & b_7 \end{pmatrix} \quad (7-44)$$

Las curvas críticas para ambos casos están en la figura 2. Se observa que para el modelo c el punto fijo corresponde a valores más bien pequeños de $|z|$, mientras que para el d se encuentra en $|z|=1$. Esto parece ser una característica de los métodos tipo Fernandez Pacheco. Otras dos son que para $|z| \neq 1$ los valores de τ' en los sitios 1, 3 y 2-4 difieren, aunque no demasiado (por ejemplo para $|z|=0,8$ y $\epsilon/K=1,5$ resulta $\tau'_1=0,89$, $\tau'_2=\tau'_4=1,01$ y $\tau'_3=1,05$) y que para $|z|=1$ paralelamente a conservarse estrictamente la forma del Hamiltoniano, los dos niveles más bajos obtenidos por diagonalización permanecen degenerados (esta degeneración recién es removida al agregar el valor de expectación de la energía del

sitio omitido). Vemos en la figura 2 que los resultados no son extremadamente buenos como para $D=1$, pero al menos permiten acotar mejor que los b, b' la región crítica. Con propósito de comparación hemos extrapolado a $|z| < 1$ el resultado de alta temperatura (e).

c) Inclusión de los términos diagonales de $\bar{\Psi} \cdot \nabla \Psi$ en la interacción entre sitios

Esta es otra alternativa al problema planteado en las secciones 7-1 y 7-2 a, b. La analizaremos restringiéndonos al caso a de la figura 3 y a $D=2$. En este caso escribimos el Hamiltoniano del bloque en la forma

$$H_b = \epsilon (C_1 + C_2) + L (C_1 + C_2) - K (\bar{\alpha}_1 \alpha_2 + \bar{\alpha}_2 \alpha_1) \quad (7-45)$$

donde L es una nueva constante de acoplamiento, que vale para

$$L = \frac{4\alpha'_0}{b^2} \langle 1 | \bar{\Psi} \Psi | 1 \rangle$$

Para ϵ vale todo lo hecho en la sección 7-1, con sólo cambiar la definición de P en términos de $\Delta_0, \alpha'_0, n_b, b$ la que ahora será

$P = 2\Delta_0/\tilde{\kappa}$. Igualmente $K, \bar{\alpha}, \alpha$ son los definidos en la sección 7-2 a. El interés en esta alternativa radica en que podría suceder que

$$|(\bar{\psi}_{j+\hat{z}} - \bar{\psi}_j)(\psi_{j+\hat{z}} - \psi_j)| < |\bar{\psi}_{j+\hat{z}} \psi_j + \bar{\psi}_j \psi_{j+\hat{z}}| \quad (7-46)$$

La diagonalización de (7-45) arroja un nuevo valor

$$\epsilon' = \frac{1}{2} \left\{ 3(\epsilon + L) + 2Kz^2 - K - \left[(\epsilon + L)^2 + 4(\epsilon + L)Kz^2 + 2(\epsilon + L)K + (2Kz^2 - K)^2 \right]^{1/2} \right\} \quad (7-47)$$

Para el acoplamiento en la dirección horizontal se encuentra

$$K' = A^2 K \quad z' = \frac{1}{A} \left[(A^2 - B^2)z + AB \right] \quad (7-48)$$

donde

$$A^2 = \frac{K^2 z^2}{2K^2 z^2 - (K + \epsilon' - \epsilon - L)^2} \quad ; \quad B = \frac{(K + \epsilon' - \epsilon - L) A}{K z} \quad (7-49)$$

son los coeficientes del primer estado excitado del bloque

$$|1\rangle_b = A (|\uparrow\uparrow\rangle + |\downarrow\downarrow\rangle) + i B |\uparrow\downarrow\rangle \quad (7-50)$$

La nueva constante de acoplamiento L' se obtiene del valor de expectación de L en el estado $|1\rangle_b$

$$L' = L (A^2 - B^2) \quad (7-51)$$

de esta manera el Hamiltoniano escrito en términos de bloques conserva la forma del Hamiltoniano original. Nuevamente la prescripción para el acoplamiento alternativo en las direcciones x , y será agregar un factor $\sqrt{2}$ en cada paso, en la definición de K' . Llamaremos a este método (a') por ser análogo al (a) de la figura 3.

Hemos visto en la sección 7-1 que una muy buena aproximación a $\langle 1|\bar{\Psi} \Psi|1\rangle$ es $|\langle 0|\Psi|1\rangle|^2 - |\langle 1|\bar{\Psi}|1\rangle|^2$. Con esta aproximación resulta

$$L \approx 4(1 - z^2)K \quad (7-52)$$

De modo que para $|z|=1$ será $L=0$ y modelos (a') y (a) coincidirán; pero partiendo de valores realistas de $|z| \neq 1$, tenemos en principio tres parámetros relevantes: ϵ/K , z y L/K , de modo que aparecerán ahora superficies críticas. En la figura 4 se muestran las intersecciones de estas superficies con planos $L/K = \text{cte}$. Pero la condición (7-52) restringe fuertemente el espacio de parámetros, que se ve limitado entonces a la curva de consistencia de la figura.

VII -3: Cálculo de α_c ($D=2$)

De la definición de P en términos de Δ, z resulta, cuando incluimos los términos diagonales de $\nabla\bar{\Psi} \cdot \nabla\Psi$ en la energía de cada sitio

$$\alpha_0 = 1 - \frac{r_0 P}{2b} + \frac{4\alpha'_0}{b^2} \quad (7-53)$$

que nos permitirá, conociendo el valor crítico de P , calcular α_{0c} . Para calcular el valor crítico de P nos valdremos de las definiciones de ϵ , K y τ en términos de λ , $\langle 0|\Psi|1\rangle$, $\langle 1|\bar{\Psi}|1\rangle$ y de la tabla I, que nos permiten dibujar, fijando valores realistas para $r_0=0,5 \text{ GeV}^{-1}$ y $\alpha'_0=0,25 \text{ GeV}^{-2}$ y adoptando para b los valores 1, 3, 5 GeV^{-1} , las curvas de las figuras 2 y 4. Dicho valor crítico corresponderá a la intersección de estas curvas con las líneas críticas correspondientes.

Los resultados para α_0 son expuestos en la tabla III, conjuntamente con los que surgen de la extrapolación del desarrollo de alta temperatura (modelo e) y con los que se obtienen del modelo a'. Para el cálculo de éstos omitimos el segundo término en (7-53) y el valor crítico de P surgirá de la intersección con la curva de consistencia.

III-4: Conclusiones

Nuestro objetivo ha sido estimar la intersección crítica del T_0 partiendo de valores realistas de los parámetros en la TCR.

Hemos podido calcular con precisión las propiedades de la TCR sobre la red en lo que respecta a un sitio. Del estudio de los elementos de matriz se infiere que la aproximación de dos niveles puede introducir un error no despreciable en el procedimiento de grupo de renormalización, aunque se ha probado que la inclusión de un tercer nivel afecta poco la energía del primer estado excitado en la primera iteración.

Respecto de la interacción entre sitios hemos examinado dos problemas: el procedimiento de construcción de los bloques y la definición del término de interacción.

Para $D=1$ resulta que el método consistente en incluir sólo la energía de un sitio en el hamiltoniano del bloque arroja un valor de $T_0 = \epsilon/K$ que está en notable acuerdo para $|z|=1$ con el ob

tenido por el desarrollo de alta temperatura. Por el contrario, incluyendo las energías de ambos sitios se obtiene un valor muy alto de T_c .

Para $\mathcal{P}=2$, acoplando bloques de dos sitios alternativamente en cada dirección y omitiendo la energía de un sitio se obtienen valores muy bajos de T_c . Un valor más razonable aunque todavía bajo se obtiene formando bloques de cuatro sitios, si se usa el truco de omisión. Por otra parte, si se incluye la energía de los cuatro sitios en la definición del Hamiltoniano de bloque resulta un valor relativamente alto de T_c . Un resultado un poco mejor surge de acoplar alternativamente bloques de dos spins sin omisión, probablemente por compensación de efectos, teniendo en cuenta el resultado para $\mathcal{P}=1$. La intersección crítica obtenida por este método coincide para $b=1$ con la obtenida en ref.

Incluyendo la parte diagonal de $\nabla\bar{\Psi}\cdot\nabla\Psi$ en la interacción entre sitios, lo que tiene cierta justificación puesto que en los estados de energía más baja no se esperan variaciones bruscas de los campos, los resultados para α_c son muy parecidos a los del último método citado. Las pequeñas diferencias podrían ser consecuencia de que se tienen más parámetros y por ende el método resulta un poco más engorroso. Este método no puede ser considerado como mejor que el anterior dado que si bien la interacción entre sitios es menor, también lo es la brecha de energía.

En el rango realista $1 < b < 5 \text{ GeV}^{-1}$, los modelos que predicen T_c alrededor del resultado de alta temperatura llevan a $\alpha_c \sim 1,05$ por lo que un Pomeron crítico estaría de acuerdo con los datos experimentales a las presentes energías.

Apéndice 7 A :

A partir de (7-1) escribimos

$$2 H_1 / \hbar = P \left[\bar{\psi} \psi + \frac{i}{P} \bar{\psi} (\bar{\psi} + \psi) \psi \right]$$

Para P suficientemente grande, el término cúbico puede ser considerado como una perturbación sobre los estados $\lambda_n^{(0)} = \epsilon_n P$.

La corrección de primer orden a la energía del primer estado excitado será

(entendiendo $|n\rangle \equiv |n_0\rangle$, $V = i \bar{\psi} (\bar{\psi} + \psi) \psi$)

$$\lambda_1^{(1)} = V_{11} = i \left[\langle 1 | \bar{\psi} \psi^2 | 1 \rangle + \langle 1 | \bar{\psi} \psi^2 | 1 \rangle \right] = i \langle 1 | 2 \rangle = 0$$

puesto que sólo el segundo término contribuye, y los estados son ortogonales. A segundo orden tenemos

$$\begin{aligned} \lambda_1^{(2)} &= \sum_{m=0}^2 \frac{V_{1m} V_{m1}}{\lambda_1^{(0)} - \lambda_m^{(0)}} = - \frac{\langle 1 | \bar{\psi} (\bar{\psi} + \psi) \psi | 0 \rangle \langle 0 | \bar{\psi} (\bar{\psi} + \psi) \psi | 1 \rangle}{P} \\ &\quad - \frac{\langle 1 | \bar{\psi} (\bar{\psi} + \psi) \psi | 2 \rangle \langle 2 | \bar{\psi} (\bar{\psi} + \psi) \psi | 1 \rangle}{-P} = \frac{(i\sqrt{2})^2}{-P} = \frac{2}{P} \end{aligned}$$

Para el segundo estado excitado

$$\lambda_2^{(1)} = i \left[\langle 2 | \bar{\psi} \psi^2 | 2 \rangle + \langle 2 | \bar{\psi} \psi^2 | 2 \rangle \right] = 0$$

$$\begin{aligned} \lambda_2^{(2)} &= - \frac{\langle 2 | V | 0 \rangle \langle 0 | V | 2 \rangle}{2P} - \frac{\langle 2 | V | 1 \rangle \langle 1 | V | 2 \rangle}{P} \\ &\quad - \frac{\langle 2 | V | 3 \rangle \langle 3 | V | 2 \rangle}{-P} = - \frac{2}{P} + \frac{12}{P} = \frac{10}{P} \end{aligned}$$

Para el cálculo de los elementos de matriz debemos conocer la corrección a la función de onda de los estados.

El vacío no adquire correcciones, por la forma de V . Para los estados excitados

$$|1'\rangle = |1\rangle^{(1)} = |1\rangle + i|0\rangle \frac{\langle 0 | V | 1 \rangle}{P} + i|2\rangle \frac{\langle 2 | V | 1 \rangle}{-P} = |1\rangle - \frac{i}{P} \sqrt{2} |2\rangle$$

$$\begin{aligned} |2'\rangle &= |2\rangle^{(1)} = |2\rangle + i|0\rangle \frac{\langle 0 | V | 2 \rangle}{2P} + i|1\rangle \frac{\langle 1 | V | 2 \rangle}{P} + i|3\rangle \frac{\langle 3 | V | 2 \rangle}{-P} \\ &= |2\rangle + \frac{i}{P} \sqrt{2} |1\rangle - \frac{i}{P} \sqrt{3} |3\rangle \end{aligned}$$

y calculando uno de ellos obtenemos sin dificultad, resulta así:
Hemos sólo los términos no contribuyentes

$$\langle 01\psi|0\rangle = 0 \quad ; \quad \langle 11\psi|0\rangle = 0 \quad ; \quad \langle 21\psi|0\rangle = 0$$

$$\langle 01\psi|1\rangle = \langle 01\psi|1\rangle = 1 \quad ; \quad \langle 01\psi|2\rangle = \frac{\lambda\sqrt{2}}{\rho} \langle 01\psi|1\rangle = \frac{\lambda}{\rho}$$

$$\langle 11\psi|1\rangle = -\frac{\lambda\sqrt{2}}{\rho} \langle 11\psi|2\rangle = -\frac{2\lambda}{\rho} \quad ; \quad \langle 11\psi|2\rangle = \langle 11\psi|2\rangle \cdot \sqrt{2}$$

$$\langle 21\psi|1\rangle = \frac{2}{\rho^2} \langle 11\psi|2\rangle = \frac{2\sqrt{2}}{\rho^2} \approx 0$$

$$\langle 21\psi|2\rangle = \frac{\lambda\sqrt{2}}{\rho} \langle 11\psi|2\rangle - \frac{\lambda 2\sqrt{3}}{\rho} \langle 21\psi|3\rangle = \frac{2\lambda}{\rho} - \frac{6\lambda}{\rho} = -\frac{4\lambda}{\rho}$$

TABLA I

ρ	λ_1	$\langle 0 \psi 1 \rangle$	$i \langle 1 \bar{\psi} 1 \rangle$	$\langle 1 \bar{\psi} \psi 1 \rangle$
5	5.3522885457	1.030	0.343	0.944
3	3.50717910	1.060	0.484	0.894
2	2.6354151	1.092	0.595	0.846
1	1.824763	1.149	0.753	0.769
0.5	1.45299	1.194	0.856	0.716
0	1.11128	1.257	0.982	0.649
-0.5	0.8065	1.35	1.13	0.568
-1	0.5462	1.47	1.32	0.471
-2.5	0.084	2.24	2.22	0.149
-5	$\sim 10^{-4}$	4.8	4.8	$\sim 10^{-2}$

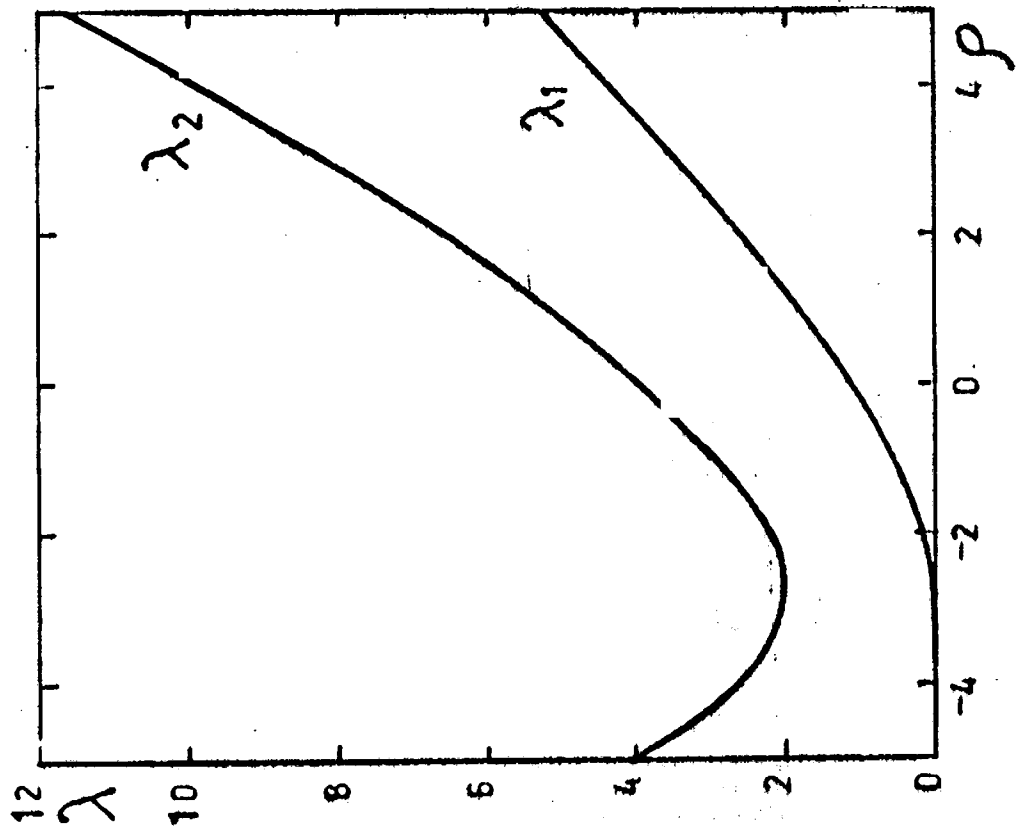


Fig 1-a

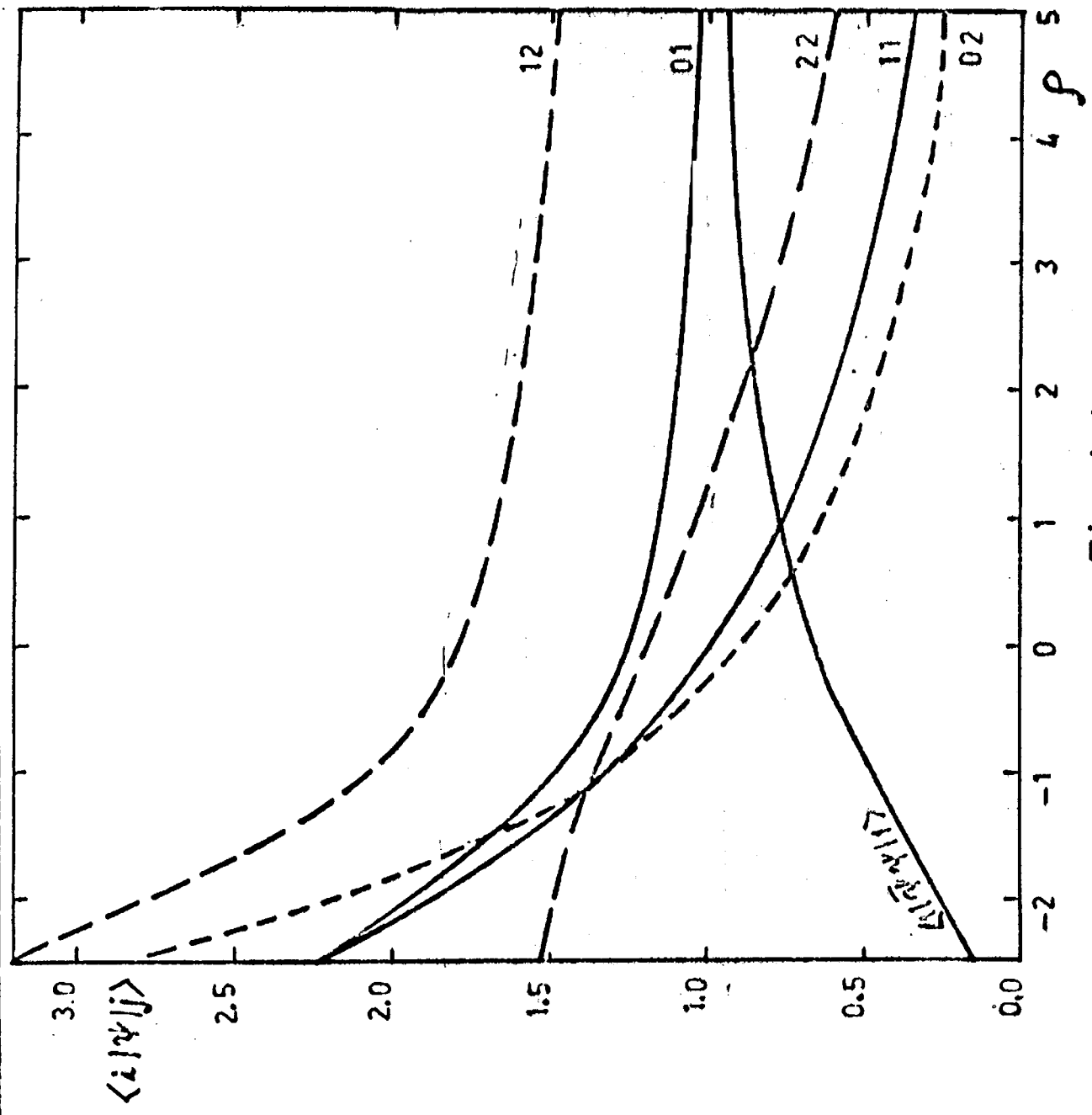


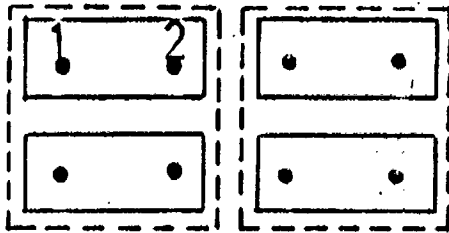
Fig 1-b

TABLA II

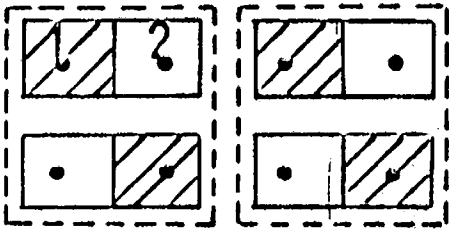
$\rho=5$	Nuestro cálculo	Perturbativo	Semicuántico
λ_1	5.3522885457	5.4	5.3
λ_2	11.618395987	12.	11.4
$\langle 0 \psi 1 \rangle$	1.030	1.0	
$i \langle 1 \bar{\psi} 1 \rangle$	0.343	0.40	0.35
$-i \langle 0 \psi 2 \rangle$	0.255	0.28	
$i \langle 2 \bar{\psi} 2 \rangle$	0.60	0.80	0.54
$\langle 1 \psi 2 \rangle$	1.48	1.41	
$\langle 1 \bar{\psi} 2 \rangle$	0.03	0.	

TABLA III

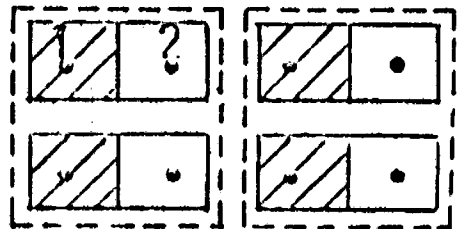
D=2	$T_c(\tau=1)$	α_c		
		$b=1 \text{ GeV}^{-1}$	$b=3 \text{ GeV}^{-1}$	$b=5 \text{ GeV}^{-1}$
(a) $\begin{pmatrix} \bullet & \bullet \\ \bullet & \bullet \end{pmatrix}$	2.87	1.21	1.07	1.05
(b) $\begin{pmatrix} \bullet & \circ \\ \circ & \bullet \end{pmatrix}$	0.93	1.80	1.18	1.10
(b') $\begin{pmatrix} \circ & \bullet \\ \circ & \bullet \end{pmatrix}$	1.08	1.74	1.16	1.09
(c) $\begin{pmatrix} \bullet & \bullet \\ \bullet & \bullet \end{pmatrix}$	3.10	1.07	1.05	1.04
(d) $\begin{pmatrix} \circ & \bullet \\ \bullet & \bullet \end{pmatrix}$	1.54	1.55	1.13	1.08
(a') $\begin{pmatrix} \bullet & \text{---} & \bullet \\ & & \\ \bullet & \text{---} & \bullet \end{pmatrix}$	2.87	1.19	1.08	1.06
(e) Extrapolación de Ref. (5)	2.43	1.30	1.08	1.06



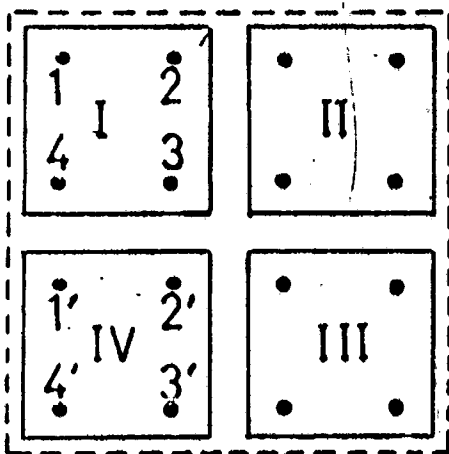
(a)



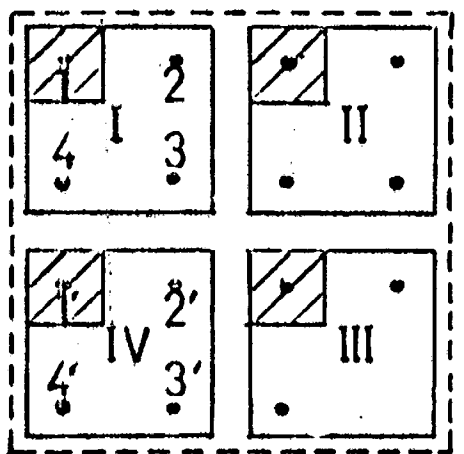
(b)



(b')



(c)



(d)

Fig 3

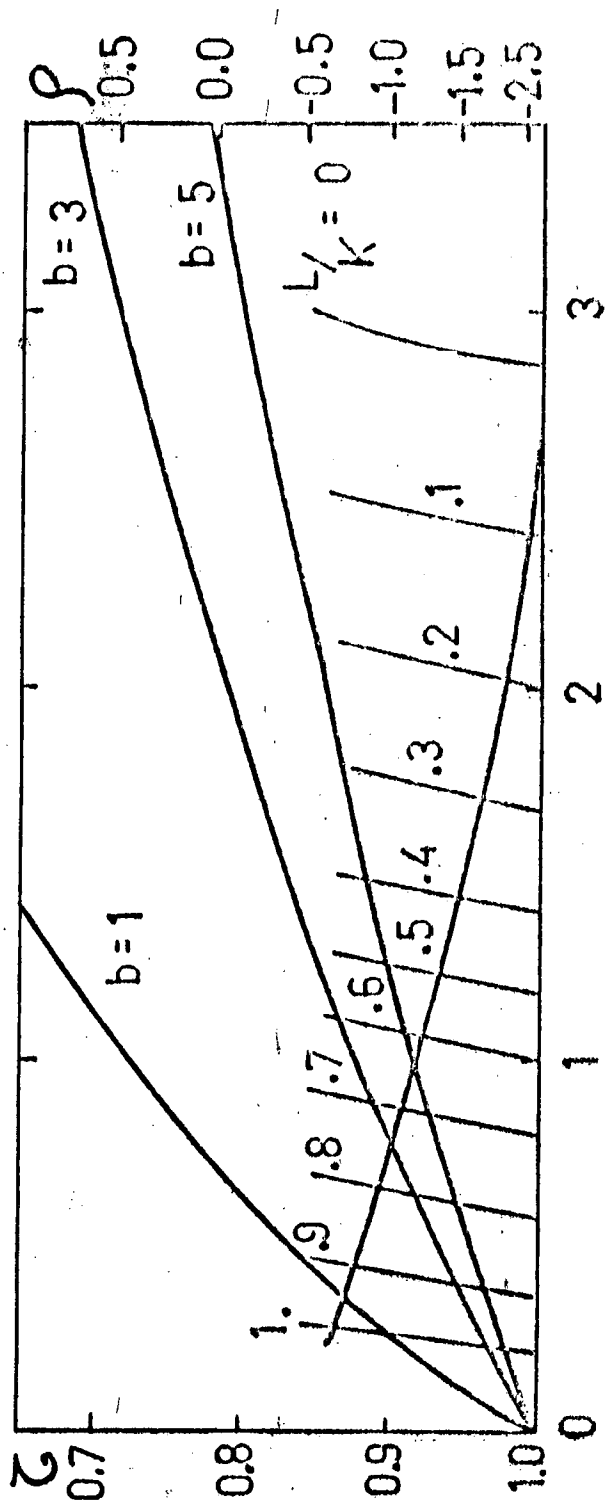


Fig 4

REFERENCIAS

- 1) P. Gastmans : conferencias en Cargèse (9-29 julio 1979)
- 2) S. Weinberg: *Phys. Rev. Lett* 19, 1264 (1967)
A. Salam: *Proc. 8th Nobel Symposium, Estocolmo (1968)*, 367
- 3) G. Chew: *S-Matrix Theory of Strong Interactions*, ed. Benjamin N.Y. (1962)
- 4) J. Bjorken y E.A. Paschos: *Phys. Rev.* 185, 1975 (1969)
- 5) R. Feynman: *Phys. Rev. Lett.* 23, 1415 (1969)
- 6) H. Han y V. Hambu, *Phys. Rev* 139, 1096 (1965)
V. Hambu: *Preludes in Theoretical Physics* (Amsterdam, 1966)
- 7) H. Fritzsch y M. Gell-Mann, XVI Conference on High Energy Physics, Chicago (1972), vol. 2.
- 8) D. Gross y F. Wilczek: *Phys. Rev.* D8, (1973)
H. Politzer : *Phys. Rev. Lett.* 30, 1346 (1973)
- 9) A. Buras: Fermilab-Pub- 79/17- THY
- 10) S. Coleman: conferencias en Erice (1977)
- 11) E. Witten: *Nucl. Phys.* B149, 285 (1979)
- 12) K. Wilson y J. Kogut: *Phys. Rep.* C12, 75 (1974)
- 13) T. Schultz, D. Mattis y E. Lieb: *Rev. Mod. Phys.* 36, 856 (1964)
- 14) J. Kogut: *Rev. Mod. Phys.* 51, 659 (1979)
- 15) K. Wilson: *Phys. Rev.* D10, 2445 (1974)
- 16) F. Wegner: *J. Math. Phys.* 12, 2259 (1971)
- 17) S. Edwards y P. Anderson: *J. Phys.* F5, 965 (1975)
- 18) B. Halperin y D. Nelson: *Phys. Rev. Lett* 42, 121 (1978)
- 19) G. 't Hooft: *Nucl. Phys.* B138, 1 (1978); *Nucl. Phys.* B153, 141 (1979)
- 20) E. Fradkin y L. Susskind: *Phys. Rev.* D17, 2637 (1978)
- 21) H. Creutz, L. Jacobs y C. Rebbi: *Phys. Rev. Lett.* 42, 1390 (1979)
- 22) D. Horn y S. Yankielowicz: *Nucl. Phys.* B161, 533 (1979)
- 23) B. Hienhuis y M. Hauenberg: *Phys. Rev. Lett.* 35, 477 (1975)
- 24) S. Elitzur: *Phys. Rev.* D12, 3978 (1975)
- 25) D. Boyanovsky, R. Deza y L. Masperi: Preprint Centro Atómico Bariloche (a ser publicado en *Phys. Rev.* D)
- 26) V. Gribov: *JETP* 26, 414 (1968)
- 27) V.D. Barger y D. Cline: *Phenomenological Theories of High Energy Scattering*, ed. Benjamin, NY (1969)
- 28) G. Chew y S. Frautschi: *Phys. Lett.* 7, 394 (1961)
- 29) T. Regge: *Nuovo Cim.* 18, 947 (1960)

- 30) P. Collins y E. Squires: *Regge Poles in Particle Physics*, ed. Springer-Verlag, Berlin (1963)
- 31) D. Amati, S. Tubini, y Stanghellini: *Nuovo Cim.* 26, 896 (1962)
S. Mandelstam: *Nuovo Cim* 32, 1113 (1963); *ibid* 1127, 1143
- 32) V. Mandrouskii, V. Gribov y D. Kanchelli: *Sov. J. Nucl. Phys.* 18, 306 (1974)
- 33) G. Frazer, H. Hoffmann, J. Fulco y R. Sugar; *Phys. Rev.* 214, 2387 (1976)
- 34) M. Froissart: *Phys. Rev.* 123, 1053 (1961)
- 35) R. Sugar y A. White; *Phys. Rev.* D10, 4074 (1974)
A. Migdal, A. Polyakov y K. Ter-Martirosyan: *Phys. Lett.* B48, 239 (1974)
- 36) D. Amati, M. Ciafaloni, H. Le Bellac y G. Marchesini: *Nucl. Phys.* B112, 107 (1976)
J. Cardy: *Nucl. Phys.* B115, 141 (1976)
- 37) A. Della Selva, L. Masperi, V. Roberto y A. Ungkitchanukit, *Nucl. Phys.* B127, 413 (1977); L. Masperi *Phys. Lett.* 73B, 335 (1978)
- 38) A. García, C. García Canal y L. Masperi: *Phys. Lett.* 66B, 442 (1977)
- 39) R. Jeza y L. Masperi: *Nucl. Phys.* B154, 173 (1979)
- 40) M. Ciafaloni, H. Le Bellac y G. Rossi: *Nucl. Phys.* B130, 388 (1977)
- 41) R. Brower, H. Furman y H. Moshe: Preprint CERN TH. 2458 (1978)