

01.82.05

C.N.E.A. Biblioteca	
ARCHIVO PUBLICACIONES	
Nº	AÑO
3	1982

CNEA-NT 9/82

REPUBLICA ARGENTINA
COMISION NACIONAL DE ENERGIA ATOMICA
Dependiente de la Presidencia de la Nación

SOBRE LA SOLUCION NUMERICA DE FORMAS CONSERVATIVAS Y NO CONSERVATIVAS
EN EL DESPLAZAMIENTO DE FLUIDOS INMISCIBLES EN UN MEDIO POROSO POR EL
METODO DEL MUESTREO ESTADISTICO A TROZOS

Eduardo Laggiard y Guillermo Marshall

Buenos Aires
1982

SOBRE LA SOLUCION NUMERICA DE FORMAS CONSERVATIVAS Y NO CONSERVATIVAS
EN EL DESPLAZAMIENTO DE FLUIDOS INMISCIBLES EN UN MEDIO POROSO POR EL
METODO DEL MUESTREO ESTADISTICO A TROZOS*

Eduardo Laggiard** y Guillermo Marshall***

Abril 1981

RESUMEN

Se estudia la solución de las ecuaciones que gobiernan la circulación unidimensional de un fluido bifásico en un medio poroso en presencia de gradientes pronunciados y/o frentes abruptos utilizando el método de muestreo estadístico a trozos y técnicas de diferencias finitas. Se extiende la solución para el caso de condiciones de borde denominadas "efecto pared".

Los resultados obtenidos son satisfactorios. El método de muestreo estadístico a trozos tiene la ventaja de resolver los gradientes pronunciados y los frentes abruptos sin introducir dispersión o dispersión numérica.

ABSTRACT

This paper deals with the solution of the one dimensional porous media equations. The Random Choice Method and finite difference thechnics are used to compute saturation discontinuities.

The wall effect is introduced as a boundary condition. The results obtained are satisfactory.

The advantage of the Random Choice Method lies in its ability to simulate discontinuities and in its lack of numerical dissipation.

* Este trabajo fue realizado en el Centro de Cálculo Científico de la Comisión Nacional de Energía Atómica y completado en Rockefeller University donde el segundo autor es investigador visitante.

** Facultad de Ingeniería - Dpto. de Física. Paseo Colón 850 (Capital Federal), Buenos Aires (Argentina).

*** Consejo Nacional de Investigaciones y Comisión Nacional de Energía Atómica, Buenos Aires (Argentina).

1. INTRODUCCION

El desplazamiento de un fluido bifásico en un medio poroso da lugar a la presencia de frentes de propagación pronunciados por ejemplo entre diferentes fluidos o entre regiones de fluidos con diferentes concentraciones. Aún sin estar presentes inicialmente estos frentes pueden desarrollarse en el tiempo como consecuencia del carácter no lineal del proceso (ver por ejemplo Albright et al. [1]). En el caso de que los efectos difusivos debidos a la presión capilar sean despreciables los frentes pueden resultar muy pronunciados transformándose en abruptos (discontinuidades) en el caso límite de presión capilar nula.

La presencia de frentes abruptos es un problema difícil de simular cuando se utilizan los métodos clásicos de aproximación tales como diferencias finitas o elementos finitos. Esto se debe a que en presencia de discontinuidades se violan las hipótesis básicas en las que dichos métodos están basados. Un remedio a este problema es la introducción de viscosidad artificial (viscosidad numérica) que previene la inestabilidad numérica.

En los últimos años se iniciaron estudios para tratar de evitar estas dificultades utilizando una extensión del Método de la Elección Aleatoria para la solución de problemas de desplazamiento de fluidos inmiscibles en medios porosos. El Método de la Elección Aleatoria consiste en la solución local teórica de problemas de Riemann y técnicas de muestreo estadístico. La ventaja de la utilización del método mencionado radica en su habilidad intrínseca para resolver discontinuidades sin introducir viscosidad numérica y sin necesidad de técnicas especiales para el tratamiento de las mismas.

La primera aplicación del Método de la Elección Aleatoria a flujo en medios porosos se debe a Concus y Proskurowski [8]. En dicho trabajo se resuelve el problema del desplazamiento de un fluido bifásico inmiscible e incompresible con un frente abrupto. El modelo consiste en despreciar los efectos de la gravedad y de la presión capilar obteniéndose en el caso de un flujo unidimensional una sola ley de conservación denominada ecuación de Buckley-Leverett (ver por ejemplo Collins [7]). Posteriormente Albright et al. [3] resuelven una ecuación analoga a la de Buckley-Leverett para dos dimensiones espaciales utilizando un método de pasos fraccionarios. Albright y Concus [2] presentan el problema bidimensional completo consistente en la resolución del sistema de ecuaciones que describen el desplazamiento de un fluido bifásico inmiscible en ausencia de efectos de presión capilar y de la gravedad. Luego Albright et al. [1] estudian la solución del desplazamiento de un fluido bifásico inmiscible en una y dos dimensiones espaciales teniendo en cuenta los efectos de la gravedad y de la presión capilar.

Paralelamente Glimm et al. [11] y [12] estudian el problema de la inestabilidad de frentes con formación de dedos en el caso de dos dimensiones espaciales.

En este trabajo se estudian detalladamente los aspectos más relevantes de la simulación numérica del desplazamiento de fluidos inmiscibles en medios porosos mediante el Método del Muestreo Estadístico a Trozos (en adelante método MET; este método difiere del anterior solo en la técnica que se utiliza para efectuar el muestreo estadístico) y se extiende uno de los modelos mencionados más arriba para condiciones de borde más realistas teniendo en cuenta el "efecto pared".

En base a lo expuesto precedentemente se clasifica a las ecuaciones de los diferentes modelos que describen el desplazamiento de fluidos bifásicos inmiscibles en medios porosos en formas conservativas y formas no conservativas. Las formas conservativas incluyen la ecuación de Buckley-Leverett y la ecuación para el desplazamiento teniendo en cuenta solamente el efecto gravitatorio. Las formas no conservativas están constituidas por la ecuación para el desplazamiento cuando se toma en cuenta los efectos de la presión capilar (difusión) o la presencia de fuentes. Como veremos más adelante esta distinción es importante para el tratamiento numérico utilizando el método MET.

Este informe está organizado de la siguiente manera: En la sección 2 se introducen las características principales de formas conservativas y el procedimiento de cálculo de las mismas por medio de la ecuación escalar homogénea de onda. Para ello se analizan diversas formas para el término convectivo $F(u)_x$. En particular se analiza el término convectivo asociado a la ecuación de Buckley-Leverett y se presentan resultados numéricos utilizando el método MET. En la sección 3 se estudian las formas no conservativas y el procedimiento de cálculo de las mismas a través del análisis de diversas formas de la ecuación escalar inhomogénea de onda. Como caso particular se analiza la ecuación del desplazamiento de un fluido bifásico inmiscible en un medio poroso. Finalmente se estudia el tratamiento numérico del problema de borde denominado efecto pared.

2. LA ECUACION ESCALAR HOMOGENEA DE ONDA

Un ejemplo simple de una forma conservativa es la ecuación escalar homogénea de onda

$$u_t + F(u)_x = 0 \quad (2.1)$$

donde $F(u)$ es un flujo de densidad, u es un escalar, x es la coordenada espacial y t es la coordenada temporal. Entonces

$$F(u)_x = \frac{\partial F(u)}{\partial x} = \frac{dF(u)}{du} \frac{\partial u}{\partial x} = F'(u)u_x \quad (2.2)$$

Reemplazando la ecuación (2.2) en (2.1) se tiene

$$u_t + F'(u)u_x = 0 \quad (2.3)$$

La ecuación (2.1) se dice que está escrita en forma conservativa (ver por ejemplo Lax [15]). En ausencia de discontinuidades las expresiones (2.1) y (2.3) son equivalentes.

El problema de Riemann asociado a la ecuación (2.1) consiste en

$$u(x,0) = f(x) = \begin{cases} u_L & \text{para } x < 0 \\ u_R & \text{para } x > 0 \end{cases} \quad (2.4)$$

donde u_L y u_R son los valores iniciales (constantes). Dado que $u = u(x,t)$ su diferencial total se escribe

$$du = \frac{\partial u}{\partial x} dx + \frac{\partial u}{\partial t} dt$$

o también

$$\frac{du}{dt} = \frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial u}{\partial x} \frac{dx}{dt} \quad (2.5)$$

Comparando las expresiones (2.5) y (2.3) se deduce que la ecuación (2.3) puede escribirse como

$$\frac{du}{dt} = 0 \quad \text{si} \quad \frac{dx}{dt} = F'(u) \quad (2.6)$$

La expresión (2.6) indica que $u = \text{cte}$ a lo largo de curvas con pendiente $F'(u)$. Estas curvas son rectas dado que siendo u constante a lo largo de ellas también debe serlo $F'(u)$. Esta familia de líneas rectas se denominan características. Dado que el patrón de características depende de $F'(u)$ en lo que sigue nos concentraremos en la información que puede ser obtenida de la función $F(u)$. Para ello hemos de considerar diferentes formas para $F(u)$ siguiendo a Chorin y Marsden [5]. Supongamos que en la ecuación (2.1) $F(u)$ esta dado por

$$F(u) = au, \quad a = \text{cte.} > 0 \quad (2.7)$$

En las Figuras (2.1) y (2.2) se indican los valores iniciales correspondientes al problema de Riemann (2.4) y el gráfico de $F(u)$, respectivamente. Entonces $F'(u) = a$. En este caso particular se puede ver fácilmente que las discontinuidades se propagan a lo largo de las características: la velocidad de propagación de una discontinuidad esta determinada por la condición de Rankine-Hugoniot (ver por ejemplo Lax [15] o Chorin y Marsden [5]).

$$S = \frac{[F(u)]}{[u]} = \frac{a(u_L - u_R)}{u_L - u_R} = a \quad (2.8)$$

Es decir que para este caso particular la transición entre los valores de u_L y u_R se efectúa a lo largo de la curva de $F(u)$ (como lo indica la flecha en la figura (2.2)).

Supongamos ahora que $F(u)$ es cóncava hacia arriba. Entonces $F'(u)$ es creciente en el intervalo $u \in [u_L, u_R]$ y $F''(u) > 0$. Veamos el siguiente ejemplo asociado a la ecuación (2.1)

$$F(u) = u^2/2, \quad F'(u) = u, \quad F''(u) = 1 \quad (2.9)$$

En las figuras (2.3) y (2.4) se indica el problema de Riemann asociado y los gráficos de $F(u)$ y $F'(u)$, respectivamente. De acuerdo a la figura (2.4) $F'(u_L) > F'(u_R)$ y de acuerdo a la ecuación (2.6)

$$F'(u_L) = \left(\frac{dx}{dt}\right)_L \quad \text{y} \quad F'(u_R) = \left(\frac{dx}{dt}\right)_R \quad (2.10)$$

En el plano $x-t$ estas pendientes están medidas a partir del eje vertical, su representación gráfica se ilustra en la figura (2.5). Por ello al hacer el diagrama del patrón de características en el plano $x-t$, para el caso de $u_L > u_R$ (por ejemplo $u_L = 1$, $u_R = 0$) se tiene el gráfico de la figura 2.6. La figura 2.6 nos muestra la intersección de características que determinan la trayectoria de una onda de choque cuya velocidad está dada por las condiciones de Rankine-Hugoniot

$$S = \frac{[F(u)]}{[u]} = \frac{u_L + u_R}{2} = \frac{1}{2} \quad (2.11)$$

Entonces la transición del estado izquierdo al estado derecho está representada por la línea recta en el diagrama $F(u) - u$ de la figura (2.7) donde la flecha indica el sentido. Esta claro que la secante ha reemplazado a la curva entre los valores de u_L y u_R . Supongamos ahora que para la misma función $F(u)$ los valores iniciales son tales que $u_L < u_R$. Entonces $F'(u_L) < F'(u_R)$ como se indica en la figura (2.8). De acuerdo a lo discutido anteriormente el patrón de características en el plano $x-t$ para este caso (por ejemplo $u_L = 0$, $u_R = 1$) se ilustra en la figura (2.9). La figura 2.9 nos muestra que el estado izquierdo y el derecho están conectados por una onda de rarefacción (indicada por el abanico de características con pendientes comprendidas entre los valores de $F'(u_L)$ y $F'(u_R)$). La transición del estado izquierdo al estado derecho se indica con una flecha en el diagrama $F(u)-u$ en la figura 2.8.

Supongamos ahora que $F(u)$ es cóncava hacia abajo. Entonces $F'(u)$ es decreciente y $F''(u) < 0$ en el intervalo $u \in [u_L, u_R]$. Veamos el siguiente ejemplo asociado a la ecuación (2.1)

$$F(u) = \sqrt{4u}, \quad F'(u) = \frac{1}{\sqrt{u}} \quad \text{y} \quad F''(u) = -\frac{1}{2\sqrt{u}^3} \quad (2.12)$$

En la figura 2.10 se indica el problema de Riemann asociado y los gráficos de $F(u)$ y $F'(u)$, respectivamente. Dado que $u_L < u_R$, $F'(u_L) > F'(u_R)$ de modo que el patrón de características en el plano $x-t$ para este caso (por ejemplo $u_L = 0$ y $u_R = 1$), se ilustra en la figura 2.11. La figura 2.11 nos muestra la intersección de características que

generan la onda de choque cuya velocidad está dada para el ejemplo propuesto por

$$S = \frac{[F(u)]}{[u]} = \frac{F(u_R) - F(u_L)}{u_R - u_L} = 2 \quad (2.13)$$

En la figura 2.10 se indica la transición dal estado izquierdo al derecho mediante la línea recta con flecha. Nuevamente aquí la porción de la curva $F(u)$ entre los valores de u_L y u_R ha sido reemplazada por la secante.

Supongamos, finalmente que para la misma $F(u)$ de la expresión (2.12) los valores iniciales son tales que $u_L > u_R$. Como se indica en la figura (2.12) $F'(u_L) < F'(u_R)$. El patrón de características en el plano $x-t$ (por ejemplo para $u_L = 1$ y $u_R = 0$) presentado en la figura 2.13 nos muestra que el estado izquierdo y el derecho están conectados por una onda de rarefacción. En el diagrama $F(u) - u$ de la figura 2.12 se indica la transición $u_R - u_L$ por una flecha.

Como síntesis de los casos analizados podemos decir que la transición del estado u_L al estado u_R se efectúa mediante una onda de choque si para $F(u)$ es

$$\left\{ \begin{array}{l} F''(u) > 0, \text{ si } u_L > u_R \\ \\ F''(u) < 0, \text{ si } u_L < u_R \end{array} \right. \quad (2.14)$$

Estas son las dos únicas posibilidades en que la transición $u_L - u_R$ se efectúa a través de la secante que une los pares de puntos $(u_L, F(u_L))$ y $(u_R, F(u_R))$.

Conviene a esta altura del desarrollo introducir el Método de Muestreo Estadístico a Trozos o Método de la Elección Aleatoria (también llamado Método de Glimm) que fue introducido por Glimm [9] y desarrollado por Chorin [4] para dinámica de gases y extendido a Mecánica de Fluidos por Marshall y Méndez [16]. Utilizaremos la ecuación escalar de onda (2.1) con $F(u) = au$, $a = \text{constante} > 0$ es decir

$$u_t + a u_x = 0 \quad (2.15)$$

El Método MET construye la solución a partir de un estado inicial por medio de dos pasos fraccionarios de igual extensión. Se describe solamente el primer paso dado que el segundo es similar. En el instante de tiempo $t_n = nk$ el método aproxima la solución $u(x, t_n)$ por una sucesión de estados constantes tal cual se ilustra en la figura (2.14). Luego, utilizando como valor inicial esa función continua a trozos, se construye la solución teórica de la ecuación (2.15), entre $t_n = nk$ y $t_{n+1/2} = (n+1/2)k$, superponiendo la soluciones locales de una sucesión de problemas de Riemann, uno para cada punto $x_i = ih$ (h : paso espacial, k : paso temporal). Un problema de Riemann para la ecuación (2.5) es un problema de valores iniciales de la forma

$$v_t + a v_x = 0 \quad (2.16)$$

para $t > t_n$, con

$$v(x, t_n) = \begin{cases} u_i^n & \text{para } x < (i+1/2)h \\ u_{i+1}^n & \text{para } x > (i+1/2)h \end{cases} \quad (2.17)$$

En general, si $u_{i+1}^n \neq u_i^n$ existe una discontinuidad en los valores iniciales (2.17) en $x = (i+1/2)h$, que se propaga con velocidad $dx/dt = 1/a$. La superposición de las soluciones de los problemas de Riemann correspondientes a cada nodo puede llevarse a cabo siempre que las discontinuidades no interactúen entre sí. Para esto es necesario que se cumpla la condición de Courant-Friedrichs-Lewy (CFL)

$$\frac{k}{h} < \frac{1}{a} \quad (2.18)$$

La construcción de la solución numérica para $t = (n+1/2)k$, es decir, la determinación de los valores de u a ser asignados a cada nodo, se realiza por medio de un muestreo estadístico dentro de cada intervalo espacial $[ih, (i+1)h]$. Este consiste en lo siguiente: si $v(x, t)$ es la solución de las ecuaciones (2.12)-(2.18) entonces

$$U_{i+1/2}^{n+1/2} = v(P_1) \quad (2.19)$$

donde P_1 es el punto de coordenadas $[(i+1/2 + 1/2 \theta_{i+1/2})h, (n+1/2)k]$, siendo $\theta_{i+1/2}$ un número generado al azar en el intervalo $[-1,1]$. Mediante un procedimiento idéntico se avanza la solución desde $t_{n+1/2}$ hasta t_{n+1} ; el proceso se repite para valores crecientes del tiempo (un análisis detallado del método MET y su justificación teórica se puede encontrar en Chorin y Marsden [5] o en Marshall y Méndez [16]). El éxito del método MET radica en la obtención de la solución local del problema de Riemann en forma eficiente. Una vez obtenida la solución del problema de Riemann se efectúa el muestreo estadístico de la solución para obtener al nuevo valor de la función u . La experiencia indica que el procedimiento de muestreo casi-aleatorio y equidistribuido de Van der Corput propuesto por Collella [6] es el más favorable para ser utilizado en la implementación del método MET. El número enésimo a_n en la secuencia de muestreo de Van der Corput es

$$a_n = \sum i_k 2^{-(k+1)} \quad (2.20)$$

donde la expansión binaria para n es

$$n = \sum i_k 2^k \quad (2.21)$$

Un estudio detallado de esta serie se encuentra en el trabajo mencionado más arriba.

A continuación se presenta la solución de la ecuación escalar de onda (2.1)-(2.9) utilizando el método MET y la generación de números casi-aleatorios de Van der Corput. En la figura 2.15 se muestran los resultados obtenidos cuando $u_L = 0$ y $u_R = 1$. De acuerdo a lo analizado en la figura (2.9) estas condiciones iniciales generan una onda de rarefacción la que se puede observar en la figura 2.15 para dos tiempos diferentes. Se puede demostrar (ver Collella [6]) que la utilización de la serie de Van der Corput produce perfiles con mínima dispersión.

Vamos a considerar ahora el caso en que para la ecuación (2.1) $F(u)$ posee un punto de inflexión; veamos el siguiente ejemplo para $F(u)$ asociado a la ecuación (2.1) y llamado ecuación de Buckley-Leverett (ver por ejemplo Peaceman [17] o Concus y Proskurowski [8])

$$F(u) = \frac{u^2}{u^2 + \alpha(1-u)^2}, \quad u \in [0,1] \quad (2.22)$$

$$F'(u) = \frac{2\alpha u(1-u)}{[u^2 + \alpha(1-u)^2]^2}, \quad \alpha = 1/2 \quad (2.23)$$

Supongamos que $F(u)$ posee un solo punto de inflexión u_I , que $F'(u) > 0$ y que $F(u)$ tiene un máximo en $u = u_I$. En la figura 2.16 se ilustra la forma de $F(u)$ y su derivada. Veremos a continuación como es posible descomponer la $F(u)$ dada en dos zonas tales que se reduzcan a los casos de curvas cóncavas hacia arriba y hacia abajo vistos precedentemente. Previamente enunciaremos las condiciones que deben cumplirse para obtener una solución débil única del problema de Riemann para la ecuación (2.1)-(2.22). Sabemos por lo descrito con anterioridad que si $u_L \neq u_R$ la solución de la ecuación (2.1)-(2.22) consiste en los estados constantes u_L y u_R separados por una onda centrada (que puede ser una onda de choque o de rarefacción). Ahora bien para obtener una solución débil única de la ecuación (2.1)-(2.22) se deben cumplir las siguientes condiciones a lo largo de cualquier curva de discontinuidad de $v(x,t)$ (ver por ejemplo Concus y Proskurowski [8])

- i) Condición de Rankine-Hugoniot: la curva de discontinuidad es una línea recta con pendiente

$$\frac{dx}{dx} = \frac{F(u_R) - F(u_L)}{u_R - u_L} \quad (2.24)$$

- ii) Condición E de Oleinik

$$\frac{F(u_R) - F(u)}{u_R - u} < \frac{F(u_R) - F(u_L)}{u_R - u_L} \quad (2.25)$$

para cualquier valor de $u \in [u_L, u_R]$. La condición E de Oleinik es equivalente a la condición de que la cuerda $l_{L,R}$ que une los frentes $(u_L, F(u_L))$ y $(u_R, F(u_R))$

$$l_{L,R}(u) = F(u_R) + \frac{F(u_R) - F(u_L)}{u_R - u_L} (u - u_R) \quad (2.26)$$

satisfaga

$$l_{L,R}(u) \geq F(u) \quad \text{si} \quad (u)_L > (u)_R$$

$$l_{L,R}(u) \leq F(u) \quad \text{si} \quad u_R > u_L \quad (2.27)$$

para cualquier valor de $u \in [u_L, u_R]$.

Conviene aclarar las condiciones enunciadas. La condición i es simplemente la expresión del principio de conservación de masa a través de una discontinuidad. La condición ii como se ilustra en la figura 2.17 indica que sólo puede existir una onda de choque si al unir por una cuerda los estados constantes $(u_L, F(u_L))$ y $(u_R, F(u_R))$ la función $F(u)$ es mayorada o no por la cuerda l_{LR} de acuerdo a si $u_L > u_R$ o $u_R > u_L$, respectivamente. La condición E de Oleinik es muy general y contiene como casos particulares a los ejemplos de la ecuación (2.1) con las diferentes $F(u)$ descritas más arriba.

Volviendo a la ecuación (2.1)-(2.22) y en base a lo discutido precedentemente el problema de Riemann se obtiene de la siguiente manera (siguiendo a Concus y Proskurowski [8]): si $u_L \neq u_R$ llamamos S_{LR} a la pendiente que une los estados $(u_L, F(u_L))$ y $(u_R, F(u_R))$

$$S_{L,R} = \frac{F(u_R) - F(u_L)}{u_R - u_L} \quad (2.28)$$

Distinguiremos dos casos: que la cuerda corte o no corte al gráfico de $F(u)$ entre los valores de u_L y u_R .

- I) Si la cuerda no corta al gráfico de $F(u)$ entonces el valor de S_{LR} está comprendido entre los valores de $F'(u_L)$ y $F'(u_R)$ según se ilustra en la figura 2.18. Hay dos casos:
 - Ia) Si $F'(u_L) > F'(u_R)$ el estado u_L se conecta al estado u_R mediante una onda de choque según se ilustra en las figuras 2.19a y b.

- Ib) Si $F'(u_L) < F'(u_R)$ el estado u_L se conecta al estado u_R por medio de una onda de rarefacción.
- II) si la cuerda $l_{LR}(u)$ corta el gráfico de $F(u)$ para algún valor de u comprendido entre u_L y u_R teniendo en cuenta que para la $F(u)$ dada se cumple que $S_{LR} > F'(u_R)$ y $S_{LR} > F'(u_L)$ y de acuerdo a las condiciones de unicidad de soluciones débiles discutidas previamente se deben considerar dos posibilidades:
- IIa) Si $u_L > u_R$ construimos la recta $H(u)$ sobre el gráfico de $F(u)$ como se indica en la figura 2.20a.
- IIb) Si $u_L < u_R$ construimos la recta $H(u)$ sobre el gráfico de $F(u)$ como se indica en la figura 2.20b.

Para cualquiera de los dos casos llamando u_M al punto tal que $F'(u_M) = S_{MR}$ donde S_{MR} está definido por

$$S_{MR} = \frac{F(u_R) - F(u_M)}{u_R - u_M} \quad (2.29)$$

luego el estado u_L se conecta al estado u_M por una onda de expansión y el estado u_M se conecta al estado u_R por una onda de choque cuya velocidad de propagación es S_{MR} .

En síntesis el estado u_L se conecta al estado u_R por medio de dos estados intermedios consistentes en una onda de choque seguida de una onda de rarefacción como se indica en las figuras 2.21, 2.22 (para $u_L > u_R$) y 2.23, 2.24 (para $u_R > u_L$).

Es interesante destacar que la construcción de $H(u)$ sobre la gráfica de $F(u)$ como se ilustró en las figuras 2.20a y b indica que se están utilizando en vez de las curvas $F(u)$ y $F'(u)$ primitivas (ver figura 2.15) las que se indican a continuación: Figuras 2.25 y 2.26 (como ejemplo se han supuesto valores extremos para u_L y u_R)

Hemos visto que cuando la cuerda $l(u)$ corta a la gráfica de $F(u)$ se viola la condición E de Oleinik. Esto quiere decir que no es posible unir con una sola onda centrada los estados u_L y u_R dados. Para satisfacer dicha condición debemos utilizar una onda compuesta de una onda de choque y otra de rarefacción. El punto intermedio u_M que delimita el dominio de aquellas fue elegido como el punto de tangencia sobre $F(u)$ de una recta tirada desde u_R . Veremos que ésta es la elección correcta porque supongamos que elegimos como punto delimitante el punto de inflexión u_I de la figura 2.16. Luego la construcción de $H(u)$ sobre $F(u)$ que se indica en la figura 2.27 muestra la existencia

de una discontinuidad en el valor de la derivada; esto produce en el patrón de características que se muestra en la figura 2.28 una onda de rarefacción sobre la que se superpone una onda de choque. Está claro que éste es un resultado erróneo dado que no pueden coexistir dos estados diferentes para un mismo punto del espacio. La única manera de lograr unicidad es que el punto de delimitación sea el de tangencia sobre $F(u)$ desde u_R . Collins [7] llega a resultados similares utilizando como argumento el principio de conservación de la masa (op. cit. p. 147).

Volviendo al cálculo del punto de tangencia se debe cumplir que

$$F'(u_M) = S_{MR}$$

reemplazando

$$\frac{2 \alpha u_M (1-u_M)}{[u_M^2 + \alpha(1-u_M)^2]^2} = \frac{F(u_R)-F(u_L)}{u_R-u_L} \quad (2.30)$$

donde

$$F(u_R) = \frac{u_R^2}{u_R^2 + \alpha(1-u_R)^2} \quad \text{y} \quad F(u_L) = \frac{u_L^2}{u_L^2 + \alpha(1-u_L)^2} ,$$

La ecuación (2.30) es un polinomio de cuarto orden en u_M una de cuyas raíces, comprendida entre los valores de u_L y u_R , es la solución buscada.

A continuación se presenta la solución numérica de la ecuación de Buckley-Leverett (2.1)-(2.22) utilizando el metodo MET y la serie de Van der Corput. El cálculo de las raíces del polinomio (2.30) se efectúa con la subrutina PA05A del paquete de rutinas científicas de Harwell [14]. En la figura 2.29 se presentan los resultados numéricos obtenidos utilizando como condiciones iniciales $u_L = 1$ y $u_R = 0.1$. Se puede observar la generación de la onda de choque seguida de la onda de rarefacción de acuerdo al análisis hecho en relación a las figuras 2.21 y 2.22. La serie de Van der Corput produce un avance de la onda computacional con respecto a la teórica de orden $O(\Delta x)$. Este fenómeno fue analizado por Glimm y Marchesin [10] y por Glimm et al. [13]. La

verdadera ventaja en el uso de la serie de Van der Corput radica en la menor dispersión de la solución en la zona de la onda de rarefacción (ver discusión en Collella [6]).

3. LA ECUACION ESCALAR INHOMOGENEA DE ONDA

La ecuación escalar inhomogénea de onda (también llamada ecuación de Burgers) es un ejemplo de forma no conservativa. Esto se debe, como ya hemos visto, a la presencia de términos disipativos y/o fuentes. En general se puede escribir una forma no conservativa como

$$u_t + F(u)_x = G(u) \quad (3.1)$$

donde en el caso más general de los que trataremos aquí $F(u)$ tiene la forma ya vista para la ecuación de Buckley-Leverett y $G(u)$ es el término de difusión debido a la presión capilar y está definido por

$$G(u) = (K(u)u_x)_x \quad (3.2)$$

donde $K(u)$ coeficiente genérico de difusión está definido en el apéndice A.

La existencia del término de inhomogenidad impide la aplicación directa del método MET al problema diferencial primitivo. Una manera de obviar este inconveniente es mediante el empleo de una técnica de splitting consistente en la descomposición del operador diferencial de tal manera que en un primer paso se resuelve la ecuación homogénea por el método MET y en un segundo paso se resuelve la ecuación diferencial conteniendo el término $G(u)$ mediante una aproximación en diferencias finitas.

A continuación se presenta un estudio numérico de la ecuación (3.1) con distintas formas para $F(u)$ y $G(u)$. En primer lugar se analiza un problema lineal que admite solución teórica. Entonces para la ecuación (3.1) se utiliza $F(u)$ y $G(u)$ dados por

$$F(u) = a u, a = \text{cte.} \quad \text{y} \quad G(u) = K u_{xx}, K = \text{cte.} \quad (3.3)$$

La solución de la ecuación (3.1)-(3.2) está dada por

$$u(x,t) = \frac{F(x)}{2} \left[\operatorname{erfc} \left(\frac{x-F'(u)t}{2(Kt)^{1/2}} \right) + \exp \left(\frac{F'(u)x}{K} \right) \operatorname{erfc} \left(\frac{x+F'(u)t}{2(Kt)^{1/2}} \right) \right]$$

para $x > 0$,

(3.4)

donde erfc es el complemento de la función error (ver por ejemplo Peaceman [17]) y $F'(u) = a$ de acuerdo a la expresión (3.3).

A los efectos de resolver la ecuación (3.1)-(3.3) por diferencias finitas se realiza un splitting del operador diferencial en dos semi-pasos de tiempo

$$i) \quad u_t + F(u)_x = 0 \quad \text{para } t \in [0, \Delta t/2] \quad (3.5)$$

$$ii) \quad u_t = G(u) \quad \text{para } t \in [\Delta t/2, \Delta t] \quad (3.6)$$

Un esquema explícito consistente con el problema diferencial (3.5)-(3.6) se escribe teniendo en cuenta la ecuación (3.3)

$$i) \quad \frac{u_j^{n+1/2} - u_j^n}{\Delta t} + a \frac{u_j^n - u_{j-1}^n}{\Delta x} = 0 \quad \text{para } t \in [t_n, t_{n+1/2}] \quad (3.7)$$

$$ii) \quad \frac{u_j^{n+1} - u_j^{n+1/2}}{\Delta t} = k \frac{u_{j+1}^{n+1/2} - 2u_j^{n+1/2} + u_{j-1}^{n+1/2}}{\Delta x^2} \quad \text{para } t \in [t_{n+1/2}, t_{n+1}] \quad (3.8)$$

donde u_j^n es la solución numérica en el tiempo $t_n = n\Delta t$; $x = j\Delta x$ y $t = n\Delta t$ son las coordenadas espacial y temporal, respectivamente (Δx y Δt son los pasos de espacio y tiempo, n y j enteros). Llamando $P = a\Delta t/\Delta x$ y $r = k\Delta t/\Delta x^2$ las ecuaciones (3.7) y (3.8) se pueden escribir

$$u_j^{n+1/2} = (1-P)u_j^n + P u_{j-1}^n \quad (3.9)$$

$$u_j^{n+1} = (1-2r)u_j^{n+1/2} + r(u_{j+1}^{n+1/2} + u_{j-1}^{n+1/2}) \quad (3.10)$$

Es fácil demostrar que el esquema (3.9)-(3.10) es consistente con el problema diferencial primitivo. Para ello escribamos la ecuación diferencial (3.5)-(3.6) de la siguiente manera

$$u_t + Au = 0 \quad (3.11)$$

$$u_t = Bu \quad (3.12)$$

donde Au y Bu son los términos convectivos y disipativos, respectivamente, fácilmente deducibles de las ecuaciones (3.5) y (3.6). Un esquema análogo al (3.9)-(3.10) es

$$\frac{u^{n+1/2} - u^n}{\Delta t} + A u^n = 0 \quad (3.13)$$

$$\frac{u^{n+1} - u^{n+1/2}}{\Delta t} = B u^{n+1/2} \quad (3.14)$$

donde por facilidad de exposición se ha discretizado la variable temporal solamente. Las ecuaciones (3.13) y (3.14) pueden escribirse

$$u^{n+1/2} = (1 - \Delta t A) u^n \quad (3.15)$$

$$u^{n+1} = (1 + \Delta t B) u^{n+1/2} \quad (3.16)$$

Eliminando el paso fraccionario queda un esquema de paso entero

$$u^{n+1} = (1 - \Delta t A + \Delta t B)u^n - (\Delta t)^2 B A u^n \quad (3.17)$$

que se puede escribir

$$u^{n+1} = (1 - \Delta t A + \Delta t B)u^n + O(\Delta t)^2 \quad (3.18)$$

La ecuación (3.18) representa un esquema de paso entero explícito consistente con el problema diferencial primitivo. Dado que la expresión (3.15)-(3.16) es similar a la (3.18) concluimos que es también consistente. Se puede demostrar que el esquema (3.13)-(3.14) es numéricamente estable si se cumple que

$$P = \frac{a \Delta t}{\Delta x} \leq 1 \quad \text{y} \quad r = \frac{K \Delta t}{\Delta x^2} \leq \frac{1}{2} \quad (3.19)$$

En la figura 3.1 se presenta la solución numérica de la ecuación (3.1)-(3.3) obtenida con la aproximación (3.9)-(3.10). Se ha utilizado como valores iniciales: $u_L = 1$ y $u_R = 0$. Los constantes K y a valen 0.1 y 1, respectivamente. Se observa que la discrepancia entre los valores numéricos obtenidos y la solución teórica se debe a la viscosidad artificial del método de aproximación utilizado. Por restricciones debidas a la estabilidad numérica no es posible utilizar valores de $P = 1$ que eliminarían dicho efecto (salvo si los coeficientes de difusión K son menores que $\Delta x/2$).

A continuación se presenta la solución numérica del problema precedente utilizando el método MET, diferencias finitas y la técnica de splitting desarrollada previamente. Haciendo referencia al sistema (3.5)-(3.6) el procedimiento de cálculo consiste en resolver la ecuación (3.5) en el primer semipaso de tiempo por el método MET y luego en el segundo semipaso de tiempo se resuelve la ecuación (3.6) utilizando como valores iniciales los obtenidos del semipaso anterior. El procedimiento de cálculo es similar al de casos anteriores por lo que obviemos su discusión. La utilización del método MET presenta la ventaja de poseer viscosidad numérica nula. Esto se muestra en la figura 3.3 donde se presenta la solución numérica obtenida utilizando las mismas condiciones iniciales y parámetros de la figura 3.1. La falta de atenuación numérica se hace más notable cuando el valor de K es menor como se muestra en la figura 3.4. El desfase de la solución numérica con respecto a la teórica se debe exclusivamente al generador de Van der Corput de acuerdo a lo discutido con anterioridad.

Finalmente se presenta la solución numérica de la ecuación del desplazamiento de un fluido inmisible utilizando el método MET y diferencias finitas y teniendo en cuenta la condición de borde apropiada para simular el efecto pared. Para ello (ver detalles en el apéndice A) se utiliza la siguiente condición de borde derecho (en $x = L$)

$$\text{si} \quad \left\{ \begin{array}{l} u_{x=L} < u_{\max} \rightarrow q_w]_{x=L} = 0 \\ u_{x=L} = u_{\max} \rightarrow q_w]_{x=L} \geq 0 \end{array} \right. \quad (3.20)$$

donde $u_{\max}$ es el valor máximo de la saturación (en nuestro caso igual a la unidad) y q_w es el caudal de la fase mojanete. A los efectos de obtener el valor de $u_{x=L}$ (ver apéndice A) se aproxima $[\partial u / \partial x]_{x=L}$ por el siguiente esquema de diferencias finitas

$$\frac{\partial u}{\partial x}]_{x=L} = \frac{u_{x=L} - u_{x=L-\Delta x}}{\Delta x} + O(\Delta x)^2$$

El polinomio de cuarto orden en $u_{x=L}$ resultante (ver apéndice A) se resuelve por medio de la subrutina PA05A de Harwell[14].

Para $F(u)$ y $G(u)$ se utilizan las siguientes expresiones (ver detalles en el apéndice A)

$$F(u) = \frac{u^2}{u^2 + \alpha(K-u)^2}, \quad G(u) = [(1-u)^2 F(u) u_x]_x \quad (3.21)$$

la formas de $F(u)$ y $K(u) \cong (1-u)^2 F(u)$ se presentan en el apéndice A.

Como en los casos anteriores en el primer semipaso de tiempo se resuelve la ecuación de Buckley-Leverett como se indicó en la expresión (3.5) utilizando el método MET. En el segundo semipaso de tiempo se resuelve una ecuación similar a la expresión (3.6) utilizando diferencias finitas y valores iniciales obtenidos del semipaso anterior. Se puede demostrar que el esquema completo es consistente con el problema diferencial.

En la figura 3.5 se presenta la solución numérica de la ecuación (3.1)-(3.21) para diferentes tiempos y cuando el valor máximo de $K(u)$ es aproximadamente 0.017. Se observa por la forma de $K(u)$ (ver apéndice A) que la ecuación (3.1) tiene difusividad casi nula para valores cercanos al máximo y mínimo de u . Esto explica la forma del frente de onda casi abrupto para $u = 0.1$. La difusión es máxima para valores de u cercanos a 0.4 lo que se traduce en la forma lisa de la onda de rarefacción. La figura 3.5 muestra en general el alisado de la onda de choque y de rarefacción debido al efecto difusivo de la presión capilar. Para $t = 0.7$ se observa el efecto de la condición de borde denominado efecto pared (ver apéndice A) que se traduce en el aumento, sobre el borde derecho, de la saturación (u) de la fase mojante. En la figura 3.6 se presenta una experiencia similar a la anterior pero con un valor de $K(u)$ cuyo máximo es 0.0017 es decir un orden de magnitud menor que el de la experiencia anterior. Se puede observar que para $t = 0.5$ la onda de choque es mucho más pronunciada que en la experiencia anterior. Para $t = 0.7$ ya ha comenzado el aumento de la saturación en el borde derecho debido al efecto pared y para $t = 1$ la saturación ya alcanzó su valor máximo. Se hace notar que para poder resolver la ecuación (3.1)-(3.21) teniendo en cuenta el efecto pared es necesario introducir en el programa de cálculo el problema de Riemann ilustrado en la figuras 2.23 y 2.24. Esto se debe a que el efecto pared provoca una inversión del gradiente de la saturación en el borde derecho y por lo tanto allí se verifica que $u_R > u_L$.

4. CONCLUSIONES

Se ha presentado un estudio de la solución numérica de las ecuaciones que gobiernan la circulación unidimensional de fluidos bifásicos en medios porosos utilizando el Método de Muestreo Estadístico a Trozos (MET) y diferencias finitas y se ha extendido la solución con la incorporación del efecto pared.

Se ha realizado un análisis detallado de la solución del problema de Riemann para formas conservativas, incluyendo el caso particular en que $u_R > u_L$ necesario para la simulación del efecto pared.

En la comparación entre la solución numérica utilizando el MET y la solución teórica para la ecuación de Buckley-Leverett se ha observado un desfase que se debe exclusivamente al método de muestreo utilizado i.e. la serie de Van der Corput. De todos modos esta serie genera perfiles con dispersión mínima. En el futuro se tratará de corregir el desfase utilizando un método denominado de seguimiento de la interfase desarrollado por Glimm et al. [10]-[13].

En la aproximación de formas no conservativas los resultados obtenidos utilizando la técnica de splitting y diferencias finitas y su comparación con la solución teórica demuestran que el splitting es un procedimiento de cálculo apropiado, siempre que los pasos de tiempo sean pequeños.

Los resultados numéricos con el método MET muestran la ventaja del mismo con respecto a diferencias finitas. Esto se debe a la ausencia de viscosidad artificial; la ventaja se acentúa cuando los valores del coeficiente K tienden a cero.

Finalmente se han presentado los resultados numéricos obtenidos en la aproximación de la ecuación del desplazamiento de un fluido bifásico inmiscible en un medio poroso teniendo en cuenta el efecto pared. Los resultados obtenidos permiten inferir que la utilización del método MET y la inclusión del efecto pared posibilitan una simulación más realista del problema del desplazamiento de fluidos inmiscibles en medios porosos en presencia de gradientes pronunciados.

APENDICE A

A continuación se presenta en breve síntesis los aspectos más relevantes de las ecuaciones que rigen el desplazamiento de un fluido inmiscible en un medio poroso (para un estudio más detallado ver Collins [7] o Peaceman [17]).

La ecuación del desplazamiento de un fluido inmiscible e incompresible en un medio poroso en ausencia de la gravedad se escribe

$$\frac{\partial}{\partial x} \left[\frac{q}{1 + \frac{K_{nw}\mu_w}{K_w\mu_{nw}}} \right] + \frac{\partial}{\partial x} \left[\frac{A K_w}{\mu_w} \frac{dP_c/dS_w}{1 + \frac{K_{nw}\mu_w}{K_w\mu_{nw}}} \frac{\partial S_w}{\partial x} \right] = \phi A \frac{\partial S_w}{\partial t} \quad (A.1)$$

donde:

S_w es la saturación de la fase mojante o la fracción de volumen poral disponible ocupada por la fase mojante.

q es el caudal total [cm^3/seg]

K_{nw} y K_w son las permeabilidades relativas de la fase no mojante y mojante, respectivamente.

A es el área de la sección transversal al desplazamiento [cm^2]

ϕ es la porosidad en por ciento [%].

P_c es la presión capilar: $P_c = P_{nw} - P_w$ donde P_{nw} y P_w son las presiones de la fase no mojante y mojante, respectivamente.

En la figura A.1 se presenta el gráfico de las permeabilidades relativas (ver Collins [7]).

Para la resolución numérica de la ecuación (A.1) se ha tomado la relación $q/(\phi A)$ igual a la unidad. Si en el término convectivo de la ecuación (A.1) hacemos

$$K_{nw} = (1 - S_w)^2 \quad (A.2)$$

$$K_w = S_w^2$$

$$\frac{\mu_w}{\mu_{nw}} = \alpha$$

nos queda el término $F(S_w)$ de la ecuación de Buckley-Leverett (2.22) es decir

$$F(S_w) = \frac{S_w^2}{S_w^2 + \alpha(1 - S_w)^2} \quad (A.3)$$

donde $F(S_w)$ se denomina caudal fraccional de la fase mojante. La forma de $F(S_w)$ en función de la saturación de la fase mojante para el problema en análisis se muestra en la figura A.2.

A continuación presentamos, en la figura A.3, el gráfico de la presión capilar en función de la saturación de la fase mojante

Para la resolución numérica de la ecuación (A.1) se ha aproximado el gráfico de la figura A.3 por una recta con pendiente -1.

Si llamamos $K(S_w)$ al coeficiente no lineal del término difusivo de la ecuación (A.1) éste tendrá la siguiente expresión

$$K(S_w) = C(1-S_w)^2 F(S_w) \quad (A.4)$$

donde C es una constante proveniente de las aproximaciones mencionadas precedentemente. La forma del coeficiente $K(S_w)$ en función de la saturación de la fase mojante es ilustrada en la figura A.4.

Análisis del efecto pared

Suponiendo que el fluido desplazante es la fase mojan- te, este efecto consiste en la acumulación de dicha fase en la cara de salida del medio poroso hasta un nivel de saturación máximo a partir del cual comienza a fluir en la cara de salida un caudal de fase mojan- te. La fase no mojan- te tiene un caudal no nulo durante la acumulación de la fase mojan- te. Este fenómeno denominado "efecto pared" se debe a la relación existente entre la presión capilar y la saturación de la fase mojan- te. La expresión para el caudal de la fase no mojan- te se escribe (ver Collins [7])

$$q_{nw} = \frac{-K_{nw}A}{\mu_{nw}} \frac{\partial P_w}{\partial x} - \frac{K_{nw}A}{\mu_{nw}} \frac{dP_c}{dS_w} \frac{\partial S_w}{\partial x} \quad (A.5)$$

Si en la expresión (A.5) S_w tiende a la unidad se tiene que K_{nw} tiende a cero según el gráfico de la figura A.1 y dP_c/dS_w es un valor finito negativo o nulo de acuerdo a la figura A.3. Entonces $[\partial S_w / \partial x]_{x=L}$ debe tender a infinito para que q_{nw} tenga un valor mayor que cero. Esta claro que siempre se debe cumplir para la saturación que $0 < S_w < 1$ y para el caudal de la fase mojan- te que $q_w(S_w) > 0$. En la cara de salida se debe cumplir la condición de borde

$$q_w(S_w \text{ max} - S_w \text{ x=L}) = 0 \quad (A.6)$$

Durante un cierto lapso de tiempo se cumple que el segundo término de la ecuación (A.6) es diferente de cero, entonces, $q_w = 0$ de acuerdo a lo expuesto precedentemente. Posteriormente se verifica que $S_w \text{ max} = S_w \text{ x=L}$ siendo entonces $q_w \geq 0$. Esto se traduce en la siguiente condición de borde

$$\text{si} \quad \left\{ \begin{array}{l} S_w \text{ x=L} < S_w \text{ max} \rightarrow q_w \big|_{x=L} = 0 \\ S_w \text{ x=L} = S_w \text{ max} \rightarrow q_w \big|_{x=L} > 0 \end{array} \right. \quad (A.7)$$

$$(A.8)$$

Si se cumple la condición (A.7) entonces

$$q_w]_{x=L} = \left[q F(S_w) + \frac{k_{nw}(S_w)A}{\mu_{nw}} \frac{dP_c}{dS_w} F(S_w) \frac{\partial S_w}{\partial x} \right]_{x=L} = 0 \quad (A.9)$$

Conociendo en la ecuación (A.9) $F(S_w)$, $K_{nw}(S_w)$ y dP_c/dS_w en la cara de salida, se puede calcular el valor de $\partial S_w / \partial x$ que la satisface. Para ello se aproxima $\partial S_w / \partial x$ con un esquema de diferencias finitas en atraso cuyo reemplazo, en la expresión (A.9), resulta en un polinomio de cuarto orden en $S_{wx=L}$ una de cuyas raíces es solución de la expresión (A.9). Si se cumple la condición (A.8) en la cara de salida S_w alcanza su valor máximo $S_w \max$ y entonces el caudal de la fase mojanete q_w es mayor que cero.

5. REFERENCIAS

- [1] N. Albright, C. Anderson and P. Concus, The Random Choice Method for calculating fluid displacement in a porous medium, in J.J. H. Miller. Ed., Boundary and Interior Layers-Computational and Asymptotic Methods, Boole Press, Dublin (1980).
- [2] N. Albright and P. Concus, On calculating flows with sharp fronts in a porous medium. Proc. SIMS Research Applications Conference on Energy Conversion and Fluid Mechanics, Alta, Utah, (1979).
- [3] N. Albright, P. Concus and W. Proskurowski, Numerical solution of the multidimensional Buckley-Leverett equation by a sampling method. Paper SPE 7681, Soc. Petrol. Eng. Fifth Symp. on Reservoir Simulation, Denver, CO. Jan 31-Feb. 2, (1979).
- [4] A.J. Chorin, Random Choice Solutions of Hyperbolic Systems, J. Computational Physics 22 (1976) 517-533.
- [5] A.J. Chorin, and J.E. Marsden, Mathematical Introduction to Fluid Mechanics, Springer-Verlag Graduate Texts in Mathematics, Springer-Verlag New York/Berlin, 1970.
- [6] J.P. Collella, An analysis of the effect of operator splitting and of the sampling procedure on the accuracy of Glimm's method, Ph.D. Dissertation, Mathematics Department, University of California, Berkeley, (1979).
- [7] R.E. Collins, Flow of Fluids Through Porous Materials, The Petroleum Publishing Company, Tulsa (1976).
- [8] P. Concus and W. Proskurowski, Numerical solution of a nonlinear hyperbolic equation by the Random Choice Method, J. Computational Physics 30 (1979), pp. 153-166.
- [9] J. Glimm, Solutions in the large for nonlinear hyperbolic systems of equations, Comm. Pure Appl. Math., 18 (1965), pp. 697-715.

- [10] J. Glimm and D. Marchesin, Subgrid Resolution of Fluid Discontinuities, Presented at the ARO Conference on Numerical Analysis, El Paso, Texas (1978).
- [11] J. Glimm, D. Marchesin and O. McBryan, Unstable fingers in two phase flows, Rockefeller University preprint, 1979.
- [12] J. Glimm, D. Marchesin and O. McBryan, The Buckley-Leverett equation: theory, computation and application, Proc. Third Meeting of the International Society for the Interaction of Mechanics and Mathematics, Edinburgh, Sept. 10-13, (1979).
- [13] J. Glimm, D. Marchesin and O. McBryan, Subgrid Resolution of Fluid Discontinuities II, Rockefeller University preprint, 1979.
- [14] Harwell Subroutine Library, A Catalogue of Subroutines, PA05A, Compiled by M.J. Hooper (1979), AERE, Harwell.
- [15] P.D. Lax, "Hyperbolic Systems of Conservation Laws and the Mathematical Theory of Shock Waves", Appl. Math. Series, Vol. II, SIAM, Philadelphia, 1973.
- [16] G. Marshall and R. Mendez, Computational Aspects of the Random Choice Method for Shallow Water Equations, J. Computational Physics 39, (1981) 1-21.
- [17] D.N. Peaceman, Fundamentals of Numerical Reservoir Simulation, Elsevier (1977).

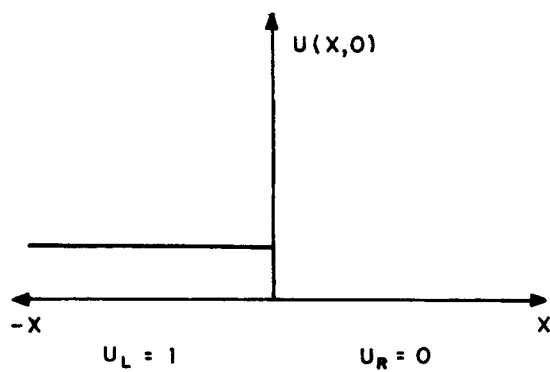


Fig. 2.1 Valores iniciales para la ecuación (2.1)

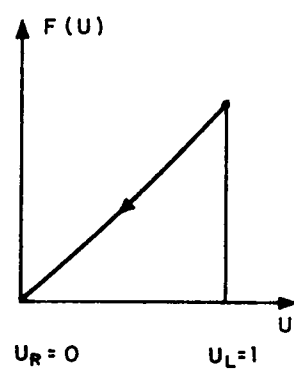


Fig. 2.2 Gráfico de $F(U)$

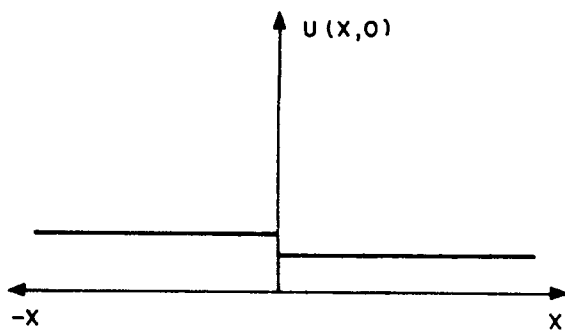


Fig. 2.3 Valores iniciales para la ecuación (2.1):
 $U_L > U_R$

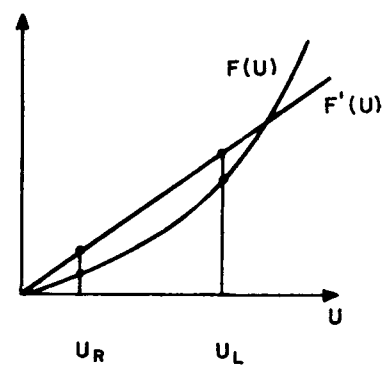


Fig. 2.4 Gráficos de $F(U)$ y $F'(U)$

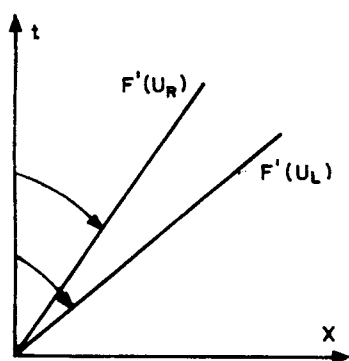


Fig. 2.5 Gráfico de $F'(U)$ en el plano $x-t$

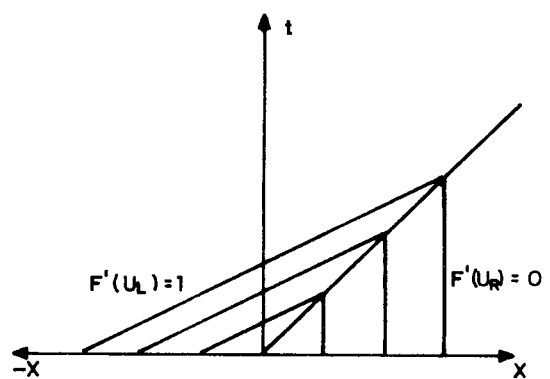


Fig. 2.6 Patrón de características
para $U_L = 1$ y $U_R = 0$

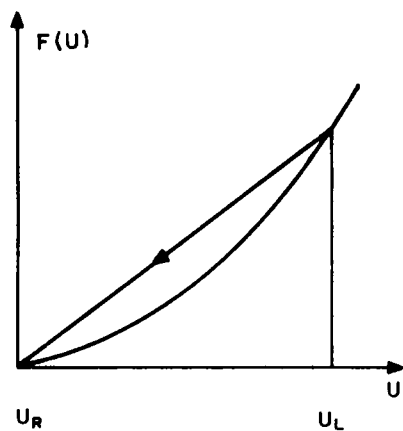


Fig. 2.7 Transición del estado U_L al U_R

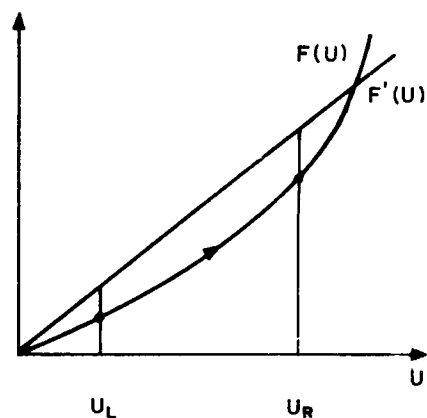


Fig. 2.8 Gráficos de $F(U)$ y $F'(U)$

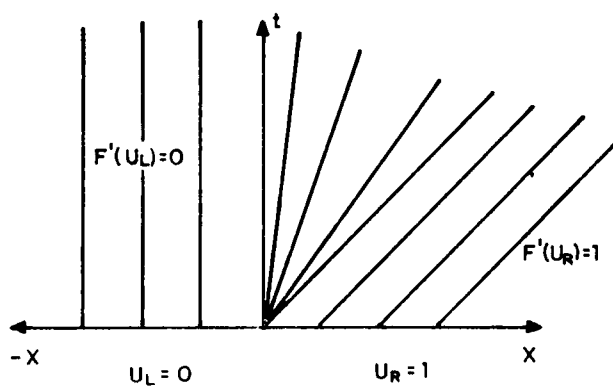


Fig. 2.9 Patrón de características para $U_L=0$ y $U_R=1$

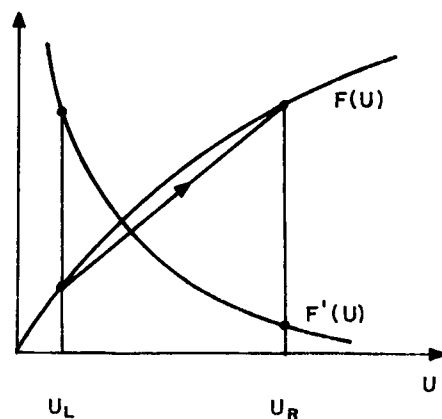


Fig. 2.10 Gráficos de $F(U)$ y $F'(U)$

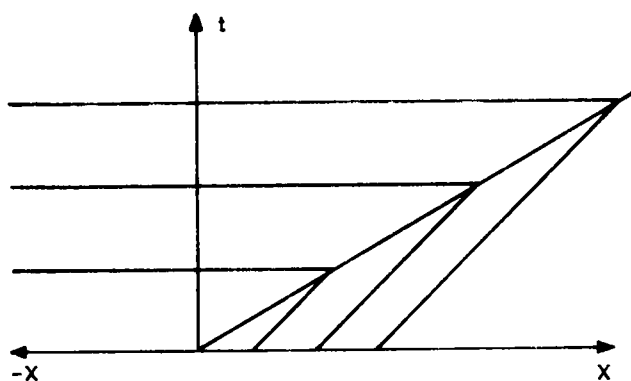


Fig. 2.11 Patrón de características para $U_L=0$ y $U_R=1$

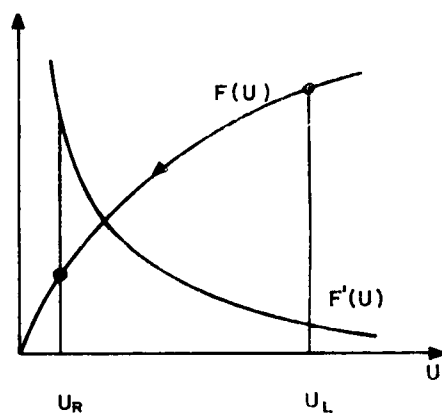


Fig. 2.12 Gráficos de $F(U)$ y $F'(U)$

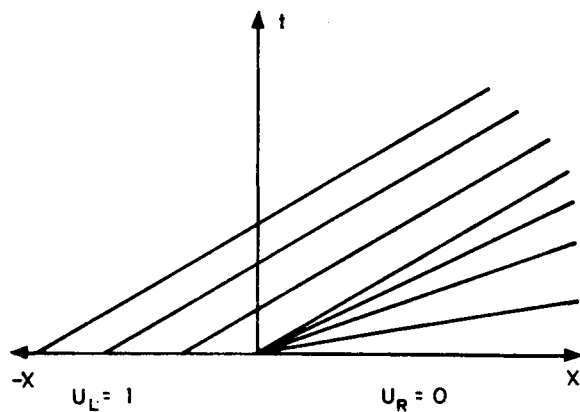


Fig. 2.13 Patrón de características para $U_L=1$ y $U_R=0$

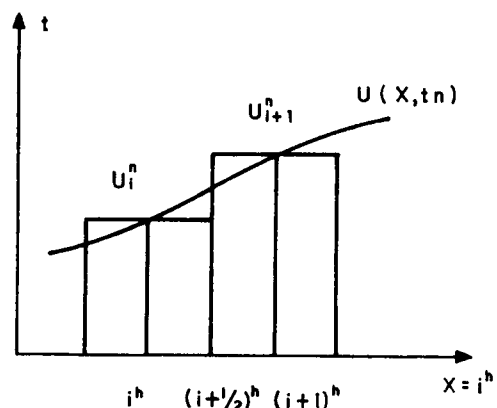


Fig. 2.14 Aproximación de $U(X, t_n)$ por una función constante a trozos

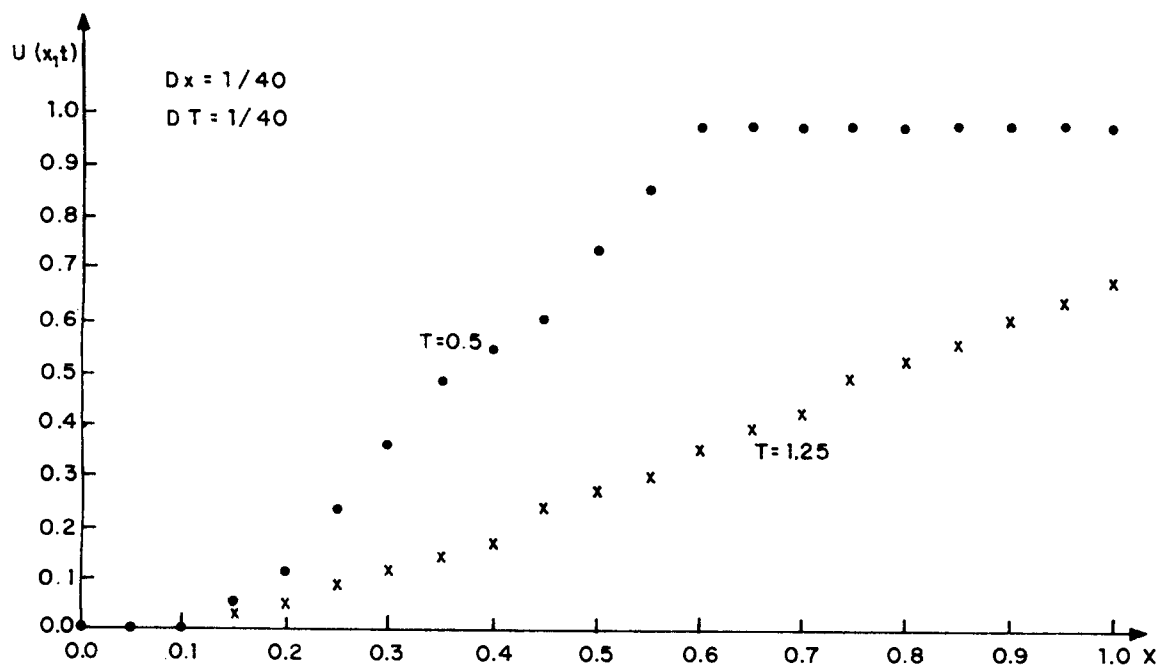


Fig. 2.15 Solución numérica de la ecuación $U_t + UU_x = 0$ por el método MET.

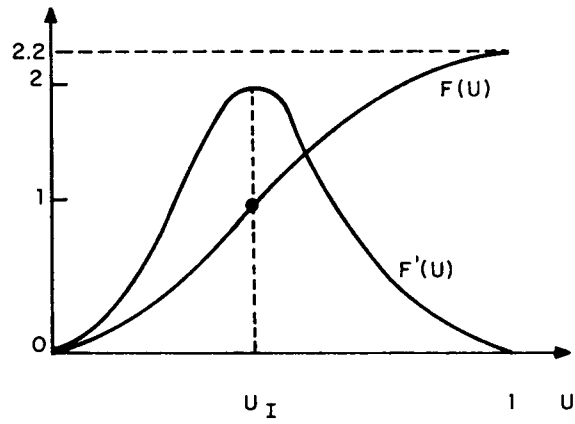


Fig. 2.16 Gráficos de $F(U)$ y $F'(U)$

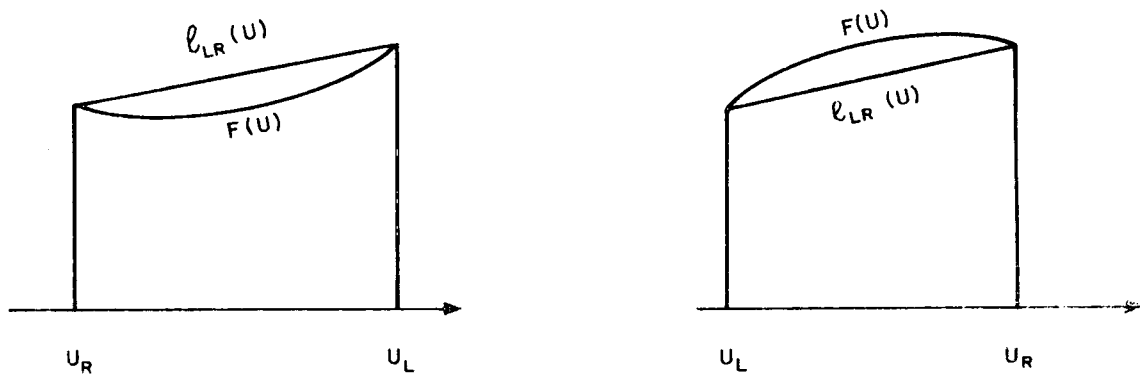


Fig. 2.17 Ilustración de las condiciones de existencia de ondas de choque

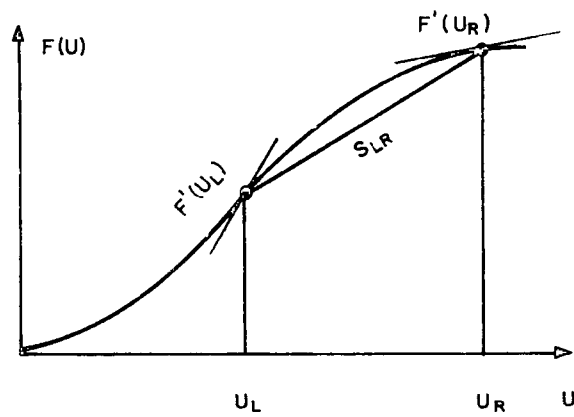


Fig. 2.18 Caso en que la cuerda no corta a $F(U)$ entre los valores de U_L y U_R

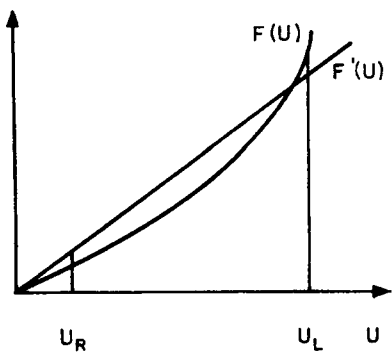


Fig. 2.19 a) Caso en que $\ell_{LR}^{(U)} > F(U)$

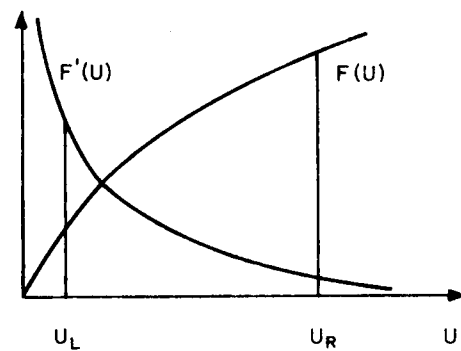


Fig. 2.19 b) Caso en que $\ell_{LR}^{(U)} < F(U)$

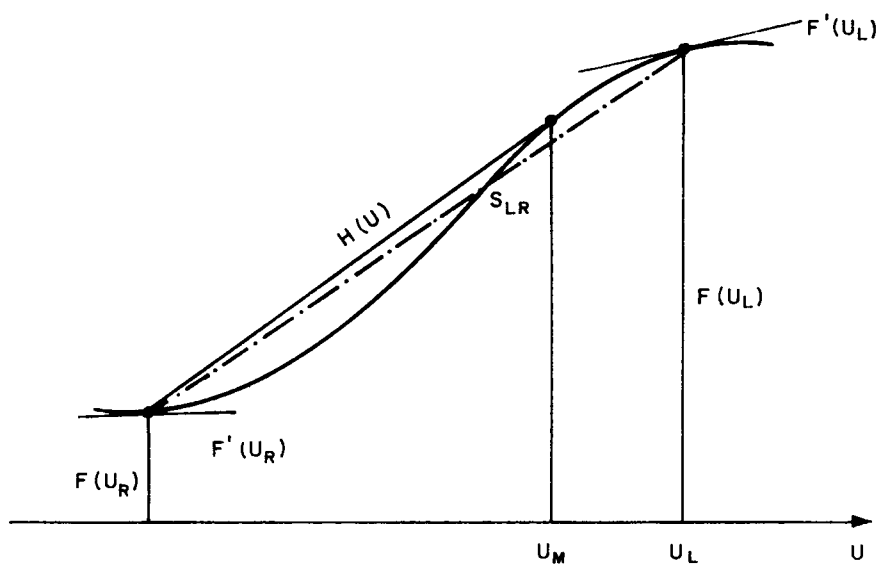


Fig. 2.20 a) Construcción de $H(U)$ para el caso $U_L > U_R$

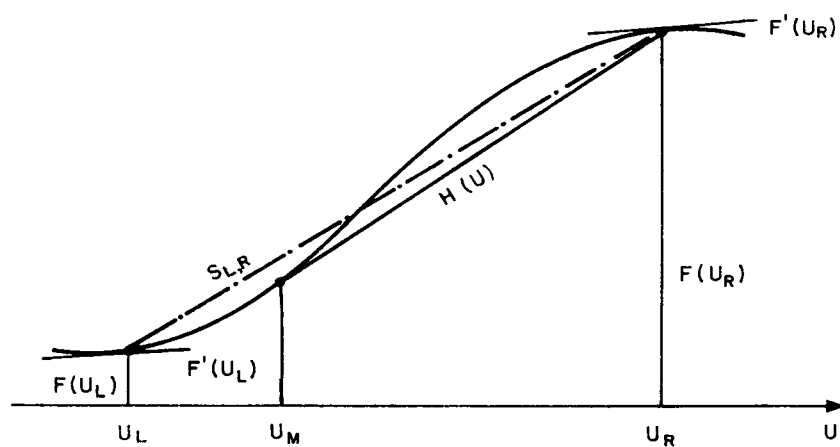


Fig. 2.20 b) Construcción de $H(U)$ para el caso $U_R > U_L$

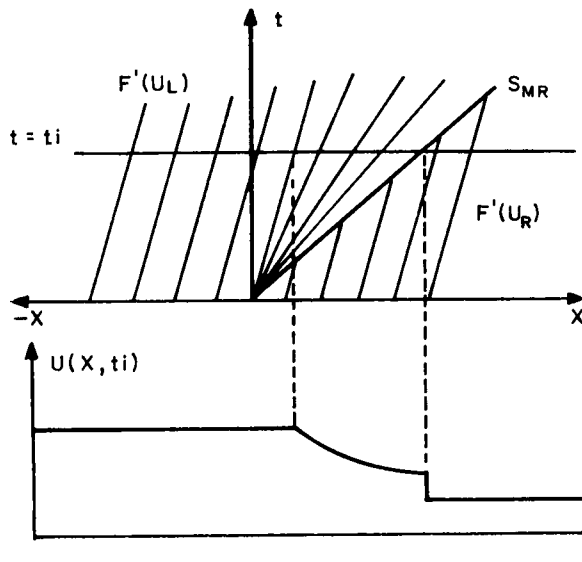


Fig. 2.21 Patrón de características para $U_L > U_R$

Fig. 2.22 Solución del problema de Riemann para $U_L > U_R$

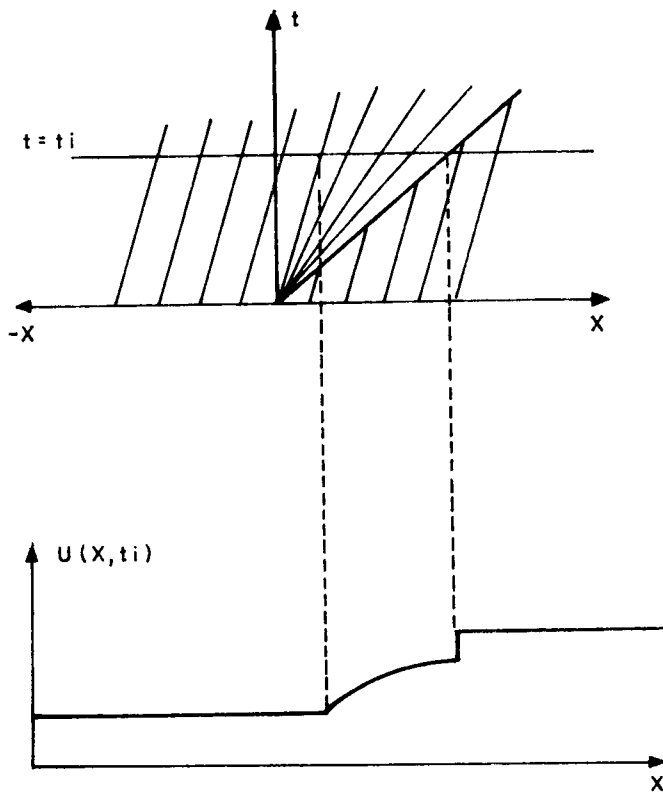


Fig. 2.23 Patrón de características para $U_R > U_L$

Fig. 2.24 Solución del problema de Riemann para $U_R > U_L$

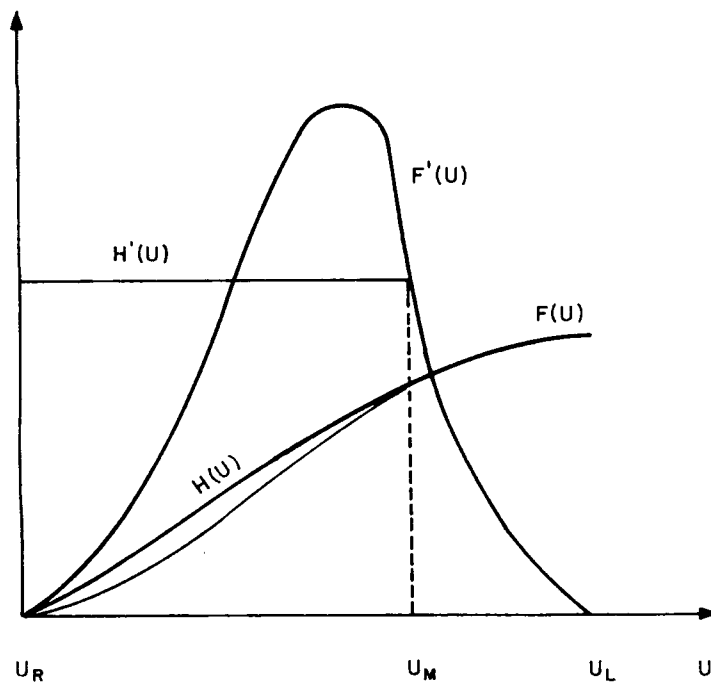


Fig. 2.25 Caso en que $U_L > U_R$

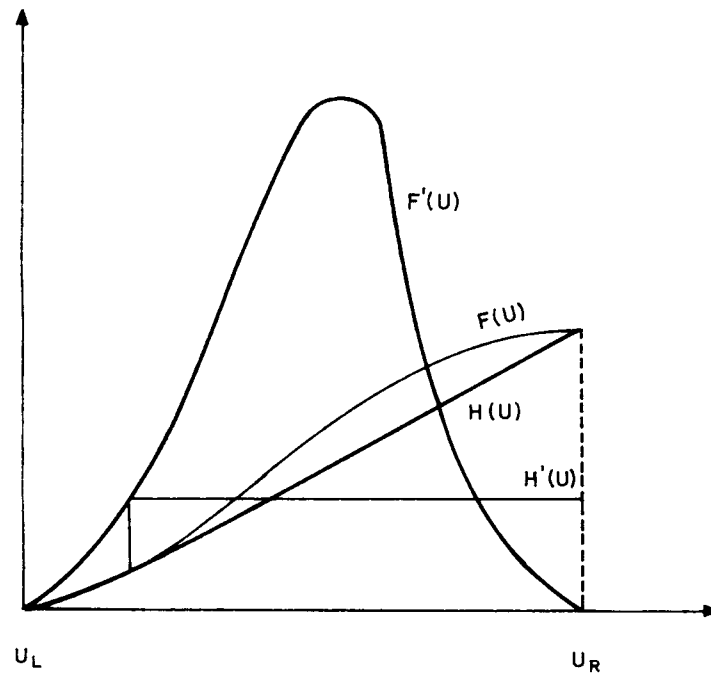


Fig. 2.26 Caso en que $U_L < U_R$

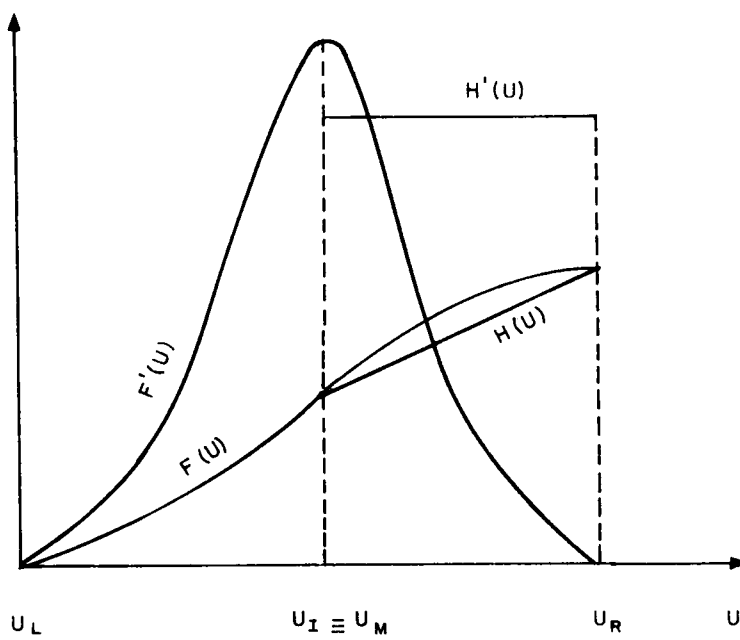


Fig.2.27 Caso en que $U_L < U_R$

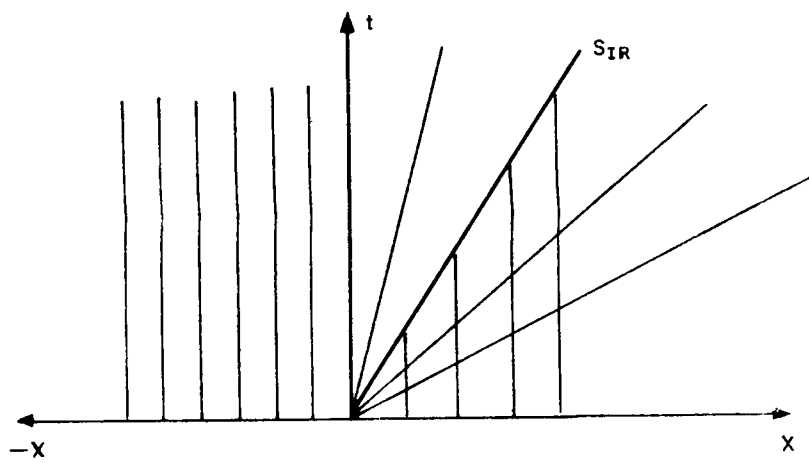


Fig. 2.28 Patrón de características para $U_L < U_R$

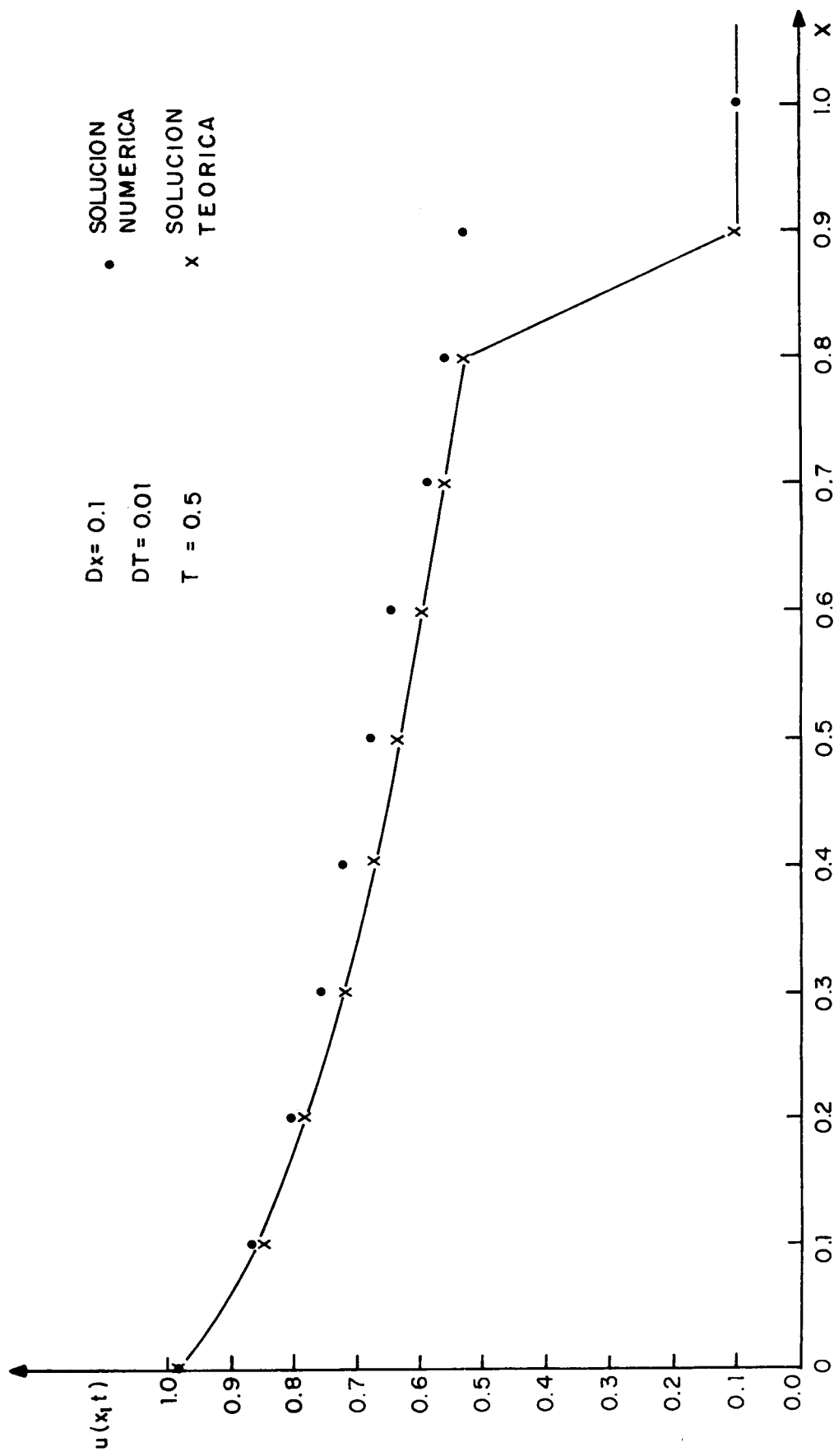


Fig. 2.29 Solución numérica de la ecuación de Buckley-Leverett por el método MET y solución teórica.

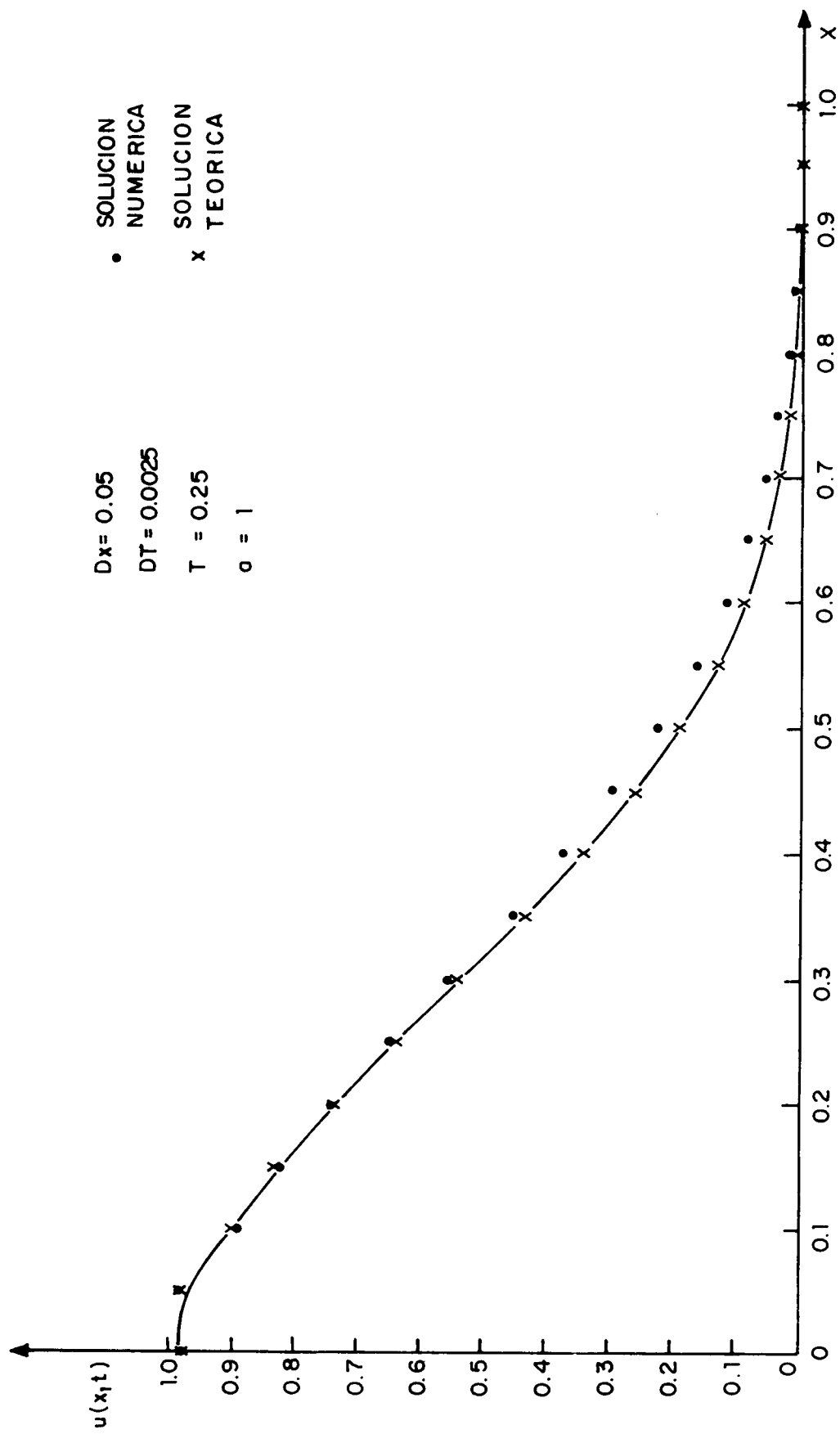


Fig. 3.1 Solución numérica de la ecuación $U_t + \alpha U_x = KU_{xx}$ por diferencias finitas y solución teórica para $K=10^{-1}$.

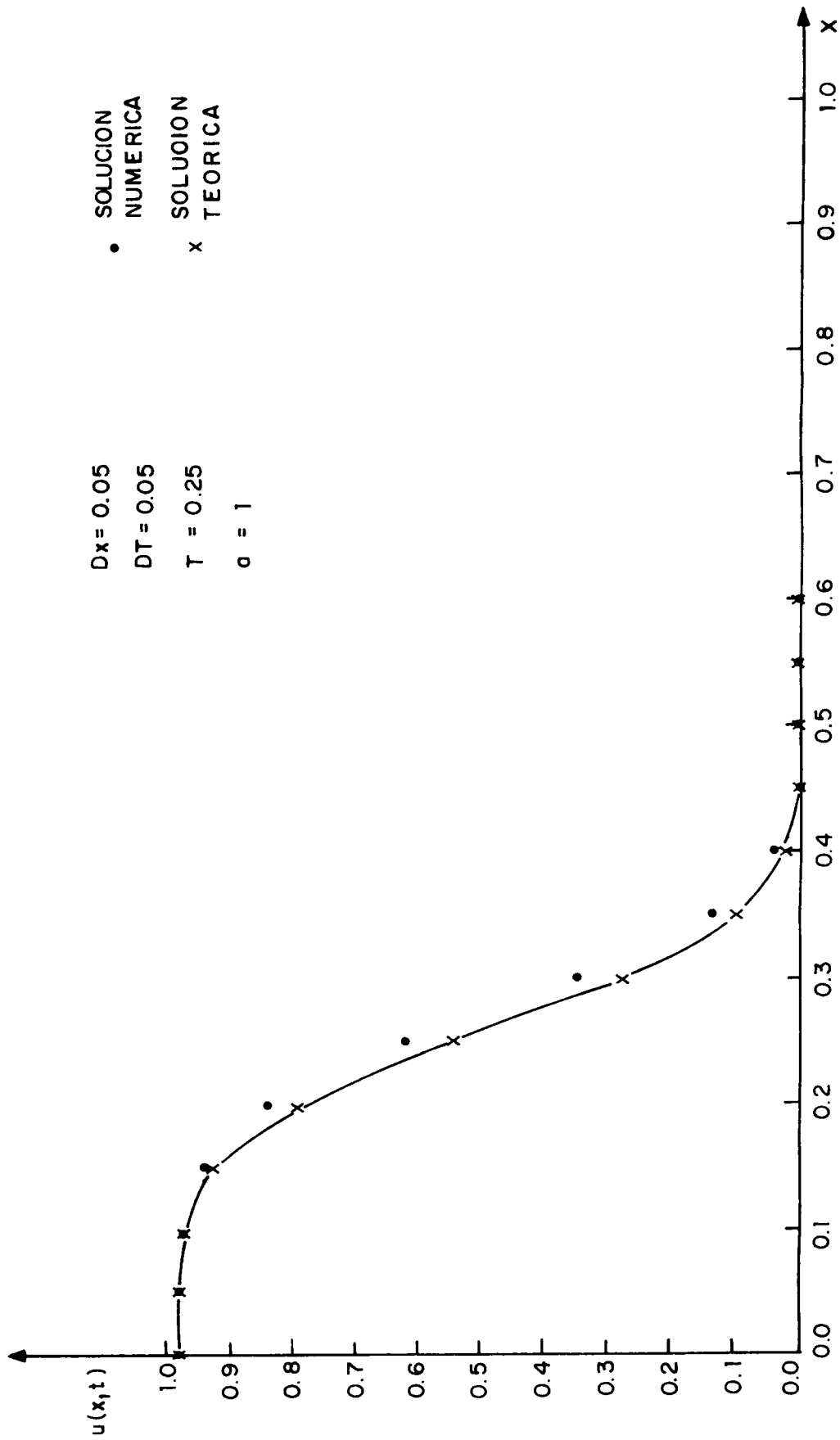


Fig. 3.2 Solución numérica de la ecuación $U_t + \alpha U_x = KU_{xx}$ por diferencias finitas y solución teórica para $K = 10^{-2}$.

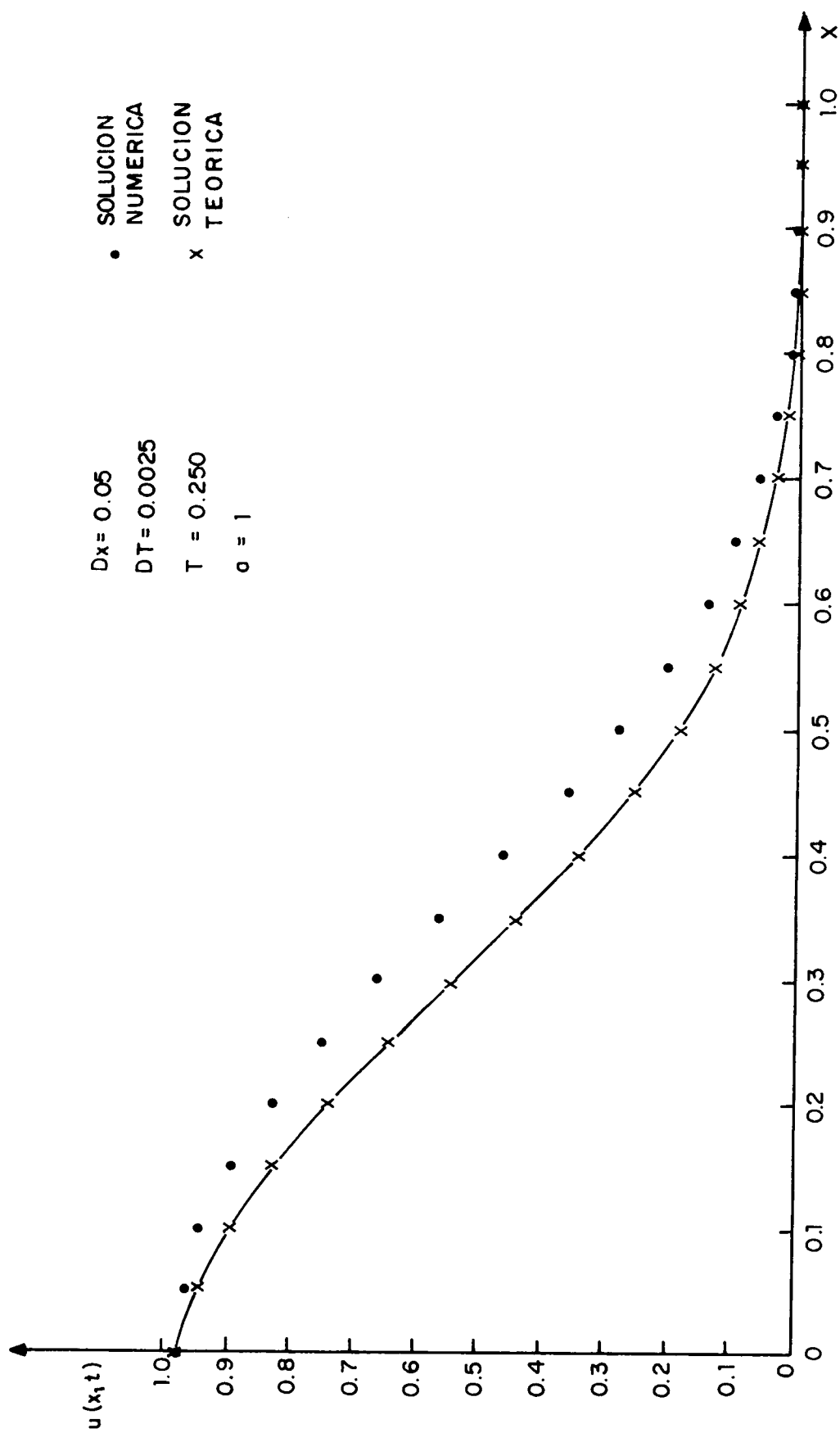


Fig. 33 Solución numérica de la ecuación $U_t + \alpha U_x = KU_{xx}$ por el método MET y solución teórica para $K = 10^{-1}$

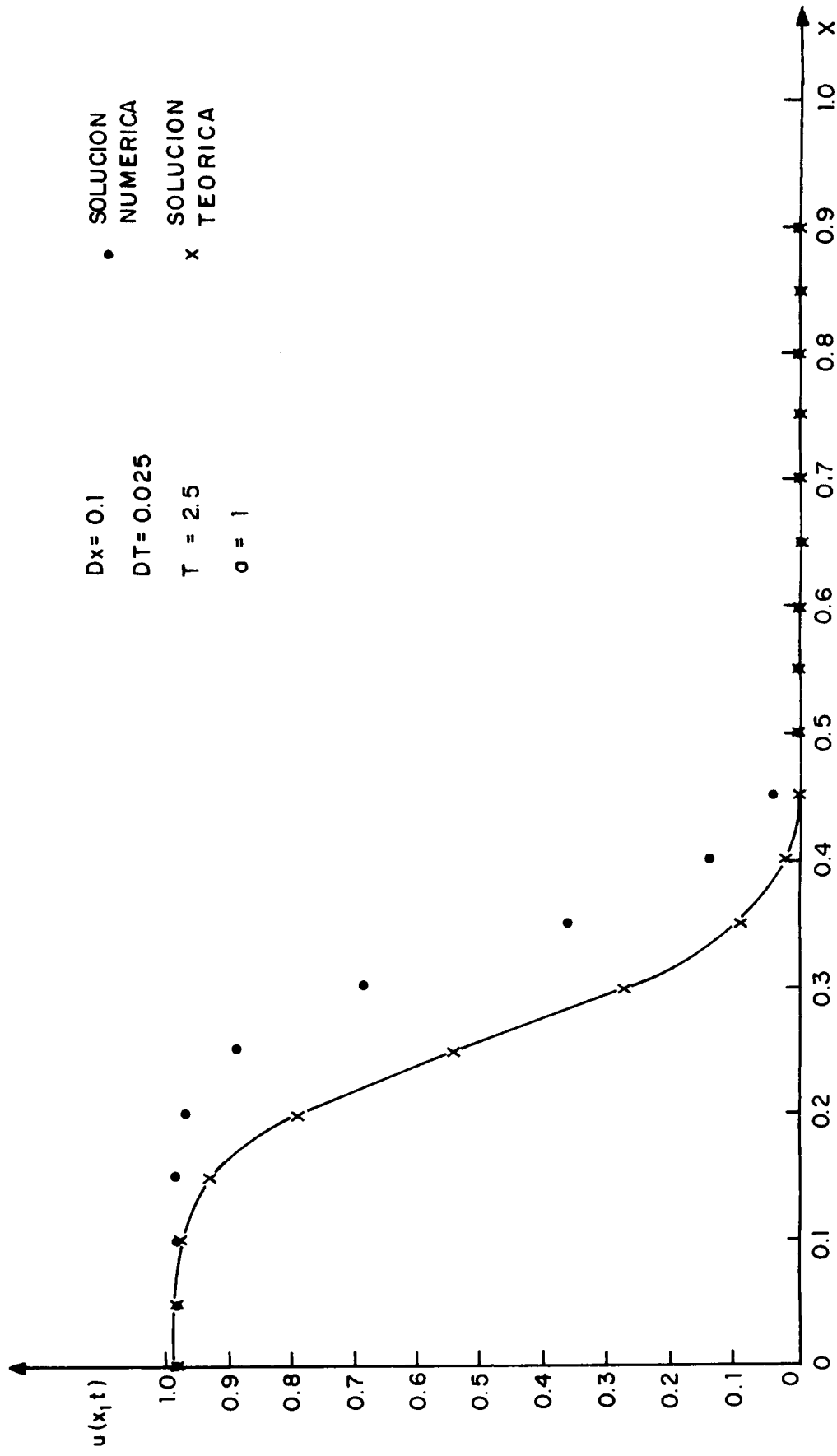


Fig. 3.4 Solución numérica de la ecuación $U_t + \alpha U_x = KU_{xx}$ por el método MET y solución teórica para $K = 10^{-2}$

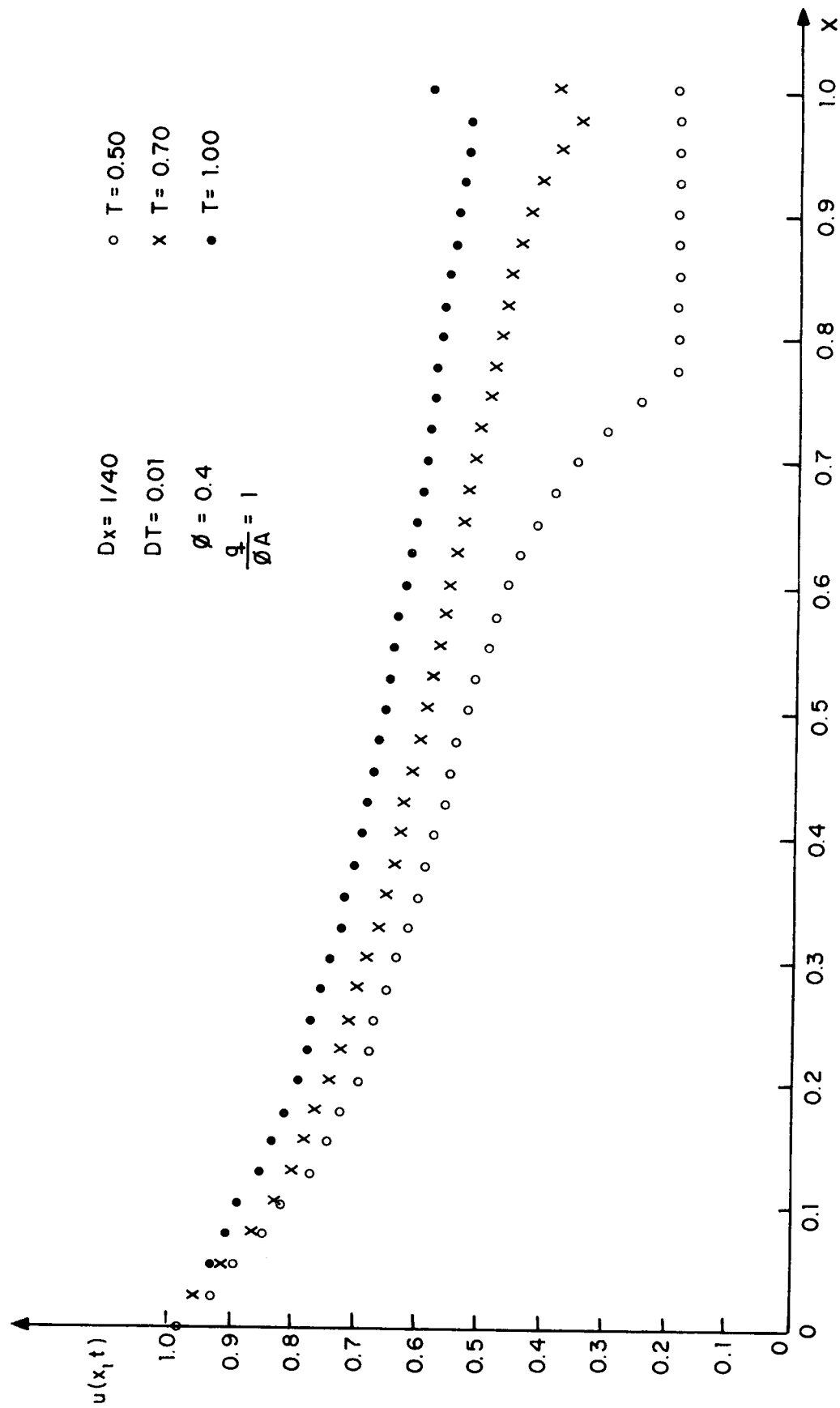


Fig. 3.5 Solución numérica de la ecuación para el desplazamiento inmiscible en un medio poroso por el método MET con $\max. K(U) = 0.017$

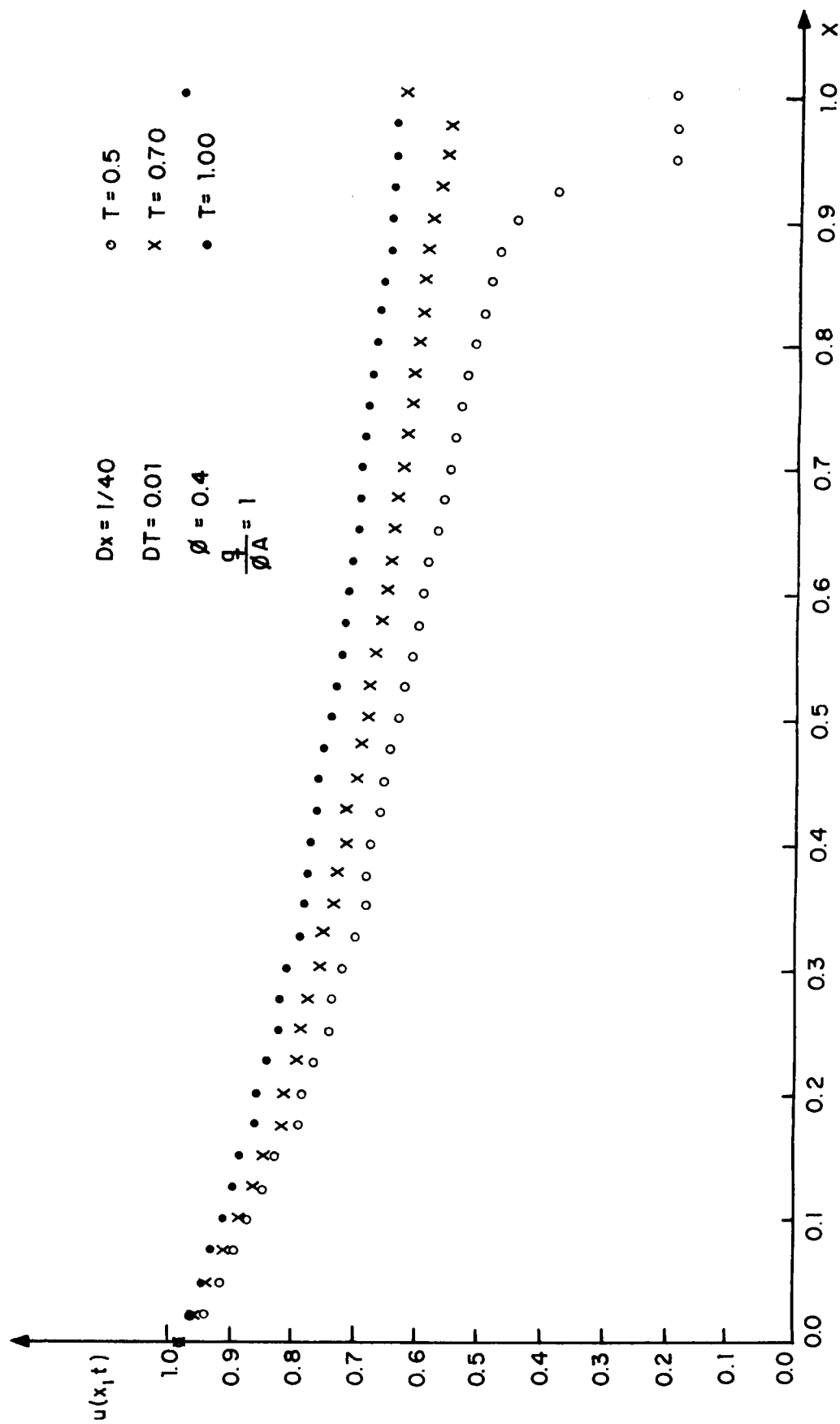


Fig. 3.6 Solución numérica de la ecuación para el desplazamiento inmiscible en un medio poroso por el método MET con máx. $K(U) = 0.0017$

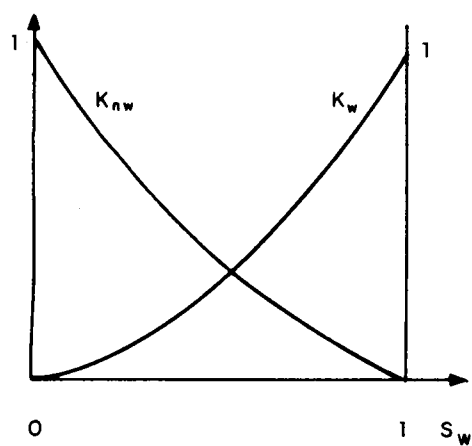


Fig. A.1 Gráfico de las permeabilidades relativas.

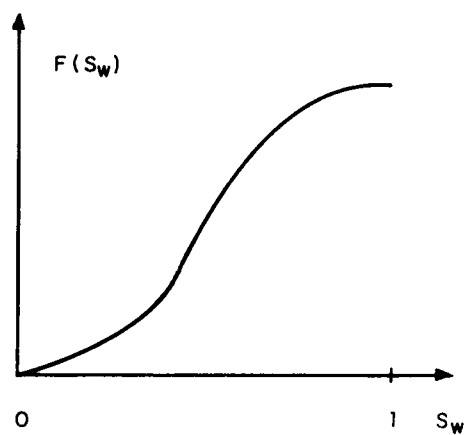


Fig. A.2 Gráfico de $F(S_w)$ en función de la saturación de la fase mojante.

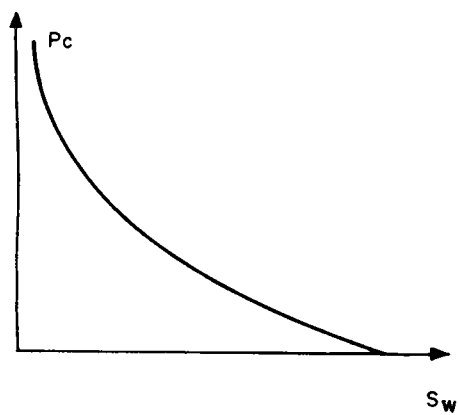


Fig. A.3 Gráfico de la presión capilar en función de la saturación de la fase mojante

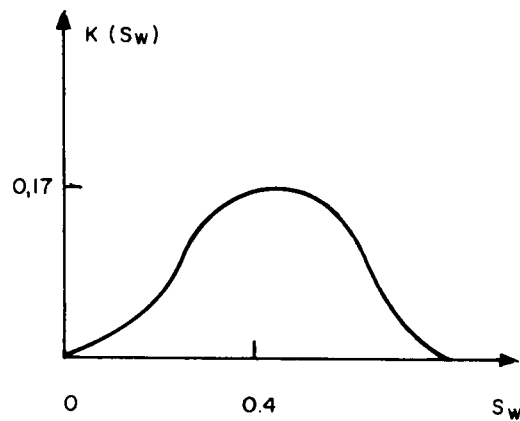


Fig. A.4 Gráfico del coeficiente de difusión en función de la saturación de la fase mojante