

CNEA - 181

REPUBLICA ARGENTINA
COMISION NACIONAL DE ENERGIA ATOMICA



INTEGRADOR LOGARITMICO Y MEDIDOR DE PERIODO
VELOCIDAD DE RESPUESTA Y FLUCTUACION ESTADISTICA

por

A. Battista y S. Pinesco



BUENOS AIRES

1967

INTEGRADOR LOGARITMICO Y MEDIDOR DE PERIODO . VELOCIDAD DE RESPUESTA Y FLUCTUACION ESTADISTICA

A. Battista y S. Pinasco

INTRODUCCION

En el momento de encendido de un reactor, se requiere una medición continua de los transitorios del flujo neutrónico para control y seguridad del mismo.

Esta medición debe cumplirse desde los niveles más bajos posibles de flujo neutrónico y deberá cubrir un rango extenso del mismo; por consiguiente un canal de medición de este tipo deberá ser capaz de integrar sobre una escala logarítmica pulsos de corrientes provenientes del detector, lo que permite cubrir varias décadas de variación del flujo sin cambio de escala.

Esta señal es entonces diferenciada, obteniendo así una salida proporcional a la velocidad de variación del flujo neutrónico. Esto es en esencia el Medidor de Período. Será deseable entonces que el instrumento posea:

- a) Respuesta lineal sobre una amplia escala logarítmica.
- b) Buena respuesta transitoria.
- c) Una reducida fluctuación estadística de salida o "ruido" debido a la inherente aleatoriedad del proceso de detección.

El análisis sobre el cumplimiento de la condición a) depende exclusivamente del tipo de integrador utilizado. Cuando se utiliza una cadena de diodos bomba como la del presente trabajo, puede encontrarse un extenso análisis de su característica logarítmica en referencias 1 y 2.

El análisis de los puntos b) y c) es lo que desarrollaremos en las secciones 2 y 3.

Como se desprenderá del mismo una rápida velocidad de respuesta y una baja fluctuación en la indicación de salida son requerimientos opuestos entre sí; encontrar la relación óptima es lo que nos proponemos.

Los problemas de ruido son críticos para bajo número de cuentas; esto significa que en tales niveles deberemos tener grandes valores de constantes de tiempo en el circuito con el fin de integrar estas variaciones fluctuantes alrededor del valor medio de la indicación. Estas constantes de tiempo grandes, determinarán necesariamente una velocidad de respuesta máxima.

En altos niveles pueden reducirse estos valores de constantes de tiempo, dado que la fluctuación es menor, y por consiguiente obtener respuestas más rápidas.

El problema es entonces tener indicaciones estables, con velocidades de respuesta lo suficientemente rápidas como para mantenernos dentro de los límites de seguridad.

En la figura 1 vemos un diagrama en bloques del canal del Integrador Logarítmico y Medidor de Período.

Si Φ es el flujo neutrónico y suponemos un crecimiento exponencial del mismo tendremos.

$$\Phi = \Phi_0 e^{t/T} \quad 1-1$$

donde Φ_0 es el flujo en el instante inicial y T es el período de crecimiento.

Este flujo luego de detectado es integrado sobre una escala logarítmica obteniendo entonces:

$$\log. \Phi = \log. \Phi_0 + \frac{t}{T} \cdot \log. e \quad 1-2$$

señal que una vez diferenciada dá:

$$\frac{d(\log. \Phi)}{dt} = \frac{0.43}{T} \quad 1-3$$

Es decir una indicación proporcional a la inversa del período T de crecimiento del flujo, que es la magnitud que deseamos medir.

2.- INTEGRADOR LOGARITMICO

En esta sección analizaremos el comportamiento del Integrador Logarítmico, el cual está compuesto por una cadena de diodos bomba.

2.1.- Diodos Bomba.

Para lograr una indicación logarítmica del flujo se utilizó un Integrador Logarítmico constituido por una "cadena" de diodos bomba, como el de la figura 2.

Este circuito está alimentado normalmente por una onda cuadrada generada por un multivibrador biestable, el que está disparado por los pulsos, de frecuencia aleatoria, provenientes del detector.

Si n es el número de impulsos por segundo, en estado estacionario n es constante y $v(t) = v(n)$. En estas condiciones:

$$\begin{aligned} [\Delta V - v(n)] C_1 R n &= v(n) \\ \Delta V n C_1 &= [1 + n R C_1] v(n) \end{aligned}$$

$$v(n) = \Delta V \frac{n \bar{\tau}_1}{1 + n \bar{\tau}_1}$$

Si lo que nos interesa es la corriente

$$i(n) = \frac{\Delta V}{R} \cdot \frac{n \bar{\tau}_1}{1 + n \bar{\tau}_1}$$

Si colocamos en paralelo k circuitos diodos bomba, escalonando adecuadamente sus constantes de tiempo de alimentación $\bar{\tau}_1$ (según potencia de 10, por ejemplo), puede demostrarse que la sumatoria de las tensiones $v(n)$ o la sumatoria de las corrientes $i(n)$ son funciones del logaritmo de n .

Como habrá entonces k bombas en paralelo, la corriente total de salida es

$$i_t(n) = n \Delta V \sum_{j=1}^k \frac{\bar{\tau}_{1j}}{R_j (1 + n \bar{\tau}_{1j})} \quad 2-1$$

La constante de tiempo $\bar{\tau}_2$ no influye sobre el estado estacionario, pero en cambio es importante en el comportamiento dinámico influyendo en el ruido y en el transitorio.

2.2. Velocidad de Respuesta.

Consideramos primero el transitorio correspondiente a una sola bomba, ya que la salida del circuito multibomba estará dada por la combinación lineal de la salida de la k bombas componentes.

Bajo condiciones dinámicas podemos escribir

$$[\Delta V - v(t)] C_1 R n(t) = v(t) + RC_2 \frac{dv(t)}{dt}$$

$$[\Delta V - v(t)] \bar{\tau}_1 n(t) = v(t) + \bar{\tau}_2 \frac{dv(t)}{dt}$$

$$\Delta V \bar{\tau}_1 n(t) = \bar{\tau}_2 \frac{dv(t)}{dt} + v(t) [1 + n(t) \bar{\tau}_1]$$

Esta ecuación diferencial debemos resolverla para alguna función determinada $n = n(t)$.

Si tenemos un crecimiento en escalón del número de pulsos:

$$n(t) = \begin{cases} n_0 & \text{para } t \geq 0 \\ 0 & \text{para } t < 0 \end{cases}$$

tenemos como solución:

$$v(t) = \Delta V \frac{n_0 \bar{\tau}_1}{1 + n_0 \bar{\tau}_1} \cdot \left[1 - e^{-\frac{1 + n_0 \bar{\tau}_1}{\bar{\tau}_2} t} \right]$$

es decir $v(t)$ tiende a su valor final $\frac{\Delta V n_0 \bar{\tau}_1}{1 + n_0 \bar{\tau}_1}$ según una exponencial con una constante de tiempo

$$T_b = \frac{\bar{\tau}_2}{1 + n_0 \bar{\tau}_1} \quad 2-2$$

Para la corriente será

$$i(t) = \frac{\Delta V}{R} \frac{n_0 \bar{\tau}_1}{1 + n_0 \bar{\tau}_1} \cdot \left[1 - e^{-\frac{1 + n_0 \bar{\tau}_1}{\bar{\tau}_2} t} \right]$$

La suma de las corrientes de las k bombas será

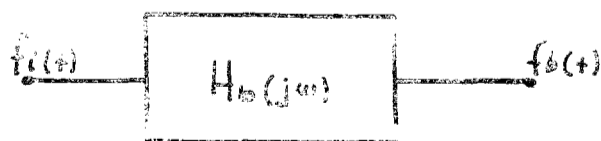
$$i_k(t) = \Delta V n_0 \sum_{j=1}^k \frac{\bar{\tau}_{1j}}{R_j (1 + n_0 \bar{\tau}_{1j})} \cdot \left[1 - e^{-\frac{1 + n_0 \bar{\tau}_{1j}}{\bar{\tau}_{2j}} t} \right]$$

2.3.- Fluctuación Estadística.

Para ver que sucede con las fluctuaciones a la salida de las bombas, consideramos el circuito de la figura 3.

La transferencia será

$$H_b(j\omega) = \frac{1}{1 + j\omega R \bar{\tau}_2} = \frac{1}{1 + j\omega \bar{\tau}_2}$$



$f_i(t)$ es una superposición de deltas $Q\delta(t)$ distribuidas en el tiempo según Poisson, su espectro de potencia es (referencia 3).

$$\phi_{ii}(\omega) = Q^2 \left(\frac{n}{2\pi} + n^2 \delta(\omega) \right)$$

donde n es el número de impulsos por segundo. $f_b(t)$ tendrá por espectro de potencia la expresión:

$$\phi_{bb}(\omega) = \frac{Q^2 n}{2\pi} |H_b(j\omega)|^2 + \overline{f_b(t)}^2 \delta(\omega)$$

De este espectro, nos interesa solo el término $\frac{Q^2 n}{2\pi} |H_b(j\omega)|^2$ que es el responsable de las fluctuaciones. Podemos escribir entonces, para el valor cuadrático medio del ruido o varianza:

$$\begin{aligned} \sigma_b^2 &= \int_{-\infty}^{\infty} \phi_{bb}(\omega) d\omega = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{Q^2 n}{2\pi} |H_b(j\omega)|^2 d\omega \\ &= \frac{Q^2 n}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{1 + \omega^2 \tau_2^2} d\omega = \frac{Q^2 n}{2\pi} \cdot \frac{1}{\tau_2^2} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\frac{1}{\tau_2^2} + \omega^2} d\omega \\ &= \frac{Q^2 n}{2 \tau_2} \end{aligned}$$

Ahora bien como $Q = [\Delta V - v(n)] C_1$ podemos desarrollar

$$\begin{aligned} Q &= \Delta V \left[1 - \frac{n \tau_1}{1 + n \tau_1} \right] C_1 = \Delta V \frac{C_1}{1 + n \tau_1} = \\ &= \frac{\Delta V}{R} \cdot \frac{\tau_1}{1 + n \tau_1} \end{aligned}$$

de donde

$$\sigma_b^2 = \frac{n}{2 \tau_2} \cdot \frac{\Delta V^2}{R^2} \cdot \frac{\tau_1^2}{(1 + n \tau_1)^2}$$

Esta expresión nos da la varianza de la corriente de salida de una bomba. Para la varianza de la suma de las corrientes de las k bombas tendríamos:

$$\sigma_{bt}^2 = \sum_{j=1}^k \sigma_j^2$$

y la desviación standard o valor eficaz de la fluctuación será

$$\sigma_{bt} = \sqrt{\sum_{j=1}^k \sigma_j^2}$$

Como en las distintas bombas tenemos fenómenos fluctuantes simultáneos en el tiempo, su coeficiente de correlación entre las distintas corrientes es 1 y por lo tanto:

$$\sigma_{bt} = \sum_{j=1}^k \sqrt{\sigma_j^2} = \sum_{j=1}^k \sigma_j$$

es decir:

$$\sigma_{bt} = \sqrt{\frac{n}{2}} \Delta V \sum_{j=1}^k \frac{1}{\sqrt{\sigma_{zj}}} \cdot \frac{\sigma_{ij}}{R_j (1 + n \sigma_{ij})} \quad 2-3$$

Expresión que nos da la "desviación standard" total de la corriente de salida del Integrador Logarítmico con diodos bomba.

2.4.- Amplificador Sumador.

Para sumar las corrientes de las bombas tenemos un amplificador de corriente (figura 4).

$$e_a(t) = R_s i_t(t)$$

$$R_s = \frac{e_{a \max.}}{i_{t \max}}$$

A la salida del sumador, para la señal proveniente de una sola bomba, tendremos para $e_a(t)$ el siguiente espectro:

$$\phi_{\text{sa}}(\omega) = \frac{\Delta V \cdot n}{2\pi} \cdot \frac{R_1^2}{R^2} \cdot \frac{\sigma_1^2}{(1+n\sigma_1)^2} \cdot \frac{1}{(1+\omega^2\sigma_2^2)} \quad 2-4$$

que se entiende de la parte responsable de las fluctuaciones, siendo entonces la expresión de la varianza de la tensión de salida:

$$\sigma_a^2 = \frac{n}{2\sigma_2} \cdot \Delta V^2 \cdot \frac{R_1^2}{R^2} \cdot \frac{\sigma_1^2}{(1+n\sigma_1)^2} \quad 2-5$$

3.- MEDIDOR DE PERIODO

A continuación del amplificador sumador de las corrientes de las bombas, donde tenemos una tensión de salida de la forma:

$$e_a(t) = A \log \Phi \quad 3-1$$

debemos tener algún elemento que nos de la derivada temporal de esta tensión para tener una indicación proporcional al período tal como vimos en la expresión 1-3.

Si consideramos un circuito como el de la figura 5 y si G es muy grande es:

$$E_o = E_a \frac{Z_4}{Z_3} \quad 3-2$$

Si hacemos $Z_4 = R_4$ y $Z_3 = j\omega C_3$

$$E_o = E_a j\omega R_4 C_3$$

o bien
$$e_o(t) = R_4 C_3 \frac{de_a(t)}{dt}$$

Sustituyendo $e_a(t)$ por 3-1 y haciendo $R_4 C_3 = \sigma_5$:

$$e_o(t) = \sigma_5 A \frac{d \log \Phi}{dt}$$

Si suponemos un crecimiento exponencial del flujo será:

$$\Phi = \Phi_0 e^{t/\tau} \quad 3-3$$

$$e_0 = \overline{G}_5 A \frac{1}{2.3 T}$$

Fijando entonces el mínimo período T que se quiere medir, fijada la tensión de fonde de escala e_0 del amplificador y teniendo la variación A en volts/década del Amplificador Sumador puede determinarse el valor de la constante \overline{G}_5 que nos fijará la escala:

$$\overline{G}_5 = \frac{e_{0max} T_{min}}{0,434 A} \quad 3-4$$

Sin embargo este cálculo supone un diferenciador perfecto sin tener en cuenta el ancho de banda limitado del Amplificador (referencias 4 y 5). Tampoco hemos tenido en cuenta los dos problemas fundamentales de que hablamos al principio y que son la velocidad de respuesta y la fluctuación estadística.

Como se dijo antes una rápida respuesta y un gran filtrado del ruido son condiciones opuestas entre si, ya que una respuesta rápida requiere un gran ancho de banda, el que por otra parte introducirá un gran componente de ruido.

La solución deberá ser entonces de compromiso y la función del diferenciador será por lo tanto doble: deberá diferenciar la porción de baja frecuencia de la tensión e_a y deberá suprimir o integrar la fluctuación de alta frecuencia o ruido.

Es decir juntamente con el proceso de diferenciación propio del Amplificador Diferenciador deberá existir a partir de alguna frecuencia un proceso de integración, teniendo en cuenta para esto las condiciones dadas de velocidad de respuesta y fluctuación máxima aceptable de la lectura.

3.1.- Diferenciador.

El circuito diferenciador integrante del Medidor de Período deberá tener una función de transferencia:

$$H(j\omega) = j\omega$$

Esta función de transferencia además de no ser físicamente realizable no cumple con la condición discutida anteriormente de introducir una constante de integración para controlar las frecuencias altas.

Si a un diferenciador como el de la figura 6 ya discutido en las sec. 3, se le agrega en paralelo un condensador C_4 , tiene una función de transferencia:

$$H(j\omega) = \frac{j\omega \overline{G}_5}{1 + j\omega \overline{G}_4}$$

y su diagrama de Bode se ve en la figura 7.

Tampoco en este caso entonces tenemos un control en frecuencias altas

Si en cambio tenemos el circuito de la figura 8, el tiene una función de transferencia.

$$H_1(j\omega) = \frac{R_4}{1 + j\omega R_4 C_4} \cdot \frac{j\omega C_3}{1 + j\omega R_3 C_3}$$

$$\tau_3 = R_3 C_3$$

Si hacemos: $\tau_4 = R_4 C_4$

$$\tau_5 = R_4 C_3$$

$$H_1(j\omega) = \frac{j\omega \tau_5}{(1 + j\omega \tau_3)(1 + j\omega \tau_4)} \quad 3.5$$

La figura 9 muestra el diagrama de Bode correspondiente a esta transferencia.

Las constantes de tiempo τ_3 y τ_4 son llamadas las constantes de diferenciación y de integración del amplificador respectivamente (referencia 6). La constante de tiempo τ_5 es el factor de escala obtenido en la ecuación 3-4.

3.2.- Velocidad de Respuesta.

Para analizar la velocidad de respuesta del Medidor de Período, supondremos aplicada a este una tensión de entrada:

$$e_a(t) = bt$$

$$V_a(s) = \frac{b}{s^2}$$

A la salida tendremos:

$$V_o(s) = V_a(s) H_1(s) = \frac{b \tau_5}{\tau_3 \tau_4} \frac{1}{s(s + \frac{1}{\tau_3})(s + \frac{1}{\tau_4})}$$

cuya antitransformada es

$$e_0(t) = b \tau_5 \left[1 + \frac{\tau_3}{\tau_4 - \tau_3} e^{-\frac{t}{\tau_3}} - \frac{\tau_4}{\tau_4 - \tau_3} e^{-\frac{t}{\tau_4}} \right]$$

Cuando $t \rightarrow \infty$, $e_0(t) \rightarrow b \tau_5$, es decir en el valor final no interviene τ_3 ni τ_4 es natural que así suceda pues:

$$H_s(j\omega) \xrightarrow{\omega \rightarrow 0} j\omega \tau_5$$

Es decir, en el proceso de diferenciación la constante de tiempo que interviene es $\tau_5 = R_4 C_3$.

En cambio el transitorio no depende para nada de τ_5 , y en cambio si depende de τ_3 y τ_4 .

Si $\frac{\tau_4}{\tau_3} = \theta$ y $\tau_3 \tau_4 = K$, podemos escribir

$$e_0(t) = b \tau_5 \cdot \left[1 + \frac{\theta}{1-\theta} e^{-\frac{t}{\sqrt{\theta K}}} - \frac{1}{1-\theta} e^{-\frac{\sqrt{\theta}}{\sqrt{K}} t} \right]$$

Nos interesa la respuesta que tenga un tiempo de establecimiento mínimo, o lo que es lo mismo, que su tangente máxima sea máxima

$$\begin{aligned} \frac{1}{b \tau_5} \frac{de_0(t)}{dt} &= -\frac{1}{\sqrt{\theta K}} \frac{\theta}{1-\theta} e^{-\frac{t}{\sqrt{\theta K}}} + \frac{\sqrt{\theta}}{\sqrt{K}} \frac{1}{1-\theta} e^{-\frac{\sqrt{\theta}}{\sqrt{K}} t} = \\ &= \frac{\sqrt{\theta}}{\sqrt{K}} \frac{1}{1-\theta} \left[e^{-\frac{\sqrt{\theta}}{\sqrt{K}} t} - e^{-\frac{t}{\sqrt{\theta K}}} \right] \end{aligned}$$

$$\frac{1}{b \tau_5} \frac{d^2 e_0(t)}{dt^2} = \frac{\sqrt{\theta}}{\sqrt{K}} \frac{1}{1-\theta} \left[\frac{1}{\sqrt{\theta K}} e^{-\frac{t}{\sqrt{\theta K}}} - \frac{\sqrt{\theta}}{\sqrt{K}} e^{-\frac{\sqrt{\theta}}{\sqrt{K}} t} \right] = 0$$

Por lo tanto $\frac{e^{-\frac{t}{\sqrt{\theta K}}}}{\sqrt{\theta}} = \sqrt{\theta} e^{-\frac{\sqrt{\theta}}{\sqrt{K}} t}$

$$e^{-\frac{t}{\sqrt{\theta k}}} = \theta e^{-\frac{\sqrt{\theta}}{\sqrt{k}} t}$$

$$-\frac{t}{\sqrt{\theta k}} = \ln \theta - \frac{\sqrt{\theta}}{\sqrt{k}} t$$

$$t = \frac{\ln \theta}{\frac{\sqrt{\theta}}{\sqrt{k}} - \frac{1}{\sqrt{\theta k}}} = \frac{\sqrt{\theta k}}{\theta - 1} \ln \theta$$

Reemplazando este valor de t en la expresión de la derivada, tendremos:

$$\left. \frac{\sqrt{k}}{b \tau_s} \cdot \frac{d e_o(t)}{dt} \right|_{\max.} = \frac{\sqrt{\theta}}{1 - \theta} \left[e^{-\frac{\theta \ln \theta}{\theta - 1}} - e^{-\frac{\ln \theta}{\theta - 1}} \right] \quad 3.6$$

Como función de θ es una función que no cambia si reemplazamos θ por $\frac{1}{\theta}$ luego es simétrica alrededor de $\theta = 1$.

En la figura 10, se ha representado esta función como función de θ y resulta que para $\theta = 1$, tiene un máximo.

Si hacemos $\theta = 1$

$$\frac{e_o(t)}{b \tau_s} = 1 - \left(1 + \frac{t}{\tau_s} \right) e^{-\frac{t}{\tau_s}}$$

Si llamamos t_1 al valor en que esta función alcanza el 90 % de su valor máximo

$$\frac{e_o(t_1)}{b \tau_s} = 0,9 = 1 - \left(1 + \frac{t_1}{\tau_s} \right) e^{-\frac{t_1}{\tau_s}}$$

$$0,1 = \left(1 + \frac{t_1}{\tau_s} \right) e^{-\frac{t_1}{\tau_s}}$$

$$\log 0,1 = \log\left(1 + \frac{t_1}{\tau_3}\right) - \frac{t_1}{\tau_3} \quad 0,4343$$

$$-1 + \frac{0,4343}{\tau_3} t_1 = \log\left(1 + \frac{t_1}{\tau_3}\right)$$

por lo tanto $t_1 = 3,9 \tau_3$ 3-7

3.3.- Fluctuación Estadística.

El espectro de la señal de salida del Medidor de Período será (referencia 7):

$$\phi_{oo}(\omega) = |H_1(j\omega)|^2 \phi_{ae}(\omega)$$

donde $\phi_{ae}(\omega)$ es el espectro de la señal en la salida del Amplificador para una sola bomba, dado por la 2-4; y $H_1(j\omega)$ la transferencia del Amplificador dado por la (3-5), entonces:

$$\phi_{oo}(\omega) = \frac{n \Delta V^2}{2\pi} \cdot \frac{R_i^2}{R^2} \cdot \frac{\tau_1^2 \tau_5^2}{(1+n\tau_1)^2} \cdot \frac{\omega^2}{(1+\omega^2\tau_2^2)(1+\omega^2\tau_3^2)(1+\omega^2\tau_4^2)}$$

De donde la varianza o el valor cuadrático medio del ruido a la salida será:

$$\sigma_o^2 = \int_{-\infty}^{\infty} \phi_{oo}(\omega) d\omega =$$

$$\sigma_o^2 = \frac{n \Delta V^2}{2\pi} \cdot \frac{R_i^2}{R^2} \cdot \frac{\tau_1^2 \tau_5^2}{(1+n\tau_1)^2} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\omega^2}{(1+\omega^2\tau_2^2)(1+\omega^2\tau_3^2)(1+\omega^2\tau_4^2)} d\omega$$

$$\sigma_o^2 = \frac{n \Delta V^2}{2} \cdot \frac{R_i^2}{R^2} \cdot \frac{\tau_1^2 \tau_5^2}{(1+n\tau_1)^2} \cdot \frac{1}{(\tau_2 + \tau_3)(\tau_3 + \tau_4)(\tau_4 + \tau_2)} \quad 3-8$$

Para $n = \text{cte}$ y haciendo $\theta = \frac{b_4}{b_3}$ y $b_3 b_4 = K$ y $M = \frac{n \Delta v^2 R_1^2 \epsilon_1^2 \epsilon_2}{2 R^2 (1 + n \epsilon_1)}$

resulta:

$$\sigma_0^2 = \frac{M}{K \sqrt{K}} \cdot \frac{1}{\frac{\epsilon_2}{\sqrt{K}} \theta + \left(1 + \frac{\epsilon_2^2}{K}\right) \sqrt{\theta} + 2 \frac{\epsilon_2}{\sqrt{K}} + \left(1 + \frac{\epsilon_2^2}{K}\right) \frac{1}{\sqrt{\theta}} + \frac{\epsilon_2}{\sqrt{K}} \frac{1}{\theta}}$$

3-9

El denominador de la 3-9, salvo una constante, es una función del tipo:

$$f(\theta) = A\theta + (1+A^2)\sqrt{\theta} + 2A + (1+A^2)\frac{1}{\sqrt{\theta}} + \frac{A}{\theta}$$

donde $A = \frac{\epsilon_2}{\sqrt{b_3 b_4}}$

que tiene un mínimo en $\theta = 1$

$$\frac{df(\theta)}{d\theta} = A + \frac{(1+A^2)}{2\sqrt{\theta}} - \frac{(1+A^2)}{2\sqrt{\theta^3}} - \frac{A}{\theta^2}$$

$$\frac{df(\theta)}{d\theta} = 0 \quad \text{para } \theta = 1$$

$$\frac{d^2 f(\theta)}{d\theta^2} = -\frac{(1+A^2)}{4\sqrt{\theta^3}} + \frac{3(1+A^2)}{4\sqrt{\theta^5}} + \frac{2A}{\theta^3}$$

que para $\theta = 1$ es $\frac{d^2 f(\theta)}{d\theta^2} > 0$

Luego $\theta = 1$ es un mínimo de $f(\theta)$, es decir, que para $\theta = 1$ el valor cuadrático medio del ruido es máximo.

Si reagrupamos la 3-8 de forma que quede:

$$\sigma_o^2 = \frac{n \Delta V^2}{2} \cdot \frac{R_1^2}{R^2} \cdot \frac{\bar{\epsilon}_1^2}{(1+n\bar{\epsilon}_1)^2 \bar{\epsilon}_2} \cdot \frac{R_3^2 R_4^2 C_3^2 \bar{\epsilon}_2}{R_3^2 (\bar{\epsilon}_2 + \bar{\epsilon}_3) (\bar{\epsilon}_3 + \bar{\epsilon}_4) (\bar{\epsilon}_4 + \bar{\epsilon}_2)}$$

y teniendo en cuenta la ec. 2-5:

$$\frac{\sigma_o^2}{\sigma_a^2} = \rho \frac{\bar{\epsilon}_3/\bar{\epsilon}_2}{1 + \bar{\epsilon}_3/\bar{\epsilon}_2} \cdot \frac{1}{(1+\theta)(1+\theta \bar{\epsilon}_3/\bar{\epsilon}_2)} \quad 3-10$$

donde $\theta = \bar{\epsilon}_4/\bar{\epsilon}_3$ y $\rho = \frac{R_1^2}{R^2}$

Esta ecuación ha sido graficada en la figura 11 y puede verse de que forma varía el ruido con $\bar{\epsilon}_3/\bar{\epsilon}_2 \cdot \bar{\epsilon}_3/\bar{\epsilon}_2$ es función de n dado que $\bar{\epsilon}_2$ varía en forma inversamente proporcional a n .

Finalmente la desviación standard de la lectura en la salida del Medidor de Período teniendo en cuenta el integrador multibomba y la relación $\theta = 1$ es:

$$\sigma_{oT} = \frac{\Delta V}{2} \frac{\sqrt{n}}{\sqrt{\bar{\epsilon}_3}} R_1 \bar{\epsilon}_5 \sum_{j=1}^k \frac{\bar{\epsilon}_{1j}}{R_j (1+n\bar{\epsilon}_{1j})} \cdot \frac{1}{(\bar{\epsilon}_{2j} + \bar{\epsilon}_3)}$$

3-11

3-4-. Relación Óptima

Para encontrar cual es la relación óptima entre fluctuación y velocidad de respuesta debemos considerar 2 expresiones fundamentales:

la 3-6

$$\frac{\sqrt{k}}{b \bar{\tau}_s} \frac{d e_o(t)}{dt} = \frac{\sqrt{\theta}}{1-\theta} \left[e^{-\frac{\theta \ln \theta}{\theta-1}} - e^{-\frac{\ln \theta}{\theta-1}} \right]$$

y la 3-9

$$\sigma_o^2 = \frac{M}{k \sqrt{k}} \cdot \frac{1}{\frac{\bar{\tau}_2}{\sqrt{k}} \theta + \left(1 + \frac{\bar{\tau}_2^2}{k}\right) \sqrt{\theta} + 2 \frac{\bar{\tau}_2}{\sqrt{k}} + \left(1 + \frac{\bar{\tau}_2^2}{k}\right) \frac{1}{\sqrt{\theta}} + \frac{\bar{\tau}_2}{\sqrt{k}} \frac{1}{\theta}}$$

La condición óptima será aquella en que

$$\frac{1}{\sigma_o^2} \left[\frac{d e_o(t)}{dt} \right]_{\max.} \quad \text{es máxima como función de } \theta.$$

Suponemos que $n = \text{constante}$. Esto es equivalente a estudiar la función:

$$g(\theta) = \frac{\sqrt{\theta}}{1-\theta} \left[e^{-\frac{\theta \ln \theta}{\theta-1}} - e^{-\frac{\ln \theta}{\theta-1}} \right] \left[A \theta + (1+A^2) \sqrt{\theta} + 2A + (1+A^2) \frac{1}{\sqrt{\theta}} + \frac{A}{\theta} \right]$$

La función $g(\theta)$ ha sido graficada para varios valores del parámetro A (figuras 12 a 17). Para todos los valores de A la función $g(\theta)$ muestra un máximo en $\theta = 1$, excepto para el valor $A = 1$ en que la función es oscilante alrededor del valor para $\theta = 1$.

4.- CONCLUSIONES

De acuerdo al análisis desarrollado en las secciones precedentes pueden obtenerse como conclusiones el siguiente orden de pasos a tenerse en cuenta en el diseño:

- 1.- Cálculo de $\bar{\tau}_s$: Esta constante de tiempo nos dará el factor de escala y está expresado por la ec. 3-4.

2.- Elección de $\theta = 1$: Como se vió en la sección 3-4 la relación velocidad de respuesta-ruido tiene un máximo cuando $\theta = 1$, es decir las constantes de diferenciación e integración del Medidor de Período deberá ser iguales. $\tau_3 = \tau_4$

3.- Cálculo de τ_3 : Como se vió en la ec 3-7

$$t_1 \approx 3.9 \tau_3$$

fijado entonces el tiempo máximo t_1 , que puede tardar la señal de salida del Medidor de Período en alcanzar el 90% de su valor final queda fijado τ_3 , y por lo tanto τ_4 , es decir las constantes de diferenciación e integración del medidor de Período.

Con τ_5 calculada en 1, τ_3 y τ_4 pueden encontrarse los valores de R3, C3, R4, y C4.

4.- La velocidad de respuesta de las distintas bombas del Integrador Logarítmico no puede ser mayor que t_1 , salvo en las bombas de los niveles más bajos donde la constante de tiempo τ_2 de integración debe ser compatible con la desviación standard σ_{adm} admisible.

5.- Fijar en los niveles más bajos el porcentaje de ruido admisible, y en base a estos porcentajes de niveles de ruido calcular por aproximación sucesivas las constantes de tiempo τ_2 del punto anterior.

Pueden entonces verificarse ahora con las fórmulas de σ los ruidos a la salida.

5.- RESULTADOS

Se dan a continuación los resultados obtenidos para un Integrador Logarítmico realizado con diodos bomba y Medidor de Período.

Se cubrieron seis décadas con 7 bombas en paralelo, con sus constantes de alimentación τ_4 escalonadas según potencias de 10.

En la figura 18 se ve el circuito utilizado. En la figura 19 se observa la variación de la corriente de salida en función del número de cuentas.

El porcentaje admisible de desviación por década en los niveles más bajos era del 15%. Con este valor se encontraron las constantes de tiempo τ_2 . Las constantes de tiempo τ_3 están fijadas por las condiciones de linealidad del integrador.

Con estos valores de $\bar{\sigma}_1$ y $\bar{\sigma}_2$ los valores de desviación standard expresión (2-3) de la corriente $i_t(t)$ y la velocidad de respuesta expresión (2-2) son:

$$\eta = 0.5 \text{ c/seg.} \quad \sigma_{bt} = 0,33 \mu A \quad T_b = 20 \text{ seg.}$$

$$\eta = 5 \text{ c/seg.} \quad \sigma_{bt} = 0,30 \mu A \quad T_b = 6 \text{ seg.}$$

$$\eta = 50 \text{ c/seg.} \quad \sigma_{bt} = 0,19 \mu A \quad T_b = 2 \text{ seg.}$$

Para n mayores δ_b , sigue bajando y las respuestas se mantienen en 2 seg., valor que como veremos es menor que el t_1 adoptado.

Las corrientes de las bombas se suman en un Amplificador (figura 20).

$$R_1 = \frac{e_{c \max}}{i_t \max} = \frac{10 \text{ Volts}}{13,2 \mu A} \approx 760 \text{ K} \Omega$$

se calcula $\bar{\sigma}_5$ (Ec. 3-4):

$$\bar{\sigma}_5 = \frac{e_{c \max} T_{\min}}{0,4343 A}$$

Si

$$e_{c \max} = 10 \text{ Volts}$$

$$A = \frac{10 \text{ Volts}}{6 \text{ décadas}} = 1,66 \frac{\text{Volts}}{\text{década}}$$

$$T_{\min} = 3 \text{ seg.}$$

$$\bar{\sigma}_5 \approx 41 \text{ seg.}$$

Fijada la velocidad de respuesta del Medidor de Período en $t_1 = 2,5 \text{ seg.}$, por ec. 3-7:

$$\bar{\sigma}_3 = \bar{\sigma}_4 = \frac{2,5 \text{ seg}}{3,9} \approx 0,62 \text{ seg.}$$

por lo tanto el Medidor de Período queda como se indica en la (fig. 21).

Con estos valores se obtuvieron los siguientes resultados para la desviación standard en la indicación del período (ec. 3-11)

$$\eta = 0,5 \text{ c/seg.} \quad \sigma_{ot} = 1,36 \text{ volt}$$

$$\eta = 5 \text{ c/seg.} \quad \sigma_{ot} = 1,57 \text{ volt}$$

$$\eta = 50 \text{ c/seg.} \quad \sigma_{ot} = 1,43 \text{ volt}$$

En las figuras 25 a 30 pueden verse estas fluctuaciones con un registrador en la salida del equipo.

Estas fluctuaciones pueden parecer altas, pero deben tolerarse si lo que se desea es un instrumento de seguridad, es decir que la velocidad este limitada a un máximo. Si se desea bajar estos valores de fluctuación para tener una indicación más exacta deben tolerarse respuestas más lentas.

BIBLIOGRAFIA

- 1.- COOKE YARBOUROUGH, E.H. and PULSFORD, E.W.
Proc. IEE Part II Vol. 98 N° 62, April 1951, pp (196-203)
 - 2.- VAN ZOLENGEN, J. J.; Philips Technical Review,
Vol. 21 N° 4/5, 1959/60, pp (138/141)
 - 3.- LEE, Y.W.; Statistical Theory of Comunication
John Wiley & Sons, 1960 pp (244-245)
 - 4.- BARROW, B. and MAITLAND, R.
Nuclear Electronics I (I.A.E.A.), 1959 pp (343 -357)
 - 5.- GRIM, W.M. Jr., BARROW, B.B. and SIMONS, J.C. Jr.
Nuclear Science and Engineering
Academic Press, New York, Vol. 1, 1956 pp (80-91)
 - 6.- FOWLER, E.P.
United Kingdom Atomic Energy Authority AEEW-R-170
Nov. 1962
 - 7.- CHRISTIANSEN, H. and STANFIELD, R.B.
Transactions on N.S. IRE, Vol NS-8 N° 3
July 1961 pp (22-26)
-

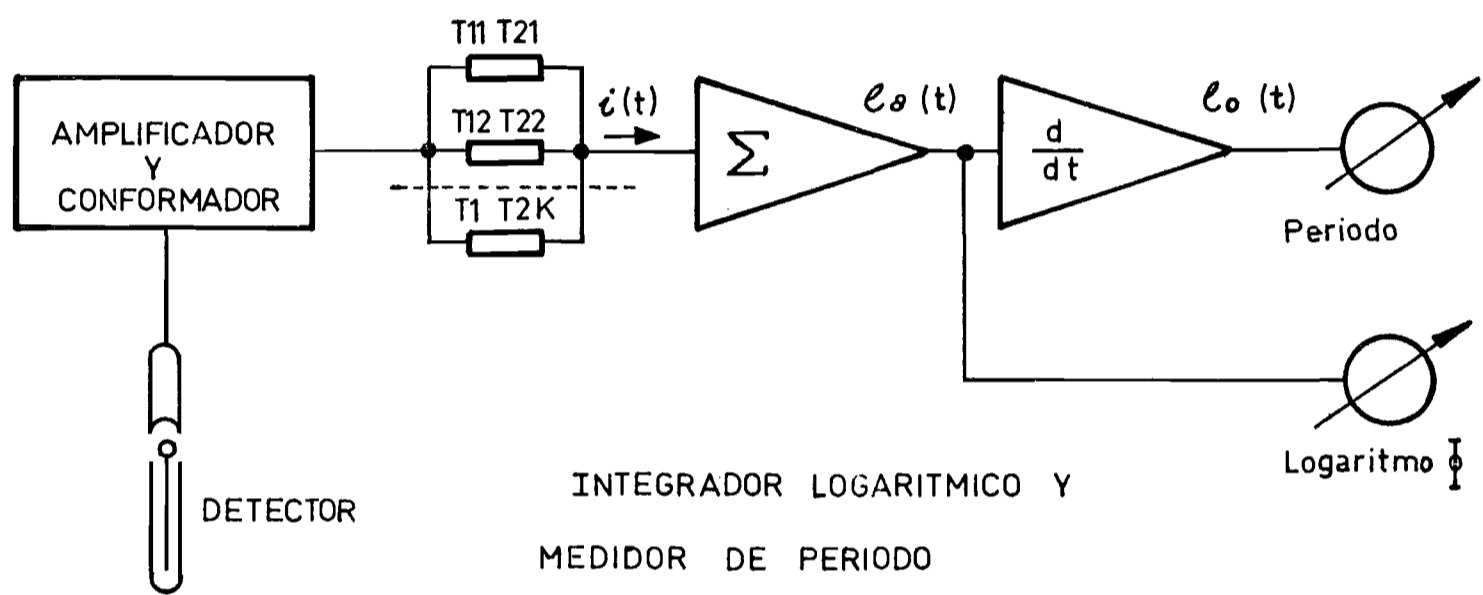


Figura 1

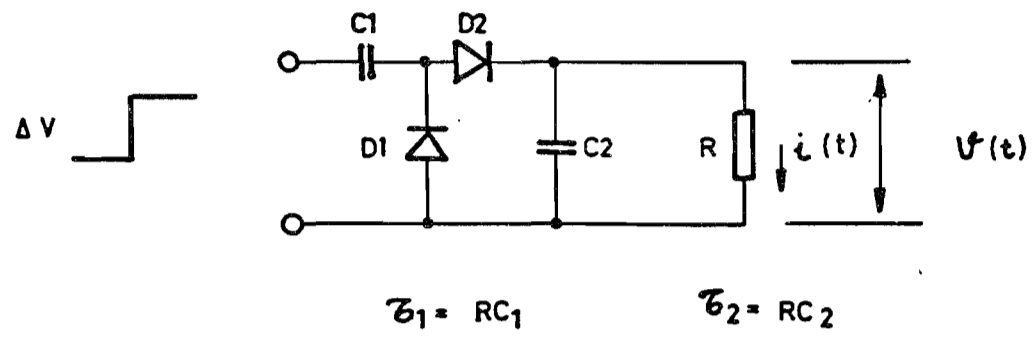


Figura 2

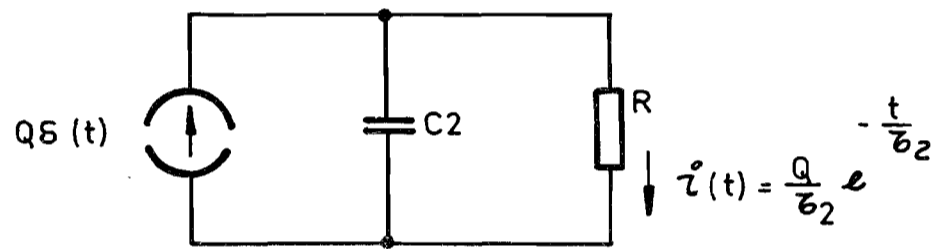


Figura 3

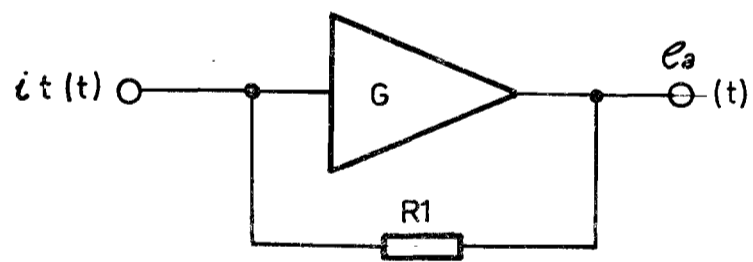


Figura 4

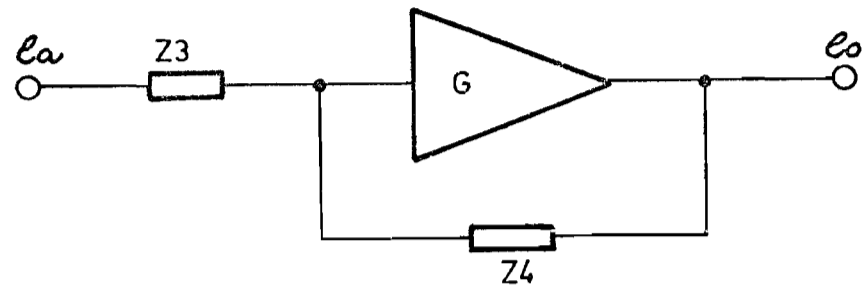


Figura 5

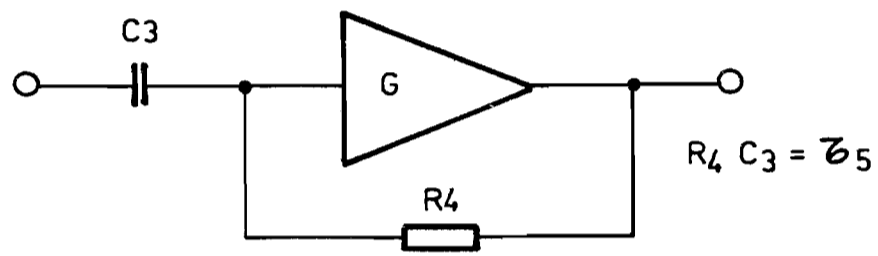


Figura 6

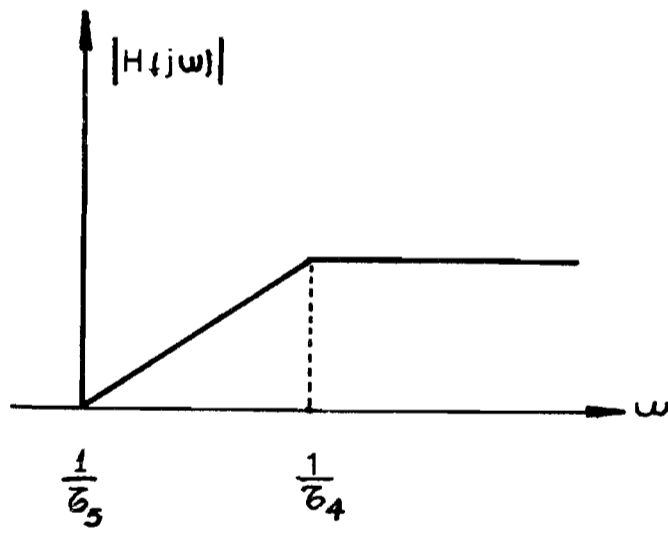


Figura 7

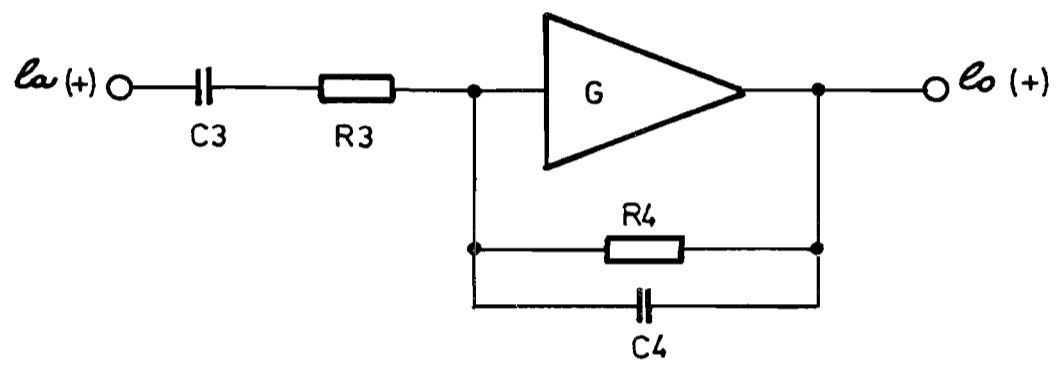


Figura 8

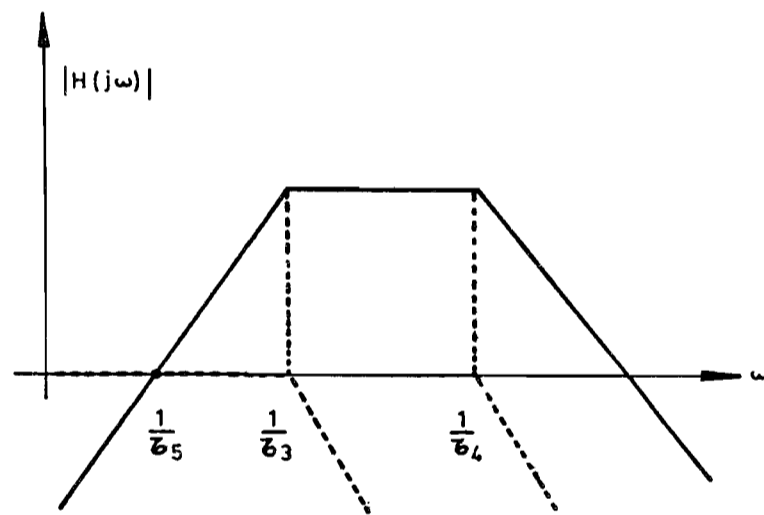


Figura 9

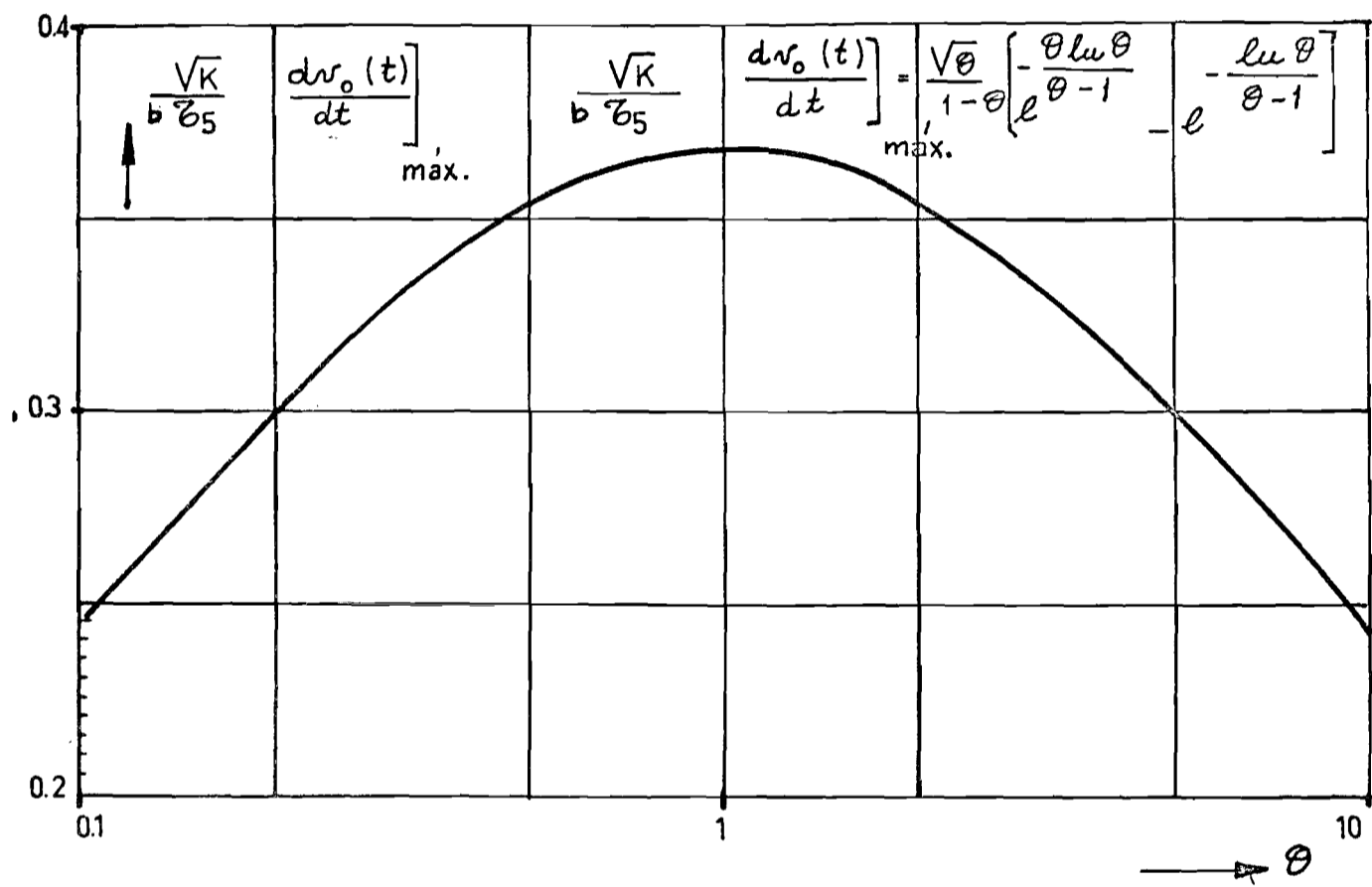


Figura 10

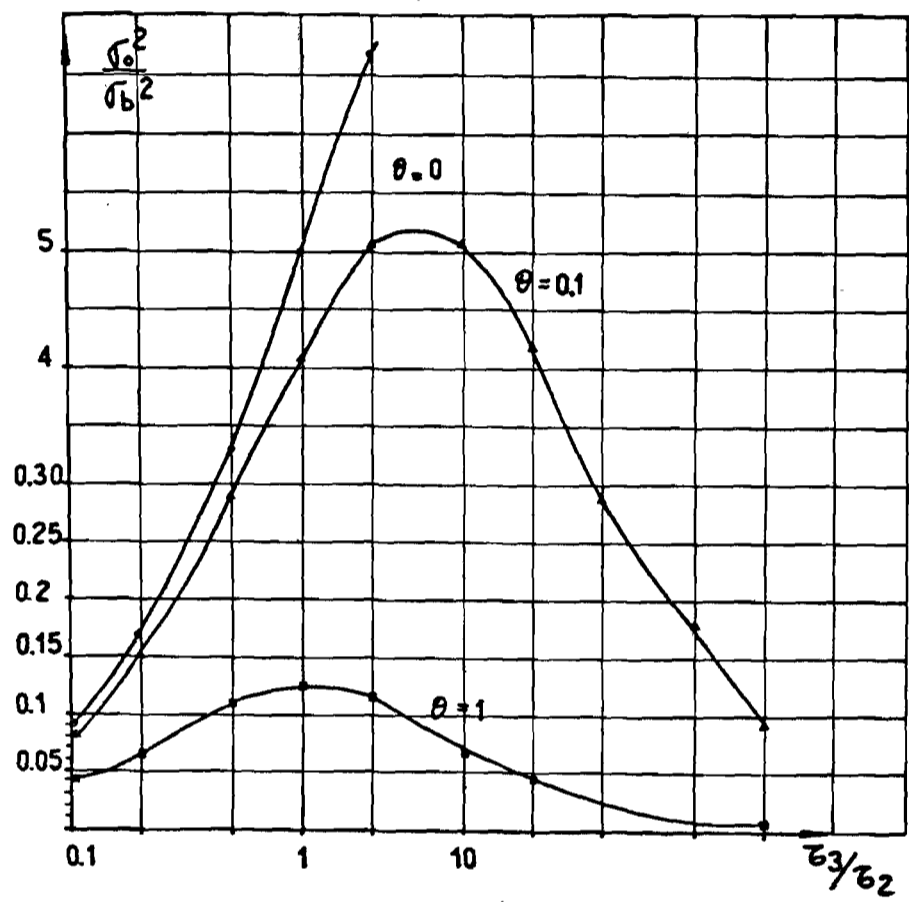


Figura 11

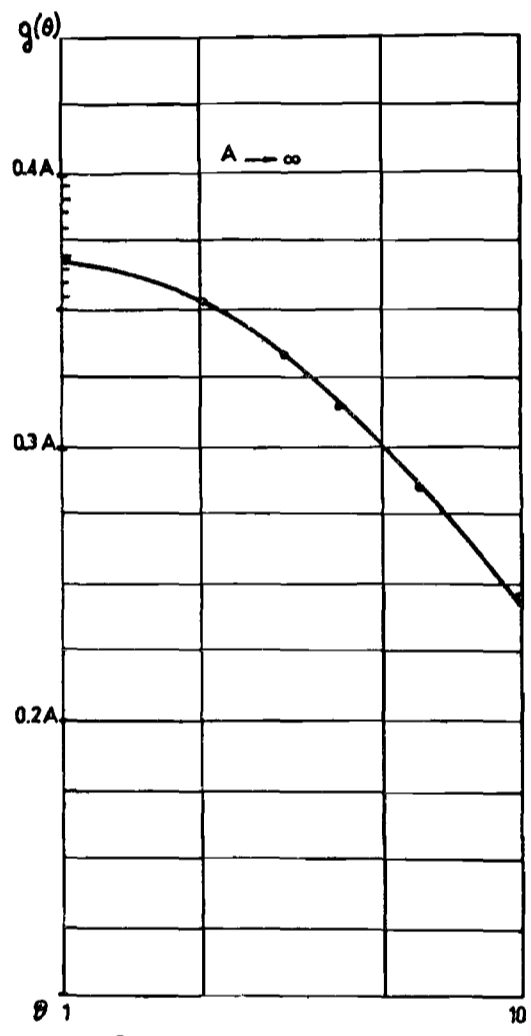


Figura 12

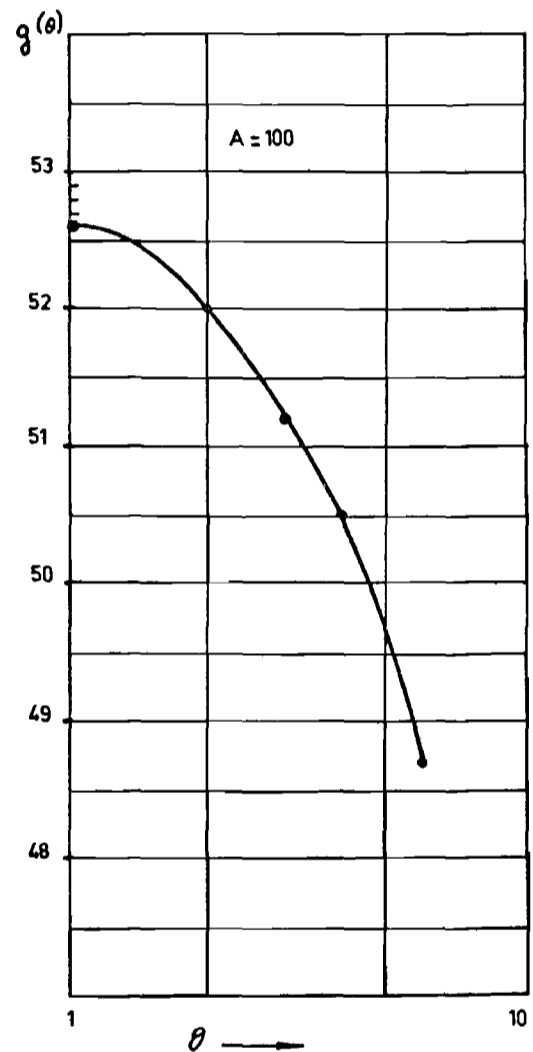


Figura 13

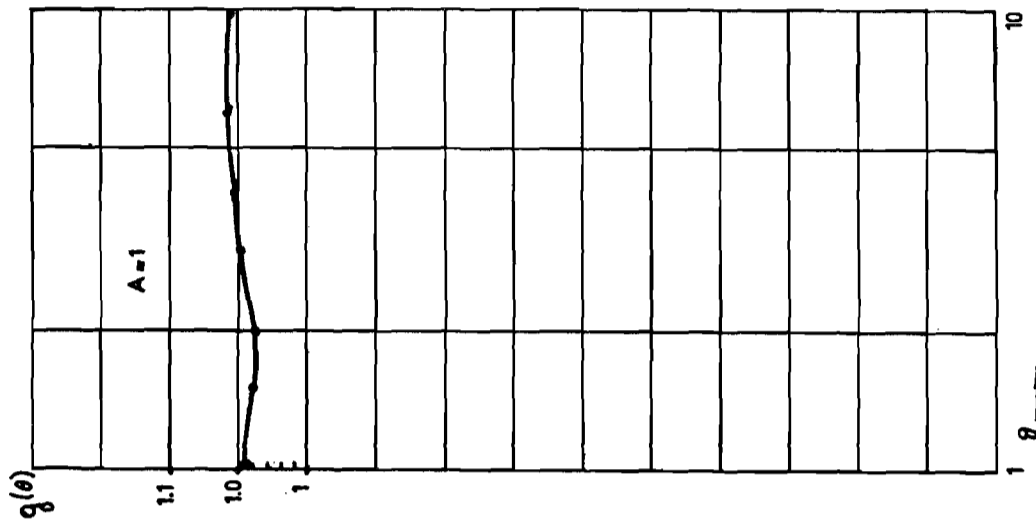


Figure 15

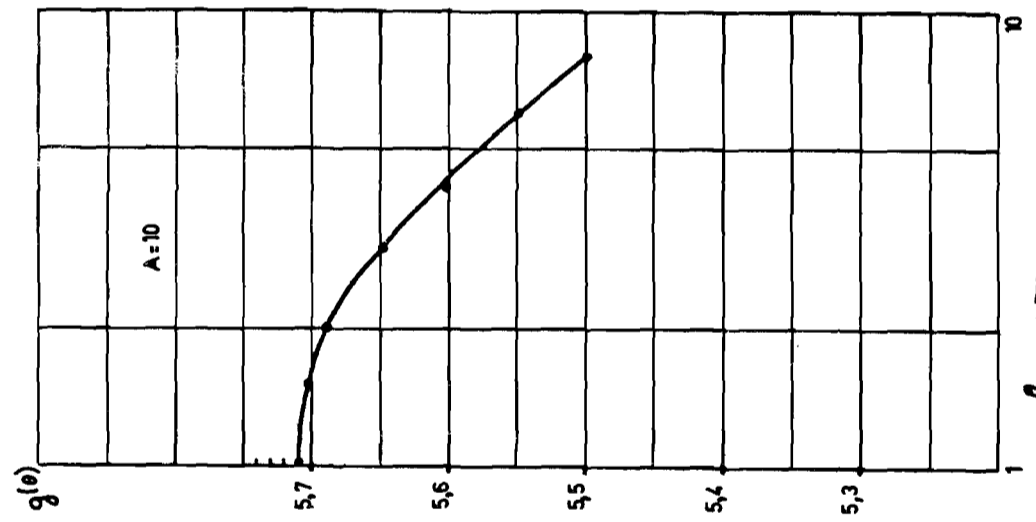


Figure 14

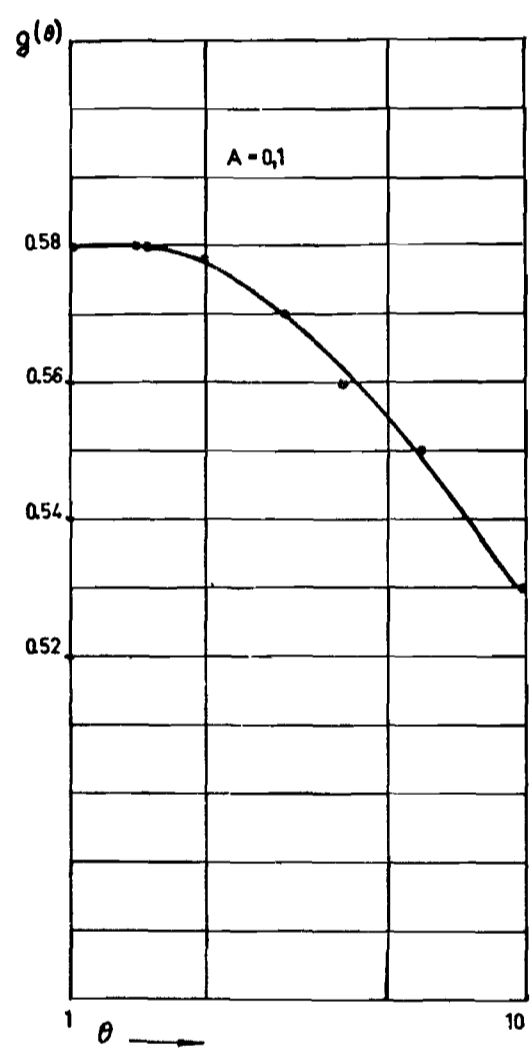


Figura 16

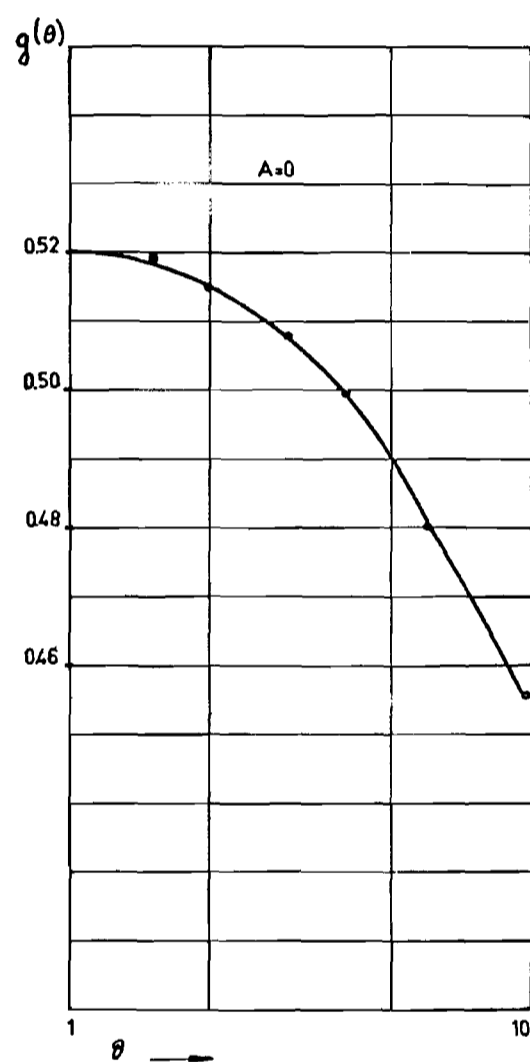


Figura 17

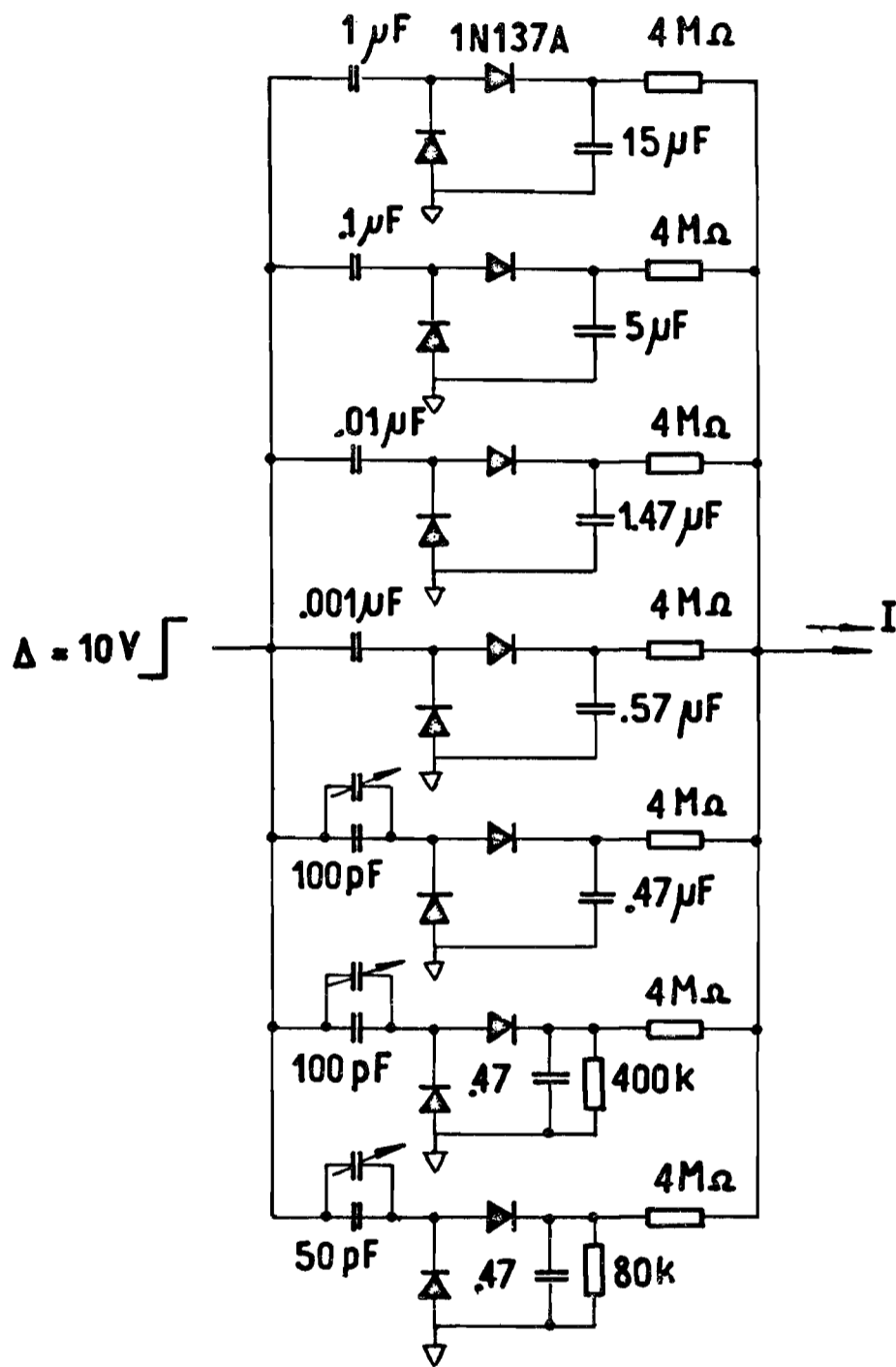


Figura 18

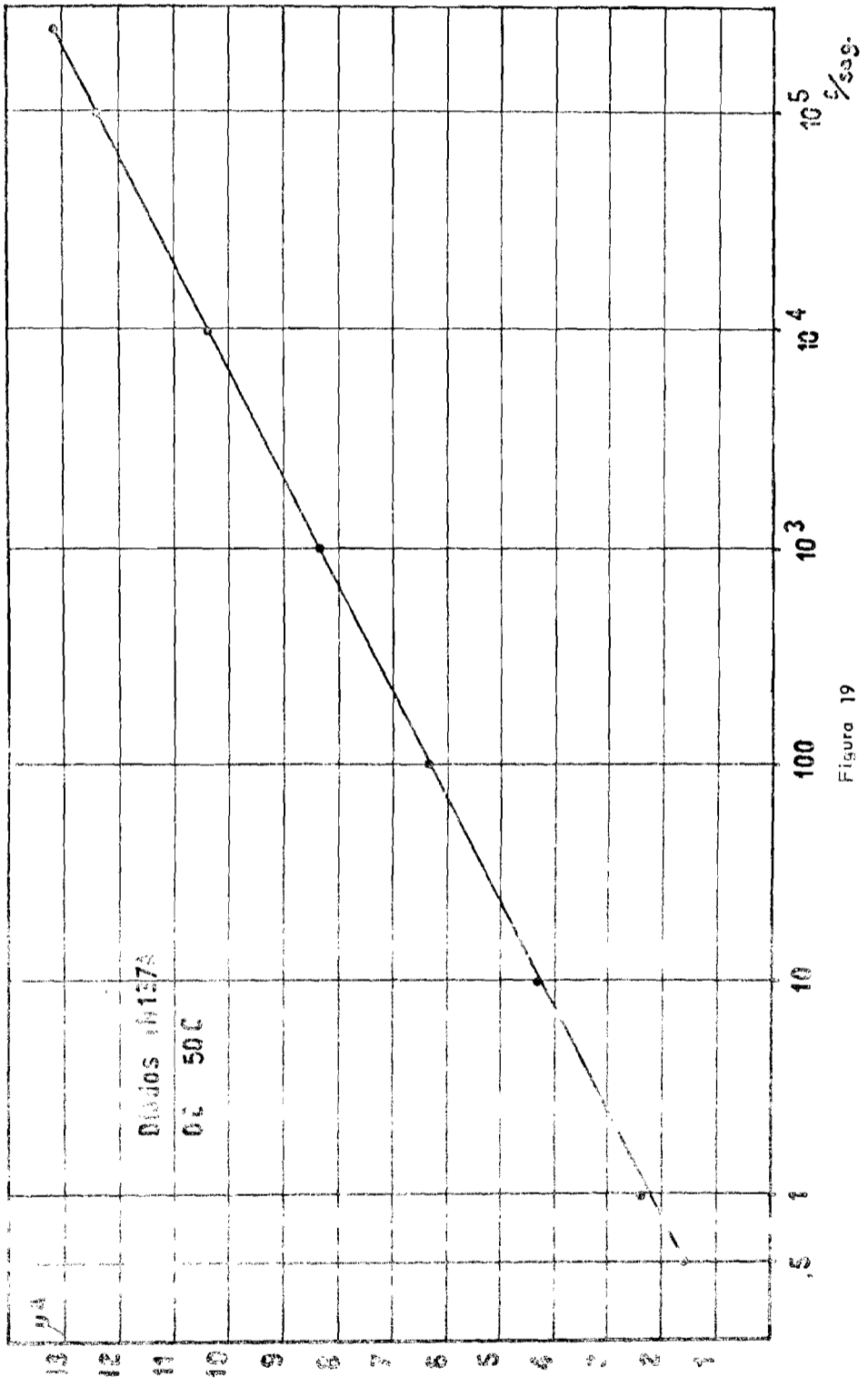


Figura 19

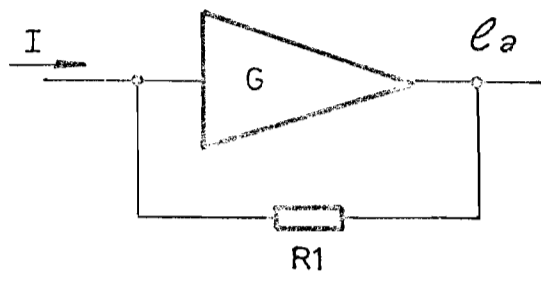


Figura 20

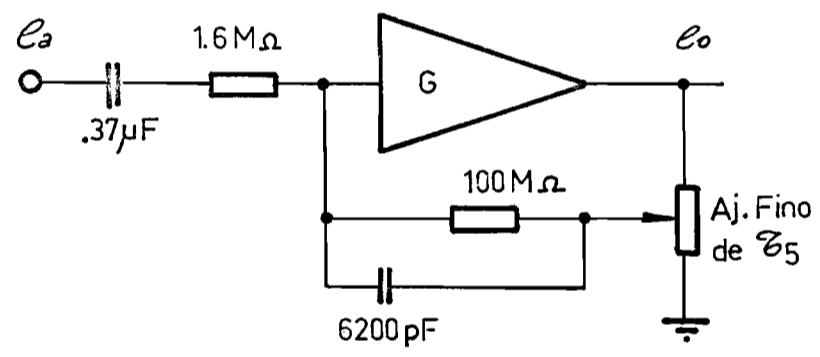


Figura 21

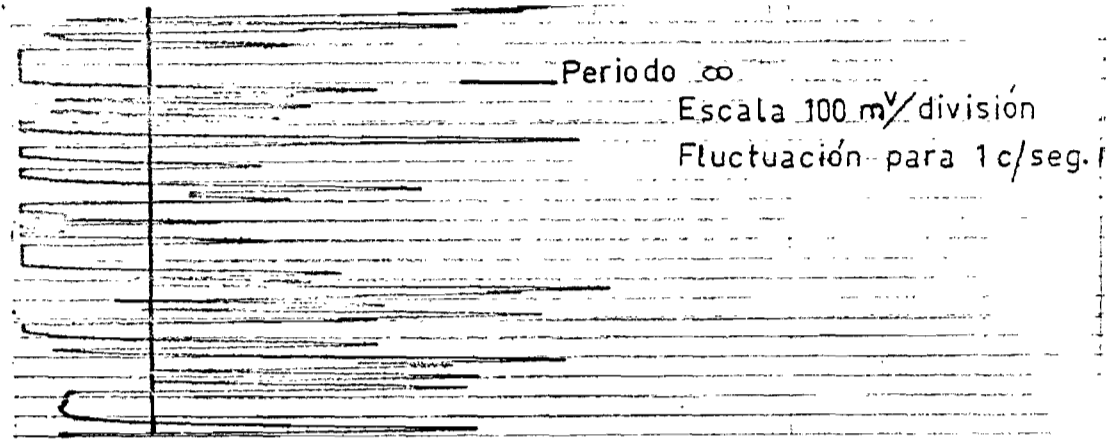


Figura 22

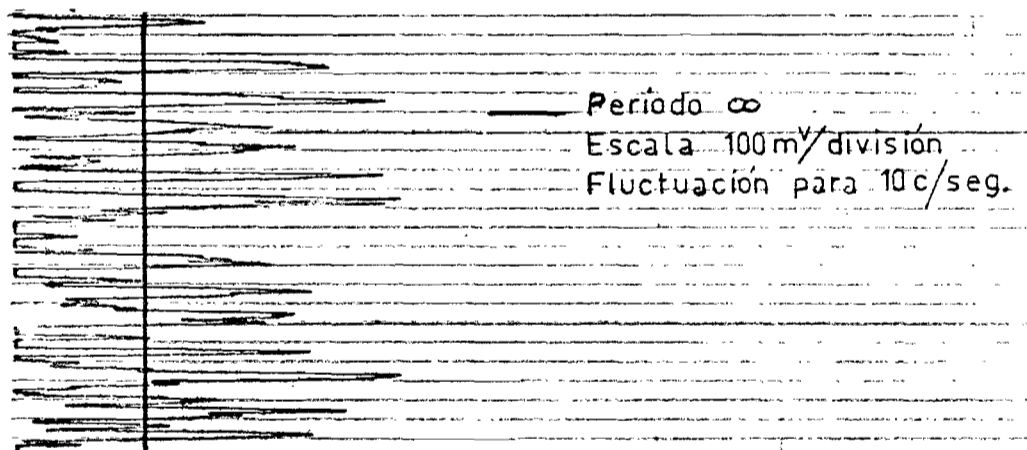


Figura 23

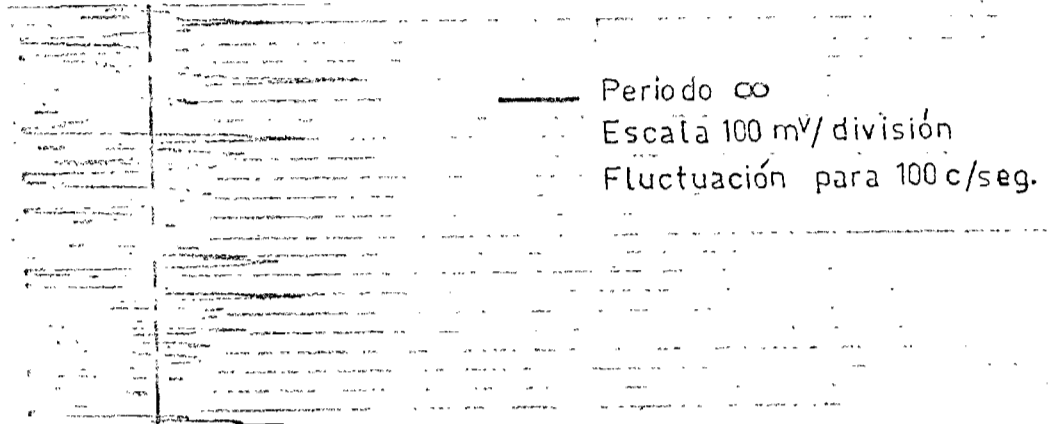


Figura 24

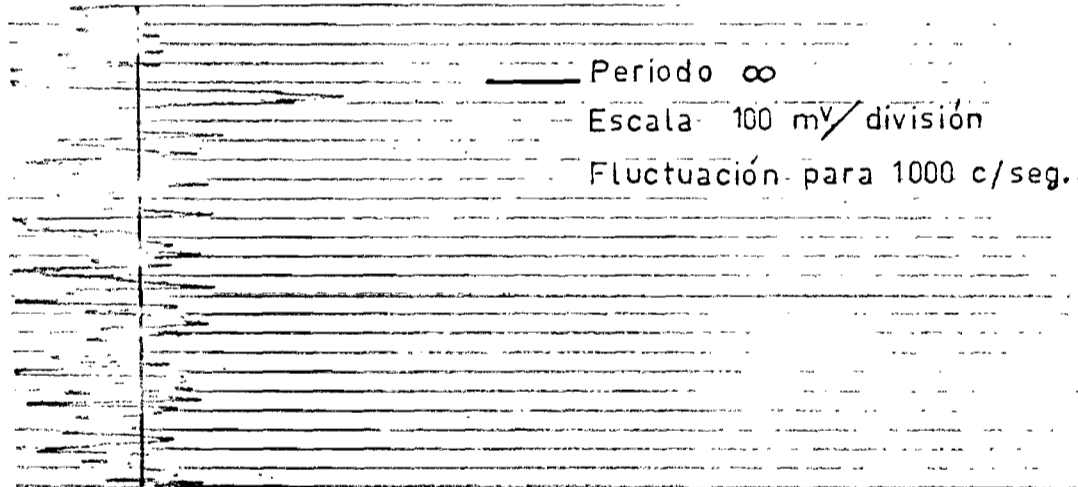


Figura 25

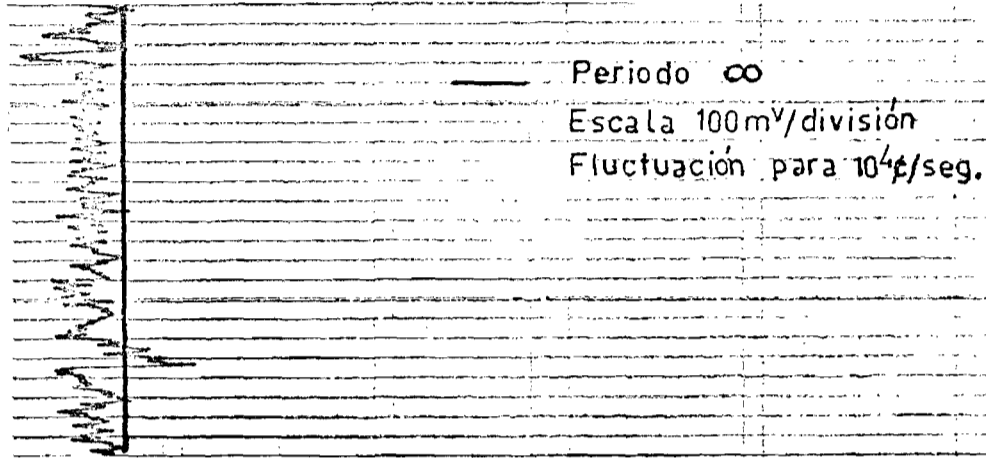


Figura 26

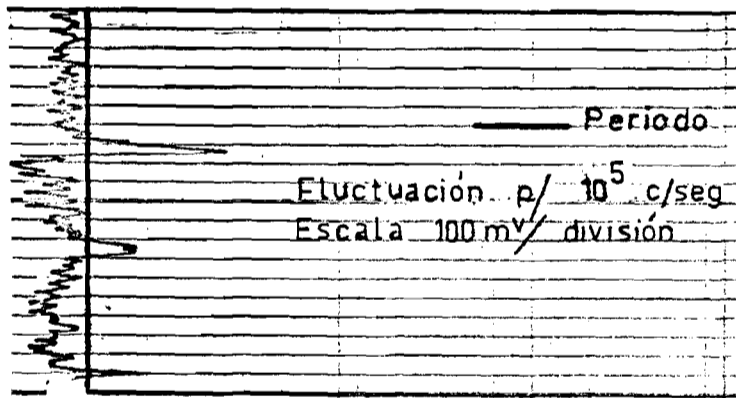


Figura 27

