

0 2.56.04

C. N. E. A. Biblioteca	
ARCHIVO PUBLICACIONES	
Nº 1	AÑO 1956

NO SE PRESTA

REPUBLICA ARGENTINA

PUBLICACIONES

DE LA

COMISION NACIONAL DE LA ENERGIA ATOMICA

Nº 6

RESOLUCION DE LA ECUACION DE DIFUSION DE NEUTRONES  
EN ESTRUCTURAS TRIDIMENSIONALES CON GEOMETRIA RECTANGULAR

G. C. Bollini

BUENOS AIRES

1956

RESOLUCION DE LA ECUACION DE DIFUSION DE NEUTRONES  
EN ESTRUCTURAS TRIDIMENSIONALES CON GEOMETRIA RECTANGULAR

C.G. Bollini

1) Introducción

El problema principal que nos planteamos en el presente trabajo, es el de resolver la ecuación de difusión de neutrones en un "lattice" formado por barras de combustible de sección cuadrada, que siguen tres direcciones perpendiculares entre sí (ver fig.3). El método que utilizaremos ha sido ya descrito en un trabajo anterior (1), por lo que aquí no nos ocuparemos de su explicación en detalle. No obstante, para que no resulte oscura la parte principal, hemos comenzado por tratar el caso que se muestra en la fig. 1; el que, aunque de poco interés práctico, sirve como ejemplo ilustrativo de la aplicación a tres dimensiones, del método que hemos denominado "de desarrollo ortogonal por zonas".

La ecuación de difusión de neutrones, cuando el flujo es independiente del tiempo, es (2).

$$D \nabla^2 \Phi - \sum_a \Phi + q = 0$$

Siendo D el coeficiente de difusión,  $\sum_a$  la sección macroscópica de absorción y q la fuente de neutrones.

Como siempre, aunque ello no sea esencial para el método, tomamos  $q=0$  en el combustible y  $q=\text{cte.}$  en el moderador. Por consiguiente, el flujo de neutrones debe satisfacer

$$\nabla^2 \Phi - k_0^2 \Phi = 0 \quad ; \quad k_0^2 = \frac{\sum_{a_0}}{D_0} \quad (1)$$

en el combustible. Y

$$\nabla^2 \Phi' - k_1^2 \Phi' = 0 \quad ; \quad k_1^2 = \frac{\sum_{a_1}}{D_1} \quad (2)$$

en el moderador. Donde

$$\Phi = \Phi' + Q = \Phi' + \frac{q}{\sum_{a_1}}$$

Por otra parte, deben ser satisfechas también las condiciones de contorno (anulación de la derivada normal en los límites de la celda elemental) y de continuidad del flujo y de la corriente en los límites de dos regiones.

2) Cubos simétricamente dispuestos.

Supongamos tener cubos de combustibles, dispuestos como se muestra en la fig. 1. El moderador es el material en el que están "sumergidos" los cubos. Cortando por planos de simetría perpendiculares a las tres direcciones marcadas, obtenemos la celda elemental que, junto con la división en zonas y el sistema de coordenadas, se muestra en la fig.2.

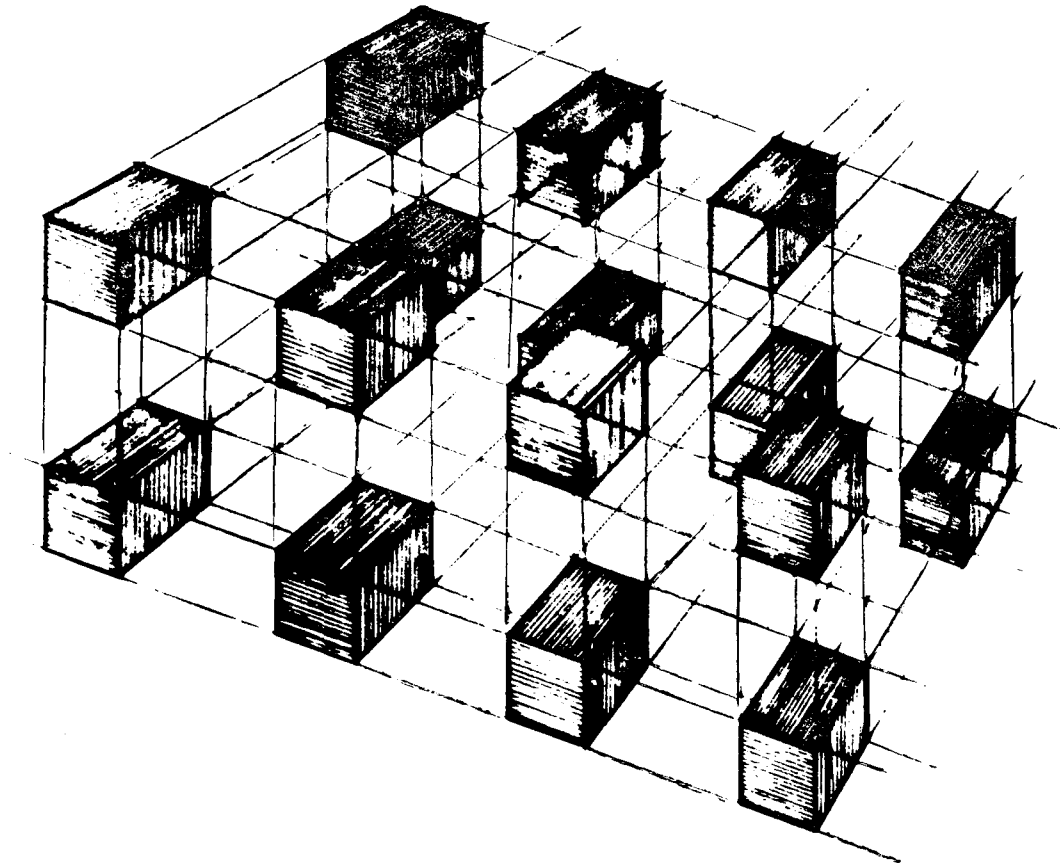


FIG.1

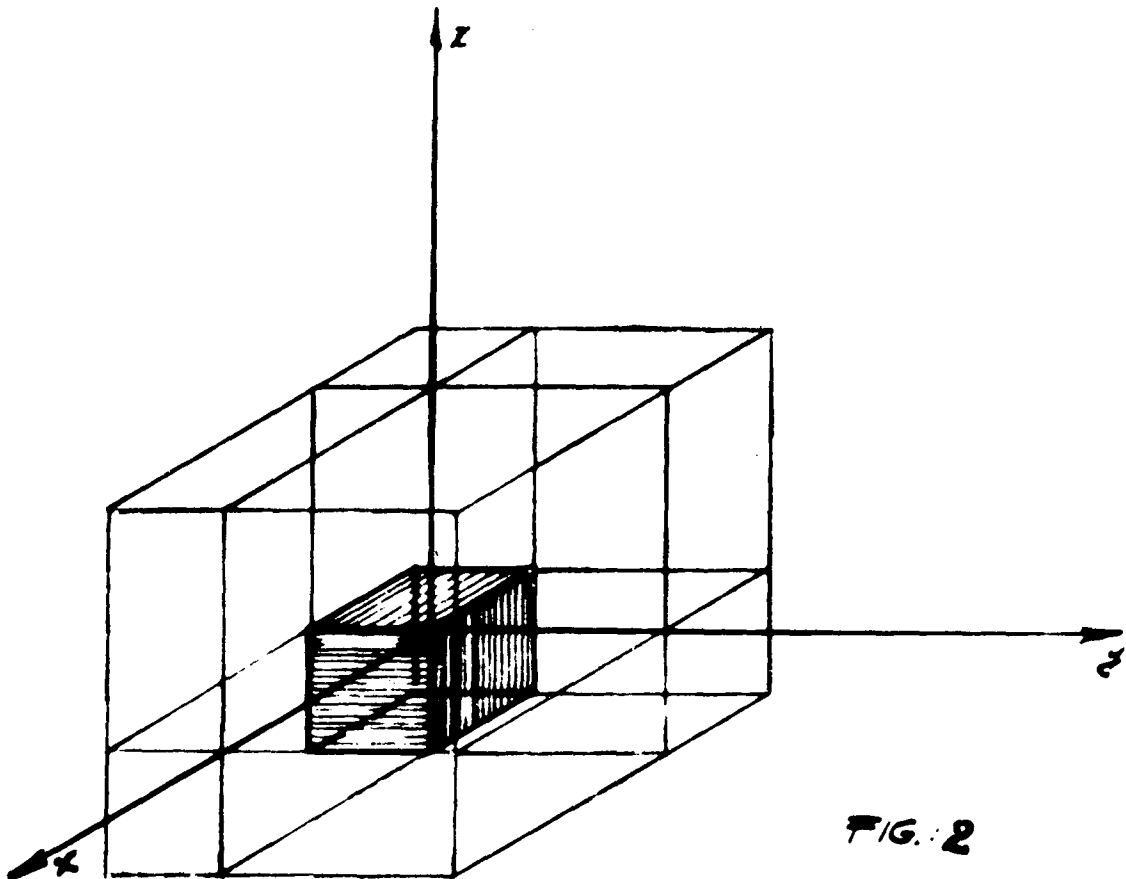


FIG. 2

Tomamos ahora dos sistemas ortogonales (Ver 1). El primero  $\Psi_n$ , ortogonal en el intervalo  $(0, L)$  y el segundo,  $\Psi_n$ , ortogonal en  $(0, -l)$ .

$$(\Psi_n, \Psi_m) = \delta_{nm} N'_n ; \quad (\Psi_n, \Psi_m) = \delta_{nm} N''_n$$

La celda elemental de la fig.2, ha sido dividida en ocho zonas. Debido a que existe una completa simetría ante el intercambio de dos cualesquiera de los ejes, solo cuatro zonas resultan ser independientes entre sí.

Para el flujo neutrónico, solución de la ecuación de difusión, adoptamos un desarrollo ortogonal en cada una de las regiones en que se ha subdividido la celda. Para la zona ocupada por el combustible, tomamos

$$\Phi_0(x, y, z) = \sum_{rst} A_{rst} \Psi_r(x) \cdot \Psi_s(y) \cdot \Psi_t(z). \quad (3)$$

Análogamente, adoptamos los siguientes desarrollos

$$\Phi_1(x, y, z) = \sum_{rst} B_{rst} \Psi_r(x) \cdot \Psi_s(y) \cdot \Psi_t(z) + Q \quad (4)$$

$$\Phi_2(x, y, z) = \sum_{rst} C_{rst} \cdot \Psi_r(x) \cdot \Psi_s(y) \cdot \Psi_t(z) + Q \quad (5)$$

$$\Phi_3(x, y, z) = \sum_{rst} D_{rst} \cdot \Psi_r(x) \cdot \Psi_s(y) \cdot \Psi_t(z) + Q \quad (6)$$

Las zonas en las que éstos son válidas, pueden ser inferidas fácilmente de los mismos desarrollos. Así por ejemplo, el desarrollo (5) consta de las funciones  $\Psi(x)$ ,  $\Psi(y)$ ,  $\Psi(z)$ . Por lo tanto, según la manera de tomar los sistemas ortogonales, se trata de una zona situada entre los valores: 0 y  $-\ell$  de  $x$ ; 0 y  $-\ell$  de  $y$ ; 0 y  $L$  de  $z$ .

En razón de la simetría señalada ante los cambios de ejes, los coeficientes  $A_{rst}$  y  $B_{rst}$  son completamente simétricos, mientras que los  $C$  y  $D$  cumplen:

$$C_{rst} = C_{srt} \quad ; \quad D_{rst} = D_{rts}$$

### 3) Ecuaciones que determinan los coeficientes

El cumplimiento de las condiciones enumeradas en el párrafo final de la introducción, impone condiciones sobre el coeficiente de los desarrollos ortogonales.

La anulación de la derivada normal del flujo en los límites de la celda, nos indica que deben ser satisfechas las siguientes ecuaciones:

$$0 = \left[ \frac{\partial \Phi}{\partial x} \right]_{x=-\ell} = \sum_{rst} A_{rst} \cdot \dot{\Psi}_r(-\ell) \cdot \Psi_s(y) \cdot \Psi_t(z)$$

$$\sum_{r'} A_{rst} \dot{\Psi}_r(-\ell) = 0 \quad (7)$$

$$0 = \left[ \frac{\partial \Phi}{\partial x} \right]_{x=L} = \sum_{rst} B_{rst} \cdot \dot{\Psi}_r(L) \cdot \Psi_s(y) \cdot \Psi_t(z)$$

$$\sum_r B_{rst} \cdot \dot{\Psi}_r(L) = 0 \quad (8)$$

$$0 = \left[ \frac{\partial \Phi_2}{\partial x} \right]_{x=-l} = \sum_{rst} C_{rst} \dot{\Psi}_r(-l) \cdot \Psi_s(y) \cdot \Psi_t(z)$$

$$\sum_r C_{rst} \dot{\Psi}_r(-l) = 0 \quad (9)$$

$$0 = \left[ \frac{\partial \Phi_2}{\partial z} \right]_{z=L} = \sum_{rst} C_{rst} \Psi_r(x) \cdot \Psi_s(y) \cdot \dot{\Psi}_t(L)$$

$$\sum_t C_{rst} \dot{\Psi}_t(L) = 0 \quad (10)$$

$$0 = \left[ \frac{\partial \Phi_3}{\partial x} \right]_{x=-l} = \sum_{rst} D_{rst} \dot{\Psi}_r(-l) \cdot \Psi_s(y) \cdot \Psi_t(z)$$

$$\sum_r D_{rst} \dot{\Psi}_r(-l) = 0 \quad (11)$$

$$0 = \left[ \frac{\partial \Phi_3}{\partial z} \right]_{z=L} = \sum_{rst} D_{rst} \Psi_r(x) \cdot \Psi_s(y) \cdot \dot{\Psi}_t(L)$$

$$\sum_t D_{rst} \dot{\Psi}_t(L) = 0 \quad (12)$$

La continuidad del flujo solo se cumple si:

$$\Phi_0(x, y, 0) = \Phi_2(x, y, 0)$$

$$\sum_{rst} A_{rst} \Psi_r(x) \cdot \Psi_s(y) \cdot \Psi_t(0) = \sum_{rst} C_{rst} \Psi_r(x) \cdot \Psi_s(y) \cdot \Psi_t(0) + Q$$

$$\sum_t A_{rst} \Psi_t(0) = \sum_t C_{rst} \Psi_t(0) + (Q, \Psi_r(x) \Psi_s(y)) \quad (13)$$

$$\sum_{rst} B_{rst} \Psi_r(0) \Psi_s(y) \Psi_t(z) = \sum_{rst} D_{rst} \Psi_r(0) \cdot \Psi_s(y) \cdot \Psi_t(z)$$

$$\sum_r B_{rst} \Psi_r(0) = \sum_r D_{rst} \Psi_r(0) \quad (14)$$

$$\sum_{rst} C_{rst} \Psi_r(x) \Psi_s(0) \cdot \Psi_t(z) = \sum_{rst} D_{rst} \Psi_r(x) \cdot \Psi_s(0) \cdot \Psi_t(z)$$

$$\sum_s C_{rst} \Psi_s(0) = \sum_s D_{rst} \Psi_s(0) \quad (15)$$

Consideraciones análogas para la continuidad de la corriente, nos conducen a las ecuaciones

$$D_0 \sum_t A_{rst} \dot{\Psi}_t(0) = D_1 \sum_t C_{rst} \dot{\Psi}_t(0) \quad (16)$$

$$\sum_{rst} B_{rst} \dot{\Psi}_r(o) = \sum_{rst} D_{rst} \dot{\Psi}_r(o) \quad (17)$$

$$\sum_s C_{rst} \dot{\Psi}_s(o) = \sum_s D_{rst} \dot{\Psi}_s(o) \quad (18)$$

Por último, para que se cumplan las ecuaciones (1) y (2), es necesario que:

$$\nabla^2 \Phi = \sum_{rst} A_{rst} \left[ \ddot{\Psi}_r(x) \Psi_s(y) \Psi_t(z) + \Psi_r(x) \ddot{\Psi}_s(y) \Psi_t(z) + \Psi_r(x) \Psi_s(y) \ddot{\Psi}_t(z) \right] =$$

$$= k_o^2 \Phi = k_o^2 \sum_{rst} A_{rst} \Psi_r(x) \Psi_s(y) \Psi_t(z)$$

$$k_o^2 A_{rst} = \sum_n \left\{ A_{nst} \frac{(\ddot{\Psi}_n, \Psi_r)}{N_r''} + A_{rnt} \frac{(\ddot{\Psi}_n, \Psi_s)}{N_s''} + A_{rsn} \frac{(\ddot{\Psi}_n, \Psi_t)}{N_t''} \right\} \quad (19)$$

y del mismo modo, los otros coeficientes deben cumplir:

$$k_1^2 B_{rst} = \sum_n \left\{ B_{nst} \frac{(\ddot{\Psi}_n, \Psi_r)}{N_r'} + B_{rnt} \frac{(\ddot{\Psi}_n, \Psi_s)}{N_s'} + B_{rsn} \frac{(\ddot{\Psi}_n, \Psi_t)}{N_t'} \right\} \quad (20)$$

$$k_1^2 C_{rst} = \sum_n \left\{ C_{nst} \frac{(\ddot{\Psi}_n, \Psi_r)}{N_r''} + C_{rnt} \frac{(\ddot{\Psi}_n, \Psi_s)}{N_s''} + C_{rsn} \frac{(\ddot{\Psi}_n, \Psi_t)}{N_t'} \right\} \quad (21)$$

$$k_1^2 D_{rst} = \sum_n \left\{ D_{nst} \frac{(\ddot{\Psi}_n, \Psi_r)}{N_r''} + D_{rnt} \frac{(\ddot{\Psi}_n, \Psi_s)}{N_s'} + D_{rsn} \frac{(\ddot{\Psi}_n, \Psi_t)}{N_t'} \right\} \quad (22)$$

Una vez elegidos explícitamente los sistemas ortogonales, las ecuaciones (13) a (22) son las ecuaciones lineales y numéricas, que deben resolverse para encontrar los coeficientes de los desarrollos ortogonales.

Procediendo como en (1), se puede discutir la forma práctica de resolver las ecuaciones resultantes. No seguiremos adelante con este ejemplo, sin embargo, porque más nos interesa tratar el próximo caso.

## Parte II. BARRAS PERPENDICULARES

El problema que abordaremos a continuación, es el de la resolución de la ecuación de difusión en el lattice que muestra la fig. 3, formado por barras de combustible de sección cuadrada, colocadas en un moderador de manera tal que sus ejes siguen tres direcciones perpendiculares entre si.

Cortando el conjunto con planos de simetría perpendiculares a los ejes mencionados, obtenemos la celda elemental que aparece punteada en la fig. 3 y que se muestra aparte en la fig. 4. El sistema de coordenadas (x,y,z) ha sido elegido de tal manera que los límites de la celda los constituyen los planos  $x = -l$ ,  $y = -l$ ,  $z = -l$ ,  $x = L + l$ ,  $y = L + l$ ,  $z = L + l$ . Siendo L la separación mínima entre

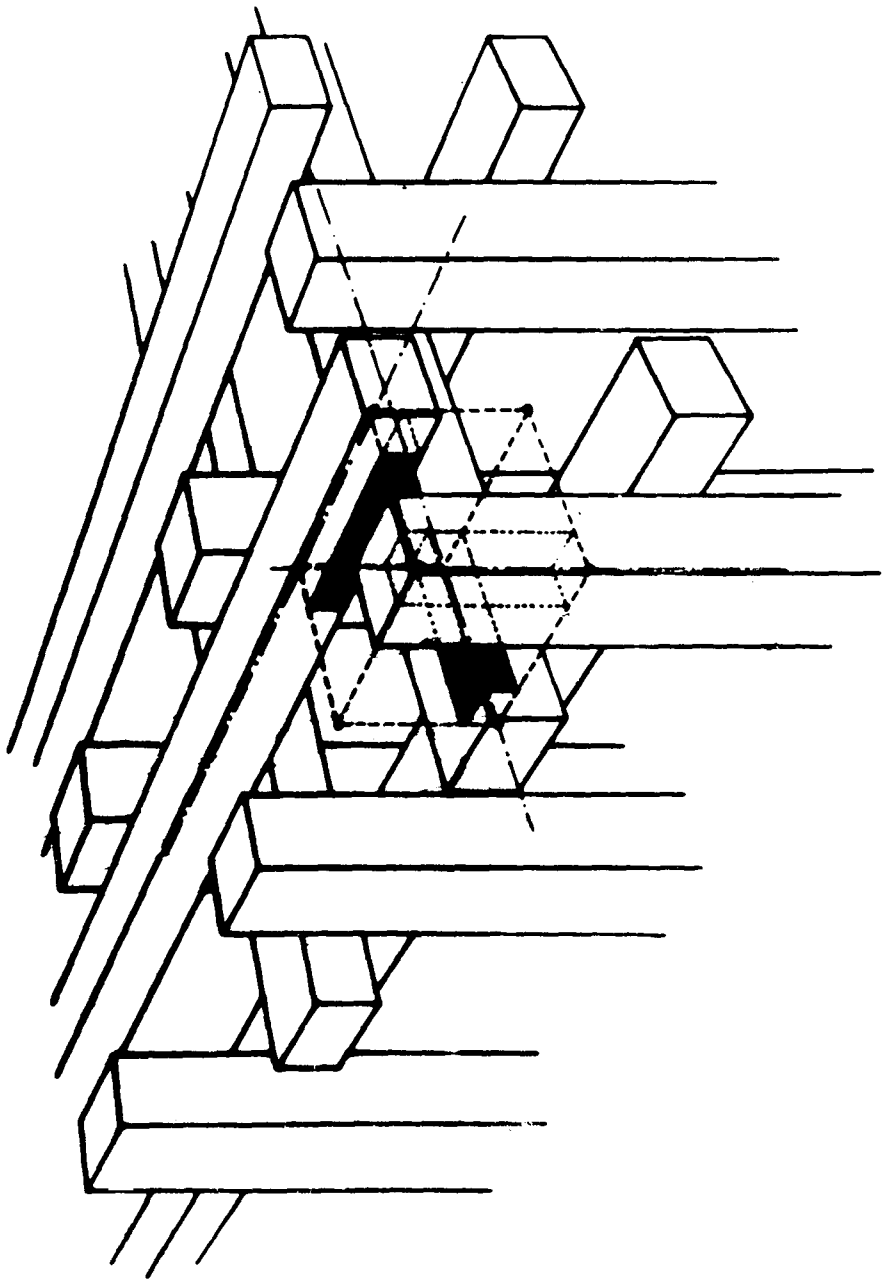


FIG. 3

dos barras y  $2l$  la medida de cada lado de las citadas barras de combustible. La fig. 5 muestra junto a los ejes  $x, y, z$ ; los formados por las variables  $u=l-x$ ,  $v=l-z$ ,  $w=l-y$ .

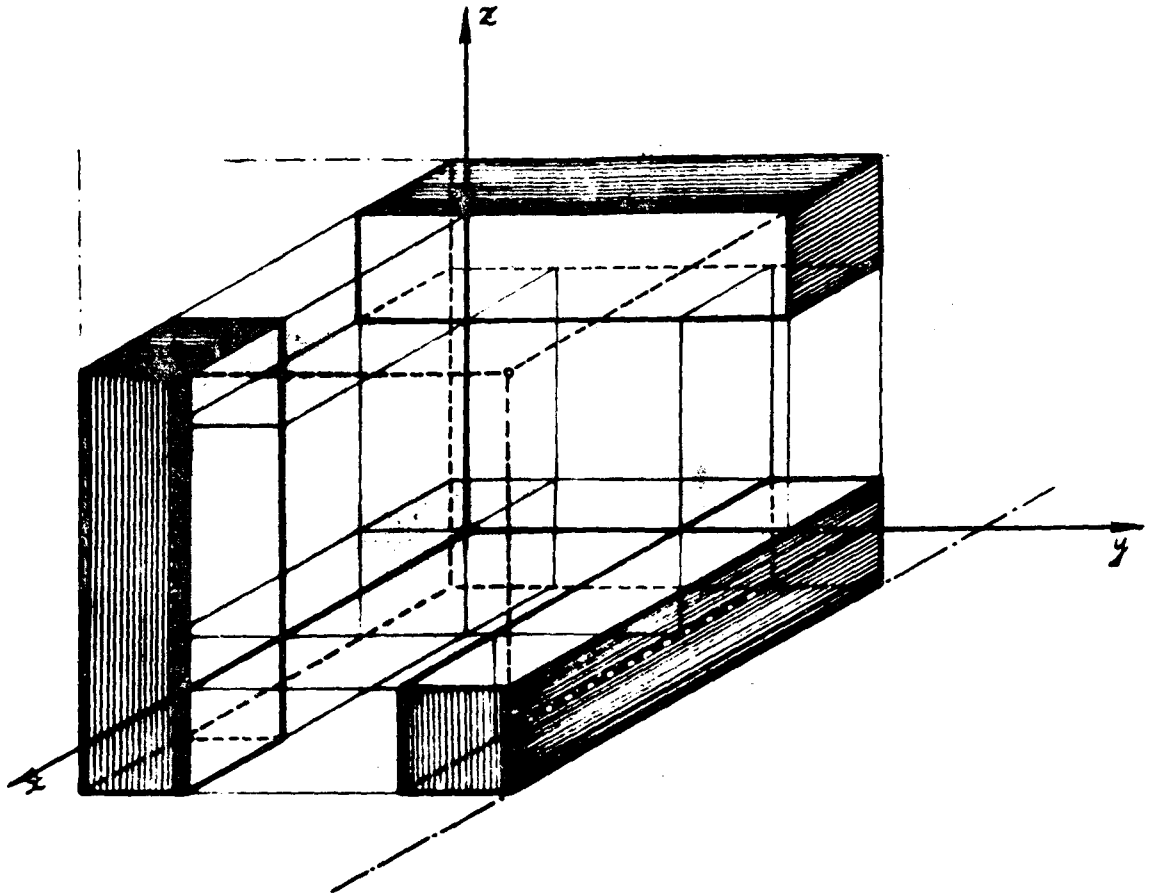


FIG. 4

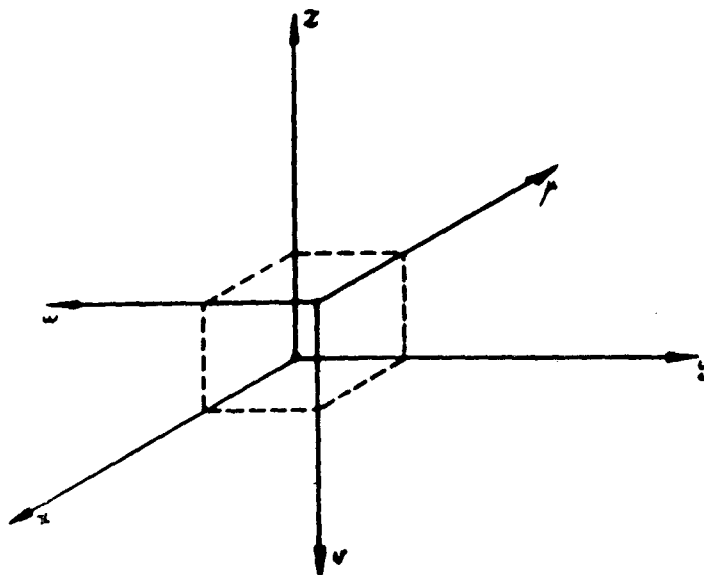


FIG. 5

Cortando la celda de la fig. 4 mediante los planos  $x=0$ ,  $y=0$ ,  $z=0$ ,  $u=0$ ,  $v=0$ ,  $w=0$ , se logra dividirla en 27 regiones homogéneas, 9 de ellas ocupadas exclusivamente por combustible y las otras 18 por el moderador.

Las 27 zonas obtenidas, no son sin embargo independientes. En efecto, es fácil ver que si  $\Phi(x,y,z)$  es la solución buscada, para toda la celda, debe resultar invariante ante el intercambio cíclico  $x \rightarrow y \rightarrow z \rightarrow x$ , (y el inverso). Y también ante el cambio  $x \rightarrow u$ ,  $y \rightarrow v$ ,  $z \rightarrow w$ . Pero estos cambios transforman algunas de las regiones en otras, resultando en definitiva, según veremos, que solo es necesario el conocimiento del flujo neutrónico en siete zonas convenientemente elegidas, para deducir el valor del flujo en las veinte restantes.

#### 4) Desarrollos ortogonales

Enumeraremos ahora las diferentes zonas en las que definiremos los desarrollos del flujo. Junto a ellas daremos las que resultan al efectuar los cambios de sistemas de coordenadas que dejan invariante el flujo de neutrones. Por otra parte, no daremos la situación explícita de la región implicada puesto que el mismo desarrollo permite inferirla, según ya hemos visto en el N° 2. Además, por simplicidad, supondremos que, tal como sucede cuando se utilizan los polinomios de Legendre (ver 1):

$$\psi_n(x) = (-1)^n \psi_n(L-x)$$

Las zonas comprendidas en las numeraciones I a V, están ocupadas por moderador, mientras que VI y VII designan regiones ocupadas por el combustible.

I)

$$\Phi_I(x,y,z) = \sum_{rst} A_{rst} \cdot \psi_r(x) \cdot \psi_s(y) \cdot \psi_t(z) + Q \quad (23)$$

Esta zona (cubo central), es invariante ante los cambios cíclicos de coordenadas, por lo tanto

$$A_{rst} = A_{str} = A_{trs}$$

Y también lo es ante el pasaje del primer sistema al segundo:

$$\sum_{rst} A_{rst} \cdot \psi_r(x) \cdot \psi_s(y) \cdot \psi_t(z) = \sum_{rst} A_{rst} \cdot \psi_r(u) \cdot \psi_s(v) \cdot \psi_t(w) =$$

$$\begin{aligned}
 &= \sum_{rst} A_{rst} \psi_r(L-x) \cdot \psi_s(L-z) \psi_t(L-y) = \sum_{rst} A_{rst} (-1)^{r+s+t} \psi_r(x) \psi_s(z) \psi_t(y) \\
 &= \sum_{rst} A_{rts} (-1)^{r+s+t} \psi_r(x) \cdot \psi_s(y) \cdot \psi_t(z)
 \end{aligned}$$

$$\therefore A_{rst} = A_{rts} (-1)^{r+s+t} ; (= A_{trs} = A_{str})$$

$$\text{II)} \quad \Phi_{\text{II}}(x,y,z) = \sum_{rst} B_{rst} \psi_r(x) \cdot \psi_s(y) \cdot \psi_t(z) + Q \quad (24)$$

$$\Phi_{\text{II}}^{(2)}(x,y,z) = \sum_{rst} B_{rst} \psi_r(u) \cdot \psi_s(v) \cdot \psi_t(w) + Q \quad (25)$$

$$B_{rst} = B_{str} = B_{trs}$$

$$\text{III)} \quad \Phi_{\text{III}}(x,y,z) = \sum_{rst} C_{rst} \psi_r(x) \cdot \psi_s(y) \cdot \psi_t(z) + Q \quad (26)$$

$$\Phi_{\text{III}}^{(2)}(x,y,z) = \sum_{rst} C_{rst} \psi_r(y) \cdot \psi_s(z) \cdot \psi_t(x) + Q \quad (27)$$

$$\Phi_{\text{III}}^{(3)}(x,y,z) = \sum_{rst} C_{rst} \psi_r(z) \cdot \psi_s(x) \cdot \psi_t(y) + Q \quad (28)$$

$$\Phi_{\text{III}}^{(4)}(x,y,z) = \sum_{rst} C_{rst} \psi_r(u) \cdot \psi_s(v) \cdot \psi_t(w) + Q \quad (29)$$

$$\Phi_{\text{III}}^{(5)}(x,y,z) = \sum_{rst} C_{rst} \psi_r(v) \cdot \psi_s(w) \cdot \psi_t(u) + Q \quad (30)$$

$$\Phi_{\text{III}}^{(6)}(x,y,z) = \sum_{rst} C_{rst} \psi_r(w) \cdot \psi_s(u) \cdot \psi_t(v) + Q \quad (31)$$

$$\text{IV)} \quad \Phi_{\text{IV}}(x,y,z) = \sum_{rst} D_{rst} \psi_r(x) \cdot \psi_s(y) \cdot \psi_t(z) + Q \quad (32)$$

$$\Phi_{\text{IV}}^{(2)}(x,y,z) = \sum_{rst} D_{rst} \psi_r(y) \cdot \psi_s(z) \cdot \psi_t(x) + Q \quad (33)$$

$$\Phi_{IV}^{(3)}(x, y, z) = \sum_{rst} D_{rst} \Psi_r(z) \cdot \Psi_s(x) \cdot \Psi_t(y) + Q \quad (34)$$

$$\Phi_{IV}^{(4)}(x, y, z) = \sum_{rst} D_{rst} \Psi_r(u) \cdot \Psi_s(v) \cdot \Psi_t(w) + Q \quad (35)$$

$$\Phi_{IV}^{(5)}(x, y, z) = \sum_{rst} D_{rst} \Psi_r(v) \cdot \Psi_s(w) \cdot \Psi_t(u) + Q \quad (36)$$

$$\Phi_{IV}^{(6)}(x, y, z) = \sum_{rst} R_{rst} \Psi_r(w) \cdot \Psi_s(u) \cdot \Psi_t(v) + Q \quad (37)$$

V)

$$\Phi_V(x, y, z) = \sum_{rst} E_{rst} \Psi_r(x) \cdot \Psi_s(w) \cdot \Psi_t(z) + Q \quad (38)$$

$$\Phi_V^{(2)}(x, y, z) = \sum_{rst} E_{rst} \Psi_r(y) \cdot \Psi_s(v) \cdot \Psi_t(x) + Q \quad (39)$$

$$\Phi_V^{(3)}(x, y, z) = \sum_{rst} E_{rst} \Psi_r(z) \cdot \Psi_s(u) \cdot \Psi_t(y) + Q \quad (40)$$

$$E_{rst} = E_{srt} (-1)^t$$

VI)

$$\Phi_{VI}(x, y, z) = \sum_{rst} F_{rst} \Psi_r(x) \cdot \Psi_s(y) \cdot \Psi_t(v) \quad (41)$$

$$\Phi_{VI}^{(2)}(x, y, z) = \sum_{rst} F_{rst} \Psi_r(y) \cdot \Psi_s(z) \cdot \Psi_t(u) \quad (42)$$

$$\Phi_{VI}^{(3)}(x, y, z) = \sum_{rst} F_{rst} \Psi_r(z) \cdot \Psi_s(x) \cdot \Psi_t(w) \quad (43)$$

$$\Phi_{VI}^{(4)}(x, y, z) = \sum_{rst} F_{rst} \Psi_r(u) \cdot \Psi_s(v) \cdot \Psi_t(y) \quad (44)$$

$$\Phi_{VI}^{(5)}(x, y, z) = \sum_{rst} F_{rst} \Psi_r(v) \cdot \Psi_s(w) \cdot \Psi_t(x) \quad (45)$$

$$\Phi_{VI}^{(6)}(x, y, z) = \sum_{rst} F_{rst} \Psi_r(w) \cdot \Psi_s(u) \cdot \Psi_t(z) \quad (46)$$

VII)

$$\Phi_{VII}(x,y,z) = \sum_{rst} G_{rst} \psi_r(x) \cdot \psi_s(y) \cdot \psi_t(v) \quad (47)$$

$$\Phi_{VII}^{(2)}(x,y,z) = \sum_{rst} G_{rst} \psi_r(y) \cdot \psi_s(z) \cdot \psi_t(u) \quad (48)$$

$$\Phi_{VII}^{(3)}(x,y,z) = \sum_{rst} G_{rst} \psi_r(z) \cdot \psi_s(x) \cdot \psi_t(w) \quad (49)$$

$$G_{rst} = G_{tsr} (-1)^s$$

Con esto queda completada la escritura de los desarrollos ortogonales para las 27 regiones en las que se ha dividido a la celda elemental.

Como puede apreciarse, solo existen siete desarrollos independientes y los demás se deducen de éstos mediante cambios de coordenadas.

5) Determinación de los coeficientes.

Las ecuaciones que fijarán los coeficientes, son las que resultan de imponer las condiciones ya enumeradas en el N° 3.

a) Condiciones de contorno.

$$\sum_r B_{rst} \psi_r(-l) = 0 \quad (50)$$

$$\sum_r C_{rst} \psi_r(-l) = 0 \quad (51)$$

$$\sum_r D_{rst} \psi_r(-l) = 0 \quad (52)$$

$$\sum_s D_{rst} \psi_s(-l) = 0 \quad (53)$$

$$\sum_r E_{rst} \psi_r(-l) = 0 \quad (54)$$

$$\sum_r F_{rst} \psi_r(-l) = 0 \quad (55)$$

$$\sum_s F_{rst} \psi_s(-l) = 0 \quad (56)$$

$$\sum_t F_{rst} \psi_t(-l) = 0 \quad (57)$$

$$\sum_r G_{rst} \psi_r(-l) = 0 \quad (58)$$

b) Condiciones de continuidad de flujo.

$$\sum_r A_{rst} \psi_r(0) = \sum_r C_{rst} \psi_r(0) \quad (59)$$

$$\sum_t B_{rst} \psi_t(0) = \sum_t D_{rst} \psi_t(0) \quad (60)$$

$$\sum_s C_{rst} \psi_s(0) = \sum_s D_{rst} \psi_s(0) \quad (61)$$

$$\sum_s C_{rst} \psi_s(L) = \sum_s E_{rst} \psi_s(0) \quad (62)$$

$$\sum_t C_{rst} \psi_t(L) + (Q, \psi_r \psi_s) = \sum_t G_{rst} \psi_t(0) \quad (63)$$

$$\sum_t D_{rst} \psi_t(L) + (Q, \psi_r \psi_s) = \sum_t F_{rst} \psi_t(0) \quad (64)$$

$$\sum_t E_{rst} \psi_t(0) + (Q, \psi_r \psi_s) = \sum_t F_{trs} \psi_t(0) \quad (65)$$

$$\sum_s F_{rst} \psi_s(0) = \sum_s G_{rst} \psi_s(0) \quad (66)$$

c) Condiciones de continuidad de corriente.

$$\sum_r A_{rst} \dot{\psi}_r(0) = \sum_r C_{rst} \dot{\psi}_r(0) \quad (67)$$

$$\sum_t B_{rst} \dot{\psi}_t(0) = \sum_t D_{rst} \dot{\psi}_t(0) \quad (68)$$

$$\sum_s C_{rst} \dot{\psi}_s(0) = \sum_s D_{rst} \dot{\psi}_s(0) \quad (69)$$

$$\sum_s C_{rst} \dot{\psi}_s(L) = -\sum_s E_{rst} \dot{\psi}_s(0) \quad (70)$$

$$\frac{D_1}{D_0} \sum_t C_{rst} \dot{\psi}_t(L) = -\sum_t G_{rst} \dot{\psi}_t(0) \quad (71)$$

$$\frac{D_1}{D_0} \sum_t D_{rst} \dot{\psi}_t(L) = -\sum_t F_{rst} \dot{\psi}_t(0) \quad (72)$$

$$\frac{D_1}{D_0} \sum_t E_{rst} \dot{\psi}_t (0) = \sum_t F_{trs} \dot{\psi}_t (0) \quad (73)$$

$$\sum_s F_{rst} \dot{\psi}_s (0) = \sum_s G_{rst} \dot{\psi}_s (0) \quad (74)$$

d) Condiciones de cumplimiento de la ecuación diferencial.

$$k_1^2 A_{rst} = \sum_n \left\{ A_{nst} \left( \ddot{\psi}_n, \frac{\psi_r}{N_r} \right) + A_{rnt} \left( \ddot{\psi}_n, \frac{\psi_s}{N_s} \right) + A_{rsn} \left( \ddot{\psi}_n, \frac{\psi_t}{N_t} \right) \right\} \quad (75)$$

$$k_1^2 B_{rst} = \sum_n \left\{ B_{nst} \left( \ddot{\psi}_n, \frac{\psi_r}{N_r} \right) + B_{rnt} \left( \ddot{\psi}_n, \frac{\psi_s}{N_s} \right) + B_{rsn} \left( \ddot{\psi}_n, \frac{\psi_t}{N_t} \right) \right\} \quad (76)$$

$$k_1^2 C_{rst} = \sum_n \left\{ C_{nst} \left( \ddot{\psi}_n, \frac{\psi_r}{N_r} \right) + C_{rnt} \left( \ddot{\psi}_n, \frac{\psi_s}{N_s} \right) + C_{rsn} \left( \ddot{\psi}_n, \frac{\psi_t}{N_t} \right) \right\} \quad (77)$$

$$k_1^2 D_{rst} = \sum_n \left\{ D_{nst} \left( \ddot{\psi}_n, \frac{\psi_r}{N_r} \right) + D_{rnt} \left( \ddot{\psi}_n, \frac{\psi_s}{N_s} \right) + D_{rsn} \left( \ddot{\psi}_n, \frac{\psi_t}{N_t} \right) \right\} \quad (78)$$

$$k_1^2 E_{rst} = \sum_n \left\{ E_{nst} \left( \ddot{\psi}_n, \frac{\psi_r}{N_r} \right) + E_{rnt} \left( \ddot{\psi}_n, \frac{\psi_s}{N_s} \right) + E_{rsn} \left( \ddot{\psi}_n, \frac{\psi_t}{N_t} \right) \right\} \quad (79)$$

$$k_0^2 F_{rst} = \sum_n \left\{ F_{nst} \left( \ddot{\psi}_n, \frac{\psi_r}{N_r} \right) + F_{rnt} \left( \ddot{\psi}_n, \frac{\psi_s}{N_s} \right) + F_{rsn} \left( \ddot{\psi}_n, \frac{\psi_t}{N_t} \right) \right\} \quad (80)$$

$$k_0^2 G_{rst} = \sum_n \left\{ G_{nst} \left( \ddot{\psi}_n, \frac{\psi_r}{N_r} \right) + G_{rnt} \left( \ddot{\psi}_n, \frac{\psi_s}{N_s} \right) + G_{rsn} \left( \ddot{\psi}_n, \frac{\psi_t}{N_t} \right) \right\} \quad (81)$$

### 6) Discusión de las ecuaciones.

Las ecuaciones (50) a (81) forman el sistema lineal y numérico que es necesario resolver para encontrar los coeficientes de los desarrollos ortogonales. Si los citados desarrollos son infinitos, también lo serán las ecuaciones a resolver, cosa que, por supuesto, implica la necesidad de un tratamiento aproximado de las mismas.

Lógicamente, es de esperar que la convergencia de los desarrollos (23) a (49), contengan el hecho que los sumandos se hacen cada vez más y más pequeños, hasta que todos ellos desde uno en adelante (es decir el resto de la serie) terminan por hacerse despreciables. Toda vía más, la ecuación de difusión solo es satisfecha por el flujo natrónico de manera aproximada; por ello, no tiene mucho sentido satisfacer en forma exacta las ecuaciones de difusión (1) y (2).

Las anteriores consideraciones hacen razonable la forma de aproximación que describimos en el anterior trabajo (ver 1). Consiste en lo siguiente:

De los desarrollos ortogonales nos quedamos con aquellos sumandos que contengan únicamente las  $p$  primeras funciones del sistema  $\Psi_n$  y las  $q$  primeras funciones del sistema  $\Psi'_n$ . Esto equivale a suponer que los coeficientes son nulos cuando alguno de los subíndices superan a  $p$  o bien a  $q$  (según corresponda). Diremos de una tal aproximación que es de clase  $(p, q)$ .

Teniendo en cuenta las propiedades de simetría de los coeficientes, encontramos que en una aproximación de clase  $(p, q)$  existirá el siguiente número de incógnitas o coeficientes a calcular:

Coeficientes	Número
$A_{rst}$	$\frac{1}{3} \cdot p \cdot (2p^2 + 7 - 3(-1)^p)$
$B_{rst}$	$\frac{1}{3} \cdot q \cdot (q^2 + 2)$
$C_{rst}$	$p^2 \cdot q$
$D_{rst}$	$p \cdot q^2$
$E_{rst}$	$\frac{1}{2} \cdot q \cdot (pq + \frac{1}{2} - \frac{1}{2}(-1)^p)$
$F_{rst}$	$q^3$
$G_{rst}$	$\frac{1}{2} \cdot q \cdot (pq + \frac{1}{2} - \frac{1}{2}(-1)^p)$

Por su parte, el número de ecuaciones que resulta al substituir los subíndices libres en las ecuaciones (50) a (82) es,

por la condición a) :  $p^2 + 4q^2 + 4pq$

por la condición b) :  $p^2 + 4q^2 + 3pq$ , y el mismo número por la condición c). La condición d), por último, genera el mismo número de ecuaciones que el de incógnitas existentes.

Si el número de incógnitas supera a la cantidad  $3p^2 + 12q^2 + 10pq$ , suma de las condiciones a) b) y c), entonces es posible satisfacer

en forma exacta las ecuaciones de contorno y continuidad de flujo y corriente. El número de incógnitas en exceso se utiliza para satisfacer en forma aproximada la ecuación de difusión. Esto último significa que de las ecuaciones (75) a (81) tomamos tantas como sean necesarias para determinar en forma completa todas las incógnitas. Para tomar dichas ecuaciones hasta conseguir el número requerido es necesario antes jerarquizarlas, y considerarlas luego en el orden establecido. Puede procederse, por ej. de acuerdo con el siguiente ordenamiento. Sea a el máximo de los subíndices y sean b y c los otros dos, en orden decreciente:  $a \geq b \geq c$ . Entre dos coeficientes determinados X y X', consideramos que X precede a X' si:  $a < a'$ ; o siendo  $a = a'$ , si  $b < b'$ ; o siendo  $a = a'$  y  $b = b'$ , si  $c < c'$ . Cuando los tres subíndices son iguales, X y X' se consideran ordenados según el orden lexicográfico:  $X_{rst}$  precede a  $X'_{uvw}$  si  $r < u$ ; o si  $r = u$  y  $s < v$ ; o bien cuando  $r = u, s = v$  y  $t < w$ . Por último, si los tres subíndices son iguales, haremos que X y X' queden ordenados por alfabético, es decir  $X_{rst}$  precede a  $X'_{rst}$  si en el abecedario X precede a X'. Habiendo efectuado una tal ordenación, las ecuaciones (75) a (81) se consideran en el orden jerárquico asignado a los miembros de la izquierda de cada una de las ecuaciones.

7) Utilización de polinomios de Legendre.

Las ecuaciones escritas, toman su forma numérica explícita cuando se particulariza en la elección de los sistemas ortogonales. Una posibilidad atractiva sería la utilización de series de Fourier, pero desgraciadamente ello no es posible en el presente caso porque cada una de las funciones trigonométricas satisfacen ecuaciones de la forma

$$\ddot{\Psi}_n + \omega_r^2 \Psi_n = 0$$

y por ello ningún número finito de términos podría usarse para aproximar la (1), salvo en la solución trivial  $\Phi = 0$ .

En cambio, si es posible la utilización de polinomios de Legendre.

$$\Psi_r = P_r \left( \frac{2x}{L} - 1 \right) \quad ; \quad \Psi_r = P_r \left( -\frac{2x}{L} - 1 \right)$$

Para las propiedades de estos polinomios ver p. ej. (3). Y para las correspondientes al sistema ortogonal resultante  $\Psi_r$  o  $\Psi_r$ , ver el artículo (1). Tenemos así:

$$N'_n = \frac{L}{2n+1} \quad ; \quad N'_n = \frac{l}{2n+1}$$

$$\psi_n(0) = \Psi_n(0) = (-1)^n \quad ; \quad \psi_n(L) = \Psi_n(-l) = 1$$

$$\dot{\psi}_n(0) = -(-1)^n \frac{n(n+1)}{L} \quad ; \quad \dot{\psi}_n(L) = \frac{n(n+1)}{L}$$

$$\dot{\Psi}_n(0) = (-1)^n \frac{n(n+1)}{l} \quad ; \quad \dot{\Psi}_n(-l) = -\frac{n(n+1)}{l}$$

$$L.(\ddot{\psi}_n, \psi_m) = l.(\ddot{\Psi}_n, \Psi_m) = 4 a_{sn}$$

$$a_{sn} = (s+1)(n+s+1) \quad ; \quad \text{para } n \geq m+2; \quad n-m = n^\circ \text{ par}$$

$$s = \frac{n-m}{2} - 1 \quad . \quad \text{De lo contrario } a_{sn} = 0$$

La substitución de estos valores en las ecuaciones (50) a (81) proporciona las ecuaciones numéricas a resolver, para determinar los coeficientes de los desarrollos ortogonales.

### 8) Resumen.

Un método para encontrar la distribución del flujo neutrónico en un lattice determinado, ya descrito en un trabajo anterior, ha sido aplicado para encontrar el flujo de neutrones en un arreglo formado por barras de combustible (sección cuadrada) sumergidas en un moderador siguiendo tres direcciones perpendiculares entre si.

La celda elemental resultante, ha sido tratada directamente, sin de formarla, de manera que las soluciones explícitas de las ecuaciones numéricas y lineales escritas, proporcionan detalles (estructura fina) que no puede dar ningún método que deforme la celda. Además, mientras que para los ejemplos examinados en el trabajo anterior existen métodos "de redondeo" que hacen que el problema dependa de una sola dimensión, para el caso que examinamos no existe ningún procedimiento que permita una tal reducción.

BIBLIOGRAFIA

- 1) C.G. Bollini, "Método del desarrollo ortogonal por zonas" Publicaciones de la C.N.E.A. Serie Interna N° 3.
- 2) S. Glasstone, M.C. Edlund, "The Elements of Nuclear Reactor Theory" (1952).
- 3) T.M. MacRobert, "Spherical Harmonics" (1947).