

C.N.E.A. Biblioteca	
ARCHIVO PUBLICACIONES	
Nº 1	AÑO 1970

04.70.13

PMM/A - 27

COMISION NACIONAL DE ENERGIA ATOMICA
DEPENDIENTE DE LA PRESIDENCIA DE LA NACION

SEXTO CURSO PANAMERICANO DE METALURGIA

Dentro del Programa Multinacional de Metalurgia
(Programa Regional de Ciencia y Tecnología - OEA)

ELEMENTOS DE TEORIA DE PLASTICIDAD

Ings. Carlos A. Martínez Vidal, Alfredo Sáenz López
y Horacio Helman

Departamento de Metalurgia
Buenos Aires - Argentina
1970

COMISION NACIONAL DE ENERGIA ATOMICA
DEPENDIENTE DE LA PRESIDENCIA DE LA NACION

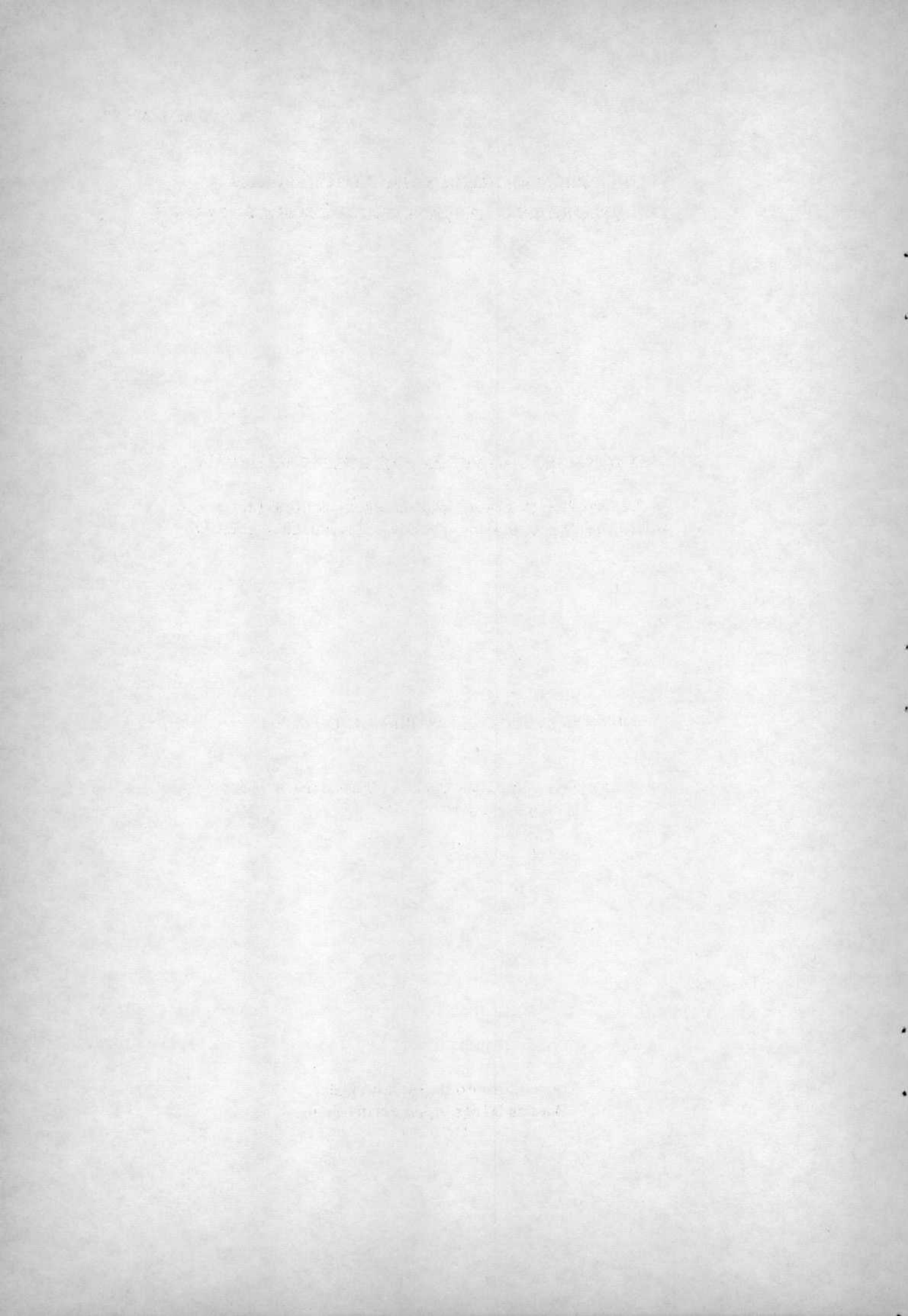
SEXTO CURSO PANAMERICANO DE METALURGIA

Dentro del Programa Multinacional de Metalurgia
(Programa Regional de Ciencia y Tecnología - OEA)

ELEMENTOS DE TEORIA DE PLASTICIDAD

Ings. Carlos A. Martínez Vidal, Alfredo Sáenz López
y Horacio Helman

Departamento de Metalurgia
Buenos Aires - Argentina
1970



I - ESTADO DE TENSIONES

I. 1- Introducción:

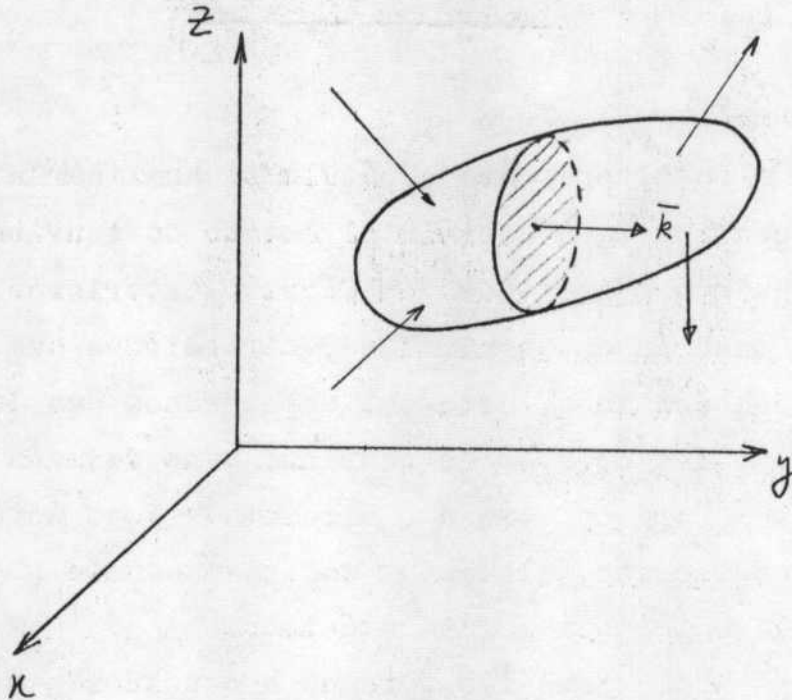
En el presente capítulo se analizarán las condiciones necesarias para definir el estado de tensiones en un punto de un cuerpo solicitado por fuerzas exteriores. En lo que sigue se tendrán en cuenta las restricciones que impone la mecánica del continuo, esto es, supondremos que la materia que constituye los cuerpos es continua y no formada por átomos o moléculas (forma continua o discreta). Esto será válido en tanto consideremos elementos suficientemente grandes comparados con las distancias interatómicas.

Además nos limitaremos a considerar solamente materiales isótropos y homogéneos. Se dice que un material es isótropo respecto de una propiedad física cualquiera, cuando su comportamiento frente a ésta es independiente de la dirección en que se la considere. Un cuerpo es homogéneo cuando presenta iguales propiedades en todos sus puntos.

I. 2- Estado de tensiones en un punto:

Supóngase tener un cuerpo en equilibrio sobre el que actúan fuerzas exteriores. Como consecuencia de dichas fuerzas, cada punto del cuerpo estará sometido a un estado de tensiones cuyas características se quieren determinar.

Figura I. 1



A los efectos de poner en evidencia el estado de tensiones de un punto determinado, seccionamos el cuerpo con un plano α arbitrario que pase por dicho punto. Al seccionar el cuerpo se manifiesta la interacción de una de las partes sobre la otra.

Separaremos una de las partes. Para conservar el equilibrio deberá aplicarse sobre la sección producida fuerzas distribuidas que reemplacen la interacción ejercida por la otra parte. Consideremos un entorno de área δA alrededor de P, sobre él actuará la fuerza $\overline{\delta F}$.

Definimos como "tensión media" σ_{media} actuante sobre δA al cociente:

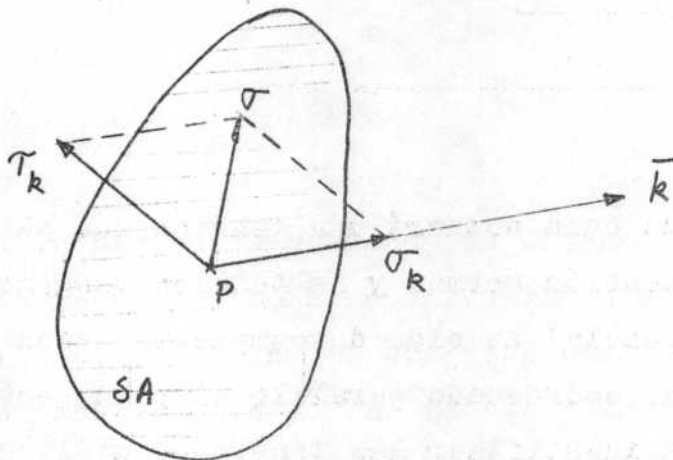
$$\sigma_{media} = \frac{\delta F}{\delta A}$$

La tensión en el punto será:

$$\sigma = \lim_{\delta A \rightarrow 0} \frac{\delta F}{\delta A} = \frac{dF}{dA}$$

En general, la dirección de la tensión formará un cierto ángulo con la normal al plano α . Podemos descomponer la tensión en una tensión según la normal: σ_k denominada tensión normal y otra perpendicular a ella: τ_k yacente en el plano α , denominada tensión tangencial.

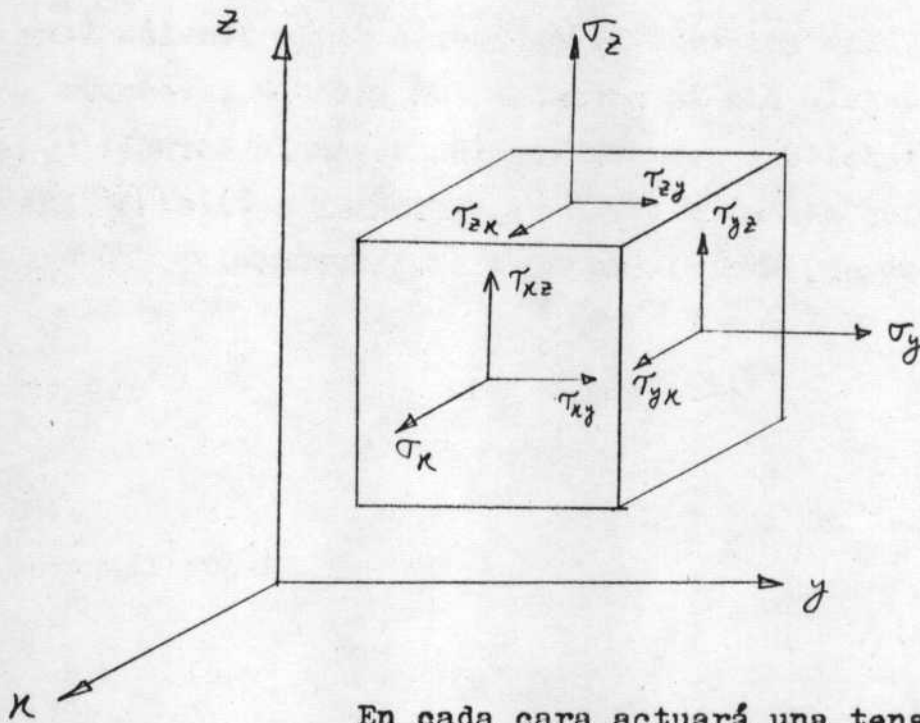
Figura I. 2



Referiremos el cuerpo para su mejor estudio, a un sistema de coordenadas cartesianas rectangulares (x, y, z)

Consideremos aislado un entorno volumétrico del punto P , de forma cúbica, cuyos conos son paralelos a los planos coordenados y de dimensiones infinitesimales.

Figura I. 3



En cada cara actuará una tensión que ya hemos descompuesto en la tensión normal y la tensión tangencial. A su vez la tensión tangencial ha sido descompuesta según los ejes que definen el plano coordenado paralelo al plano sobre el cual ella actúa. Para identificar las tensiones utilizaremos la siguiente convención:

a.- Las tensiones normales llevarán un subíndice que indica la dirección en que actúa. Ejemplo σ_x : tensión normal en la dirección del eje x.

b.- Las tensiones tangenciales llevarán dos subíndices: el primero identificará a la dirección normal al plano en el que actúa, el segundo indicará la dirección de ese plano en la que se ejerce. Ejemplo τ_{xy} ; tensión tangencial actuando en el plano paralelo al (yz), cuya normal es "x", y en la dirección "y". Se tendrá así actuando sobre el cubo un sistema de 18 tensio-

nes. Consideraciones simples de equilibrio indican que sólo seis son necesarias para definir dicho sistema de tensiones, esto es:

$$\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z, \tau_{xy}, \tau_{yz}, \tau_{zx}$$

siendo $\tau_{ji} = \tau_{ij}$

Conocidas estas tensiones decimos tener de finido el "estado de tensiones" en P. Ello implica poder calcular la tensión actuante en un plano cualquiera que pase por P.

I. 3- Tensiones sobre un plano arbitrario:

Supongamos dado un plano que pase por P, de finido por los cosenos directores de su normal \bar{n} que llamaremos:

$$l = \cos(x, n) \quad m = \cos(y, n) \quad n = \cos(z, n)$$

siendo $(x, n) = \alpha$; $(y, n) = \beta$; $(z, n) = \gamma$

Dicho plano cortará al cubo produciendo una sección de área Ω .

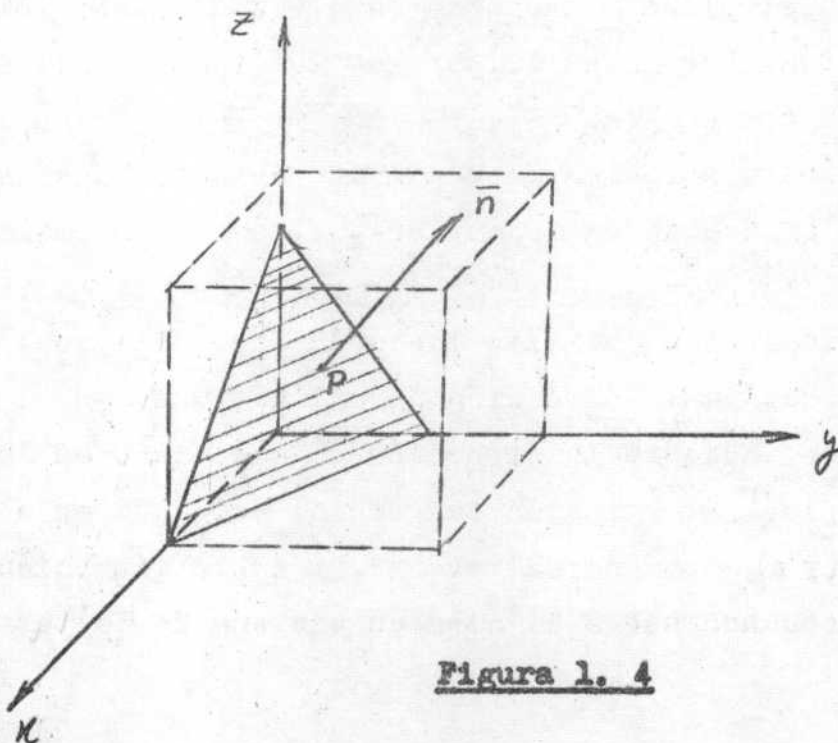


Figura 1. 4

Llamemos con Δx , Δy , Δz las proyecciones de la sección Ω sobre los respectivos planos coordenados. Sobre la sección Ω actuará la tensión \bar{S} que deseamos calcular. Sus componentes según los ejes coordenados son:

$$\bar{S} = (S_x, S_y, S_z)$$

Aplicando la condición de equilibrio de fuerzas en la dirección x se tendrá:

$$S_x \Omega = \sigma_x \Delta x + \tau_{yx} \Delta y + \tau_{zx} \Delta z \quad (1 - 1)$$

Dividiendo miembro a miembro se obtiene:

$$S_x = \sigma_x \cdot 1 + \tau_{yx} m + \tau_{zx} n \quad (1 - 2)$$

Análogamente para las direcciones "y" y "z":

$$S_y = \tau_{xy} \cdot 1 + \sigma_y m + \tau_{zy} n \quad (1 - 3)$$

$$S_z = \tau_{xz} \cdot 1 + \tau_{yz} m + \sigma_z n \quad (1 - 4)$$

Las ecuaciones (1 - 2), (1 - 3) y (1 - 4) pueden escribirse en forma matricial:

$$\begin{bmatrix} S_x \\ S_y \\ S_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sigma_x & \tau_{yx} & \tau_{zx} \\ \tau_{xy} & \sigma_y & \tau_{zy} \\ \tau_{xz} & \tau_{yz} & \sigma_z \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ m \\ n \end{bmatrix} \quad (1 - 5)$$

Conocidos sus componentes cartesianos, S resultará:

$$S^2 = S_x^2 + S_y^2 + S_z^2 \quad (1 - 6)$$

La componente según la normal S_n , de la tensión será:

$$\begin{aligned} S_n &= 1 S_x + m S_y + n S_z = \\ &= 1^2 \sigma_x + m^2 \sigma_y + n^2 \sigma_z + 2 (1m \tau_{xy} + mn \tau_{yz} + \\ &+ nl \tau_{zx}) \end{aligned} \quad (1 - 7)$$

La componente tangencial S_t puede calcularse ahora por:

$$S_t^2 = S^2 - S_n^2 \quad (1 - 8)$$

I. 4- Cuádrlica de tensiones:

Tratemos de encontrar una representación gráfica para la ecuación (1 - 7). En ella, para cada dirección dada por sus cosenos directores (l, m, n) tenemos el valor de la tensión normal correspondiente. Esta ecuación representa en el espacio (l, m, n), el lugar geométrico de las tensiones normales actuantes sobre planos que pasan por el punto P. Suele presentársela efectuando un cambio de variables:

$$\xi = \frac{l}{\sqrt{S_n}} \quad \eta = \frac{m}{\sqrt{S_n}} \quad \zeta = \frac{n}{\sqrt{S_n}}$$

con el cual se obtiene:

$$\pm 1 = \sigma_x \xi^2 + \sigma_y \eta^2 + \sigma_z \zeta^2 + 2(\tau_{xy} \xi \eta + \tau_{yz} \eta \zeta + \tau_{zx} \zeta \xi) \quad (1 - 9)$$

que es, en coordenadas (ξ, η, ζ), la ecuación de una cuádrlica denominada "cuádrlica de tensiones".

I. 5- Tensiones principales. Invariantes del estado de tensiones:

Nos proponemos hallar un sistema coordinado de referencia, respecto del cual el estado de tensiones del punto P quede definido sólo por tensiones normales. Dichas tensiones se denominan tensiones principales.

Consideremos las ecuaciones (1 - 2), (1 - 3), y (1 - 4):

$$\begin{aligned} S_x &= \sigma_{x.l} + \tau_{yx.m} + \tau_{zx.n} \\ S_y &= \tau_{xy.l} + \sigma_{y.m} + \tau_{zy.n} \\ S_z &= \tau_{xz.l} + \tau_{yz.m} + \sigma_{z.n} \end{aligned} \quad (1 - 10)$$

Si llamamos con S_p a una tensión principal, sus componentes cartesianos serán:

$$\begin{cases} S_{p_x} = S_x = S_{p.1} \\ S_{p_y} = S_y = S_{p.m} \\ S_{p_z} = S_z = S_{p.n} \end{cases} \quad (1 - 11)$$

Reemplazando estas expresiones en (1 - 10)

se tiene:

$$\begin{cases} 1 (S_p - \sigma_x) - m \tau_{xy} - n \tau_{xz} = 0 \\ -1 \tau_{xy} + m (S_p - \sigma_y) - n \tau_{yz} = 0 \\ -1 \tau_{xz} - m \tau_{yz} + n (S_p - \sigma_z) = 0 \end{cases} \quad (1 - 12)$$

Sistema de ecuaciones lineales, homogéneo, cuyas incógnitas l , m , y n deseamos calcular. Para que el sistema admita soluciones no nulas deberá anularse el determinante de los coeficientes. Esto es:

$$\begin{vmatrix} S_p - \sigma_x & -\tau_{xy} & -\tau_{xz} \\ -\tau_{xy} & S_p - \sigma_y & -\tau_{yz} \\ -\tau_{xz} & -\tau_{yz} & S_p - \sigma_z \end{vmatrix} = 0 \quad (1 - 13)$$

Desarrollando el determinante se obtiene:

$$\begin{aligned} S_p^3 - S_p^2 (\sigma_x + \sigma_y + \sigma_z) + S_p (\sigma_x \sigma_y + \sigma_y \sigma_z + \sigma_z \sigma_x - \\ - \tau_{xy}^2 - \tau_{yz}^2 - \tau_{zx}^2) - (\sigma_x \sigma_y \sigma_z + 2 \tau_{xy} \tau_{yz} \tau_{zx} - \\ - \sigma_x \tau_{yz}^2 - \sigma_y \tau_{zx}^2 - \sigma_z \tau_{xy}^2) = 0 \end{aligned} \quad (1 - 14)$$

que escribimos como:

$$S_p^3 - J_1 S_p^2 + J_2 S_p - J_3 = 0 \quad (1 - 15)$$

donde:

$$J_1 = \sigma_x + \sigma_y + \sigma_z$$

$$J_2 = \sigma_x \sigma_y + \sigma_y \sigma_z + \sigma_z \sigma_x - \tau_{xy}^2 - \tau_{yz}^2 - \tau_{zx}^2$$

$$J_3 = \sigma_x \sigma_y \sigma_z + 2 \tau_{xy} \tau_{yz} \tau_{zx} - \sigma_x \tau_{yz}^2 - \sigma_y \tau_{zx}^2 - \sigma_z \tau_{xy}^2$$

La ecuación (1 - 15) se denomina "ecuación secular". Las soluciones de dicha ecuación cúbica constituyen las tres tensiones principales que designaremos con σ_1 , σ_2 y σ_3 . Como el estado de tensiones que determinan estas tres tensiones es independiente del sistema de referencia elegido originalmente, concluimos que cualquiera que hubiese sido éste, el resultado de la ecuación secular habría sido el mismo. Por lo tanto sus coeficientes deberán ser independientes del sistema de referencia y se los denomina "invariantes del estado de tensiones".

Si se sustituye en el sistema (1 - 12), S_p por el valor de σ_1 calculado mediante la ecuación cúbica, se obtiene una terna de valores (l_1, m_1, n_1) que caracterizan la dirección en que actúa la tensión principal 1. Análogamente se obtienen las direcciones de las tensiones principales

σ_2 y σ_3 . Estas tres direcciones halladas constituyen el sistema de referencia buscado. Puede demostrarse que estas 3 direcciones son ortogonales entre sí y se denominan "direcciones principales".

La forma que toman los invariantes del estado de tensiones referidos a las direcciones principales es:

$$J_1 = \sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3$$

$$J_2 = \sigma_1 \sigma_2 + \sigma_2 \sigma_3 + \sigma_3 \sigma_1$$

$$J_3 = \sigma_1 \sigma_2 \sigma_3$$

1 - 16

I. - 6 Representación gráfica de estados de tensiones tridimensionales

Se vió en puntos anteriores que, conocido el estado de tensiones en un punto dado por las tensiones:

$$\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z, \tau_{xy}, \tau_{yz}, \tau_{zx}$$

se podían calcular las tensiones normales y tangenciales a un plano cualquiera, definido por los cosenos directores (l , m , y n), de su normal, mediante las ecuaciones (1 - 7) y (1 - 8).

Estas ecuaciones, en función de las tensiones principales resultan:

$$S_n = \sigma_1 l^2 + \sigma_2 m^2 + \sigma_3 n^2 \quad (1 - 17)$$

$$S_n^2 = \sigma_1^2 l^2 + \sigma_2^2 m^2 + \sigma_3^2 n^2 - S_n^2 \quad (1 - 18)$$

se verá un procedimiento gráfico que permite obtener estos valores de una forma muy simple. Esta construcción gráfica se debe a Mohr. Consideraremos

Recordemos que los cosenos directores cumplen la condición:

$$l^2 + m^2 + n^2 = 1 \quad (1 - 19)$$

que podemos escribir como

$$m^2 = 1 - l^2 - n^2 \quad (1 - 20)$$

Eliminando m^2 entre las ecuaciones (1 - 20) y (1 - 17) se obtiene:

$$S_n = l^2(\sigma_1 - \sigma_2) + \sigma_2 + n^2(\sigma_3 - \sigma_2) \quad (1 - 21)$$

Resolviendo esta expresión en n^2 y reemplazando en (1 - 18)

se obtiene, operando convenientemente:

$$(S_n - \sigma_2)(S_n - \sigma_3) = l^2 (\sigma_2 - \sigma_1)(\sigma_3 - \sigma_1) \quad (1 - 22)$$

Desarrollando y agrupando en la forma adecuada llegamos a la expresión:

$$\left\{ S_n - \frac{\sigma_2 + \sigma_3}{2} \right\}^2 + S_t^2 = l^2 (\sigma_2 - \sigma_1)(\sigma_3 - \sigma_1) + \left[\frac{\sigma_2 - \sigma_3}{2} \right]^2 \quad (1 - 23)$$

Si se hubiera operado con los otros cosenos directores se habría obtenido expresiones análogas:

$$\left\{ S_n - \frac{\sigma_3 + \sigma_1}{2} \right\}^2 + S_t^2 = m^2 (\sigma_3 - \sigma_2)(\sigma_1 - \sigma_2) + \left[\frac{\sigma_3 - \sigma_1}{2} \right]^2 \quad (1 - 24)$$

$$\left\{ S_n - \frac{\sigma_1 + \sigma_2}{2} \right\}^2 + S_t^2 = n^2 (\sigma_1 - \sigma_3)(\sigma_2 - \sigma_3) + \left[\frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2} \right]^2 \quad (1 - 25)$$

Consideremos la expresión (1 - 23). En coordenadas (S_n, S_t) representa una circunferencia de la forma

$$(x - a_1)^2 + y^2 = R_1^2, \quad \text{donde :}$$

$$\begin{cases} R_1 = \pm \sqrt{l^2 (\sigma_2 - \sigma_1)(\sigma_3 - \sigma_1) + \left[\frac{\sigma_2 - \sigma_3}{2} \right]^2} \\ a_1 = \frac{\sigma_2 + \sigma_3}{2} \end{cases} \quad (1 - 26)$$

ubicada como se indica en la Figura I - 5.

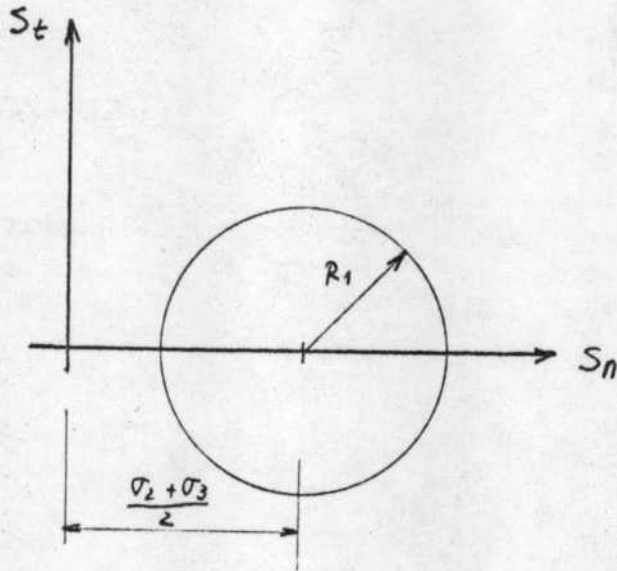


Figura I. 5

El valor de R_1 , dado en (1 - 26) depende de l . El $\cos \alpha = l$ puede tomar valores comprendidos entre:

$$1 \geq l \geq 0 \quad \text{para} \quad 0 \leq \alpha \leq \frac{\pi}{2} \quad l. \text{ Así se tendrá:}$$

$$R_{1 \max} = \sigma_1 - \frac{\sigma_2 + \sigma_3}{2} \quad \text{para} \quad l = 1$$

$$R_{1 \min} = \frac{\sigma_2 - \sigma_3}{2} \quad \text{para} \quad l = 0$$

Estos valores se indican en la Figura I. 6

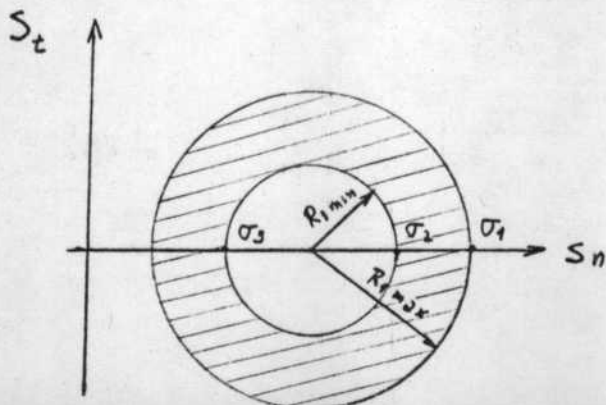


Figura I. 6

Para un valor cualquiera de l , la circunferencia correspondiente se hallará en la zona limitada por las circunferencias de radios R_1 máx y R_1 mín.

Análogamente, con la expresión (1 - 24) podemos determinar una circunferencia de radio:

$$R_2 = \sqrt{m^2 (\sigma_2 - \sigma_3)(\sigma_2 - \sigma_1) + \left(\frac{\sigma_1 - \sigma_3}{2}\right)^2} \quad (1-27)$$

y abscisa al origen, del centro:

$$d_2 = \frac{\sigma_1 + \sigma_3}{2}$$

A su vez el radio R_2 define una familia de circunferencias en función de $m = \cos \beta$. Como β puede variar entre 0 y $\frac{\pi}{2}$ será:

$$0 \leq m \leq 1$$

Así tendremos los valores máximos y mínimos del radio R_2 :

$$R_{2 \max} = \frac{\sigma_1 - \sigma_3}{2} \quad y \quad R_{2 \min} = \frac{\sigma_1 + \sigma_3}{2} - \sigma_2$$

La posición de estas circunferencias se aprecia en la Figura I. 7.

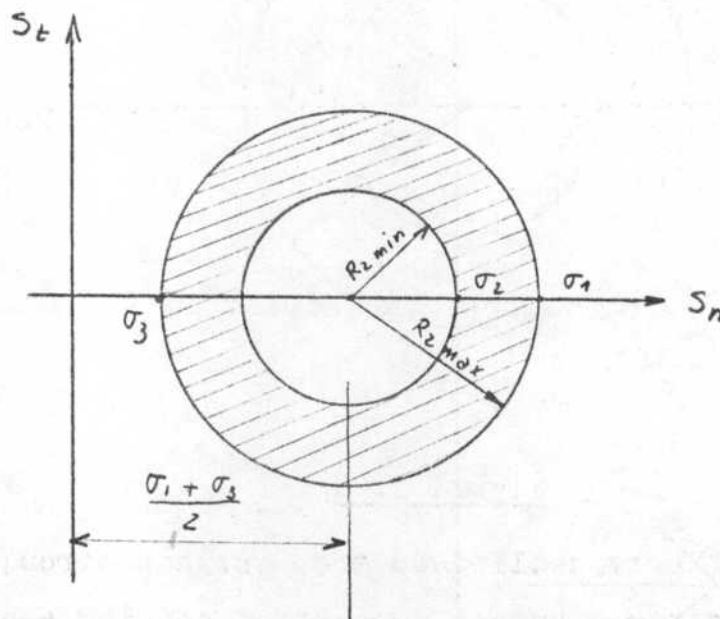


Figura I. 7

Para la ecuación (1 - 25) se hace un razonamiento análogo. Es

$$R_3 = \sqrt{n^2 (\sigma_3 - \sigma_1)(\sigma_3 - \sigma_2) + \left[\frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2}\right]^2} \quad (1-28)$$

$$a_3 = \frac{\sigma_1 + \sigma_2}{2}$$

Al variar γ entre 0 , $\frac{\pi}{2}$ resultará que $n = \cos \gamma$ varía entre: $0 \leq n \leq 1$

Así se tienen los valores máximos y mínimos del radio R_3 :

$$R_{3 \max} = \sigma_3 - \frac{\sigma_1 + \sigma_2}{2} \quad \text{y} \quad R_{3 \min} = \frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2}$$

Sus posiciones se aprecian en la Figura I. 8

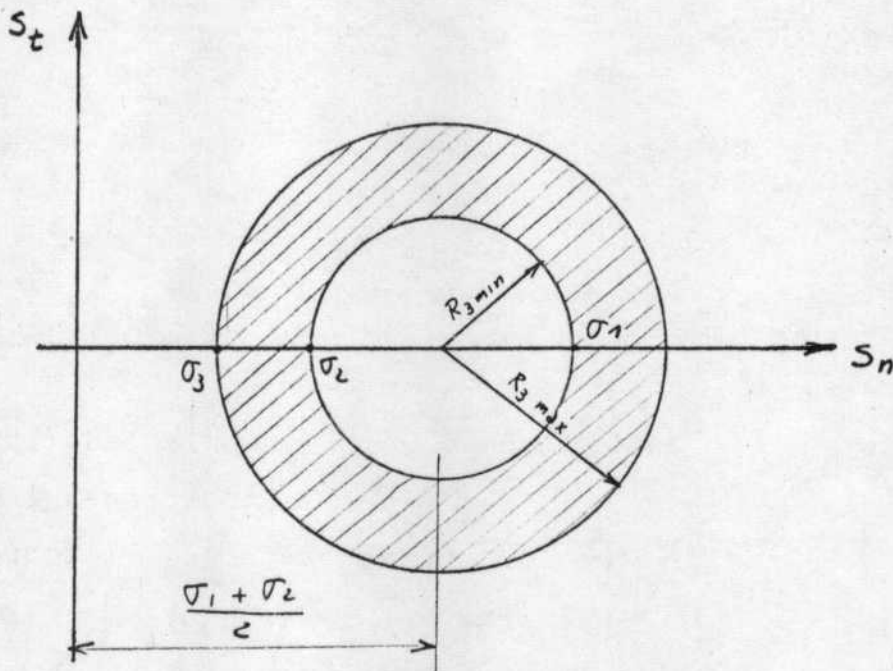


Figura I. 8

Hemos deslindado tres coronas circulares donde pueden encontrarse puntos que satisfacen las ecuacio-

nes (1 - 23), (1 - 24) y (1 - 25). Como deben satisfacerse las tres simultáneamente, sólo nos interesa la zona común a las tres. Sólo en dicha zona se verifica:

$$l^2 + m^2 + n^2 = 1$$

La mencionada zona es la que se indica rayada en la Figura I. 9.

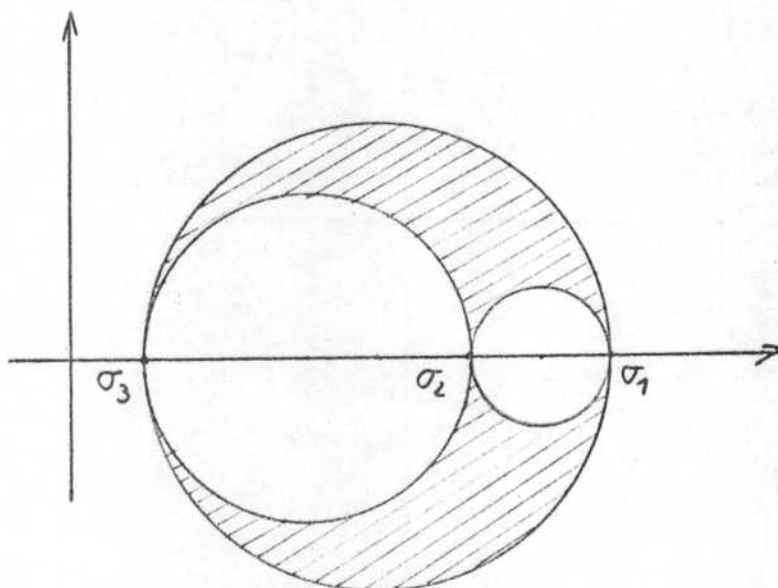


Figura I. 9

I. 6 - 1: Forma práctica del trazado y utilización del círculo de Mohr.

Supongamos que se han calculado las tensiones principales $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$ con la notación tal que $\sigma_1 > \sigma_2 > \sigma_3$. Marquemos los puntos P_1, P_2 y P_3 sobre el eje S (Figura I. 10), tales que $\overline{OP_1} = \sigma_1, \overline{OP_2} = \sigma_2, \overline{OP_3} = \sigma_3$. Tracemos los círculos de diámetros $\overline{P_1 P_2}, \overline{P_2 P_3}, \overline{P_3 P_1}$ con centros en $(\frac{\sigma_1 + \sigma_2}{2}, 0), (\frac{\sigma_2 + \sigma_3}{2}, 0); (\frac{\sigma_3 + \sigma_1}{2}, 0)$ respectivamente.

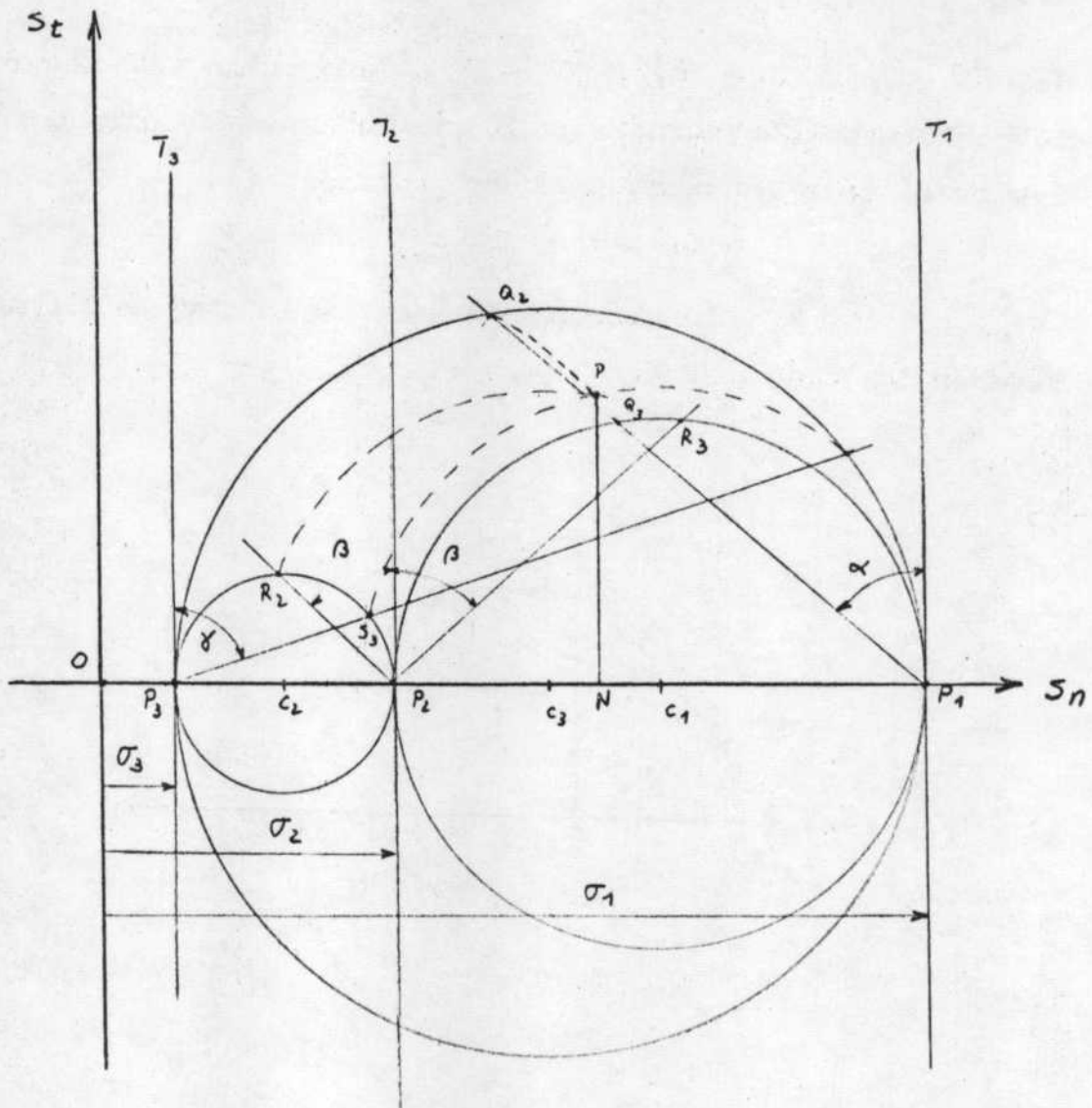


Figura I. 10

Desde P_1 , P_2 y P_3 tracemos líneas paralelas al eje S_t : $\overline{P_1 T_1}$, $\overline{P_2 T_2}$ y $\overline{P_3 T_3}$ respectivamente. Por P_1 tracemos una línea que forme un ángulo α con $\overline{P_1 T_1}$, tal que $\cos \alpha = 1$, hasta cortar los círculos que pasan por P_1 y P_2 ; P_1 y P_3 en Q_3 y Q_2 respectivamente. Calculemos la longitud $\overline{C_2 Q_3}$; las coordenadas de Q_3 son:

$$\sigma_2 + (\sigma_1 - \sigma_2) \cos^2 \alpha \quad ; \quad (\sigma_1 - \sigma_2) \cos \alpha \operatorname{sen} \alpha$$

La distancia $\overline{C_2 Q_3}$ es:

$$\begin{aligned} \overline{C_2 Q_3}^2 &= \left[\frac{\sigma_2 - \sigma_3 + 2(\sigma_1 - \sigma_2) l^2}{2} \right] + \left[(\sigma_1 - \sigma_2) l \sqrt{1 - l^2} \right]^2 = \\ &= \left[\left(\frac{\sigma_2 - \sigma_3}{2} \right) + l^2 (\sigma_1 - \sigma_2) (\sigma_1 - \sigma_3) \right] \quad (1-29) \end{aligned}$$

Vemos que la distancia $\overline{C_2 Q_3}$ no es otra cosa que el radio de la circunferencia definida por la ecuación (1 - 23). En forma análoga se concluye que $\overline{C_2 Q_3} = \overline{C_2 Q_2}$. Así trazamos el arco $\overline{Q_2 Q_3}$ con centro en C_2 . Sobre este arco se hallarán los valores de S_n y S_t correspondientes al plano indicado. Para definir el valor que corresponde basta repetir el razonamiento para otra de las ecuaciones, por ejemplo la (1 - 25). Tracemos un arco de circunferencia centrado en C_1 y radios $\overline{C_1 S_3}$ o $\overline{C_1 S_2}$, donde S_2 y S_3 son los puntos de intersección de una línea trazada por P_3 tal que forme un ángulo δ con $\overline{P_3 T_3}$, de forma que $\cos \delta = n$ con los círculos que pasan por $\overline{P_3 P_2}$ y $\overline{P_3 P_1}$. Este arco $\overline{S_2 S_3}$ intersecta al arco $\overline{Q_2 Q_3}$ en el punto P.

Si se repite el razonamiento para la ecuación (1 - 24) se obtiene un arco $\overline{R_2 R_3}$ que naturalmente también pasa por P. Por P tracemos una perpendicular que corta al eje S_n en N. Así $\overline{PN} = S_t$ y $\overline{ON} = S_n$ con lo cual hemos resuelto gráficamente nuestro problema.

I. 6 - 2: Valores máximos de la tensión de corte:

Quando resulta $\alpha = \delta = 45^\circ$ y $\beta = \frac{\pi}{2}$ se obtiene la máxima tensión de corte para este plano, cuyo valor es:

$$\tau_1 = \frac{\sigma_1 - \sigma_3}{2} \quad (1-30)$$

Análogamente, para $\alpha = \frac{\pi}{2}$ y $\beta = \gamma = 45^\circ$ resulta:

$$\tau_2 = \frac{\sigma_2 - \sigma_3}{2} \quad (1-31)$$

y para $\gamma = \frac{\pi}{2}$ y $\alpha = \beta = 45^\circ$

$$\tau_3 = \frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2} \quad (1-32)$$

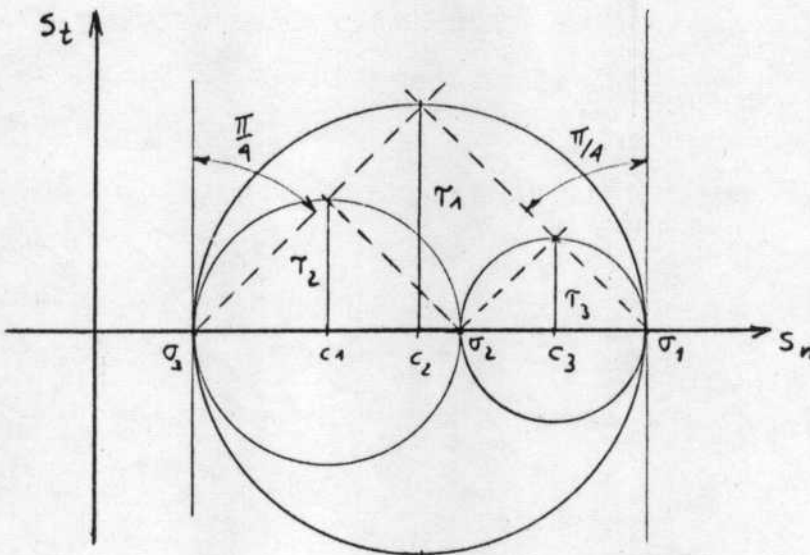


Figura I. 11

Por lo tanto, los valores máximos de las tensiones de corte ocurren en planos a 45° respecto de dos direcciones principales y paralela a la tercera. Se pueden observar en la Figura I. 12.

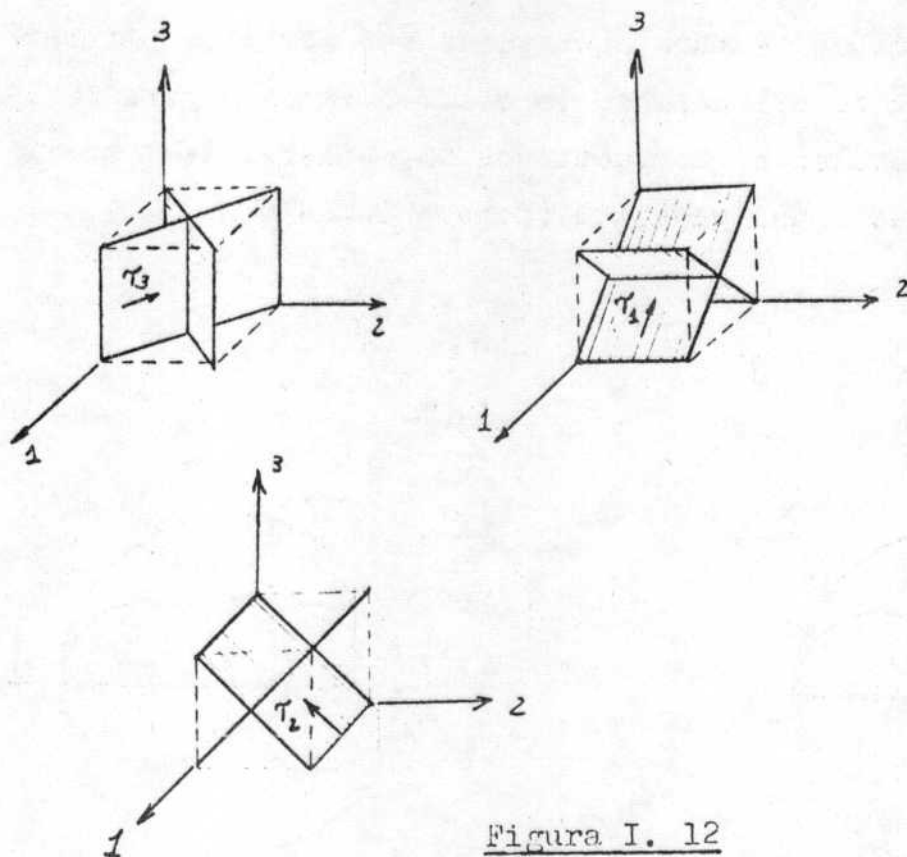
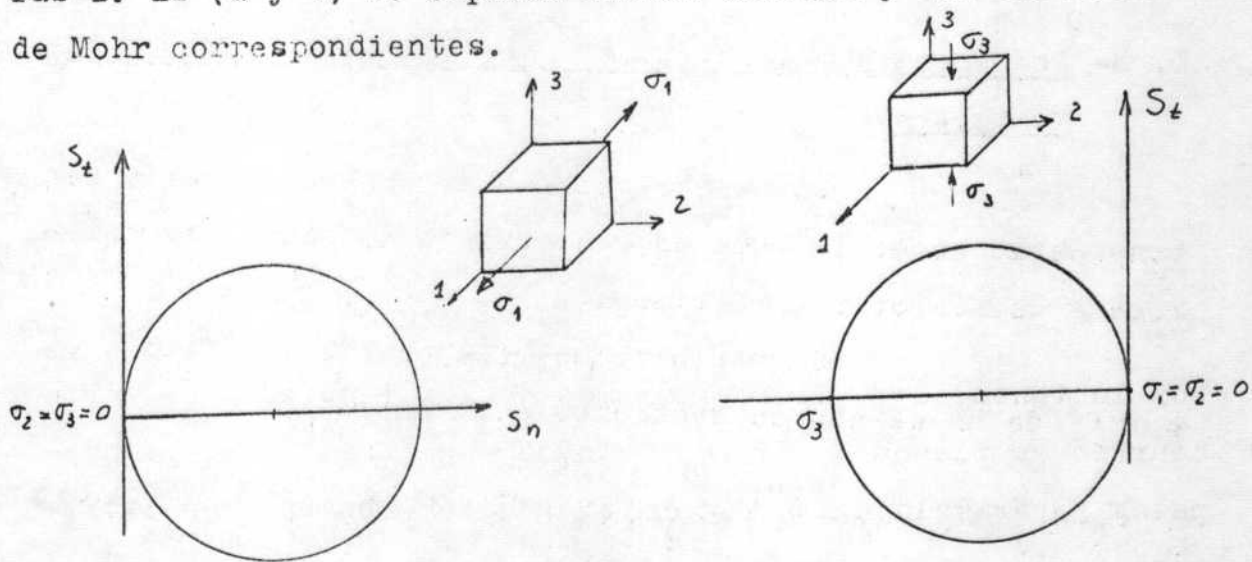


Figura I. 12

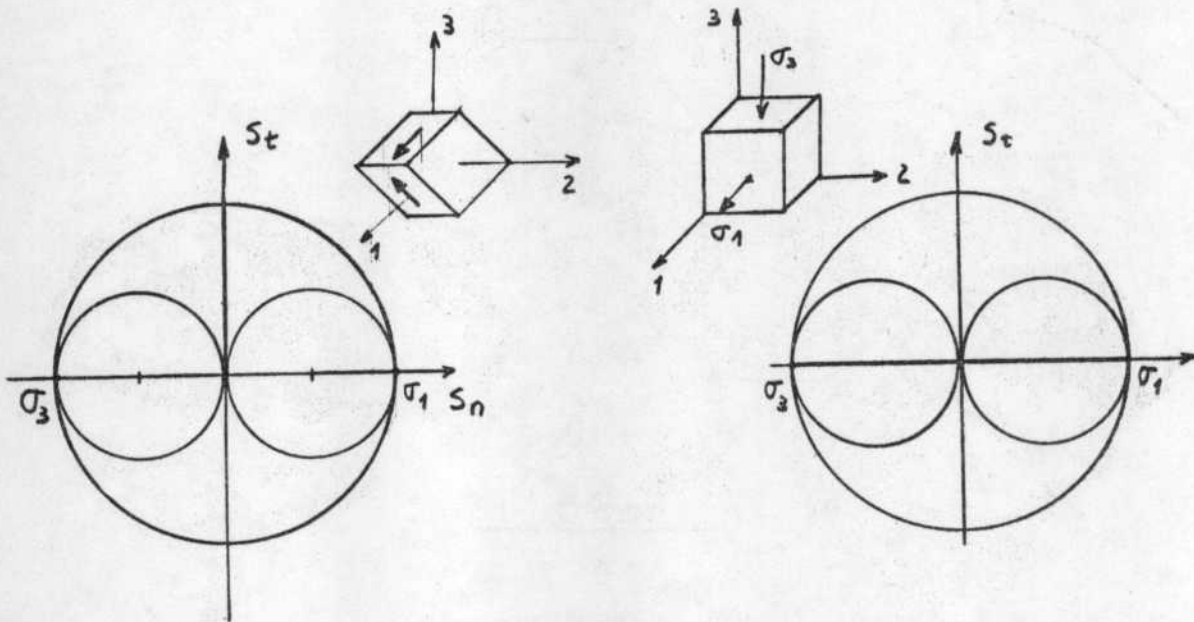
I. 7- Estados de tensiones particulares:

a) Estados de tracción o compresión uniaxial. En las Figuras I. 12 (a y b) se exponen dichos estados y los círculos de Mohr correspondientes.



Figuras I. 12 (a y b)

b) El estado de corte puro, que puede ser obtenido por torsión de una barra cilíndrica, se observa en la Figura I. 13. Un estado equivalente, compuesto de un esfuerzo de tracción y compresión de igual magnitud (Figura I. 14).



Figuras I. 13 y I. 14

I. 8- Componentes hidrostática y desviadora del estado de tensiones:

Un estado general de tensiones puede ser considerado como la suma de dos estados denominados: esférico y desviador respectivamente.

Se define como "componente esférica": σ_m o σ'' , de un estado de tensiones a la expresión:

$$\sigma_m = \frac{1}{3} (\sigma_x + \sigma_y + \sigma_z) = \frac{1}{3} (\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3) = \sigma'' \quad (1-33)$$

Esta componente suele denominarse, además, tensión hidrostática o tensión media. Puede observarse que:

$$\sigma_m = \frac{J_1}{3} \quad (1-34)$$

Las componentes desviadoras, que indicaremos con σ' , se obtienen restando de las tensiones normales, la tensión hidrostática. Así:

$$\left\{ \begin{array}{l} \sigma'_x = \sigma_x - \sigma_m = \frac{1}{3} (2\sigma_x - \sigma_y - \sigma_z) \\ \sigma'_y = \sigma_y - \sigma_m = \frac{1}{3} (2\sigma_y - \sigma_x - \sigma_z) \\ \sigma'_z = \sigma_z - \sigma_m = \frac{1}{3} (2\sigma_z - \sigma_x - \sigma_y) \end{array} \right. \quad (1-35)$$

Representar en el círculo de Mohr, una tensión desviadora equivale a trasladar el origen de coordenadas en σ_m , en el eje de tensiones normales.

Los invariantes del estado esférico de tensiones son:

$$\begin{aligned} J_1'' &= 3\sigma_m = J_1 \\ J_2'' &= 3\sigma_m^2 = \frac{J_1^2}{3} \\ J_3'' &= \sigma_m^3 = \frac{J_1^3}{27} \end{aligned} \quad (1-36)$$

Los invariantes del estado desviador de tensiones son:

$$\begin{aligned} J_1' &= 0 \\ J_2' &= -J_2 + \frac{J_1^2}{3} \\ J_3' &= J_3 - \frac{J_1 J_2}{3} + \frac{2}{27} J_1^3 \end{aligned} \quad (1-37)$$

y la ecuación secular referida a las componentes desviadoras de las tensiones principales resulta:

$$\sigma'^3 - J_2 \sigma' - J_3 = 0 \quad (1-38)$$

I. 9- Tensión efectiva o equivalente:

Se define como tensión efectiva o equivalente $\bar{\sigma}$ de un estado de tensiones a la expresión:

$$\bar{\sigma} = \frac{1}{\sqrt{2}} \left[(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2 \right]^{\frac{1}{2}} \quad (1-39)$$

que puede escribirse como

$$\bar{\sigma} = \left(J_1^2 - 3 J_2 \right)^{\frac{1}{2}} \quad (1-40)$$

Resulta ser la tensión efectiva un invariante del estado de tensiones. Puede utilizarse, como tal, para compararse estados de tensiones diferentes.

II- NOTACION TENSORIAL

II-1.- INTRODUCCION

Se ha tratado el estado general de tensiones. Se puede apreciar que las fórmulas allí desarrolladas guardan cierta simetría cíclica, mediante una permutación adecuada de índices. Otra característica del tipo de fórmulas necesarias en el análisis de las tensiones en un cuerpo es que la idea que se pretende transmitir con la ecuación matemática queda oscurecida por la gran cantidad de términos y de subíndices.

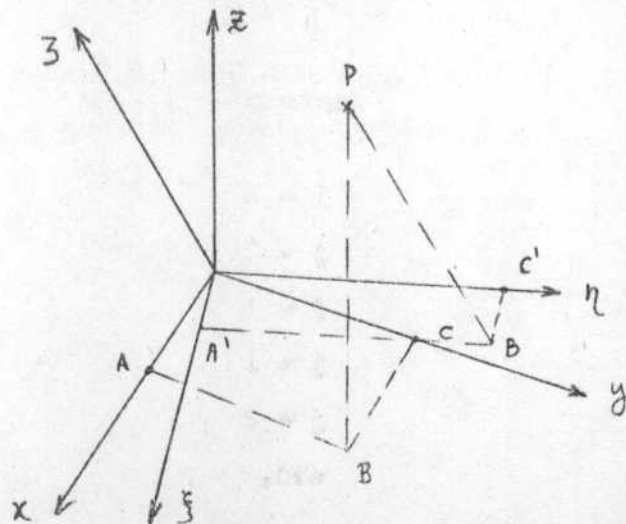
Es por ello que se recurre a la notación tensorial, que se desarrollará en este capítulo. Conviene aclarar que dicha notación simplifica notablemente el manejo de las fórmulas, pero requiere un cierto entrenamiento para su correcta interpretación. Además, esta notación sirve en la mayor parte de los casos sólo para la demostración de teoremas generales y debe volverse a la notación clásica cuando se encare la solución de problemas particulares.

Todo el análisis desarrollado a continuación se refiere a coordenadas cartesianas.

II-2.- TRANSFORMACION DE COORDENADAS Y NOTACION TENSORIAL.

La transformación de coordenadas es un problema frecuente en ingeniería. En el caso específico del análisis de tensiones, es a menudo conveniente transformar los datos referidos a una terna x, y, z , cualquiera, al sistema formado por las tres direcciones principales. Por ello, y para introducir la notación tensorial, se analiza este problema.

Supongamos tener dos sistemas de coordenadas cartesianas: x, y, z , por un lado y ξ, η, ζ , por el otro, con un origen común O (ver fig. II-1)



- Figura II.1 -

Se requiere hallar las coordenadas ξ, η, ζ de un punto P (x, y, z) en función de x, y, z. Supóngase que los cosenos directores de la línea O ξ sean l, m, n, con respecto a x, y, z, los de O η sean l', m', n' y los de O ζ sean l'', m'', n'', respecto de x, y, z.

El punto P tiene coordenadas: x (= OA), y (= AB), z (= BP). La proyección de OP sobre O ξ es igual a la suma de las proyecciones de OA, AB y PB sobre O ξ , o sea:

$$OA' = \xi = x l + y m + z n$$

Análogamente

$$(2.1)$$

$$A'B' = \eta = x l' + y m' + z n'$$

$$B'P = \zeta = x l'' + y m'' + z n''$$

Puede hacerse también el caso inverso, o sea, obtener x, y, z, a partir de ξ, η, ζ :

$$x = \xi l + \eta l' + \zeta l''$$

$$y = \xi m + \eta m' + \zeta m''$$

$$z = \xi n + \eta n' + \zeta n''$$

$$(2.2)$$

La notación se cambia ahora de la siguiente manera:

Se reemplazan las coordenadas x, y, z, por x_1, x_2, x_3 y se denominan x_i a las coordenadas del punto P, variando i entre 1 y 3. O sea, con x_i se indica que las coordenadas de P respecto de los ejes Ox_1, Ox_2, Ox_3 son x_1, x_2 y x_3 respectivamente. En forma análoga, se reemplazan ξ, η, ζ por x'_1, x'_2, x'_3 , simbolizándose con x'_j las coordenadas de P en el sistema de ejes Ox'_j .

Se denomina a_{ij} a los cosenos directores entre los ejes Ox_i y Ox'_j , de modo que:

Sistema x, y, z	Sistema ξ, η, ζ	Cosenos
i = 1	j = 1	$a_{ij} = a_{11} = 1$
i = 1	j = 2	$a_{12} = l'$
i = 1	j = 3	$a_{13} = l''$
i = 2	j = 1	$a_{21} = m$
i = 2	j = 2	$a_{22} = m'$
etc.	etc.	etc.

(En todo este punto se reservará la letra " a " para los cosenos directores).

De esta manera la ecuación (1) puede escribirse

$$x'_1 = \xi = a_{11}x_1 + a_{21}x_2 + a_{31}x_3 = \sum_{i=1,2,3}^3 a_{i1}x_i$$

$$x'_2 = \eta = a_{12}x_1 + a_{22}x_2 + a_{32}x_3 = \sum_{i=1}^3 a_{i2}x_i$$

$$x'_3 = \zeta = a_{13}x_1 + a_{23}x_2 + a_{33}x_3 = \sum_{i=1}^3 a_{i3}x_i$$

Estas tres ecuaciones pueden expresarse mediante una sola

$$x'_j = \sum_{i=1}^3 a_{ij}x_i \quad (2.3)$$

donde j a su vez puede adoptar los valores 1, 2 y 3.

En forma análoga, la ecuación (2) se puede escribir como

$$x_i = \sum_{j=1}^3 a_{ij}x'_j \quad (2.4)$$

En este caso, i puede tomar los valores de 1 a 3.

En las ecuaciones (2.3) y (2.4), la suma se produce sobre el subíndice repetido. Esto ha dado lugar a la notación de Einstein que implica que debe entenderse una suma sobre todo subíndice que se halle repetido dos veces.

En caso de que el significado sea otro, debe destacarse expresamente. No tiene sentido una expresión con un subíndice repetido más de dos veces, porque no se sabría sobre cuál de ellos sumar.

De modo que las ecuaciones (2.3) y (2.4) puede expresarse

$$x'_j = a_{ij}x_i \quad (2.5)$$

$$x_i = a_{ij}x'_j$$

La notación tensorial está basada en dos convenciones:

- 1) Convención de rango: cuando en un término aparece un subíndice no repetido, debe entenderse que toma en forma sucesiva todos los posibles valores.

En el espacio tridimensional, el rango es 1, 2, 3.

- 2) Convención de suma: cuando en un término aparece un subíndice repetido, se entiende suma con respecto a dicho subíndice, estando dado el rango de suma por todos los valores posibles del mismo. (Notación de Einstein)

A continuación se definen algunos términos de la notación tensorial:

- a) Subíndices mudos. Cuando en un término aparece un subíndice repetido, se vio que se efectúa suma sobre dicho subíndice. Por ello, no se puede efectuar ninguna operación sobre cualquiera de los subíndices repetidos en forma individual. (Por ejemplo, en la ecuación 2.5, $x'_j = a_{ij} x_i$, el subíndice i no puede tener valores diferentes en a_{ij} y en x_i) Por lo tanto, el cambio de un subíndice repetido por otro, no altera al término. Es por ello que un subíndice tal se denomina mudo.

- b) Subíndices libres. Si un subíndice aparece una sola vez en un término de una ecuación, también aparecerá en todos los otros términos de la misma. En este caso es posible cambiar este subíndice, siempre que el cambio se haga en todos los términos de la ecuación. Un subíndice tal se denomina libre.

A veces es necesario un cambio de subíndices, mudos o libres, cuando se reemplaza una ecuación en otra, para evitar que algunos subíndices aparezcan repetidos más de dos veces.

- c) Delta de Kronecker δ_{ij} : este símbolo tiene, por definición, el valor 1 cuando $i = j$ y 0 cuando $i \neq j$. Se llama también tensor de sustitución porque permite alterar un subíndice en un solo término de una ecuación.

Así por ejemplo:

$$\delta_{ik} x_k = x_i \quad (2.6)$$

- d) Tensor alternante E_{ijk} . Es un ente usado en algunos casos especiales, que tiene por definición, los siguientes valores:

$$E_{ijk} = 0 \quad \text{si } i, j, k \text{ son iguales o dos. (Por ej. } 112, 121, 221, 233, \dots)$$

$E_{ijk} = 1$ si i, j, k son todos diferentes y siguen un orden cíclico.
(123, 231, 312)

$E_{ijk} = -1$ si i, j, k son todos diferentes y siguen un orden anticíclico
(132, 213, 321)

Este ente tiene mucho uso en la resolución de determinantes.

II-3.- DEFINICION DE MAGNITUDES USUALES EN INGENIERIA

Las tres magnitudes más usadas en ingeniería son: los escalares, los vectores y los tensores. A continuación se dará una definición de cada uno de ellos, de lo que se desprenden propiedades útiles en el análisis de los estados de tensiones y de deformaciones.

II-3.1 Escalares

Existen algunas cantidades tales como masa, temperatura, presión, etc. que tienen el mismo valor en cualquier sistema de coordenadas. Estas cantidades se conocen como escalares. De modo que una definición formal de escalar es la siguiente:

"Se dice que una magnitud E es un escalar si, y sólo si, cuando se produce una transformación de coordenadas,, $E = E'$.

También se denomina a un escalar, tensor de orden cero.

II-3.2 Vectores

Los vectores son magnitudes caracterizados por su intensidad y dirección. Como ya se ha visto en la ecuación (2.5) pueden expresarse de la siguiente forma:

$$x'_j = a_{ij} x_i$$

De modo que si se tiene una magnitud representada por una terna ordenada de valores, tales que referidos a los ejes Ox_i sean u_i , y referidos a otros ejes cualesquiera Ox'_j son u'_j , tal magnitud se denomina vector, o tensor de primer orden, si, y sólo si, u_i se transforma, en un cambio de coordenadas, de acuerdo con las siguientes ecuaciones:

$$u'_j = a_{ij} u_i \quad (2.7)$$

II-3.3 Tensores de segundo orden

Un tensor es una magnitud más general que un vector. Requiere nueve componentes para su completa especificación. Este número puede reducirse cuando existe algún grado de simetría.

Un conjunto de valores w_{ij} se definen como las componentes de un tensor de segundo orden si, y sólo si, éstas se transforman, en un cambio de coordenadas, de acuerdo con las ecuaciones

$$w'_{ki} = a_{ik} a_{jl} w_{ij} \quad (2.8)$$

A menudo se suprimen las palabras: "de segundo orden" y se llama simplemente "tensor" a la magnitud definida por w_{ij} . Este tensor puede escribirse de la siguiente forma:

$$\begin{matrix} w_{11} & w_{12} & w_{13} \\ w_{21} & w_{22} & w_{23} \\ w_{31} & w_{32} & w_{33} \end{matrix}$$

Si $w_{ij} = w_{ji}$, el tensor se denomina simétrico y bastan seis cantidades para definirlo. Si $w_{ij} = -w_{ji}$, el tensor se llama antisimétrico. Si un tensor es simétrico con respecto a un sistema de coordenadas, lo será con respecto a cualquier sistema.

La suma de dos tensores es un tensor, y también lo es el producto de un escalar con un tensor así, como cualquier combinación de estas dos operaciones. Puede demostrarse que cualquier tensor se puede descomponer en la suma de uno simétrico y uno antisimétrico. En efecto:

$$w_{ij} = \underbrace{\frac{1}{2} (w_{ij} + w_{ji})}_{\text{tensor simétrico}} + \underbrace{\frac{1}{2} (w_{ij} - w_{ji})}_{\text{tensor antisimétrico}} \quad (2.9)$$

II-4.- TENSOR TENSION

Ya se ha visto en el capítulo precedente que existen seis componentes independientes del estado de tensiones en un punto. El hecho de que existan seis se debe a que, por condiciones de equilibrio, $\tau_{yx} = \tau_{xy}$, etc.

Estas componentes pueden entonces, en principio, formar un tensor simétrico, siempre que cumplan con la condición de tensorialidad señalada. Es lo que se

tratará de demostrar en este punto.

Llamaremos genéricamente con σ_{ij} a los componentes del estado de tensiones. Así será:

$$\sigma_{11} = \tau_x ; \sigma_{12} = \tau_{xy} ; \text{etc.}$$

Para calcular la tensión actuante sobre un plano cualquiera, definido por sus cosenos directores, se obtuvieron las ecuaciones (1-10). Ellas nos daban los componentes de la tensión

$$\bar{S} = (s_x, s_y, s_z)$$

que pasaremos a notar como

$$\bar{S} = (s_1 \ s_2 \ s_3)$$

Genéricamente las ecuaciones (1-10) se escriben

$$s_i = \sigma_{ij} a_j \quad (2-10)$$

donde a_j son los cosenos directores de la normal al plano considerado. Tiene un sólo subíndice puesto que se refiere a un sólo plano en particular.

Si desearamos identificar las tensiones actuantes en 3 planos perpendiculares deberíamos escribir:

$$s_{ik} = \sigma_{ij} a_{jk} \quad (2-11)$$

Nos proponemos encontrar los componentes σ'_{rk} , del estado de tensiones en 3 planos coordenados ortogonales cuyas direcciones normales definen los cosenos directores respecto de los ejes x_i , donde el estado de tensiones es σ_{ij}

Aplicando la transformación de coordenadas a la expresión (2-11) se obtiene:

$$s'_{rk} = s_{ik} a_{ir} = \sigma_{ij} a_{jk} a_{ir} \quad (2-12)$$

Si r son direcciones de un nuevo sistema coordenado será $s'_{rk} = \sigma'_{rk}$ con lo cual

$$\sigma'_{rk} = a_{jk} a_{ir} \sigma_{ij} \quad (2-13)$$

Concluimos que la función σ_{ij} se transforma, frente al cambio de coordenadas, como una magnitud tensorial. En lo que sigue, por lo tanto, nos referiremos al "tensor de tensiones".

II-4.1. Tensor esférico y desviador de tensiones

Ya se vió que el estado de tensiones podía ser descompuesto en un estado esférico y uno desviador.

La componente esférica era

$$\sigma_m = \frac{\sigma_x + \sigma_y + \sigma_z}{3} = \frac{\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3}{3}$$

Con la notación tensorial, la expresión anterior se puede expresar de la siguiente forma:

$$\sigma_m = \frac{1}{3} \sigma_{ii}$$

De esta forma, los componentes desviadores del estado de tensiones resultan:

$$\sigma'_{ij} = \sigma_{ij} - \frac{1}{3} \delta_{ij} \sigma_{kk} \quad (2-15)$$

II-4.2. Invariantes del estado de tensiones

Cualquier función de los componentes de un tensor que mantenga la misma forma frente a un cambio de sistema de referencia se denomina invariante del estado de tensiones. Ya se ha demostrado que los coeficientes de la ecuación secular eran invariantes. La forma más simple de expresar invariantes es:

$$\sigma_{ii} ; \sigma_{ij} \sigma_{ij} ; \sigma_{ij} \sigma_{jk} \sigma_{ki}$$

Puede demostrarse que sólo 3 invariantes son independientes. Ello implica que cualquier otra función invariante puede ser expresada en función de ellos. Así diremos que una función invariante si:

$$f(\sigma_{ij}) = f(\sigma_{ki} \sigma_{lj} \sigma_{kl})$$

Habíamos demostrado que $\sigma_{ii} = \sigma_{11} + \sigma_{22} + \sigma_{33}$ era un invariante. Dicha demostración en forma tensorial se efectúa de la siguiente forma:

$$\sigma'_{ii} = \sigma_{ik} \sigma_{il} \sigma_{kl} = \delta_{kl} \sigma_{kl} = \sigma_{kk}$$

Vale decir

$$\sigma'_{ii} = \sigma_{ii}$$

Para el segundo invariante

$$\sigma'_{ij} \sigma'_{ji} = (\sigma_{ik} \sigma_{jl} \sigma_{kl}) (\sigma_{jm} \sigma_{in} \sigma_{mn})$$

Reagrupando convenientemente

$$\begin{aligned} \sigma'_{ij} \sigma'_{ji} &= (\sigma_{ik} \sigma_{in}) (\sigma_{jl} \sigma_{jm}) \sigma_{kl} \sigma_{mn} \\ &= \delta_{kn} \delta_{lm} \sigma_{kl} \sigma_{mn} = \delta_{kn} \sigma_{kl} \delta_{lm} \sigma_{mn} \\ &= \sigma_{nl} \sigma_{ln} = \sigma_{ij} \sigma_{ji} \end{aligned}$$

Con análoga forma de operar se demuestra la invariancia de la tercera función:

$$\sigma_{ij} \sigma_{jk} \sigma_{ki}$$

III - ESTADO DE DEFORMACIONES:

III - 1 . DESPLAZAMIENTOS Y DEFORMACIONES:

Un cuerpo sometido a fuerzas exteriores alterará su estado de movimiento y/o se deformará. Para precisar estas condiciones consideremos en el cuerpo de la figura III-1 dos puntos A y B separados por una distancia d_0

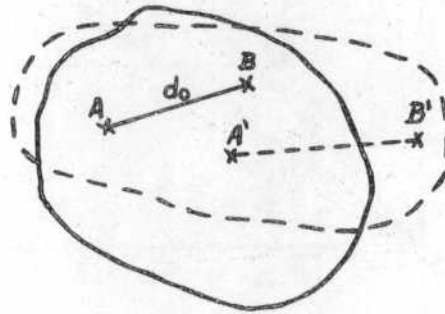


Figura III-1

Por efecto de las fuerzas aplicadas, los puntos pasarán a ocupar posiciones tales como A' y B', siendo ahora su distancia d. Llamaremos AA' desplazamiento del punto A y BB' desplazamiento del punto B. Puede haber ocurrido

- a) Que $d = d_0$; en este caso el cuerpo sólo se ha movido pero no se ha deformado. Si A'B' es paralelo a AB sólo se produjo un movimiento traslatorio. Si A'B' no se mantiene paralelo a AB el movimiento habrá sido rototraslatorio.
- b) Si $d \neq d_0$ resulta que se produjo un desplazamiento relativo de B con respecto a A. Se dice que el cuerpo se encuentra sometido a un estado general de deformación. Si A'B' se mantiene paralelo a AB la deformación se denomina homogénea. Interesan especialmente estos últimos dado que si así no ocurriera las expresiones analíticas que describen el estado de deformaciones resultan tan complejas que dejan de tener utilidad práctica.

III - 2 . ESTADO DE DEFORMACIONES

Supongamos tener un cuerpo sometido a un sistema de fuerzas exteriores que le producen un estado general de deformación. Referiremos los puntos de dicho cuerpo a un sistema coordenado cartesiano. Sea P un punto del cuerpo cuyas coordenadas eran $P_0 \equiv (x_0, y_0, z_0)$ y \vec{r}_0 su vector posición antes de la deformación y luego de la deformación sus coordenadas serán $P \equiv (x, y, z,)$ y \vec{r} su vector posición. Ver la Figura III - 2:

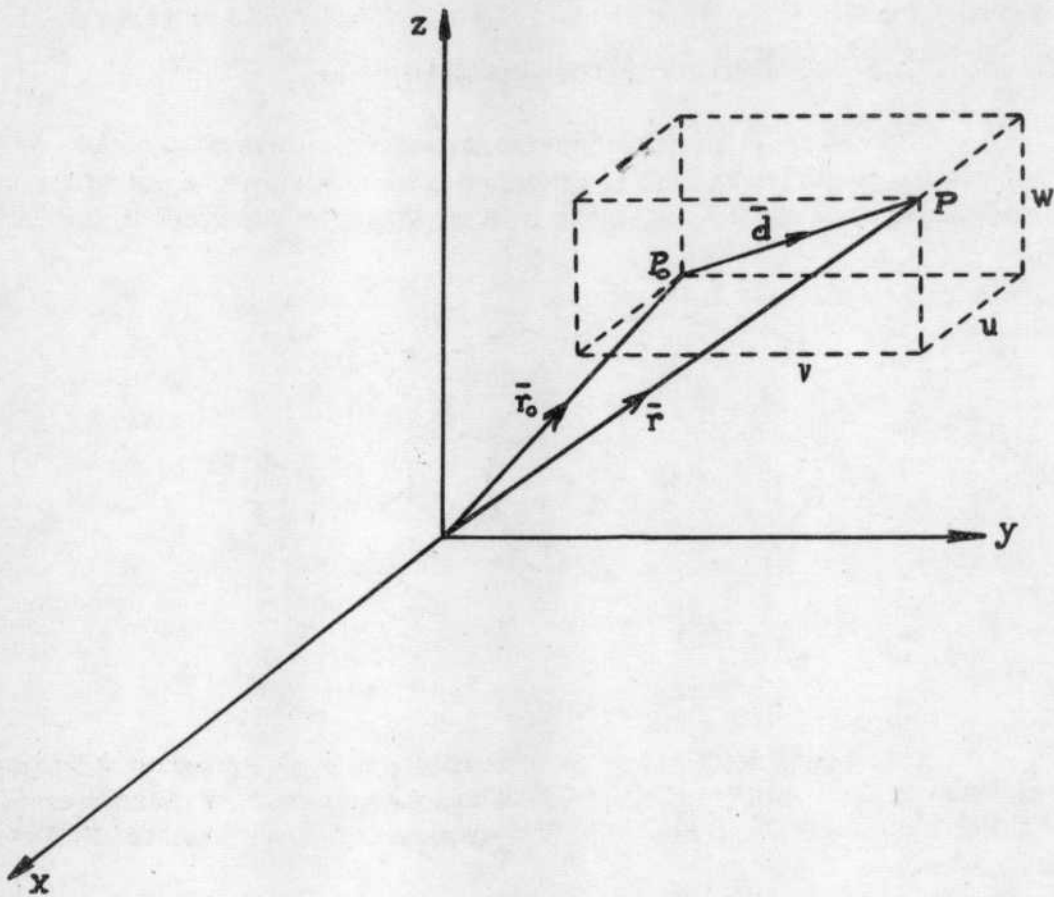


Figura III - 2

La función que define la geometría de deformación, dado que el medio es continuo, será una función continua de las coordenadas de P, esto es $\phi = \phi (x y z)$. Consideraremos las funciones que describen el desplazamiento de P según cada uno de los 3 ejes coordenados. Sean ellas:

$$\left\{ \begin{array}{l} u = u (x y z) \\ v = v (x y z) \\ w = w (x y z) \end{array} \right. \quad 3-1$$

que resultan también ser funciones continuas de las coordenadas de P.

Si P* es un punto suficientemente próximo a P₀ se verifica:

$$u = u_0 + \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right) \Delta x + \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right) \Delta y + \left(\frac{\partial u}{\partial z} \right) \Delta z$$

siendo Δx , Δy y Δz las componentes del radio Δr del entorno de P_0 . Esta expresión es la primera parte del desarrollo en serie de Taylor en los alrededores de P_0 .

El desplazamiento relativo de P será

$$u - u_0 = \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)_0 \Delta x + \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)_0 \Delta y + \left(\frac{\partial u}{\partial z}\right)_0 \Delta z \quad 3-2$$

Dividiendo miembro a miembro por Δr , radio del entorno de P_0 considerado, resulta:

$$\frac{u - u_0}{\Delta r} = \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right) \frac{\Delta x}{\Delta r} + \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right) \frac{\Delta y}{\Delta r} + \left(\frac{\partial u}{\partial z}\right) \frac{\Delta z}{\Delta r} \quad 3-3$$

Llamaremos $e_{xd} = \frac{u - u_0}{\Delta r}$, componente unitaria del desplazamiento, según el eje x. Además sean l, m y n los cosenos directores de la dirección del vector r con respecto a los ejes coordenados. Así resulta

$$e_{xd} = \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right) l + \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right) m + \left(\frac{\partial u}{\partial z}\right) n \quad 3-4$$

Análogamente, para las otras 2 direcciones coordenadas se habrá obtenido:

$$e_{yd} = \left(\frac{\partial v}{\partial x}\right) l + \left(\frac{\partial v}{\partial y}\right) m + \left(\frac{\partial v}{\partial z}\right) n \quad 3-5$$

$$e_{zd} = \left(\frac{\partial w}{\partial x}\right) l + \left(\frac{\partial w}{\partial y}\right) m + \left(\frac{\partial w}{\partial z}\right) n \quad 3-6$$

que en forma matricial escribimos:

$$\begin{bmatrix} e_{nd} \\ e_{yd} \\ e_{zd} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} & \frac{\partial u}{\partial y} & \frac{\partial u}{\partial z} \\ \frac{\partial v}{\partial x} & \frac{\partial v}{\partial y} & \frac{\partial v}{\partial z} \\ \frac{\partial w}{\partial x} & \frac{\partial w}{\partial y} & \frac{\partial w}{\partial z} \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} l \\ m \\ n \end{bmatrix} \quad 3-7$$

Los elementos de la matriz de los coeficientes constituyen los componentes de un tensor que llamaremos "tensor deformación". No demostraremos el carácter de tensor de dichos elementos por ser formalmente análoga a la realizada para el tensor de tensiones.

A los efectos de visualizar el significado de los elementos del tensor estudiemos un caso simple de deformación plana. En la figura III-3 se indica un cuerpo plano en su estado inicial (línea llena) y luego de haber sido deformado (línea de trazos); además se indican las coordenadas correspondientes:

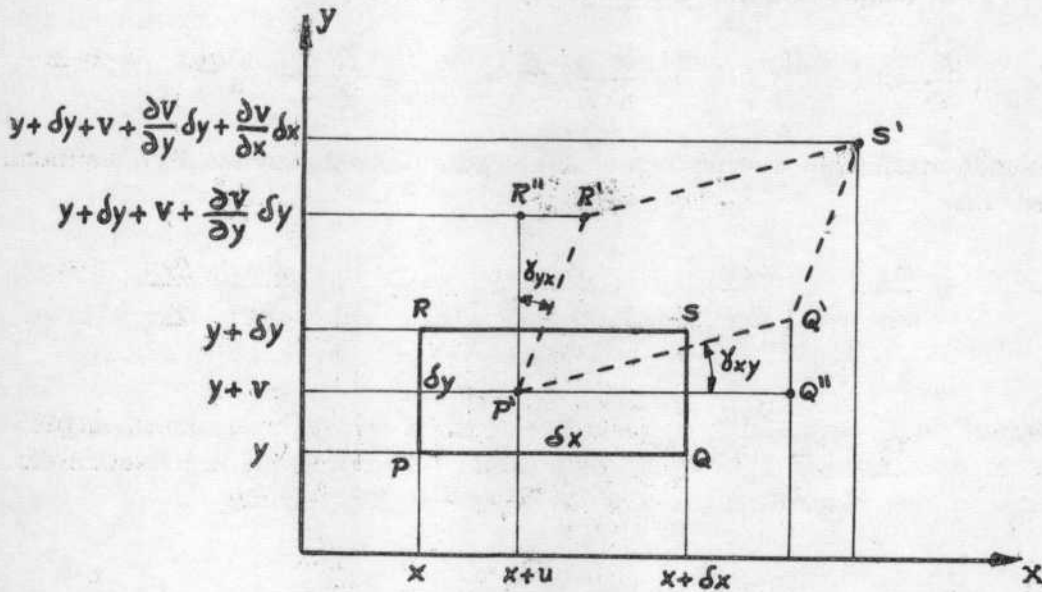


Figura III - 3

La deformación por unidad de longitud en la dirección x: e_x será

$$e_x = \frac{P'Q'' - PQ}{PQ} = \frac{(\delta x - \frac{\partial u}{\partial x} \delta x) - \delta x}{\delta x} = \frac{\partial u}{\partial x} \quad 3-8$$

En la dirección y será:

$$e_y = \frac{P'R'' - PR}{PR} = \frac{(\delta y - \frac{\partial v}{\partial y} \delta y) - \delta y}{\delta y} = \frac{\partial v}{\partial y} \quad 3-9$$

Vale decir que los elementos $\frac{\partial u}{\partial x}$ y $\frac{\partial v}{\partial y}$ representan la variación unitaria de deformación en las direcciones respectivas. Lo mismo valdría en el caso tridimensional para $e_z = \frac{\partial w}{\partial z}$.

La deformación tangencial ϕ_{xy} que evaluamos a través de la variación angular será:

$$\phi_{xy} = R \hat{P} Q - R' \hat{P}' Q' = R'' \hat{P}' R' + Q'' \hat{P}' Q'$$

Si las deformaciones son suficientemente pequeñas se puede asimilar el ángulo a la tangente trigonométrica y entonces:

$$\phi_{xy} = \frac{\frac{\partial u}{\partial y} / \delta y}{\delta x} + \frac{\frac{\partial v}{\partial x} / \delta x}{\delta y} = \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \quad 3-10$$

Es decir $\frac{\partial u}{\partial y}$ es el corrimiento angular de δy producido por el desplazamiento u (de dirección x). Análogamente $\frac{\partial v}{\partial x}$ es el corrimiento angular de δx producido por el desplazamiento v (de dirección y).

Si resulta $R'' \hat{P} R' = Q'' P' Q'$ entonces

$$\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial v}{\partial x} = \frac{1}{2} \phi_{xy} = \gamma_{xy} = \gamma_{yx} \quad 3-11$$

En este caso se dice que la deformación es irrotacional. En caso contrario será rotacional. Interpretaciones análogas se pueden dar a los elementos restantes de la matriz. Así tendremos, en tres dimensiones, tres deformaciones normales:

$$e_x = \frac{\partial u}{\partial x}; \quad e_y = \frac{\partial v}{\partial y}; \quad e_z = \frac{\partial w}{\partial z} \quad 3-12$$

Y tres deformaciones tangenciales

$$\begin{aligned} \gamma_{xy} &= 1/2 \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) \\ \gamma_{yz} &= 1/2 \left(\frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} \right) \\ \gamma_{xz} &= 1/2 \left(\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} \right) \end{aligned} \quad 3-13$$

en el caso irrotacional. En caso contrario $\gamma_{yx} \neq \gamma_{xy}$, etc. Llamaremos genéricamente e_{ij} a una componente cualquiera del tensor de deformaciones, con la convención siguiente :

$$\text{si } i = j : e_{ii} = e_i (e_x; e_y; e_z)$$

$$\text{si } i \neq j \quad e_{ij} = \gamma_{ij} \quad (\gamma_{xy}; \gamma_{yz}; \gamma_{zx}; \gamma_{yx}; \gamma_{zy}; \gamma_{xz})$$

Dado que según lo adelantáramos en general resultará:

$$e_{ij} \neq e_{ji}$$

lo cual significa que el tensor de deformaciones no es simétrico. Esto ocurre si el estado de deformaciones tiene un componente rotacional. Si a dicho tensor se le resta su antisimétrico se obtienen los componentes simétricos que constituyen el tensor de deformación pura o irrotacional:

$$e_{ij} - \frac{1}{2} (e_{ij} - e_{ji}) = \frac{1}{2} (e_{ij} + e_{ji}) \quad 3-14$$

En efecto, cada uno de los componentes del tensor antisimétrico $\frac{1}{2} (e_{ij} - e_{ji})$ corresponde a una rotación sobre un eje coordenado en el plano perpendicular a dicho eje. Como ejemplo $\frac{1}{2} (e_{yx} - e_{xy})$ es la rotación de la diagonal OP en el plano xy, alrededor del eje z. Podemos visualizar en la Fig. III-4 el sentido de la expresión (14).

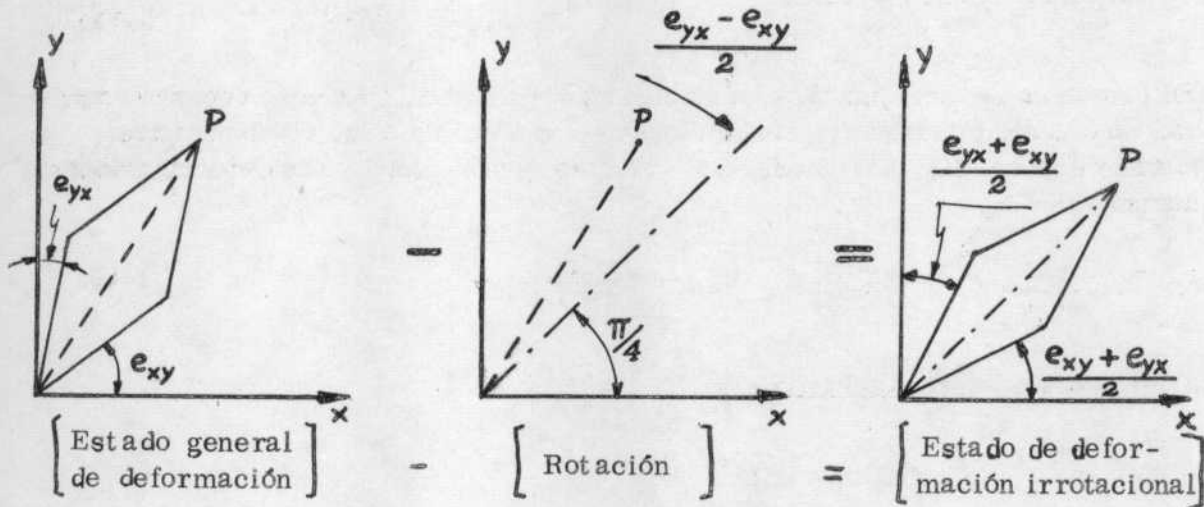


Figura III-4

III-3 INVARIANTES DEL ESTADO DE DEFORMACIONES

La expresión (7) podemos escribirla ahora como:

$$\begin{aligned}
 e_{xd} &= e_x l + \gamma_{yx} m + \gamma_{zx} n & e_{za} &= \gamma_{xz} l + \gamma_{yz} m + e_z n \\
 e_{yd} &= \gamma_{xy} l + e_y m + \gamma_{zy} n & &
 \end{aligned}
 \tag{3-15}$$

Podemos proponernos ahora determinar un sistema de direcciones tales que refiriéndonos a ellas se anulen las componentes de la forma e_{ij} ($i \neq j$), en forma análoga a como se hizo en el estado de tensiones. Dichas direcciones se denominan "direcciones principales del estado de deformación" y las deformaciones normales según tales direcciones se denominan "deformaciones principales". Con un planteo formalmente análogo al ya realizado se plantea la ecuación cúbica:

$$e^3_p - e^2_p (e_x + e_y + e_z) + e_p (e_x e_y + e_y e_z + e_z e_x + \gamma^2_{xy} + \gamma^2_{yz} + \gamma^2_{zx}) - (e_x e_y e_z + 2 \gamma_{xy} \gamma_{yz} \gamma_{zx} - e_x \gamma^2_{yz} - e_y \gamma^2_{zx} - e_z \gamma^2_{xy}) = 0 \tag{3-16}$$

cuyas soluciones e_1, e_2, e_3 son las deformaciones principales. Evidentemente en este sistema no hay rotación.

Los coeficientes de la ecuación cúbica constituyen los invariantes del estado de deformaciones que, en función de las deformaciones principales toman la forma

$$\begin{cases} J_1 = e_1 + e_2 + e_3 \\ J_2 = e_1 e_2 + e_2 e_3 + e_3 e_1 \\ J_3 = e_1 e_2 e_3 \end{cases} \tag{3-17}$$

Puede definirse una deformación media

$$e_m = 1/3 (e_1 + e_2 + e_3) = 1/3 e_{ii} \tag{3-18}$$

De la misma forma que antes podemos considerar el tensor de deformaciones D formado por una componente esférica y una desviadora: $D = D'' + D'$

El tensor esférico tendrá una matriz:

$$D'' = \begin{bmatrix} e_m & 0 & 0 \\ 0 & e_m & 0 \\ 0 & 0 & e_m \end{bmatrix} \tag{3-19}$$

y sus invariantes son:

$$\begin{cases} J_1'' = J_1 \\ J_2'' = 1/3 J_1^2 \\ J_3'' = 1/27 J_1^3 \end{cases} \tag{3-20}$$

El tensor desviador, a su vez, será:

$$D' = D - D'' = \begin{bmatrix} e_x - e_m & \gamma_{yx} & \gamma_{zx} \\ \gamma_{xy} & e_y - e_m & \gamma_{zy} \\ \gamma_{xz} & \gamma_{yz} & e_z - e_m \end{bmatrix} \quad 3-21$$

y sus invariantes:

$$\begin{cases} J'_1 = 0 \\ J'_2 = J_2 + 1/3 J_1^2 \\ J'_3 = J_3 - 1/3 J_1 J_2 + \frac{2}{27} J_1^3 \end{cases} \quad 3-22$$

El primer invariante del estado de deformaciones está relacionado a la variación volumétrica. En efecto

$$\Delta = \frac{\Delta V}{V} = \frac{l_1(1 + e_1) l_2 (1 + e_2) l_3 (1 + e_3) - l_1 l_2 l_3}{l_1 l_2 l_3} \quad 3-23$$

donde l_1, l_2, l_3 son los lados de un elemento de volumen. Desarrollando y despreciando términos de mayor orden que el primero

$$\Delta = e_1 + e_2 + e_3 = J_1 \quad 3-24$$

Como en el tensor desviador $J'_1 = 0$ implica que corresponde a una deformación distorsional, sin cambio de volumen y por lo tanto toda la variación de volumen es atribuible al tensor esférico.

III - 3 TENSOR DE COMPONENTES INFINITESIMALES DE DEFORMACION FINITA.

Las relaciones obtenidas hasta aquí se han desarrollado para deformaciones infinitesimales totales. Esas expresiones son también válidas para el caso de tratarse de incrementos infinitesimales de deformaciones finitas. El tensor respectivo se indica con d_{ij} y sus componentes son:

$$de_{ij} = \begin{bmatrix} de_x & d\gamma_{yx} & d\gamma_{zx} \\ d\gamma_{xy} & de_y & d\gamma_{zy} \\ d\gamma_{xz} & d\gamma_{yz} & de_z \end{bmatrix} \quad 3-25$$

Cuando las deformaciones son plásticas, la deformación es distorsional para, es decir, sin cambio volumétrico, y por lo tanto:

$$de_x + de_y + de_z = 0 \quad 3-26$$

III - 4 VELOCIDADES DE DEFORMACION

Las velocidades de deformación están dadas por la variación de las deformaciones con el tiempo. Se utilizan en la solución de problemas en los que existe un flujo de material, ya sea estacionario o no. En general se definen:

$$d_{ij} = \frac{de_{ij}}{dt} \quad 3-27$$

DEFORMACION EFECTIVA O EQUIVALENTE

Se define también para el estado de deformaciones la "deformación efectiva" o "equivalente", dada por:

$$d\bar{e} = \sqrt{2/9 \left[(de_1 - de_2)^2 + (de_2 - de_3)^2 + (de_3 - de_1)^2 \right]} \quad 3-28$$

Esta expresión es de un invariante del estado de deformaciones, lo cual puede verse al relacionarla con el segundo invariante desviador de deformaciones, con o se hiciera con la ecuación (1-40).

III - 5 DEFORMACIONES FINITAS - DEFORMACIONES LOGARITMICAS

Las relaciones desarrolladas en los puntos anteriores, pierden exactitud a medida que las deformaciones incrementan su módulo, dado que ya no pueden introducirse ciertas simplificaciones en los desarrollos. Así por ejemplo, para obtener la expresión 3-24, si las deformaciones fueran finitas, no podrían despreciarse los términos de segundo orden, y el primer invariante no representaría entonces la variación volumétrica Δ . Este hecho indujo a Ludwik a proponer una nueva definición de las deformaciones, las "deformaciones logarítmicas", tales que no sean afectadas por aquella discrepancia.

En el punto III-3 ya se indicó que cuando las deformaciones son plásticas hay constancia de volumen, por lo tanto:

$$v = v_0 \cdot (1 + e_1) \cdot (1 + e_2) \cdot (1 + e_3) = v_0 \quad 3-29$$

$$(1 + e_1) \cdot (1 + e_2) \cdot (1 + e_3) = 1 \quad 3-30$$

y aplicando logaritmos:

$$\ln(1 + e_1) + \ln(1 + e_2) + \ln(1 + e_3) = 0 \quad 3-31$$

Se define a la deformación logarítmica:

$$\epsilon_x = \int_{x_0}^x \frac{dx}{x} = \ln \frac{x}{x_0} \quad 3-32$$

y siendo la deformación convencional referida a la longitud inicial (y no a la instantánea):

$$e_x = \frac{\delta x}{x_0} = \frac{X - x_0}{x_0} = \frac{x}{x_0} - 1 \quad 3-33$$

Por lo tanto:

$$\epsilon_x = \ln \frac{x}{x_0} = \ln(1 + e_x) \quad 3-34$$

De acuerdo a la 3-34, la 3-31 puede escribirse ahora:

$$\epsilon_1 + \epsilon_2 + \epsilon_3 = 0 \quad 3-35$$

y la 3-35 queda como la 3-24.

Como en la mayoría de los procesos de conformado de metales se introducen deformaciones por compresión (negativas), algunos autores con el único fin de independizarse del signo de la deformación, reservan la fórmula general 3-25 para los casos de deformación por tracción, y toman para el caso de compresión la expresión equivalente:

$$\epsilon_x = \ln \frac{1}{1 - e_x} \quad 3-36$$

La figura muestra la diferencia entre ambas definiciones de defor-

maciones. En abscisas se ha representado x/x_0 y en ordenadas

$$e = \frac{x}{x_0} - 1 \quad \text{y} \quad \epsilon = \ln \frac{x}{x_0}$$

Las dos deformaciones dan valores prácticamente iguales hasta valores de alrededor de 0,1

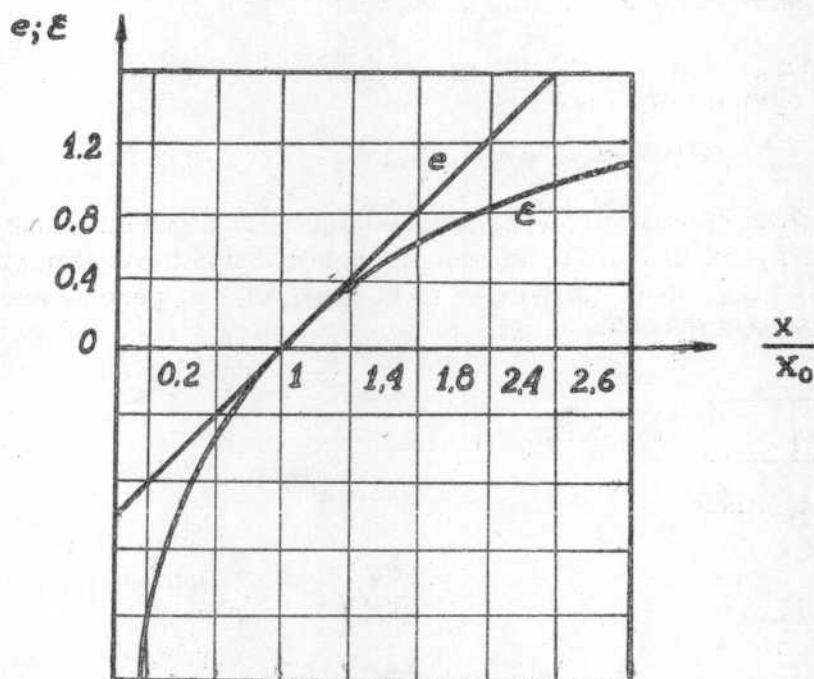


Figura III - 4

Las deformaciones logarítmicas, cuando la deformación es uniforme, tienen la ventaja de ser aditivas:

$$\epsilon_x = \ln \frac{x_1}{x_0} + \ln \frac{x_2}{x_1} + \dots \ln \frac{x_n}{x_{n-1}} = \ln \frac{x_n}{x_0} \quad 3-37$$

Puesto que las expresiones que dan las deformaciones finitas incluyen término de orden mayor al primero, las componentes de este estado de deformaciones no se transforman linealmente, y por lo tanto no constituyen elementos del tensor de deformaciones.

III - 6 DETERMINACION DE PEQUEÑAS DEFORMACIONES Y DEFORMACIONES INCREMENTALES EN TRACCION

Esta determinación requiere la evaluación de las cantidades $\frac{\partial u}{\partial x}$; $\frac{\partial u}{\partial y}$ etc.

Supóngase una barra provista con marcas uniformemente espaciadas (figura III - 5), que luego es uniformemente deformada por una operación de estirado. La dirección x es entonces una dirección principal, y si los pequeños desplazamientos u de las marcas son lineales en esa dirección (Figura III - 5 a) la componente de la deformación en x vale:

$$\delta \epsilon_x = e_x = \frac{\partial u}{\partial x} \approx \frac{\delta l}{l_0}$$

siempre que δl sea muy pequeño.

Si la distribución del desplazamiento u no es uniforme, como se muestra en la figura III - 5 - b, la pequeña deformación local para cualquier posición x es la pendiente particular de la curva u - x, pero no puede más determinarse a partir de $\frac{\delta l}{l_0}$

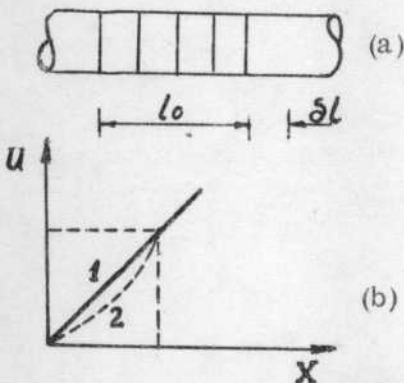


Figura III - 5

1: $\frac{\partial u}{\partial x} = \text{cte.}$ (Deformación uniforme)

2: $\frac{\partial u}{\partial x} \neq \text{cte.}$ (Deformación no uniforme)

III - 7 DEFORMACIONES FINITAS EN TRACCION

Para calcular una deformación finita de gran magnitud, deben sumarse los incrementos infinitesimales de deformación.

Así, si el estado de deformación de la figura III-5-d corresponde a una deformación finita instantánea, y al mismo se le añade una deformación uniforme, en el instante en que $l = l_n$, la deformación finita uniforme es:

$$\epsilon_x = \frac{\partial u}{\partial x_1} + \frac{\partial u_2}{\partial x_2} + \dots + \frac{\partial u_n}{\partial x_n} \tag{3-38}$$

$$\epsilon_x = \frac{l_2 - l_1}{l_0} + \frac{l_3 - l_2}{l_1} + \dots + \frac{l_n - l_{n-1}}{l_{n-1}} \tag{3-39}$$

$$\epsilon_x \int_{l_0}^{l_n} \frac{dl}{l} = l_n \frac{l_n}{l_0} \tag{3-40}$$

donde l_0 y l_n son la longitud de referencia antes y después que haya tenido lugar la deformación uniforme finita.

Si la deformación no es uniforme como por ejemplo durante la estricción en una probeta de tracción, habrá que sumar todas las deformaciones incrementales en cada posición x .

$$\epsilon_x = \frac{\partial u_1}{\partial x_1} + \frac{\partial u_2}{\partial x_2} \dots \frac{\partial u_n}{\partial x_n} = \ln \frac{l_n}{l_0} \quad 3-41$$

y la deformación finita variará punto a punto.

III - 8 ECUACIONES DE COMPATIBILIDAD:

Recordemos que los elementos del tensor de deformaciones eran:

$$e_x = \frac{\partial u}{\partial x} \quad e_y = \frac{\partial v}{\partial y} \quad e_z = \frac{\partial w}{\partial z}$$

$$\phi_{xy} = \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \quad \phi_{yz} = \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} \quad \phi_{zx} = \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} \quad 3-42$$

Debemos observar que al expresar 6 componentes de deformación en términos de 3 funciones de desplazamiento u , v y w , las deformaciones no podían ser independientes unas de otras y por lo tanto no podían ser dadas como funciones arbitrarias de x , y y z . Tratemos de hallar las relaciones a que deberán ajustarse dichas funciones.

1er grupo: Eliminemos u y v de las expresiones :

$$e_x = \frac{\partial u}{\partial x} \quad e_y = \frac{\partial v}{\partial y} \quad \phi_{xy} = \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}$$

Derivando convenientemente se obtiene:

$$\frac{\partial e_x}{\partial y} = \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} \quad \frac{\partial e_y}{\partial x} = \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y}$$

$$\frac{\partial \phi_{xy}}{\partial x} = \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}$$

Derivando nuevamente:

$$\frac{\partial^2 e_x}{\partial y^2} = \frac{\partial^3 u}{\partial x \partial y^2} \quad \frac{\partial^2 e_y}{\partial x^2} = \frac{\partial^3 v}{\partial x^2 \partial y}$$

$$\frac{\partial^2 \phi_{xy}}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^3 v}{\partial x^2 \partial y} + \frac{\partial^3 u}{\partial x \partial y^2}$$

Comparando términos se obtiene:

$$\frac{\partial^2 e_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 e_y}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 \phi_{xy}}{\partial x \partial y} \quad 3-43$$

Análogamente se obtienen otras dos ecuaciones:

$$\frac{\partial^2 e_y}{\partial z^2} + \frac{\partial^2 e_z}{\partial y^2} = \frac{\partial^2 \phi_{yz}}{\partial y \partial z} \quad 3-44$$

$$\frac{\partial^2 e_z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 e_x}{\partial z^2} = \frac{\partial^2 \phi_{zx}}{\partial z \partial x} \quad 3-45$$

2do. Grupo : Eliminando u, v y w entre las deformaciones tangenciales

$$\phi_{xy} = \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} ; \phi_{yz} = \frac{\partial w}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial z} ; \phi_{zx} = \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x}$$

mediante adecuadas derivaciones y reemplazos se obtienen las ecuaciones siguientes:

$$2 \frac{\partial^2 e_x}{\partial y \partial z} = \frac{\partial}{\partial x} \left(- \frac{\partial \phi_{yz}}{\partial x} + \frac{\partial \phi_{zx}}{\partial y} + \frac{\partial \phi_{xy}}{\partial z} \right) \quad 3-46$$

$$2 \frac{\partial^2 e_y}{\partial z \partial x} = \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial \phi_{yz}}{\partial x} - \frac{\partial \phi_{zx}}{\partial y} + \frac{\partial \phi_{xy}}{\partial z} \right) \quad 3-47$$

$$2 \frac{\partial^2 e_z}{\partial x \partial y} = \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\partial \phi_{yz}}{\partial x} + \frac{\partial \phi_{zx}}{\partial y} - \frac{\partial \phi_{xy}}{\partial z} \right) \quad 3-48$$

Estos dos grupos de ecuaciones se denominan ecuaciones de compatibilidad y resultan útiles para verificar si una solución particular de un problema es correcta; la distribución de deformaciones debe satisfacer estas condiciones.

IV - RELACIONES TENSION - DEFORMACION ELASTICAS

Objeto.-

Reseñar las condiciones necesarias para dar solución analítica a los problemas que se plantean dentro del campo elástico, indicando el tipo de relaciones existentes entre tensiones y deformaciones.

IV-1. ELEMENTOS NECESARIOS PARA ELABORAR UNA TEORIA DE ELASTICIDAD

Los elementos necesarios para elaborar una teoría de elasticidad son:

- 1 - Ecuaciones de equilibrio
- 2 - Condiciones de borde
- 3 - Ecuaciones de compatibilidad
- 4 - Relaciones elásticas tensión-deformación

Se analizarán cada una de ellas.

IV-2. ECUACIONES DE EQUILIBRIO

En un cuerpo continuo sometido a la acción de fuerzas exteriores, las tensiones variarán en forma continua. La figura IV-1 ilustra las tensiones que actúan en un elemento del cuerpo.

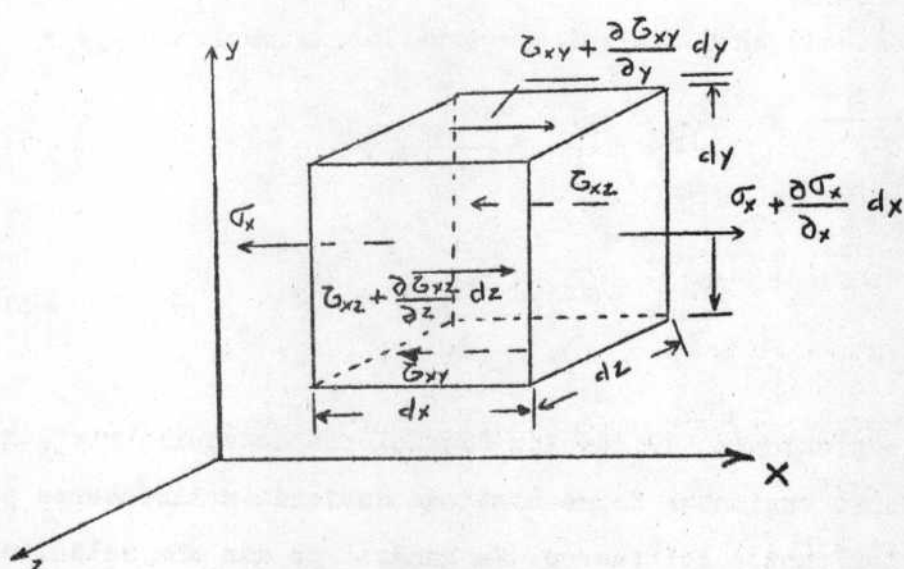


Figura IV-1

El elemento estará en equilibrio si se cumplen las condiciones :

$$\left\{ \begin{array}{l} \sum F_x = 0 \\ \sum F_y = 0 \\ \sum F_z = 0 \end{array} \right. \quad (4-1)$$

El análisis de la primera ecuación conduce a:

$$\begin{aligned} (\sigma_x + \frac{\partial \sigma_x}{\partial x} dx) dy dz + (\tau_{zx} + \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial z} dz) dx dy + (\tau_{yx} + \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y} dy) dx dz - \\ - \sigma_x dy dz - \tau_{zx} dy dx - \tau_{yx} dx dz = 0 \end{aligned}$$

y simplificando :

$$\frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial z} = 0 \quad (4-2)$$

Si además de las tensiones surgidas como consecuencia de la aplicación de fuerzas exteriores, existieran fuerzas de volumen, y si a la componente según la dirección x de estas fuerzas se la designa X, se tiene:

$$\frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial z} + X = 0 \quad (4-3)$$

Procediendo en forma análoga para las direcciones y y z :

$$\frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial z} + Y = 0 \quad (4-4)$$

$$\frac{\partial \tau_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_z}{\partial z} + Z = 0 \quad (4-5)$$

Las expresiones 3,4,5 son las "ecuaciones de equilibrio". Aseguran que las tensiones varían en forma continua debiendo satisfacerse por lo tanto en todos los puntos del cuerpo. En general no dan una relación entre las tensiones y las cargas externas, excepto en el caso que se indica en el punto siguiente.

IV-3. CONDICIONES DE BORDE

Las relaciones entre tensiones y cargas externas deben ser tales que en el límite del cuerpo las tensiones sean iguales a las fuerzas, aplicadas en la superficie del mismo, por unidad de área. Es decir, en el límite del cuerpo, las "ecuaciones de equilibrio" deben satisfacer las "condiciones de borde".

IV-4. RELACIONES TENSION-DEFORMACION ELASTICAS

En el campo elástico, si además de la recuperación de las deformaciones, existe proporcionalidad entre tensiones y deformaciones, se cumple :

Tensión = Constante x deformación

Para el caso particular de una tensión aplicada en la dirección x, la "Ley de Hooke" se expresa:

$$e_x = \frac{1}{E} \sigma_x \quad (4-6)$$

Simultáneamente con e_x , y por efecto de σ_x se producen deformaciones de signo contrario a e_x en las direcciones transversales z e y. La relación entre las deformaciones transversales e_z y e_y , y la longitudinal e_x , está dada por el "módulo de Poisson"

$$\nu = - \frac{e_y}{e_x} = - \frac{e_z}{e_x} \quad \therefore \quad e_y = e_z = - \nu e_x \quad (4-7)$$

Teemplazando e_x por su valor dado en

$$e_y = e_z = - \nu \frac{\sigma_x}{E} \quad (4-8)$$

Si se trata de un estado triaxial y se aplica superposición de estados, la deformación en la dirección x será la suma de la deformación producida por σ_x más las producidas a través del efecto Poisson por σ_y y σ_z en la dirección de x :

$$e_x = \frac{\sigma_x}{E} + \left(- \frac{\nu}{E} \sigma_y \right) + \left(- \frac{\nu}{E} \sigma_z \right) \quad (4-9)$$

$$e_x = \frac{1}{E} \left[\sigma_x - \nu (\sigma_y + \sigma_z) \right] \quad (4-10)$$

Análogamente:

$$e_y = \frac{1}{E} \left[\sigma_y - \nu (\sigma_z + \sigma_x) \right] \quad (4-11)$$

$$e_z = \frac{1}{E} \left[\sigma_z - \nu (\sigma_x + \sigma_y) \right] \quad (4-12)$$

También existe proporcionalidad entre las tensiones y las deformaciones tangenciales:

$$\gamma_{xy} = \frac{1}{2G} \tau_{xy} \quad (4-13)$$

$$\gamma_{xz} = \frac{1}{2G} \tau_{xz} \quad (4-14)$$

$$\gamma_{yz} = \frac{1}{2G} \tau_{yz} \quad (4-15)$$

donde G es el módulo de elasticidad por corte.

IV-5. CAMBIO DE VOLUMEN ELASTICO.

Sumando las tres ecuaciones 10, 11 y 12 se obtiene la variación de volumen Δ :

$$\Delta = e_x + e_y + e_z = \frac{1 - 2\nu}{E} (\sigma_x + \sigma_y + \sigma_z) \quad (4-16)$$

Para un estado hidrostático de tensiones, la dilatación volumétrica Δ vale:

$$\Delta = \frac{1}{K} \sigma_m \quad (4-17)$$

donde K es el módulo volumétrico o de rigidez.

IV-6. CONSTANTES ELASTICAS

Observando las ecuaciones 6, 8, 10, 11, 12 y 17 se aprecian cuatro constantes elásticas propias de los materiales isótropos y homogéneos.

Estas constantes están relacionadas entre si. Por ejemplo, si la suma entre paréntesis de la 16 se reemplaza, de acuerdo con la 1-18,

por $3 \sigma_m$

$$\Delta = \frac{1 - 2\nu}{E} \cdot 3 \sigma_m \quad (4-18)$$

y comparando 17 y 18 :

$$K = \frac{E}{3(1 - 2\nu)} \quad (4-19)$$

En forma análoga pueden obtenerse las relaciones:

$$G = \frac{E}{2(1 + \nu)} \quad (4-20)$$

$$\nu = \frac{3K - 2G}{6K + 2G} \quad (4-21)$$

$$E = \frac{9KG}{3K + G} \quad (4-22)$$

IV-7. RELACIONES ELASTICAS EN COMPONENTES ESFERICAS Y DESVIADORAS

Si en la 4-10 se reemplaza $(\sigma_y + \sigma_z)$ por su valor en función de σ_m obtenido de la 1-18, y se reordena :

$$e_x = \frac{\sigma_x}{E} (1 + \nu) - \frac{\nu}{E} 3 \sigma_m \quad (4-23)$$

según 4-20

$$\frac{1 + \nu}{E} = \frac{1}{2G} \quad (4-24)$$

$$\therefore e_x = \frac{\sigma_x}{2G} - \frac{\nu}{E} 3 \sigma_m \quad (4-25)$$

sumando y restando en el segundo miembro $\frac{\sigma_m}{2G}$

$$e_x = \frac{\sigma_x - \sigma_m}{2G} + \sigma_m \left(\frac{1}{2G} - \frac{3\nu}{E} \right) \quad (4-26)$$

y como $\sigma_x - \sigma_m = \sigma'_x$ y $\frac{1}{2G} = \frac{1 + \nu}{E}$ (4-27)

$$e_x = \frac{\sigma_x}{2G} + \frac{1-2\nu}{E} \sigma_m \quad (4-28)$$

de acuerdo con 4-19 :

$$\frac{1-2\nu}{E} = \frac{1}{3K} \quad (4-29)$$

$$\therefore e_x = \frac{\sigma_x}{2G} + \frac{1}{3K} \sigma_m \quad (4-30)$$

En igual forma podrán expresarse e_y y e_z .

Como las deformaciones y tensiones de corte son desviadoras, su relación está dada por las ecuaciones 4-13 ; 4-14 y 4-15

IV-8. LEY DE HOOKE GENERALIZADA

Las relaciones entre los estados de tensión y de deformación en un punto de un cuerpo sólido se expresan, dentro del rango elástico, mediante la "ley de Hooke generalizada". Dicha ley establece las vinculaciones entre los tensores esférico y desviador de tensiones y los tensores esférico y desviador de deformaciones respectivamente:

$$T' = 2G D' \quad (4-31)$$

$$T'' = 3K D'' \quad (4-32)$$

donde T' y T'' son los componentes desviadores y esféricos respectivamente del tensor de tensiones. A su vez D' y D'' representan los componentes desviadores y esféricos respectivamente de tensor de deformaciones.

Las ecuaciones 31 y 32 pueden escribirse

$$e'_{ij} = \frac{1}{2G} \sigma'_{ij} \quad (4-33)$$

$$y \quad e_m = \frac{1}{3K} \sigma_m \quad (4-34)$$

Dado que se verifica que

$$e_{ij} = e'_{ij} + \delta_{ij} e_m \quad (4-35)$$

para obtener la relación completa entre tensiones y deformaciones, combinamos las ecuaciones 33,34 y 35 y obtenemos

$$e_{ij} = \frac{\sigma_{ij}}{2G} + \frac{(1-2\nu)}{E} \delta_{ij} \sigma_m \quad (4-36)$$

En esta última expresión, el primer miembro describe la deformación angular (sin cambio de volumen) y el segundo, la deformación volumétrica (con cambio de volumen).

IV-9. CIRCULO DE MOHR EN ELASTICIDAD

Si se escribe la ecuación 4-25 en función de la terna principal:

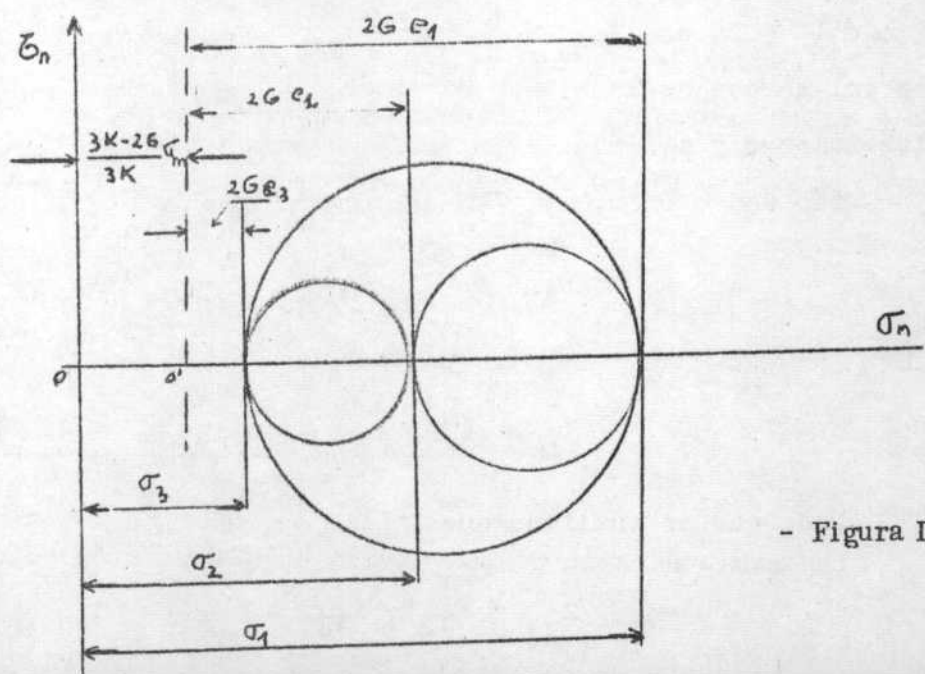
$$e_1 = \frac{\sigma_1}{2G} - \frac{3\nu \sigma_m}{E} \quad (4-37)$$

reemplazando ν y E por sus valores dados en 4-21 y 4-22

$$e_1 = \frac{\sigma_1}{2G} - \frac{3K - 2G}{3K \cdot 2G} \sigma_m \quad (4-38)$$

$$e_1 = \frac{1}{2G} \left(\sigma_1 - \frac{3K - 2G}{3K} \sigma_m \right) \quad (4-39)$$

En el círculo de Mohr de la figura IV-2 se aprecia que para la medición de deformaciones, se ha tomado un nuevo origen O' , a una distancia $\frac{3K - 2G}{3K} \sigma_m$. Además hay un cambio de escala, dado por el valor $1/2G$.



- Figura IV.2 -

IV-10. ENERGIA DE DEFORMACION ELASTICA

La energía elástica dW acumulada en un cuerpo al ser sometido a un estado de tensiones σ_{ij} y sufrir una deformación $d e_{ij}$ vale, por unidad de volumen,

$$dW = \sigma_{ij} d e_{ij} \quad (4-40)$$

y si la deformación es finita será

$$W = \int \sigma_{ij} d e_{ij} \quad (4-41)$$

Si la relación entre tensiones y deformaciones es lineal, como ocurre en el campo elástico

$$W = \frac{1}{2} \sigma_{ij} e_{ij} \quad (4-42)$$

Refiriéndonos a tensiones y deformaciones principales resultará:

$$W = \frac{1}{2} (\sigma_1 e_1 + \sigma_2 e_2 + \sigma_3 e_3) \quad (4-43)$$

Reemplazando los valores de e_1 , e_2 y e_3 en función de las tensiones principales se tendrá

$$W = \frac{1}{2E} (\sigma_1^2 + \sigma_2^2 + \sigma_3^2) - \frac{\nu}{E} (\sigma_1 \sigma_2 + \sigma_2 \sigma_3 + \sigma_3 \sigma_1) \quad (4-44)$$

Teniendo presente las relaciones vistas entre las constantes elásticas y ordenando convenientemente se obtiene

$$W = \frac{1}{12G} \left[(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2 \right] + \frac{1}{18K} (\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3)^2 \quad (4-45)$$

El primer sumando resulta ser la energía de deformación por distorsión (sin cambio de volumen) puesto que

$$W^d = \frac{1}{2} \sigma'_{ij} e'_{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\sigma'_{ij}}{2G} \right) = \frac{(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2}{12G} \quad (4-46)$$

El segundo sumando es la energía de deformación volumétrica (con cam-

bio de volumen) puesto que

$$W'' = \frac{1}{2} \sigma''_{ij} e''_{ij} = \frac{(\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3)}{18 K} \quad (4-47)$$

Por lo tanto la energía de deformación elástica total es la suma de ambos:

$$W = W' + W'' \quad (4-48)$$

IV-11. FUNCION TENSION Y FUNCION DE AIRY

En general, dar solución a los problemas en elasticidad, involucra encontrar una distribución de tensiones que satisfagan las ecuaciones de equilibrio, las relaciones de compatibilidad y las condiciones de borde.

Para estados triaxiales, Maxwell propone tres funciones de posición independientes, ϕ_1 , ϕ_2 , y ϕ_3 , que expresen las componentes de tensión, tal que cumplan las condiciones enunciadas.

$$\left. \begin{aligned} \sigma_x &= \frac{\partial^2 \phi_3}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \phi_2}{\partial z^2} & \tau_{xy} &= -\frac{\partial^2 \phi_3}{\partial x \partial y} \\ \sigma_y &= \frac{\partial^2 \phi_1}{\partial z^2} + \frac{\partial^2 \phi_3}{\partial x^2} & \tau_{yz} &= -\frac{\partial^2 \phi_1}{\partial y \partial z} \\ \sigma_z &= \frac{\partial^2 \phi_2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \phi_1}{\partial y^2} & \tau_{zx} &= -\frac{\partial^2 \phi_2}{\partial z \partial x} \end{aligned} \right\} \quad (4-49)$$

Para el caso bidimensional, Airy encontró que existe siempre una función $\bar{\phi}(xy)$ que permite determinar las tensiones en cualquier punto:

$$\sigma_x = \frac{\partial^2 \bar{\phi}}{\partial y^2} \quad \sigma_y = \frac{\partial^2 \bar{\phi}}{\partial x^2} \quad \tau_{xy} = \frac{\partial^2 \bar{\phi}}{\partial x \partial y} \quad (4-50)$$

Es fácil comprobar que estas ecuaciones satisfacen las condiciones de equilibrio. Para verificar las condiciones de compatibilidad es necesario expresar 3-43 en función de las tensiones. Para ello se deriva 4-10,

4-11 y 4-13 (previamente reducidas al caso plano) y se reemplazan en 3-43 dando:

$$\frac{\partial^2 \sigma_x}{\partial y^2} - \nu \frac{\partial^2 \sigma_y}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \sigma_y}{\partial x^2} - \nu \frac{\partial^2 \sigma_x}{\partial x^2} = 2(1+\nu) \frac{\partial^2 \tau_{xy}}{\partial x \partial y} \quad (4-51)$$

Si las correspondientes derivadas de 4-50 se reemplazan en 4-51 se obtiene:

$$\frac{\partial^4 \bar{\phi}}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4 \bar{\phi}}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 \bar{\phi}}{\partial y^4} = 0 \quad (4-52)$$

En esta forma, si es posible encontrar una función que satisfaga la ecuación 52, entonces las tensiones estarán dadas por 50, siempre que se cumplan además las condiciones de borde.

En general, no es fácil encontrar la función $\bar{\phi}$, y sólo algunos problemas se han resuelto por este método.

BIBLIOGRAFIA

- Básica:
- 1° Mechanical Metallurgy - Dieter (Mc Graw Hill -1961) Cap. 2.
 - 2° Manufacturing Properties of Materials -Alexander y Brewer (Van Nostrand - 1963) -
 - 3° Analysis of Stress and Stain - Durelli,Phillips y Tsao (Mc Graw Hill - 1958)
 - 4° Mechanical Properties of Matter - Cottrell (Wiley -1964)-Cap. 4
 - 5° Etude de la Plasticité et Application aux Métaux - Jaoul (Dunod 1965)
 - 6° Mechanics of Plastic Deformation in Metal Processing -Thomsen, Yang y Kobayashi (Mc Millan - 1965)- Cap. 5

De Consulta:

- 1° Theoretical Elasticity - Pearson (Harvard U.P. -1959)
- 2° Theory of Elasticity - Timoshenko y Goodier (Mc Graw Hill-1951)
- 3° An Introduction to the Theory of Elasticity - Southwell (Oxford U.P. - 1941)
- 4° Mathematical Theory of Elasticity - Sokolnikoff (Mc Graw Hill-1956)

5° Mathematical Theory of Plasticity - Hill (Oxford U.P. 1950)

6° Theory of Plasticity - Hoffman y Sachs (Mc Graw Hill- 1953)

Cap. 3

7° Advanced Mechanics for Engineers - Ford (Longmans - 1963) -

Cap. 12 y 13.

V.- ELEMENTOS DE PLASTICIDAD:

Previo a analizar el comportamiento de un material en el campo plástico, debemos definir, para continuar nuestra línea de razonamiento, en qué instante el material deja de comportarse elásticamente para comenzar su etapa plástica.

La plasticidad es la propiedad que permite a los materiales ser deformados continua y permanentemente sin rotura, mediante la aplicación de tensiones que exceden las necesarias para provocar la fluencia del mismo. Este concepto será perfeccionado durante el desarrollo del problema.

Será entonces necesario establecer cuándo se produce la fluencia del material para un estado complejo de tensiones. Esto da origen a los criterios de fluencia que determinan el límite entre el campo elástico y el campo plástico. Si el material no endureciera en virtud de su deformación, dicho límite constituiría un valor constante. No obstante, la mayor parte de los metales presentan un importante endurecimiento al ser deformados. Será necesario analizar la influencia de este comportamiento en la definición del límite citado.

Finalmente será necesario establecer las leyes básicas que relacionan a tensiones y deformaciones en el campo plástico. Los requisitos más importantes a tener en cuenta en su elaboración son: el volumen de material permanece constante bajo deformación plástica, que una presión hidrostática no produce fluencia y además que la componente hidrostática de un estado complejo de tensiones no modifica el punto en el cual se inicia la fluencia.

De manera que para elaborar una teoría de plasticidad debemos establecer, además de los elementos que definen la elasticidad, lo siguiente:

- a) Un criterio de fluencia;
- b) Relaciones tensión-deformación en el campo plástico.

V.1- Criterios de fluencia bajo estados complejos de tensiones:

Supongamos que en un momento cualquiera del proceso de tensiones y

deformaciones a que es sometido un material supuesto isotrópico, tiene una tensión de fluencia Y en tracción simple homogénea. ¿ Para qué valor de / las tensiones de un sistema complejo de tensiones $\sigma_x, \sigma_y, \dots, \sigma_{z\chi}$ entrará el material en fluencia?

En otras palabras debe formularse una hipótesis, que deberá analizarse experimentalmente, con respecto al límite de elasticidad bajo cualquier posible combinación de tensiones.

Analícemos las restricciones matemáticas a que debe responder un criterio de fluencia: las tensiones hidrostáticas no tendrán incidencia sobre la fluencia; la fluencia deberá, además, ser independiente de la dirección de los ejes coordenados elegidos para definir el sistema, dado que el material es isotrópico y la fluencia dependerá solamente de la intensidad de las tensiones σ_{ij} . Por lo tanto la fluencia debe ser una función de los invariantes del tensor de tensiones. Más aún, si la fluencia no resulta afectada por la tensión hidrostática $\sigma_m = \frac{J_1}{3}$, entonces dependerá solamente de los componentes desviadores de tensiones. Ello implica que el criterio de fluencia debe ser una función de los invariantes del tensor desviador de tensiones J_2' y J_3' .

En términos generales podemos escribirlo como

$$f(J_2', J_3') = 0 \quad (5-1)$$

$$\text{donde } J_2' = \frac{1}{2} (\sigma_1'^2 + \sigma_2'^2 + \sigma_3'^2) - (\sigma_1' \sigma_2' + \sigma_2' \sigma_3' + \sigma_3' \sigma_1') = \frac{1}{2} \sigma_{ij}'^2 \quad (5-2)$$

$$J_3' = \frac{1}{3} (\sigma_1'^3 + \sigma_2'^3 + \sigma_3'^3) - \sigma_1' \sigma_2' \sigma_3' = \frac{1}{3} \sigma_{ij}' \sigma_{jk}' \sigma_{ki}' \quad (5-3)$$

Recordemos que $J_1' = 0$

Supongamos también que no se produzca efecto Bauschinger; esto matemáticamente implica que si σ_{ij} causa fluencia en el material, $-\sigma_{ij}$ también la producirá. El invariante J_3' cambia de signo si cambiamos de sentido todas las tensiones; esto impone que la función 5-1 sea una función par en J_3' .

V.1-1 - Criterio de Tresca.

Es la expresión más simple de un criterio de fluencia. Indica que la fluencia se inicia cuando la tensión tangencial máxima alcanza un valor crítico.

$$2 \tau_{\text{máx}} = \sigma_1 - \sigma_3 \quad (5-4)$$

La figura V-1 ilustra este criterio

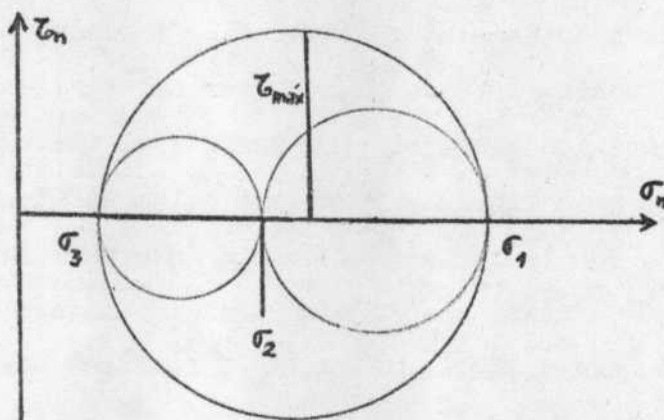


fig. V-1

Los valores que esa tensión tangencial máxima asume para tracción u niaxial y para corte puro son respectivamente:

a) Tracción simple. En el círculo de Mohr que representa este estado de tensiones (fig.V-2a) se ve que, si Y es la tensión uniaxial que provoca la fluencia:

$$\sigma_1 = Y = 2 k_t \quad ; \quad \sigma_2 = \sigma_3 = 0$$

Por lo tanto: $2 k_t = \sigma_1 - \sigma_3 = Y \quad (5-5)$

b) Corte puro. En este caso (ver fig. V-2b)

$$\sigma_1 = -\sigma_3 = k_c \quad \text{y} \quad \sigma_2 = 0$$

Por lo tanto

$$2 k_c = \sigma_1 - \sigma_3 \quad (5-6)$$

Comparando 5-5 y 5-6 se puede ver que

$$k_c = \frac{Y}{2} = k_t \quad (5-7)$$

O sea, según el presente criterio, la tensión de fluencia por corte puro, k_c , es igual a la máxima tensión de corte elástico en tracción uniaxial, k_t .

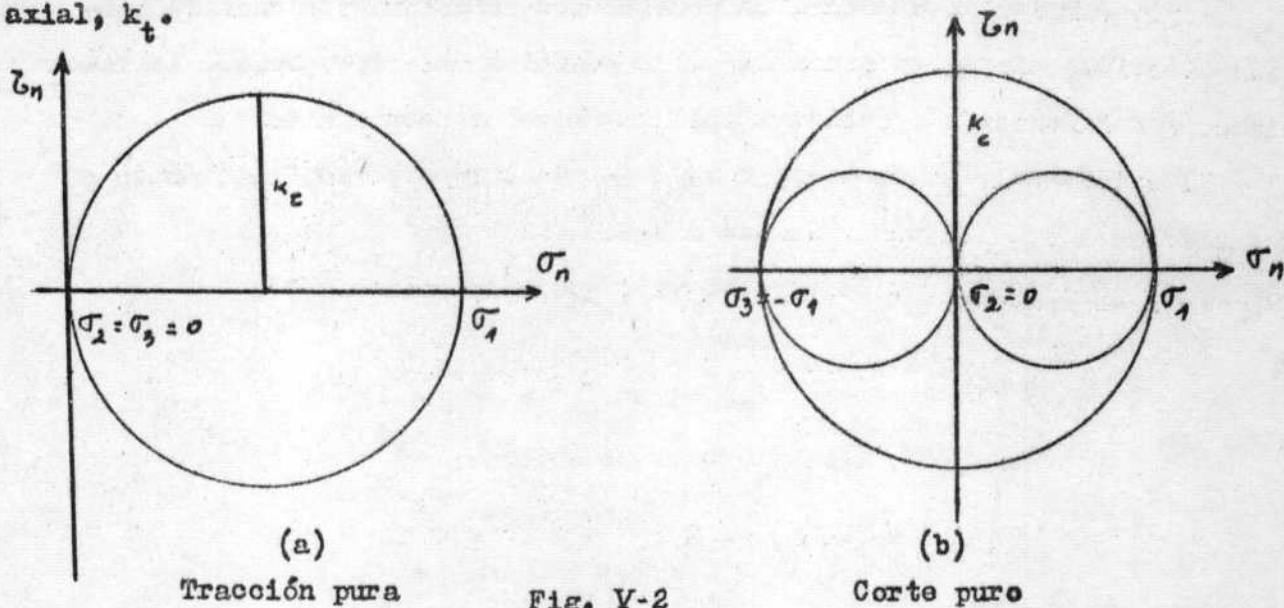


Fig. V-2

V-1.2 Criterio de Von Mises.

Su formulación está basada en la adopción de un valor para la función F de la ecuación 5-1. En efecto, este criterio establece que se produce la fluencia cuando el segundo invariante desviador del estado de tensiones toma un valor dado por

$$J_2' = k^2 \tag{5-8}$$

donde k es una constante.

De este modo se hace independiente a la función de fluencia del valor asumido por J_3' .

La ecuación 5-8 puede expresarse de la siguiente manera:

$$6 I_2' = (\sigma_x - \sigma_y)^2 + (\sigma_y - \sigma_z)^2 + (\sigma_z - \sigma_x)^2 + 6(\tau_{xy}^2 + \tau_{yz}^2 + \tau_{zx}^2) = 6 k^2 = 2 \gamma^2 \tag{5-9}$$

En función de las tensiones principales, se tiene:

$$(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2 = 6 k^2 = 2 \gamma^2 \tag{5-10}$$

Si se comparan las ecuaciones 5-10 y 4-46 se puede ver que presentan un gran parecido formal. Es por ello que algunos autores formulan este /

criterio de la siguiente manera: "La fluencia se produce cuando la energía elástica de distorsión alcanza un valor crítico".

Puede verse además que, de acuerdo con la definición dada de tensión efectiva, este criterio se puede postular así: "Se produce la fluencia cuando la tensión efectiva alcanza un valor determinado."

El valor de la constante k en 5-8 se obtiene por aplicación de este criterio a estados simples de carga.

a) Tracción pura. Como ya se vió, queda determinada por

$$\sigma_1 = Y = 2 k_t ; \quad \sigma_2 = \sigma_3 = 0$$

Aplicando a este estado se obtiene:

$$(\sigma_1)^2 + (-\sigma_1)^2 = 2 \sigma_1^2 = 2 Y^2 = 6 k^2$$

por lo tanto:

$$k = \frac{Y}{\sqrt{3}} \quad (5-11)$$

b) Corte puro: Este estado queda definido por:

$$\sigma_1 = -\sigma_3 = k_c ; \quad \sigma_2 = 0$$

Aplicando nuevamente :

$$(\sigma_1)^2 + (\sigma_1)^2 + (-2 \sigma_1)^2 = 6 \sigma_1^2 = 6 k_c^2 = 6 k^2$$

o sea:

$$k = k_c \quad (5-12)$$

Comparando 5-11 y 5-12 se obtiene:

$$k_c = \frac{2}{\sqrt{3}} \frac{Y}{2} = 1,155 k_t \quad (5-13)$$

O sea, según el criterio de Von Mises, la tensión de fluencia por corte puro, k_c , es 1,155 veces mayor que la máxima tensión de corte elástica por tracción k_t .

En general, los materiales frágiles se comportan según lo establecido en el criterio de Tresca, mientras que los dúctiles lo hacen de acuerdo al de Von Mises.

Se han sugerido distintos significados físicos para este criterio. Nadai interpretó que la fluencia depende de la tensión de corte octahédrica. Esto está motivado por el hecho de no depender la fluencia de la tensión hidrostática; en estas condiciones la tensión que controla el proceso deberá ser la componente de corte de la tensión que actúa sobre el plano octahédrico, ya que sobre este plano, la componente normal de la tensión es la tensión hidrostática.

Hensky sugiere que la fluencia se produce cuando la energía de distorsión (energía de deformación por corte) alcanza un valor crítico. Puede verse que la expresión del criterio de Von Mises es proporcional a la expresión de la citada energía. No debe preocuparnos el hecho de que la energía de deformación por corte se derive de consideraciones elásticas; las propiedades elásticas de los materiales no se destruyen cuando se producen deformaciones permanentes y además, puede ser considerada como una sucesión de estados de tensiones elásticas cuyos límites son continuamente excedidos. No obstante, la energía de deformación de un cuerpo, si tiene un significado, deberá interpretarse en base a interacciones atómicas y resulta dificultoso considerar la energía de deformación como divisible en dos partes diferentes: una relacionada con la variación de volumen y la otra relacionada con el cambio de forma. En este sentido, la interpretación del criterio de Von Mises no debería llevarse tan lejos. Matemáticamente, sin embargo, el criterio de Von Mises tiene características muy importantes: es independiente de la tensión hidrostática (las variables son sólo diferencias de tensiones), es independiente de los signos de las tensiones (todos los términos son cuadráticos) y de sus magnitudes relativas (no necesita convenirse si σ_1 es la mayor de las tensiones, etc.) Además, como veremos, su representación gráfica es la más simple.

V-2 Representación gráfica de los criterios de fluencia.

Estudiaremos la representación gráfica de los criterios de fluencia en un espacio de tensiones, conocido como espacio de Haigh-Westergaard.

Los ejes de la terna de referencia coinciden con las direcciones principales de tensiones. Así, dados los valores σ_1, σ_2 y σ_3 , se obtiene el punto P que representa al estado de tensiones en consideración (Fig.V-3)

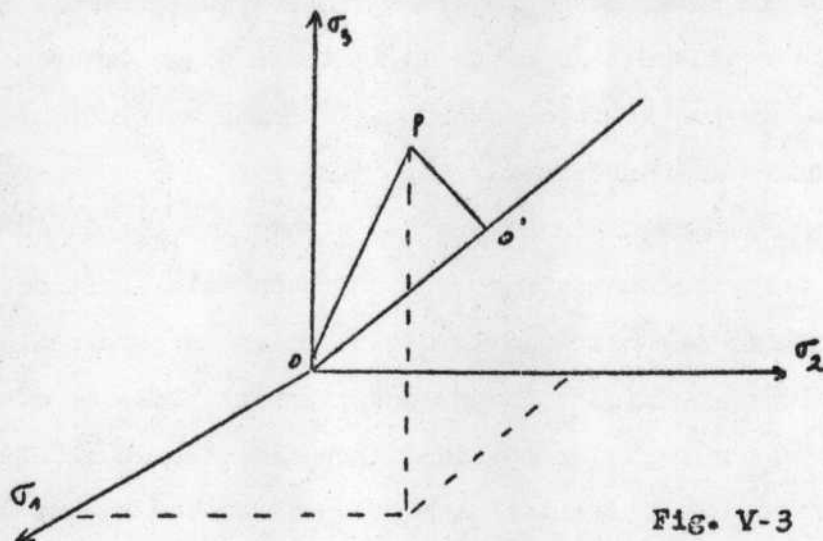


Fig. V-3

En el mismo sistema se traza $\overline{OO'}$ en forma tal que sus cosenos directores sean iguales ($l = m = n = \frac{1}{\sqrt{3}}$.°. $\alpha = \beta = \gamma = 54^\circ 44'$). Cualquier estado de tensiones cuya representación esté sobre $\overline{OO'}$ tiene $\sigma_1 = \sigma_2 = \sigma_3$, es decir, es un estado hidrostático o esférico de tensiones. Ya se dijo / que tales estados de tensiones no producen fluencia.

Si se descompone \overline{OP} según la dirección $\overline{OO'}$, se obtiene gráficamente la representación de los estados esférico y desviador de tensiones:

$\overline{OO'}$ - estado esférico o hidrostático

$\overline{O'P}$ - estado desviador

El estado desviador se encuentra en un plano perpendicular a $\overline{OO'}$, llamado plano Π (figura V-4) llamado plano desviador. Dado que la fluencia se produce debido a la componente $\overline{O'P}$ del estado de tensiones, que yace en el plano Π , nos dedicaremos solamente a este plano. La proyección de los ejes principales sobre el plano Π da tres ejes a 120° , que son los ejes / desviadores.

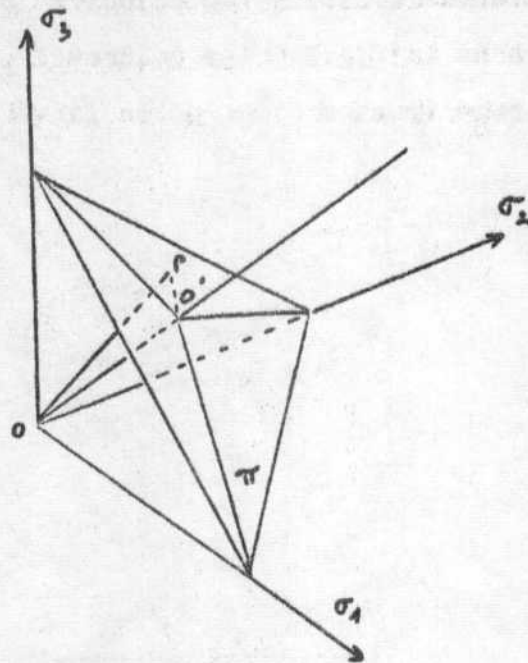


Fig. V-4

Dado que como se vió, las tensiones esféricas no inciden en la aparición de la fluencia, es la magnitud de $O'P$, que yace en el plano / desviador, la que la determina. En general, todos los estados de tensiones que interesan a los efectos de la fluencia, yacen en planos paralelos al plano π . La fluencia tiene lugar cuando $O'P$ alcanza un cierto / valor crítico, El lugar geométrico de los afijos correspondientes a los estados de tensiones que determinan dicho valor crítico, constituye una superficie denominada "superficie de fluencia". Esta superficie es una superficie cilíndrica, de sección transversal constante, dado que su magnitud es independiente de las componentes hidrostáticas de tensiones y por lo tanto, de su posición a lo largo de la recta $\overline{OO'}$. Su intersección con el plano desviador (plano π) determina la "línea o curva de fluencia", que resulta así ser el lugar geométrico de los estados de tensiones desviadores ($\overline{O'P}$) que producen fluencia.

Un criterio de fluencia debe definir la forma de la sección transversal del prisma.

Es posible demostrar que el criterio de Von Mises establece que dicha sección transversal es una circunferencia de radio $\sqrt{\frac{2}{3}} \gamma$, y el

de Tresca, que es un hexágono regular inscrito en la circunferencia de Von Mises. Ambos criterios coinciden sólo para tracción o compresión puras (punto A de la fig.V-5). La máxima diferencia existe en los estados de corte puro (puntos B y C de la fig. V-5)

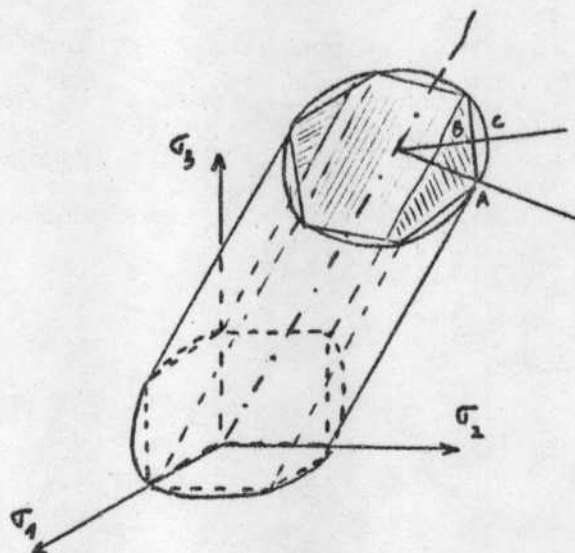


Fig. V-5

V-3 Endurecimiento por trabajado.

Es un hecho comprobado experimentalmente que los metales que deforman plásticamente, endurecen a medida que van deformando. Es decir, para producir nuevas deformaciones es necesario incrementar las tensiones. Se dice que el material "endurece por trabajado o por deformación."

Si se considera al material como endurecible, y se adopta el criterio de fluencia de Von Mises, entonces un círculo inicial representa la fluencia del material totalmente recocido. Una deformación plástica posterior altera las dimensiones de la curva instantánea de fluencia. Así, si $\bar{\sigma}_0$ es la tensión de fluencia primaria, entonces el radio del círculo de Von Mises es $\bar{\sigma}_0 \sqrt{\frac{2}{3}}$. Supóngase que la deformación prosigue desde

$\bar{\sigma}_0$ hasta $\bar{\sigma}_1$ y que el material es en este punto descargado completamente. Admitamos que la deformación no ha provocado anisotropía en el material (textura por deformación). La descarga desde $\bar{\sigma}_1$ es elástica

y también lo es la carga subsiguiente hasta dicho valor. Por lo tanto, este material posee ahora un lugar de fluencia que es un círculo de radio $\frac{\bar{\sigma}_1}{\sqrt{3}}$. En el plano Π , este círculo es concéntrico y de radio mayor que el de fluencia inicial.

O sea, el endurecimiento de un material que permanece isótropo / implica que los lugares instantáneos de fluencia se representan con figuras concéntricas que se van expandiendo. Dicha figura es circular en el criterio de Von Mises, y hexagonal en el de Tresca. La figura Y-6 ilustra lo indicado, para el criterio de Von Mises.

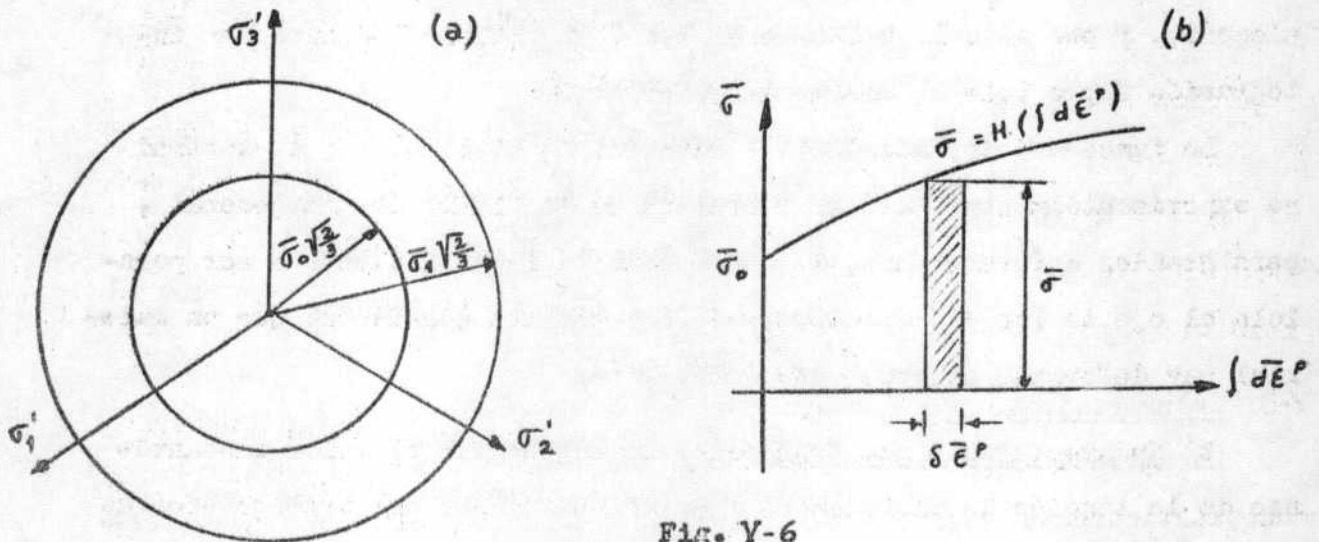


Fig. Y-6

Hay dos hipótesis para evaluar el endurecimiento del material:

- a) Endurecimiento por deformación
- b) Endurecimiento por trabajado

Analicemos cada una de ellas:

- a) Endurecimiento por deformación: Se supone que el valor instantáneo de la tensión efectiva que provoca fluencia es función únicamente de la deformación plástica previa. O sea:

$$\bar{\sigma} = H \left(\int d\bar{\epsilon}^P \right) \quad (5-14)$$

donde:

$$d\bar{\epsilon}^P = \frac{\sqrt{2}}{3} \left[(d\epsilon_1^P - d\epsilon_2^P)^2 + (d\epsilon_2^P - d\epsilon_3^P)^2 + (d\epsilon_3^P - d\epsilon_1^P)^2 \right]^{\frac{1}{2}} \quad (5-15)$$

Puede verse que, salvo un factor numérico, $d\bar{\epsilon}^P$ es una función del tensor desviador de incrementos de deformación plástica, similar a la que expresa $\bar{\sigma}$ en función del tensor desviador de tensiones. Vale decir, la deformación plástica representada por $d\bar{\epsilon}^P$ es de distorsión. Por lo tanto, la tensión de fluencia instantánea es, de acuerdo con esta hipótesis, una función H de la "distorsión" plástica total, de la cual $\int d\bar{\epsilon}^P$ es una medida conveniente.

El uso de incrementos de deformación se debe al hecho de que el grado de distorsión y, por lo tanto, de endurecimiento, no está determinado sólo por la diferencia entre las formas inicial y final de un elemento, y por ello la deformación total se obtiene mediante una integración sobre todo el camino de deformación.

La función H depende de cada material en particular y se determina experimentalmente. Está representada en la figura 6b. En general, para grandes deformaciones, la curva de esta función tiende a ser paralela al eje de las deformaciones, lo que permite considerar que un material muy deformado endurece muy débilmente.

b) Endurecimiento por trabajado: Se supone que el valor instantáneo de la tensión de fluencia es función únicamente del trabajo efectuado, por unidad de volumen

$$\bar{\sigma} = F(W^P) \quad (5-16)$$

Para un estado complejo de tensiones, el trabajo suministrado es:

$$\delta W = \sigma_{ij} \delta e_{ij} \quad (5-17)$$

La parte elástica es:

$$\delta W^E = \sigma_{ij} \delta e_{ij}^E \quad (5-18)$$

y la parte plástica estará dada por la diferencia

$$\delta W^P = \delta W - \delta W^E = \sigma_{ij} (\delta e_{ij} - \delta e_{ij}^E) = \sigma_{ij} \delta e_{ij}^P \quad (5-19)$$

El trabajo plástico total por unidad de volumen suministrado en una deformación finita es

$$W^P = \int \sigma_{ij} d e_{ij}^P \quad (5-20)$$

La integral debe realizarse sobre todo el programa de deformación, partiendo de un cierto estado inicial del material.

No es posible establecer diferencias entre estas dos hipótesis mediante la experimentación. La elección de una o de otra en un problema particular depende de la conveniencia. De todos modos, puede demostrarse que para materiales ideales a los que se puedan aplicar las relaciones entre tensiones y deformaciones incrementales que se verán a continuación, la hipótesis del endurecimiento por trabajado es susceptible de a similarse a la de endurecimiento por deformación.

V-4 Relaciones plásticas entre tensiones y deformaciones.

Una vez obtenido un criterio para establecer el estado de tensiones en que se produce la fluencia, es necesario disponer de alguna relación entre las componentes de tensión y las correspondientes deformaciones / plásticas. Estas relaciones se conocen como leyes de fluencia.

En el campo plástico no existen relaciones simples entre tensiones y deformaciones, como en el campo elástico. Las teorías de plasticidad formuladas hasta el presente son de "deformaciones incrementales" o de "deformaciones totales."

Las teorías incrementales predicen la proporcionalidad entre el estado instantáneo de tensiones y los incrementos de deformación que las / mismas provocan. Las teorías de deformaciones totales relacionan la deformación total con el estado actual de tensiones (en forma análoga a lo que ocurre en el campo elástico).

La deformación elástica, siendo reversible, depende sólo del estado inicial y final de tensiones. No ocurre lo mismo con las deformaciones plásticas que, al ser irreversibles, no sólo dependen del estado final de carga, sino también del camino por el cual se arribó a él.

Las dos teorías incrementales que se analizan en este punto son / las de Prandtl-Reuss y de Lévy-Mises. Ambas fueron formuladas inicialmente para materiales sin endurecimiento. Cuando se desea tener en cuenta a éste, se lo debe intercalar en las ecuaciones, obtenida previamente en forma experimental alguna de las funciones vistas en el punto anterior.

Prager enunció otra teoría de deformación incremental en que se / considera al efecto Bauschinger, pero su complejidad matemática la ha hecho muy poco usada.

Hencky propuso una teoría de deformación total que se expone muy / brevemente por cuanto su aplicación puede conducir a errores serios.

En todas estas teorías se aplica el principio de Saint Venant de coaxialidad de tensores de tensiones y de deformaciones que entran en juego, sean totales, parciales, desviadores, etc. Sólo de esta manera es posible establecer relaciones entre un tensor y otro, dadas por escalares.

V.4.1 Ecuaciones de Prandtl-Reuss.

Establecen que el incremento de deformación plástica (indicado con un subíndice p) es en todo momento proporcional a la tensión desviadora instantánea correspondiente. O sea

$$d\varepsilon_{ij}^p = \sigma_{ij}' d\lambda \quad (5-21)$$

Otra forma de expresar las ecuaciones 5-21 es la siguiente:

$$\frac{d\varepsilon_x^p}{\sigma'} = \frac{d\varepsilon_y^p}{\sigma'} = \frac{d\varepsilon_z^p}{\sigma'} = \frac{d\gamma_{xy}^p}{\tau} = \frac{d\gamma_{yz}^p}{\tau} = \frac{d\gamma_{zx}^p}{\tau} = d\lambda \quad (5-22)$$

$d\lambda$ es un factor de proporcionalidad no negativo, que puede variar durante la carga del cuerpo, y en los distintos puntos del mismo.

Las ecuaciones 5-21 establecen que un incremento de deformación / plástica depende de la tensión desviadora instantánea total, y no del incremento de tensión necesario para producir dicho incremento de deformación.

El incremento total de deformación es la suma de los incrementos de deformación elásticos y plásticos

$$de_{ij} = de_{ij}^E + de_{ij}^P \quad (5-23)$$

$$= \frac{d\sigma'_{ij}}{2G} + \frac{(1-2\nu)}{E} \delta_{ij} d\sigma_m + \sigma'_{ij} d\lambda \quad (5-24)$$

En las ecuaciones 5-24 es posible desdoblar las componentes de incrementos de deformación volumétrica y desviadora de la siguiente manera:

$$\left. \begin{aligned} de'_{ij} &= \frac{d\sigma'_{ij}}{2G} + \sigma'_{ij} d\lambda \\ de_{ii} &= \frac{(1-2\nu)}{E} d\sigma_{ii} \end{aligned} \right\} \quad (5-25)$$

Las ecuaciones 5-24 pueden escribirse como tres expresiones del tipo

$$de_x^P = \frac{2}{3} d\lambda \left[\sigma_x - \frac{1}{2} (\sigma_y + \sigma_z) \right] \quad (5-26)$$

y tres de la forma

$$d\gamma_{xy}^P = \zeta_{xy} d\lambda \quad (5-27)$$

Es posible demostrar que los diagramas de Mohr de tensiones desviadoras y de incrementos de deformación plástica son semejantes. En efecto:

$$\sigma'_1 + \sigma'_2 + \sigma'_3 = 0 = de_1^P + de_2^P + de_3^P \quad (5-28)$$

debido a la constancia de volumen. Además, si se aplica a una propiedad de las proporciones, se obtiene:

$$\frac{de_1^P - de_2^P}{\sigma'_1 - \sigma'_2} = \frac{de_2^P - de_3^P}{\sigma'_2 - \sigma'_3} = \frac{de_3^P - de_1^P}{\sigma'_3 - \sigma'_1} = d\lambda \quad (5-29)$$

Vemos que el factor de escala entre ambos diagramas es $d\lambda$.

Pero de este valor, $d\lambda$, sólo sabemos hasta ahora que es un escalar no negativo, variable punto a punto en el programa de deformaciones y

para los diferentes puntos del cuerpo. Haciendo uso de diversas propiedades de las proporciones, es posible demostrar que

$$d\lambda = \frac{3}{2} \frac{d\bar{\epsilon}^P}{\bar{\sigma}} \quad (5-30)$$

con lo que las ecuaciones 5-26 y 5-27 se pueden escribir de la siguiente manera:

$$\left. \begin{aligned} d e_x^P &= \frac{d \bar{\epsilon}^P}{\bar{\sigma}} \left[\sigma_x - \frac{1}{2} (\sigma_y + \sigma_z) \right] \\ d \gamma_{xy}^P &= \frac{3}{2} \frac{d \bar{\epsilon}^P}{\bar{\sigma}} \tau_{xy} \end{aligned} \right\} \quad (5-31)$$

Esta es la forma en que se usan las ecuaciones de Prandtl-Reuss para el cálculo. Si bien esta teoría fue introducida para materiales no endurecibles, puede verse que la expresión 5-30 la hace susceptible de usarse cuando existe endurecimiento adoptando para $\bar{\sigma}$ alguna de las hipótesis establecidas para el endurecimiento.

V-4.2 Ecuaciones de Lévy-Mises.

Si bien formuladas con anterioridad a las de Prandtl-Reuss, es conveniente enunciarlas "a posteriori". La teoría de Prandtl-Reuss / considera un sólido elastoplástico. Teniendo en cuenta que las deformaciones elásticas alcanzan a un 0,5 % como máximo en los materiales comúnmente usados en la ingeniería, pueden ser despreciadas frente a grandes deformaciones plásticas. Esta es la idea de Lévy-Mises, según la cual se considera que los incrementos de deformación son únicamente plásticos una vez superado el límite de fluencia. O sea:

$$d e_{ij} = d e_{ij}^P \quad (5-32)$$

Las ecuaciones de Lévy-Mises se formulan entonces de la siguiente manera:

$$d e_{ij} = \sigma'_{ij} d\lambda \quad (5-33)$$

Se establece así que el incremento de deformación es, en el campo plástico, proporcional a la tensión desviadora instantánea.

Vale para este caso todo lo dicho al analizar las ecuaciones de Prandtl-Reuss, eliminando el incremento de deformación elástica.

Las ecuaciones de Lévy-Mises son más sencillas de manejar que las de Prandtl-Reuss y por eso se profiere su uso en los casos en que ello sea factible. Pueden conducir a errores no despreciables cuando las deformaciones plásticas sean del orden de magnitud de las deformaciones elásticas o cuando se analice una interfase elasto-plástica.

V-4.3 Teorías de deformaciones totales.

En contraposición con las teorías anteriores, Hencky establece / que las componentes de la deformación plástica total son proporcionales a las componentes desviadoras de tensión:

$$e_{ij}^P = \bar{\phi} \sigma'_{ij} \quad (5-34)$$

$\bar{\phi}$ es una cantidad escalar positiva durante la carga y cero en la descarga.

Teniendo en cuenta que la deformación total es la suma de la deformación elástica y de la deformación plástica, y separando las componentes desviadoras y esféricas, las ecuaciones de Hencky puede escribirse como sigue:

$$\left. \begin{aligned} e'_{ij} &= \left(\bar{\phi} + \frac{1}{2G} \right) \sigma'_{ij} \\ e_{ii} &= \left(\frac{1-2\nu}{E} \right) \sigma_{ii} \end{aligned} \right\} \quad (5-35)$$

Es obvio que estas ecuaciones implican que dado el valor de la tensión en un punto de un cuerpo, la deformación total está completamente definida. Esto no resulta cierto, salvo el caso particular en que las tensiones y deformaciones se mantengan en una relación constante.

V-5 Validez de las ecuaciones de plasticidad: Parámetros de Lode .

Se ha comprobado experimentalmente la validez de las ecuaciones de plasticidad mediante ensayos de tracción y torsión combinadas, en

tubos de pared delgada. Los resultados se expresaron en función de los parámetros de Lode, μ y ν definidos de la siguiente manera:

$$\left. \begin{aligned} \mu &= \frac{\sigma_2 - \frac{1}{2}(\sigma_3 + \sigma_1)}{\frac{1}{2}(\sigma_1 - \sigma_3)} \\ \nu &= \frac{d e_2 - \frac{1}{2}(d e_3 + d e_1)}{\frac{1}{2}(d e_1 - d e_3)} \end{aligned} \right\} (5-36)$$

Puede verse que si los modelos teóricos de Levy-Mises o Prandtl-Reuss son correctos, ellos conducen a la igualdad

$$\mu = \nu$$

Los experimentos de Taylor y Quinney mostraron alguna desviación de esta igualdad. Sin embargo, investigaciones posteriores demostraron que esta desviación se debía a anisotropía en los materiales ensayados, y que en general, la concordancia $\mu = \nu$ es buena cuando se ensayan materiales isótropos, para los que fueron elaboradas las teorías vistas.

V-6 Trayectorias de tensiones y de deformaciones.

Si se supone que el material se deforma de manera tal que sus ejes principales de tensiones no varíen, es posible efectuar una construcción gráfica basada en las ecuaciones de Prandtl-Reuss que permite determinar las trayectorias de las tensiones y de las deformaciones. Dicha construcción se debe a Hill.

Dado que se admite la coaxialidad entre el tensor de tensiones y el de incrementos de deformación, los ejes principales de ambos deben coincidir. Es entonces posible superponer en una representación vectores que indiquen el estado de tensiones y a los incrementos de deformación.

Por otra parte, debido a la constancia de volumen

$$d e_1^P + d e_2^P + d e_3^P = 0 \quad (5-37)$$

el incremento de deformación plástica se puede representar por un vector en el plano π . En este plano, por lo visto anteriormente, coinciden los ejes desviadores de tensiones y de incrementos de deformación desviadora elástica y plástica. Es lo que se muestra en la figura V-7.

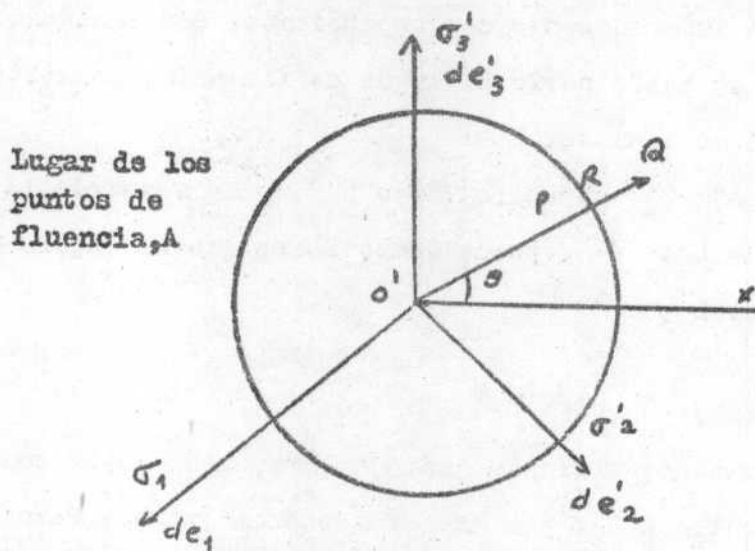


Fig. V-7

En dicha figura, se supone que la curva A es el lugar de los puntos de fluencia (un círculo en este caso), y que el vector $\overline{O^*P}$ representa a $\overline{\sigma}$, una tensión efectiva que produce fluencia.

La ley de Prandtl-Reuss establece que

$$\frac{d e_i^P}{\sigma'_i} = d\lambda = c \frac{d \overline{e}^P}{\overline{\sigma}} \quad (5-38)$$

siendo $d \overline{e}^P$ el incremento de deformación efectiva que por el principio de Saint-Venant, tiene la misma dirección que la tensión efectiva $\overline{O^*P}$. Puede representarse, entonces, en el plano desviador, al incremento de deformación efectiva mediante un vector de deformación \overline{RQ} paralelo al vector $\overline{O^*P}$ y de magnitud proporcional a $d \overline{e}^P$.

A los efectos de trabajar con mayor comodidad es conveniente dar a \overline{RQ} las dimensiones de una tensión. Para ello se adopta un factor de proporcionalidad que por conveniencia se elige $2G$, porque cuando $\overline{O^*P}$ alcanza justamente al lugar de fluencia se cumple

$$d e'_{ij} = \frac{d \sigma'_{ij}}{2G} + \sigma'_{ij} d\lambda \quad (5-39)$$

Dado que la deformación es sólo elástica y $d\lambda = 0$, y entonces

$$d\bar{e} = \frac{d\bar{\sigma}}{2G} \quad \therefore \quad \bar{e} = \frac{\bar{\sigma}}{2G} \quad (5-40)$$

Vale decir, las deformaciones correspondientes con cualquier estado de tensiones que se halle sobre el lugar de fluencia, constituyen las deformaciones elásticas límites.

Si se traza un eje O'_x perpendicular a $\bar{\sigma}_3'$, y se recuerda la definición del parámetro de Lode μ , puede demostrarse que el ángulo θ que $\overline{O'P}$ forma con O'_x es tal que

$$\mu = -\sqrt{3} \operatorname{tg} \theta$$

De la misma forma, ν , definido análogamente, debe estar relacionado con el ángulo θ_1 que forma $d\bar{e}^P$ por una expresión idéntica. Pero la adopción de las leyes de Prandtl-Reuss implica que

$$\mu = \nu$$

Por lo tanto, el ángulo formado por \overline{OP} y \overline{RQ} con O'_x es el mismo, o sea ambos vectores son colineales.

Considérese ahora un material que endurece por deformación. Ya se vio que en este caso

$$\bar{\sigma} = H \left(\int d\bar{e}^P \right)$$

Por lo tanto:

$$H' = \frac{d\bar{\sigma}}{d\bar{e}^P}$$

De esta manera, los incrementos desviadores de deformación, que eran de la forma

$$d e'_{ij} = \frac{3}{2} \frac{d\bar{e}^P}{\bar{\sigma}} \sigma'_{ij} + \frac{ij}{2G} \quad (5-41)$$

pasan a ser

$$d c'_{ij} = \frac{3}{2} \frac{d\bar{\sigma}}{\bar{\sigma} H'} \sigma'_{ij} + \frac{d\sigma'_{ij}}{2G} \quad (5-42)$$

El valor de H' puede hallarse fácilmente si se tiene la curva $\bar{\sigma} = \int d\bar{e}^P$, derivando la misma. Pueden obtenerse así valores continuos como se ve en la figura V-8

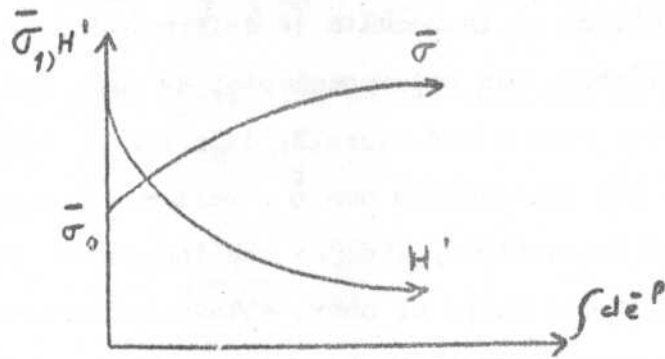


Fig. V-8

Con estos elementos se entra a analizar la trayectoria de tensiones y de deformaciones durante un proceso de deformación plástica en que los ejes principales no varíen.

En la figura V-9 se representa el plano π , con la terna de ejes a 120° . Por lo expuesto, se consideran superpuestos los ejes σ_1' y $2G\delta e_1'$.

Por conveniencia, se grafican en dicha figura las tensiones y las deformaciones reales, en lugar de sus proyecciones.

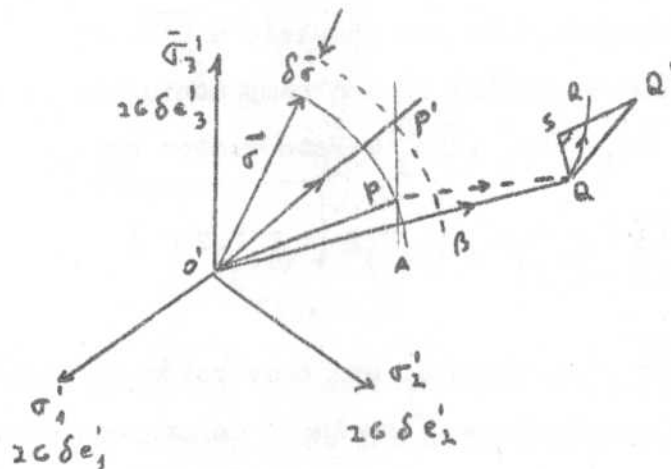


Fig. V-9

La curva A representa el lugar de fluencia correspondiente al estado de tensiones $P - O'P$ representa así no sólo a $\bar{\sigma}$ instantáneo sino también a la deformación desviadora elástica recuperable en una descarga completa. Se supone que \overline{PQ} representa a la deformación plástica desviadora total, obtenida en etapas previas.

V- 8 : Módelos Rehológicos y Ecuaciones empíricas tensión-deformación.

Para dar solución a los problemas de deformación suele recurrirse a modelos tensión-deformación idealizados. Los más importantes son:

- a- Perfectamente elástico. Se comporta elásticamente durante toda la deformación. En su representación gráfica (Fig. V-12 a) la pendiente de la recta mide el módulo de Young del material.
- b- Rígido - perfectamente plástico. Se comporta como rígido hasta la fluencia, luego es perfectamente plástico (no endurece por deformación) Figura V-12 b.
- c- Rígido plástico con endurecimiento lineal. Es rígido hasta la fluencia y luego endurece proporcionalmente a la deformación. La pendiente H mide el grado de endurecimiento. Fig. V-12 c
- d- Elástico- perfectamente plástico. Se comporta elásticamente hasta la fluencia, luego es perfectamente plástico. Fig. V-12 d
- e- Elástico-plástico con endurecimiento lineal. Se comporta elásticamente hasta la fluencia, luego endurece proporcionalmente. Figura V-12 e

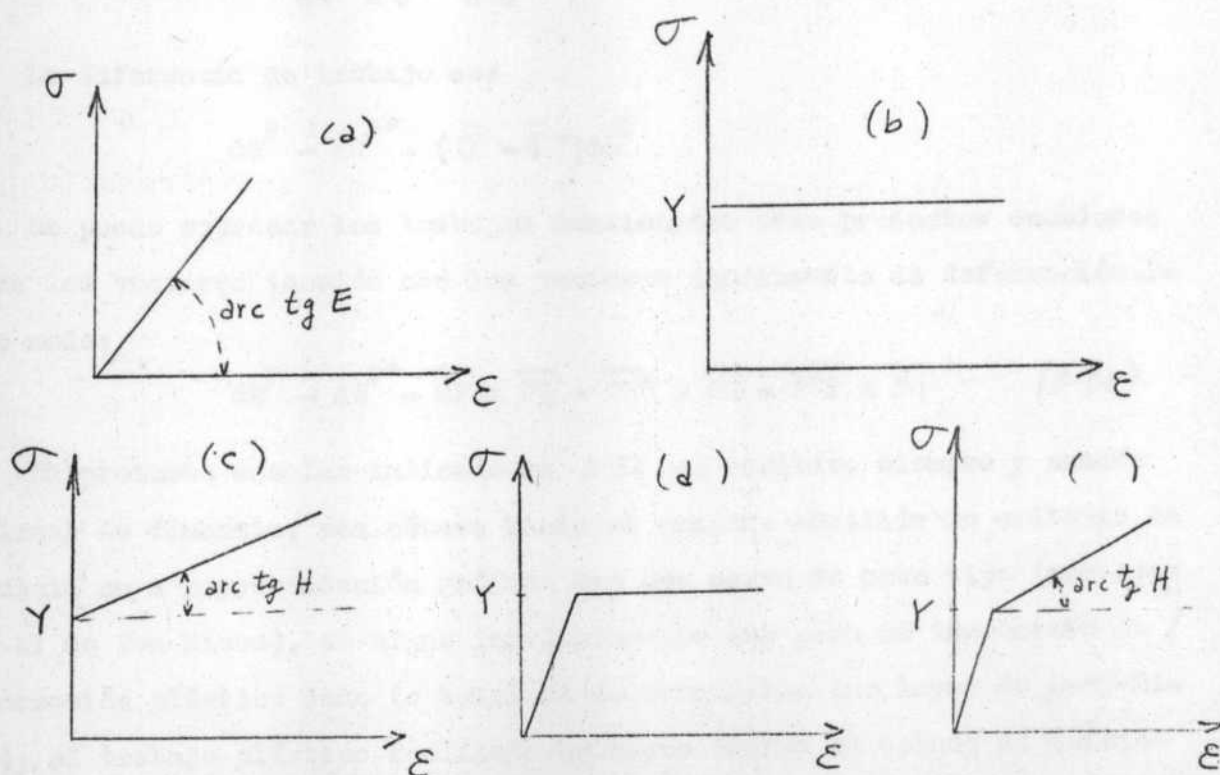


Figura V-12

Para la resolución de problemas plásticos suele resultar

cómo expresar las curvas reales tensión-deformación mediante funciones aproximadas y ofrezcan relativa facilidad de utilización. Enunciamos algunas de ellas; su elección en un problema particular dependerá del material de que se trate.

a- Adopta el modelo plástico endurecible:

$$\begin{cases} \text{hasta la fluencia} & \sigma = E \epsilon \\ \text{desde la fluencia} & \sigma = H \epsilon \end{cases} \quad (5-53)$$

Fig. V-13 a . Tanto E como H dependen del material

b- Ecuación de Ludwick:

$$\sigma = Y + H \epsilon^m \quad (5-54)$$

En la Fig. V-13 b se representa esta función para $m=1$ y para $0 < m < 1$. Y y H son constantes dependientes del material así como el valor que se asigne a m.

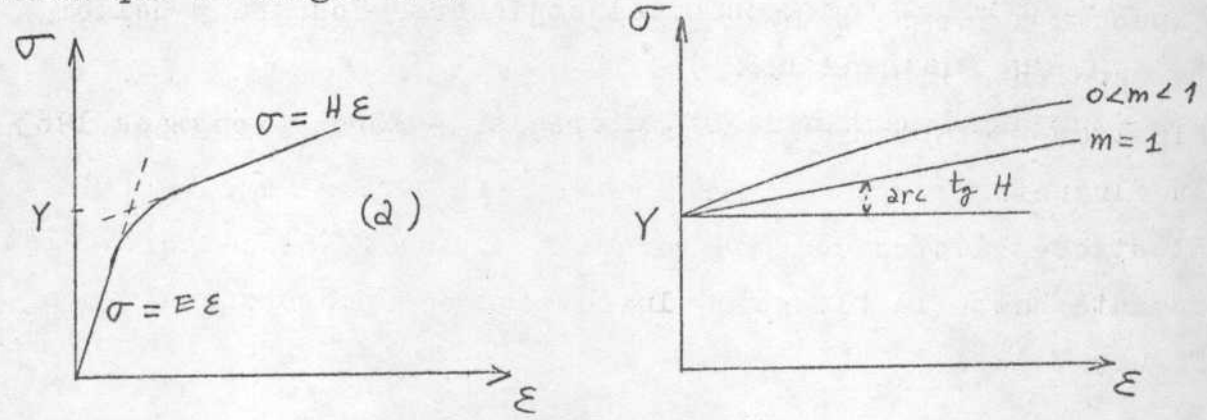


Figura V-13

c- Ecuación de Swift:

$$\sigma = C (A + \epsilon)^n \quad \text{con} \quad 0 \leq n \leq 1 \quad (5-55)$$

Esta ecuación representa una aproximación muy satisfactoria para numerosos materiales pero es algo difícil de manejar algebraicamente. En ella C, A y n son constantes de cada material.

d- Ecuación de Hollomon. Se trata de una simplificación de la de Swift:

$$\sigma = C \epsilon^n \quad (5-56)$$

e- Ecuación de Prager. También resulta incómoda para operar:

$$\sigma = Y \operatorname{Th} (E \epsilon / Y). \quad (5-57)$$

Bibliografía:

Básica:

- + Mechanical Metallurgy- Dieter (Mc Graw Hill 1961)
- Manufacturing Properties of Materials- Alexander y

- Brewer (Van Nostrand 1963)
- Análisis of Stress and Strain- Durelli, Phillips y Tsao
(McGraw Hill 1958)
- Mechanical Properties of Matter. Cottrell. (John Wiley 1964)
- Etude de la plasticité et application aux métaux- Jaoul
(Dunod 1965)
- Mechanics of plastic deformation in metal processing.-
Thomsen, Yang y Kobayashi.(Mc Millan 1965)

De Consulta:

- Mathematical Theory of Plasticity.- Hill (Oxford U.P. 1950)
- Theory of plasticity.- Hoffman y Sachs (McGraw Hill 1953)
- Plasticity for mechanical engineers.-Johnson y Mellor
(Van Nostrand 1962)
- Advanced mechanics of materials. - Ford. (Longmans 1963)