

08.81.03

C.N.E.L. III/10000	
ARCHIVO HISTÓRICO	
Nº	AÑO
1	1981

08.81.03

COMISION NACIONAL DE ENERGIA ATOMICA

UNIVERSIDAD NACIONAL DE CUYO

INSTITUTO BALSEIRO

CENTRO ATOMICO BARILOCHE

EL METODO DE ELEMENTOS FINITOS Y APROXIMACIONES
VARIACIONALES EN VIBRACIONES LIBRES DE MEMBRANAS
Y PLACAS DELGADAS

Jorge Horacio Barón

Trabajo Especial de Ingeniería Nuclear

Directores: Lic. Gustavo Sánchez Sarmiento

Dr. Sergio Pissanetzky

Dr. Patricio A. A. Laura

San Carlos de Bariloche

Junio de 1981

A mis padres

A mi esposa y a mi hija
María del Carmen

RESUMEN

Para el análisis de vibraciones libres de membranas y placas delgadas, se han aplicado dos tipos de metodologías diferentes de amplio desarrollo en la actualidad: el método de elementos finitos y aproximaciones variacionales. Se ha desarrollado e implementado en FORTRAN un código en elementos finitos muy general para el cálculo de frecuencias y modos de vibración de placas delgadas de geometría y condiciones de contorno arbitrarias. Por otra parte, se ha aplicado el método de Ritz a varias situaciones de interés práctico, comparando para las mismas ambas aproximaciones.

ABSTRACT

Two different methods have been applied to the analysis of free vibrations of membranes and thin plates: the finite element method and the variational approach. Both these methods are widely used at present. A very general finite element code for the calculation of vibration frequencies and modes of thin plates with arbitrary geometry and boundary conditions, has been developed and implemented in FORTRAN. The Ritz method has also been applied to several situations of practical interest, and results have been compared for the two methods.

INDICE

RESUMEN	2
ABSTRACT	3
INDICE	4
1. INTRODUCCION Y OBJETIVOS DEL TRABAJO	6
2. PLANTEO DE LOS PROBLEMAS MATEMATICOS	
2.1. Vibraciones libres de membranas	7
2.2. Vibraciones libres de placas delgadas	8
2.3. Soluciones obtenidas en la bibliografía	10
3. FORMULACION DEL METODO VARIACIONAL PARA VIBRACIONES DE MEMBRANAS	
3.1. Generalidades	13
3.2. Membrana circular con corte secante	13
4. FORMULACION DEL METODO VARIACIONAL PARA VIBRACIONES DE PLACAS	
4.1. Generalidades	18
4.2. Placa circular con corte secante libre	19
4.3. Placa rectangular con corte semicircular libre en un lado	26
4.4. Placa cuadrada con corte en chanfle libre en una esquina	33
5. FORMULACION DEL METODO DE ELEMENTOS FINITOS PARA VIBRACIONES DE MEMBRANAS	
5.1. Generalidades	37
5.2. Discretización de la membrana	38
5.3. Planteo de las condiciones de borde	38
5.4. Obtención del problema de autovalores gralizado.	38
5.5. Resolución del problema de autovalores generalizado	39

5.6. El código AUTEF2	44
5.7. Resultados obtenidos	45
6. FORMULACION DEL METODO DE ELEMENTOS FINITOS PARA VIBRACIONES DE PLACAS DELGADAS	
6.1. Generalidades	47
6.2. Discretización de la placa	48
6.3. Planteo de las condiciones de borde	48
6.4. Obtención del problema de autovalores generalizado	49
6.5. El código VIPLAK1	50
6.6. Resultados obtenidos	52
7. CONCLUSIONES Y DISCUSION DE LOS RESULTADOS	
7.1. Membranas	92
7.2. Placas	92
8. AGRADECIMIENTOS	95
9. BIBLIOGRAFIA	96
10. APENDICES	
Apéndice I	101
Apéndice II	102
Apéndice III	103
Apéndice IV	105
Apéndice V	110
Apéndice VI	111
Apéndice VII	117
Apéndice VIII	118
Apéndice IX	119
Apéndice X	120
11. LISTADO DEL PROGRAMA VIPLAK1	122

1. INTRODUCCION Y OBJETIVOS DEL TRABAJO

Los problemas de dinámica estructural en reactores son muy numerosos y complejos, cubriendo una extensa gama que va desde el área de vibraciones de elementos combustibles, al comportamiento de una planta nuclear en el caso de un sismo.

Como primer paso en la formación de recursos humanos dentro de la Comisión Nacional de Energía Atómica en un campo tan crucial como es el estudio de vibraciones de componentes de reactores nucleares, hemos desarrollado este trabajo de investigación básica, de cierta complejidad y de interés práctico en el Centro Atómico Bariloche, en colaboración con el Instituto de Mecánica Aplicada (SENID - CONICET).

Hemos encarado los problemas con dos metodologías diferentes y de amplia aplicación en la actualidad, como son las técnicas variacionales y el método de elementos finitos. La finalidad de este trabajo no ha sido solamente la resolución de algunos casos de interés, sino sobre todo la familiarización obtenida con los métodos matemáticos y computacionales involucrados. El desarrollo y puesta en operación de un código en elementos finitos muy general para problema de vibraciones libres de placas delgadas, ha constituido posiblemente el mayor beneficio dejado a la Institución.

2. PLANTEO DE LOS PROBLEMAS MATEMATICOS

2.1. Vibraciones libres de membranas

El problema de vibraciones libres de membranas es uno de los fundamentales en el campo de vibraciones de medios continuos, y su ecuación gobernante es una de las más sencillas /1,cap.VI/ :

$$\nabla^2 W(x,y,t) = \frac{1}{c^2} \cdot \frac{\partial^2 W(x,y,t)}{\partial t^2} \quad (1)$$

donde $W(x,y,t)$ representa el desplazamiento de cualquier punto de la membrana en la dirección perpendicular a la misma.

La ecuación (1) obedece a varias hipótesis simplificatorias aplicadas al problema, a saber:

- a) la membrana es perfectamente elástica, homogénea e isótropa
- b) los desplazamientos de cualquier punto en la dirección perpendicular al plano de la membrana son pequeños comparados con sus dimensiones
- c) se desprecian componentes del desplazamiento en el plano de la membrana
- d) los ángulos de rotación de cualquier sección de la membrana son muy pequeños
- e) en cualquier instante del movimiento los esfuerzos existentes en cualquier punto de la membrana son tangentes a la misma en ese punto

Suponiendo además separabilidad de variables:

$$W(x,y,t) = x(x,y) \cdot e^{i\omega t} \quad (2)$$

y reemplazando (2) en (1), obtenemos la conocida ecuación de Helmholtz:

$$\nabla^2 w(x,y) + \frac{\omega^2}{c^2} \cdot w(x,y) = 0 \quad (3)$$

Consideraremos a la membrana fija en todo su contorno, es decir:

$$w[L(x,y)=0] = 0 \quad (4)$$

donde L es la función que describe dicho borde.

2.2. Vibraciones libres de placas delgadas

El problema de las vibraciones libres de placas difiere del de membranas fundamentalmente en el hecho que las primeras tienen masa, y por lo tanto una cierta inercia al movimiento.

La ecuación gobernante de las vibraciones libres de placas se puede obtener directamente de la ecuación de equilibrio establecida por Lagrange, aplicando el principio de D'Alembert y considerando la fuerza de inercia por unidad de área de la placa /1, cap.VIII/. Esa ecuación resulta:

$$D \cdot \nabla^4 w(x,y,t) = -\rho \cdot h \cdot \frac{\partial^2 w}{\partial t^2}(x,y,t) \quad (5)$$

donde: D es la rigidez a la flexión de la placa

$$D = \frac{E \cdot h^3}{12(1-\mu)}$$

E es el módulo de Young

h es el espesor de la placa

μ es el factor de Poisson (usaremos siempre $\mu=0,3$)

ρ es la densidad del material de la placa

∇^4 es el operador biarmónico

La ecuación (5) obedece a las siguientes hipótesis simplificativas:

a) la placa es perfectamente elástica, homogénea e isotrópica

b) los desplazamientos perpendiculares al plano de la placa son pequeños comparados con sus dimensiones

c) se desprecian componentes del desplazamiento en el plano de la placa

d) la influencia de las tensiones de corte sobre la deformación transversal de la placa es despreciable

Suponiendo además separabilidad de variables, reemplazando (2) en (5) obtenemos:

$$D \cdot \nabla^4 w(x,y) - \omega^2 \cdot \rho \cdot h \cdot w(x,y) = 0 \quad (6)$$

Considerando a la placa elásticamente restringida contra rotación en los bordes no libres, las condiciones de contorno para la ecuación (6) serán /2/:

$$w[L(x,y)=0] = 0 \quad (7)$$

$$\frac{\partial w}{\partial n}[L(x,y)=0] = \phi \cdot \left(\frac{\partial^2 w}{\partial n^2} + \mu \cdot \frac{\partial^2 w}{\partial \theta^2} \right) \quad (8)$$

donde: n es la normal al borde en cuestión

θ es la tangente al borde en cuestión

ϕ es el coeficiente de flexibilidad rotacional del borde en cuestión

El coeficiente de flexibilidad rotacional ϕ puede tomar valores desde cero a infinito, correspondiendo los dos casos extremos a borde rígidamente empotrado o simplemente apoyado respectivamente.

2.3. Soluciones obtenidas en la bibliografía

Existen en general soluciones analíticas exactas de los problemas mencionados para casos de geometrías sencillas (círculos, rectángulos, etc.). Veremos las que nos interesan para nuestro estudio.

Para membranas circulares, en /1/ se demuestra que las frecuencias de vibraciones libres están dadas por:

$$\frac{\omega_n \cdot a}{c} = \alpha_n \quad (n=0, 1, 2, 3, \dots) \quad (9)$$

donde: n es el modo de vibración considerado ($n=0$; modo fundamental)

a es el radio de la membrana

α_n son los ceros de la función J_n de Bessel de primera especie:

$$\begin{aligned} \alpha_0 &= 2.4048 \\ \alpha_1 &= 3.8317 \\ \alpha_2 &= 5.1356 \\ \alpha_3 &= 6.3802 \end{aligned} \quad (10)$$

Este resultado se aplica al caso en que la membrana no ten

ga bordes libres (ver ecuación (4)).

No hemos encontrado en la bibliografía solución analítica al problema de la membrana circular con corte secante.

Para el problema de placas circulares también en /1/ se obtiene una solución analítica en el caso de borde rígidamente empotrado:

$$J_n(\lambda.a).I'_n(\lambda.a) = J'_n(\lambda.a).I_n(\lambda.a) \quad (11)$$

donde: $\lambda = (\omega^2 \cdot \frac{1}{D} \cdot \rho \cdot h)^{1/4}$

a es el radio de la placa

' indica derivada primera

I_n son las funciones de Bessel modificadas de primera especie

Para la otra condición de contorno que nos interesa, o sea el caso de placa simplemente apoyada, encontramos una solución analítica en /5/:

$$\frac{J_{n+1}(\lambda.a)}{J_n(\lambda.a)} + \frac{I_{n+1}(\lambda.a)}{I_n(\lambda.a)} = \frac{2.\lambda.a}{1-\mu} \quad (12)$$

Para la solución de estas ecuaciones se utilizan en general programas de computadora en doble precisión que extraen las raíces correspondientes obteniendo así las soluciones "exactas".

El caso de placas circulares con corte secante libre no lo hemos encontrado en la bibliografía.

En cuanto a las placas rectangulares, su estudio analítico de los modos de vibración está estudiado extensamente en la bibliografía /1,10/ utilizando como función solución un desarrollo en serie de senos, cosenos, senos hiperbólicos y co

senos hiperbólicos, en la cual se determinan sus coeficientes a partir de las condiciones de borde (rígidamente empotrados, simplemente apoyados o libres).

El caso de placa rectangular con corte semicircular en un lado o con corte en chanfle en una esquina, no lo hemos encontrado en la bibliografía.

El problema de bordes elásticamente restringidos contra rotación está tratado en /3,11-13/ para placas rectangulares, utilizando métodos variacionales y, en general, aproximaciones polinómicas.

En el caso de placas circulares, el problema de bordes elásticamente restringidos contra rotación está tratado en /14-16/ utilizando también métodos variacionales.

También encontramos soluciones por el método de elementos finitos para las placas circulares /17-19/, así como también para placas rectangulares /23-25,27/.

3. FORMULACION DEL METODO VARIACIONAL PARA VIBRACIONES DE MEMBRANAS

3.1. Generalidades

Se demuestra en cálculo variacional que la resolución de la ecuación de Helmholtz (3) equivale a la minimización del funcional /21/:

$$J(w) = \iint_D \left(\nabla^2 w - \frac{\omega^2}{c^2} \cdot w^2 \right) \cdot dD \quad (13)$$

restringido a las condiciones de borde correspondientes (4).

El método que usaremos (denominado método de Ritz) consiste en aproximar la función desplazamiento w por una suma de funciones de las variables espaciales (llamadas "funciones base"), que satisfacen idénticamente las condiciones de contorno; y luego minimizar el funcional (13) solamente en el espacio de funciones generado por estas funciones base. Obtenemos así un sistema de ecuaciones lineales homogéneas en los citados coeficientes, y dependientes del parámetro de frecuencia ω .

Para que el sistema posea solución no-trivial, debe ser nulo su determinante, y de cuya condición se obtienen las raíces ω del mismo. Estos son los valores aproximados de las frecuencias de vibraciones libres de la membrana.

3.2. Membrana circular con corte secante

La membrana que estudiaremos está representada en la figura 1

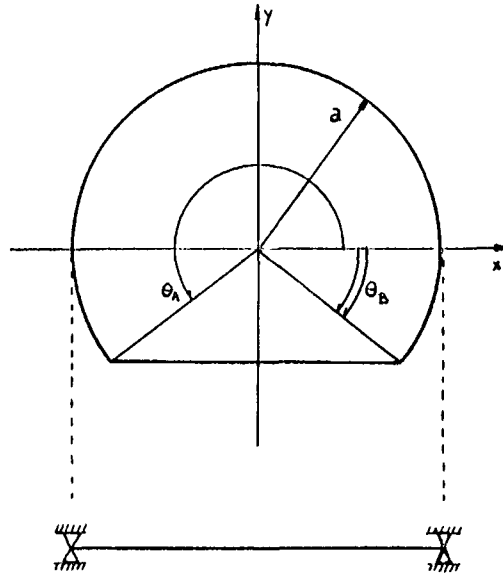


FIGURA 1

Su borde fijo en el plano (x,y) es circular de radio a con un corte secante cuya posición queda definida por el ángulo θ_B .

Para aproximar la función desplazamiento w en todo punto de la membrana utilizaremos los siguientes pares de funciones $w_1(r,\theta)$ y $w_2(r,\theta)$ que satisfacen idénticamente las condiciones de contorno:

$$\begin{aligned} \text{Caso I : } w_1 &= (r^2 - r) \cdot \text{sen}\theta - (r - a) \cdot \text{sen}\theta_B \\ w_2 &= r^2 \cdot \text{sen}\theta \cdot w_1 \end{aligned} \quad (14)$$

$$\begin{aligned} \text{Caso II : } w_1 &= (r^2 - r) \cdot \text{sen}\theta - (r - a) \cdot \text{sen}\theta_B \\ w_2 &= r \cdot \text{sen}\theta \cdot w_1 \end{aligned} \quad (15)$$

$$\begin{aligned} \text{Caso III: } w_1 &= (r \cdot \text{sen}\theta - a \cdot \text{sen}\theta_B) \cdot J_0\left(\frac{\alpha_0}{a} \cdot r\right) \\ w_2 &= r^2 \cdot \text{sen}\theta \cdot w_1 \end{aligned} \quad (16)$$

$$\begin{aligned} \text{Caso IV : } w_1 &= (r.\text{sen}\theta - a.\text{sen}\theta_B) \cdot J_0\left(\frac{\omega_0}{a} \cdot r\right) \\ w_2 &= r.\text{sen}\theta \cdot w_1 \end{aligned} \quad (17)$$

Aplicando el método enunciado, aproximamos la función w por la suma:

$$w = A_1 \cdot w_1 + A_2 \cdot w_2 \quad (18)$$

e introducimos esta expresión en la ecuación (13). Derivando ahora (13) con respecto a los coeficientes de (18) y anulando estas derivadas obtenemos el siguiente sistema de ecuaciones:

$$\begin{pmatrix} A_{11} - \Omega^2 \cdot B_{11} & A_{12} - \Omega^2 \cdot B_{12} \\ A_{12} - \Omega^2 \cdot B_{12} & A_{22} - \Omega^2 \cdot B_{22} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} A_1 \\ A_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (19)$$

donde:

$$\Omega = a \cdot \omega / c$$

y las expresiones de A_{ij} , y B_{ij} figuran en el apéndice I.

Para que el sistema de ecuaciones (19) tenga solución no trivial, debe ser nulo su determinante:

$$\begin{vmatrix} A_{11} - \Omega^2 \cdot B_{11} & A_{12} - \Omega^2 \cdot B_{12} \\ A_{12} - \Omega^2 \cdot B_{12} & A_{22} - \Omega^2 \cdot B_{22} \end{vmatrix} = 0 \quad (20)$$

lo cual constituye una ecuación cuadrática en Ω^2 . Sus dos raíces, autovalores del problema (19), son valores aproximados de las frecuencias de vibración (adimensionalizadas), Ω_{00} y Ω_{01} , correspondientes al modo fundamental de vibración y al primer armónico respectivamente.

También hemos calculado la frecuencia Ω_{00}^* que corresponde a aproximar w mediante la primera función w_1 solamente.

Obtuvimos las siguientes frecuencias de vibración para la membrana de la figura 1:

θ_B	CASO	Ω_{00}^*	Ω_{00}	Ω_{01}	
-90°	I	2.611	2.563	4.970	exactos: $\Omega_{00} = 2.4048$ $\Omega_{01} = 3.8317$
	II	2.611	2.539	4.212	
	III	2.586	2.517	4.953	
	IV	2.586	2.476	4.197	
-70°	I	2.630	2.581	5.033	
	II	2.630	2.555	4.258	
	III	2.606	2.536	5.015	
	IV	2.606	2.493	4.242	
-50°	I	2.702	2.654	5.261	
	II	2.702	2.628	4.441	
	III	2.686	2.616	5.248	
	IV	2.686	2.569	4.424	
-30°	I	2.898	2.856	5.739	
	II	2.898	2.840	4.924	
	III	2.896	2.835	5.740	
	IV	2.896	2.800	4.912	
-10°	I	3.401	3.367	6.663	
	II	3.401	3.373	6.058	
	III	3.405	3.361	6.663	
	IV	3.405	3.357	6.029	
$+10^\circ$	I	4.577	4.556	8.849	
	II	4.577	4.570	8.482	
	III	4.561	4.543	8.784	
	IV	4.561	4.553	8.417	

TABLA 1

Estas frecuencias las obtuvimos para seis valores distintos del ángulo θ_B y para cada uno de los cuatro casos ci
tados.

Observamos en la tabla precedente los siguientes resulta
dos:

- a) las frecuencias de vibración se hacen más altas a medida que la membrana se hace más pequeña, lo que coincide con el razonamiento físico
- b) al usar dos funciones base la frecuencia fundamental Ω_{00} resulta menor que Ω_{00}^* , calculada con una sola función base; este resultado es razonable ya que el método de Ritz provee valores que son "cotas superiores" para las frecuencias
- c) comparando los resultados para la membrana comple
ta con los valores exactos de las frecuencias, se ve que se cumple la conclusión del párrafo anterior, y además vemos que la diferencia entre ambos es menor al 10% para el modo fundamental
- d) las funciones base del caso IV nos dan la mejor precisión dentro de los casos estudiados

4. FORMULACION DEL METODO VARIACIONAL PARA VIBRACIONES DE PLACAS

4.1. Generalidades

Para la solución del problema de vibraciones de placas, procedemos de una forma similar a la descrita en la sección 3. Aproximamos la función desplazamiento transversal de la placa w por una suma de funciones base en las variables espaciales, que satisfacen idénticamente las condiciones de contorno (7) y (8); cada una de las cuales está afectada de un cierto coeficiente.

La energía máxima de deformación de la placa está dada por /13/:

$$E = \frac{D}{2} \cdot \iint_S \left\{ \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right)^2 - 2 \cdot (1-\mu) \cdot \left[\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \cdot \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} - \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \right)^2 \right] \right\} \cdot dx \cdot dy +$$

$$+ \frac{D}{2} \cdot \int_L \left. \frac{\partial^2 w}{\partial n^2} \right|_L \cdot \left. \frac{\partial w}{\partial n} \right|_L \cdot dL \quad (23)$$

donde s es la superficie de la placa en cuestión y L su perímetro. A su vez, la expresión de la energía cinética máxima de la placa es /13/:

$$T = \frac{1}{2} \cdot \rho \cdot h \cdot \omega^2 \cdot \iint_S w^2 \cdot dx \cdot dy \quad (24)$$

Reemplazando entonces la solución aproximada de w en las expresiones (23) y (24) y derivando la energía total de la placa /13/:

$$F = E - T \quad (25)$$

con respecto a cada uno de los coeficientes de las funciones base de w (método de Ritz), obtenemos un sistema de ecuaciones lineales homogéneas en los citados coeficientes. Nuevamente, aplicando la condición de no trivialidad de la solución del sistema, calculamos las raíces de ese determinante, y así obtenemos los valores aproximados de las frecuencias normales de vibración de la placa en cuestión.

4.2. Placa circular con corte secante libre

La placa que estudiaremos está representada en la figura 2:

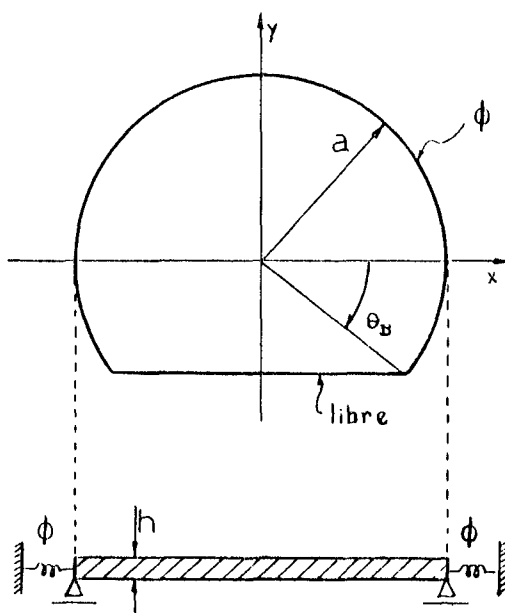


FIGURA 2

sujeta a las siguientes condiciones de contorno (en coordenadas polares):

$$w(r=a, \theta) = 0$$

(25')

$$\frac{\partial w}{\partial r}(r=a, \theta) = \phi \cdot \frac{\partial^2 w}{\partial r^2}$$

Dada la geometría del problema, nos conviene expresar las ecuaciones (23) y (24) en coordenadas polares:

$$E = \frac{D}{2} \iint_S \left\{ \left(\frac{\partial^2 w}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial w}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \cdot \frac{\partial^2 w}{\partial \theta^2} \right)^2 - 2 \cdot (1-\mu) \cdot \left[\frac{1}{r} \cdot \frac{\partial^2 w}{\partial r^2} \cdot \left(\frac{\partial w}{\partial r} + \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial^2 w}{\partial \theta^2} \right) - \left(\frac{1}{r^2} \cdot \frac{\partial w}{\partial \theta} - \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial^2 w}{\partial r \partial \theta} \right)^2 \right] \right\} \cdot r \cdot dr \cdot d\theta + \frac{D}{2} \int_0^{2\pi} \left. \frac{\partial w}{\partial r} \cdot \frac{\partial^2 w}{\partial r^2} \right|_a \cdot d\theta \quad (26)$$

$$T = \frac{1}{2} \cdot \rho \cdot h \cdot \omega^2 \cdot \iint_S w^2 \cdot r \cdot dr \cdot d\theta \quad (27)$$

Estudiaremos dos casos, a saber:

Caso I : dos funciones base para w

$$w_1 = \alpha_1 \cdot r^4 + \beta_1 \cdot r^2 + 1 \quad (28)$$

$$w_2 = (\alpha_2 \cdot r^6 + \beta_2 \cdot r^4 + r^2) \cdot \sin \theta \quad (29)$$

$$w = A \cdot w_1 + B \cdot w_2 \quad (30)$$

Los coeficientes α_i y β_i se determinan de manera que ambas funciones w_1 y w_2 satisfagan las condiciones de borde (25') y sus expresiones están tabuladas en el apéndice II. Observemos que las condiciones de borde enunciadas corresponden a la placa circular completa, y no corresponden necesariamente a las del borde libre.

Introducimos la expresión aproximada (30) en las ecuacion

nes (26) y (27) y utilizamos el mismo método descrito en la sección 3.2. El determinante resultante, análogo al (20) es el siguiente:

$$\begin{vmatrix} K_1 - \Omega_{11}^2 & J_{12} \\ K_2 - \Omega_{12}^2 & J_{13} \end{vmatrix} = 0 \quad (31)$$

cuyas raíces Ω_{00} y Ω_{01} están relacionadas con las frecuencias normales de vibración aproximadas de la placa mediante:

$$\Omega_{ij} = \sqrt{\beta \cdot h/D} \cdot \omega_{ij} \cdot a^2 \quad (32)$$

Las expresiones de los K_i y J_i de (31) se encuentran en el apéndice III.

En este caso, también usaremos la aproximación de una sola función base (w_1) para calcular un autovalor de frecuencia Ω_{00}^* como:

$$\Omega_{00}^* = \sqrt{K_{11}/J_{11}} \quad (33)$$

Caso II : cuatro funciones base para w

$$w_1 = \alpha_1 \cdot r^4 + \beta_1 \cdot r^2 + 1 \quad (34)$$

$$w_2 = (\alpha_2 \cdot r^6 + \beta_2 \cdot r^4 + r^2) \cdot \text{sen} \theta \quad (35)$$

$$w_3 = (\alpha_3 \cdot r^8 + \beta_3 \cdot r^6 + r^4) \cdot \text{sen} \theta \quad (36)$$

$$w_4 = (\alpha_4 \cdot r^{10} + \beta_4 \cdot r^8 + r^6) \cdot \text{sen} \theta \quad (37)$$

$$w = A.w_1 + B.w_2 + C.w_3 + D.w_4 \quad (38)$$

Análogamente al caso anterior, a los coeficientes α_i y β_i los determinamos de manera que satisfagan idénticamente las condiciones de contorno (25') y sus expresiones están tabuladas en el apéndice II.

Del mismo modo que en el caso I, estas funciones base satisfacen las condiciones de borde de la placa circular completa, pero no necesariamente las del borde secante libre.

En este caso, y siguiendo la metodología usada anteriormente, obtenemos el siguiente determinante:

$$\begin{vmatrix} K_1 - \Omega^2 J_{37} & K_5 - \Omega^2 J_{41} & K_6 - \Omega^2 J_{42} & K_7 - \Omega^2 J_{43} \\ & K_2 - \Omega^2 J_{38} & K_8 - \Omega^2 J_{44} & K_9 - \Omega^2 J_{45} \\ \text{simétrico} & & K_3 - \Omega^2 J_{39} & K_{10} - \Omega^2 J_{46} \\ & & & K_4 - \Omega^2 J_{40} \end{vmatrix} = 0 \quad (39)$$

Cuyas raíces $\Omega_{00}, \Omega_{01}, \Omega_{10}$ y Ω_{11} están relacionadas con las frecuencias normales de vibración aproximadas de la placa mediante (32).

Las expresiones de los K_i y los J_i están tabuladas en el apéndice IV.

Hemos calculado las frecuencias normales de vibración para la placa de la figura 1 para seis valores diferentes de θ_B , y para seis valores diferentes del coeficiente de constreñimiento ϕ utilizando una, dos y cuatro funciones base. Los resultados se encuentran en las seis tablas siguientes.

PLACA CIRCULAR CON CORTE SECANTE LIBRE

θ_B	$\frac{\phi \cdot D}{a}$	nº de func. base	Ω_{00}	Ω_{01}	Ω_{10}	Ω_{11}
-90°	0.0	1	10.328			
		2	10.328	30.741		
		4	10.328	25.413	74.543	210.38
	0.01	1	10.129			
		2	10.129	30.134		
		4	10.129	24.924	73.078	205.24
	0.1	1	8.831			
		2	8.831	26.370		
		4	8.831	22.112	65.955	180.48
-90°	1.0	1	6.087			
		2	6.087	21.107		
		4	6.087	18.042	59.694	165.76
	10.0	1	5.092			
		2	5.092	19.869		
		4	5.092	17.024	58.608	163.67
	100.0	1	4.962			
		2	4.962	19.728		
		4	4.962	16.906	58.491	163.49
-90°	∞	1	4.947			
		2	4.947	19.713		
		4	4.947	16.893	58.475	163.44

-70°	0.0	1	10.211			
		2	10.199	29.509		
		4	10.309	24.921	73.590	200.17
	0.01	1	10.098			
		2	10.083	28.768		
		4	10.074	24.369	71.976	195.06
	0.1	1	8.628			
		2	8.602	25.028		
		4	8.648	21.451	64.937	174.86
-70°	1.0	1	5.978			
		2	5.968	20.718		
		4	5.975	17.803	59.490	163.66
	10.0	1	5.070			
		2	5.069	19.797		
		4	5.075	16.979	58.598	162.10
	100.0	1	4.954			
		2	4.954	19.695		
		4	4.960	16.886	58.498	161.94
-70°	∞	1	4.941			
		2	4.941	19.683		
		4	4.947	16.875	58.490	161.94

PLACA CIRCULAR CON CORTE SECANTE LIBRE

θ_B	$\frac{\phi \cdot D}{a}$	nº de func. base	Ω_{00}	Ω_{01}	Ω_{10}	Ω_{11}
-50°	0.0	1	9.750			
		2	9.612	27.594		
		4	9.610	23.933	72.106	195.06
	0.01	1	9.547			
		2	9.408	27.037		
		4	9.406	23.463	70.731	190.64
	0.1	1	8.281			
		2	8.168	23.976		
		4	8.166	20.922	64.567	170.04
	1.0	1	5.833			
		2	5.812	20.142		
		4	5.810	17.660	59.414	157.62
	10.0	1	5.011			
		2	5.006	19.298		
		4	4.004	16.917	58.536	155.86
	100.0	1	4.907			
		2	4.904	19.204		
		4	4.902	16.834	58.438	155.68
	∞	1	4.895			
		2	4.892	19.193		
		4	4.890	16.824	58.428	155.66

-30°	0.0	1	9.365			
		2	9.093	28.058		
		4	9.079	24.531	72.620	198.24
	0.01	1	9.183			
		2	8.914	27.558		
		4	8.900	24.087	71.230	193.55
	0.1	1	8.029			
		2	7.805	24.524		
		4	7.794	21.629	64.686	170.92
	1.0	1	5.721			
		2	5.621	20.374		
		4	5.620	18.284	58.960	157.15
	10.0	1	4.926			
		2	4.861	19.427		
		4	4.860	17.495	57.967	155.19
	100.0	1	4.824			
		2	4.764	19.321		
		4	4.763	17.405	57.861	155.01
	∞	1	4.813			
		2	4.753	19.309		
		4	4.751	17.395	57.848	154.97

PLACA CIRCULAR CON CORTE SECANTE LIBRE

θ_B	$\frac{\phi \cdot D}{a}$	nº de func. base	Ω_{00}	Ω_{01}	Ω_{10}	Ω_{11}
-10°	0.0	1	9.620			
		2	9.309	34.529		
		4	9.158	29.508	75.821	208.78
	0.01	1	9.439			
		2	9.134	33.892		
		4	8.987	28.989	74.398	203.68
	0.1	1	8.270			
		2	8.015	30.062		
		4	7.890	26.122	67.484	179.29
	1.0	1	5.827			
		2	5.672	25.078		
		4	5.586	22.315	61.397	164.73
	10.0	1	4.955			
		2	4.825	23.983		
		4	4.747	21.439	60.330	162.65
	100.0	1	4.843			
		2	4.715	23.861		
		4	4.638	21.430	60.214	162.46
	∞	1	4.830			
		2	4.703	23.847		
		4	4.626	21.329	60.200	162.42

+10°	0.0	1	11.919			
		2	11.604	47.648		
		4	11.367	43.768	97.446	233.67
	0.01	1	11.667			
		2	11.358	46.618		
		4	11.125	42.280	95.359	227.58
	0.1	1	10.033			
		2	9.766	41.159		
		4	9.536	38.112	85.815	199.37
	1.0	1	6.619			
		2	6.381	35.114		
		4	6.096	32.805	76.769	181.32
	10.0	1	5.372			
		2	5.113	33.891		
		4	4.771	31.689	74.936	178.38
	100.0	1	5.208			
		2	4.944	33.756		
		4	4.592	31.565	74.729	178.10
	∞	1	5.190			
		2	4.925	33.742		
		4	4.572	31.550	74.704	178.06

4.3. Placa rectangular con corte semicircular libre en un lado

La placa que estudiaremos está representada en la figura 3:

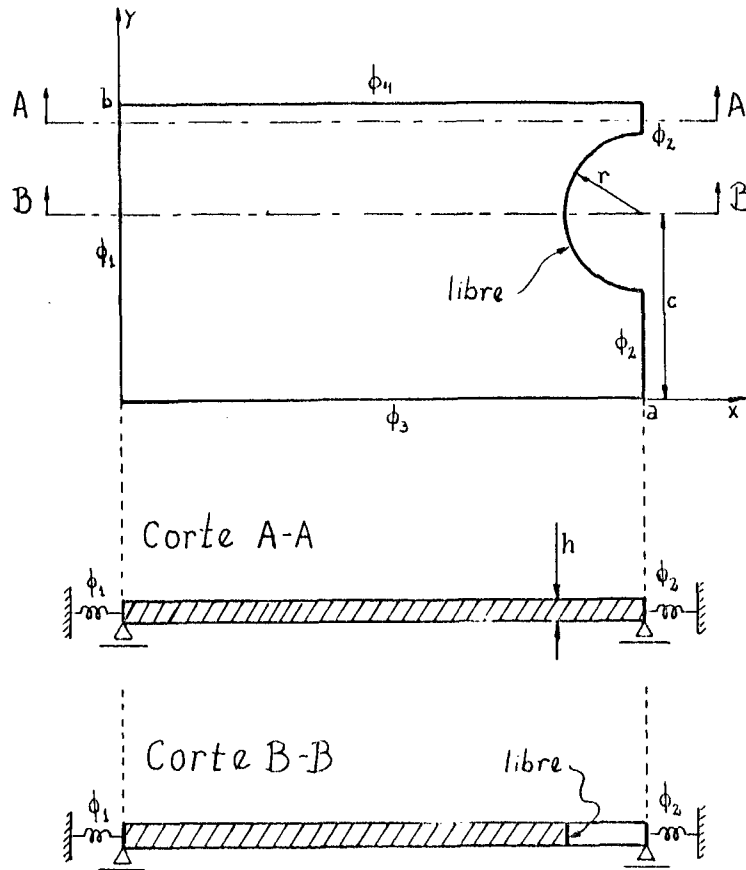


FIGURA 3

Esta placa rectangular tiene los cuatro bordes elásticamente restringidos contra rotación, siendo diferentes en cada uno de ellos los respectivos coeficientes de flexibilidad. Por razones prácticas, se le ha realizado un corte en forma semicircular en un lado (por ejemplo para pasaje de tuberías) quedando libre esa porción del contorno /22/.

En este caso, las funciones base elegidas son /11/:

$$w = \sum_{i=0}^{N,M} A_{ij} \cdot X_i(x) \cdot Y_j(y) \quad (40)$$

$$X_i(x) = (\alpha_{1i} \cdot x + \alpha_{2i} \cdot x^2 + \alpha_{3i} \cdot x^3 + \alpha_{4i} \cdot x^4) \cdot x^i \quad (41)$$

$$Y_j(y) = (\beta_{1j} \cdot y + \beta_{2j} \cdot y^2 + \beta_{3j} \cdot y^3 + \beta_{4j} \cdot y^4) \cdot y^j \quad (42)$$

para diferentes N y M en (40). Las condiciones de borde correspondientes son /3/:

$$w(0,y) = w(a,y) = w(x,0) = w(x,b) = 0 \quad (43)$$

$$\frac{\partial w}{\partial x} = \phi_1 \cdot D \cdot \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) \quad \text{en } x=0 \quad (44)$$

$$\frac{\partial w}{\partial x} = \phi_2 \cdot D \cdot \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) \quad \text{en } x=a \quad (45)$$

$$\frac{\partial w}{\partial y} = \phi_3 \cdot D \cdot \left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right) \quad \text{en } y=0 \quad (46)$$

$$\frac{\partial w}{\partial y} = \phi_4 \cdot D \cdot \left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right) \quad \text{en } y=b \quad (47)$$

Los valores de los coeficientes α_{ni} y β_{mj} de (41) y (42) los calculamos aplicando a (40) las condiciones de contorno (43), (44), (45), (46) y (47) y están tabulados en el apéndice V para $n=0,1$ y $m=0,1$.

Analizaremos dos casos, a saber:

Caso I : un término en (40); o sea $M=0$, $N=0$

En este caso, y como lo hemos hecho anteriormente, reemplazando la solución aproximada en el funcional (25) y minimizando éste con respecto a A_{00} , obtenemos el autovalor Ω_{00}^* correspondiente a la frecuencia fundamental de vibración de

la placa según:

$$\Omega_{00}^* = \sqrt{L_1/J_{36}} \quad (48)$$

donde L_1 y J_{36} están tabulados en el apéndice VI.

Caso II: cuatro términos en (40); (tomaremos $M=0,1; N=0,1$)

Análogamente al caso anterior, en éste obtenemos un determinante de 4×4 cuyas raíces son los autovalores que corresponden a las frecuencias aproximadas de vibración de la placa

$$\begin{vmatrix} L_1 - \Omega^2 \cdot J_{36} & L_5 - \Omega^2 \cdot J_{40} & L_6 - \Omega^2 \cdot J_{41} & L_7 - \Omega^2 \cdot J_{42} \\ & L_2 - \Omega^2 \cdot J_{37} & L_8 - \Omega^2 \cdot J_{42} & L_9 - \Omega^2 \cdot J_{44} \\ \text{simétrico} & & L_3 - \Omega^2 \cdot J_{38} & L_{10} - \Omega^2 \cdot J_{43} \\ & & & L_4 - \Omega^2 \cdot J_{39} \end{vmatrix} = 0 \quad (48')$$

donde las expresiones de L_i y J_i están tabuladas en el apéndice VI.

Los autovalores Ω_{ij} están relacionados con las frecuencias de vibración mediante:

$$\Omega_{ij} = \sqrt{\rho \cdot h/D} \cdot \omega_{ij} \cdot b^2 \quad (48'')$$

Hemos obtenido resultados para placas con diferentes relaciones a/b , diferentes relaciones c/b y diferentes radios del agujero r/b . También hemos variado los coeficientes de restricción elástica de los cuatro bordes y hemos realizado el análisis con uno y cuatro términos en (40).

Presentaremos aquí los resultados más significativos.

PLACA RECTANGULAR RIGIDAMENTE EMPOTRADA CON AGUJERO CENTRADO

$$(c/b = 0.5)$$

a/b	r/b	Ω_{00}	$\Omega_{00} (\#)$	$\Omega_{00} (*)$
3/2	0.0	27.046	27.045	27.010
	0.2	26.658		
	0.5	27.016		
1	0.0	35.999	36.0	35.99
	0.2	34.420		
	0.5	38.317		
2/5	0.0	148.29	148.28	147.8
	0.2	142.94		
	0.5	416.12		

TABLA 8

PLACA RECTANGULAR SIMPLEMENTE APOYADA CON AGUJERO CENTRADO

$$(c/b = 0.5)$$

a/b	r/b	Ω_{00}	$\Omega_{00} (\#)$	$\Omega_{00} (*)$
3/2	0.0	14.263	14.263	14.256
	0.2	14.245		
	0.5	13.765		
1	0.0	19.748	19.748	19.739
	0.2	19.741		
	0.5	19.757		
2/5	0.0	71.596	71.596	71.554
	0.2	73.028		
	0.5	111.54		

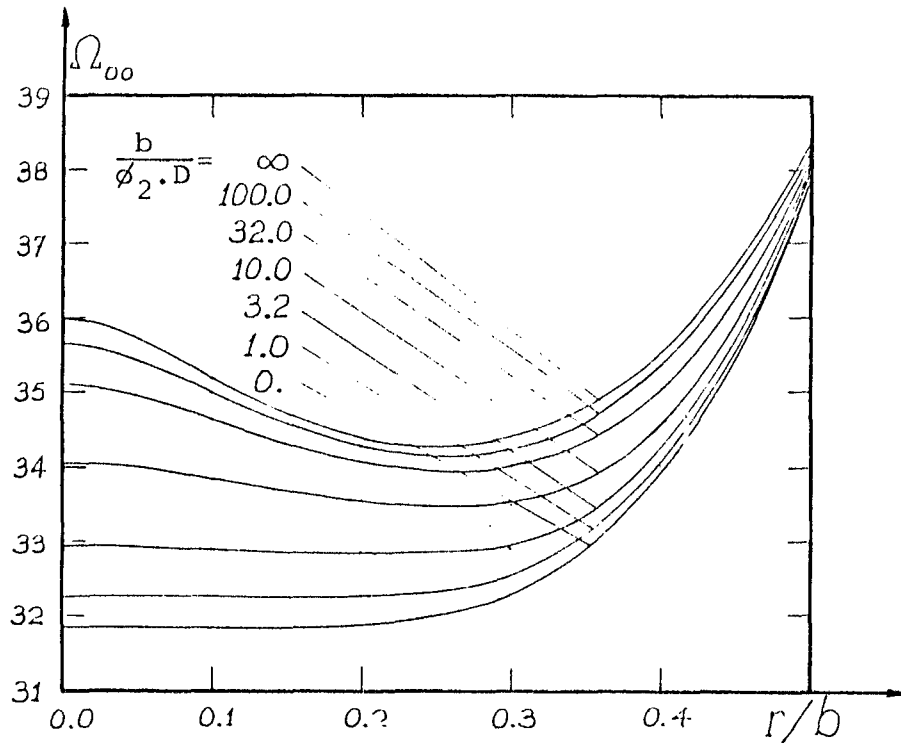
TABLA 9

resultados obtenidos en /11/

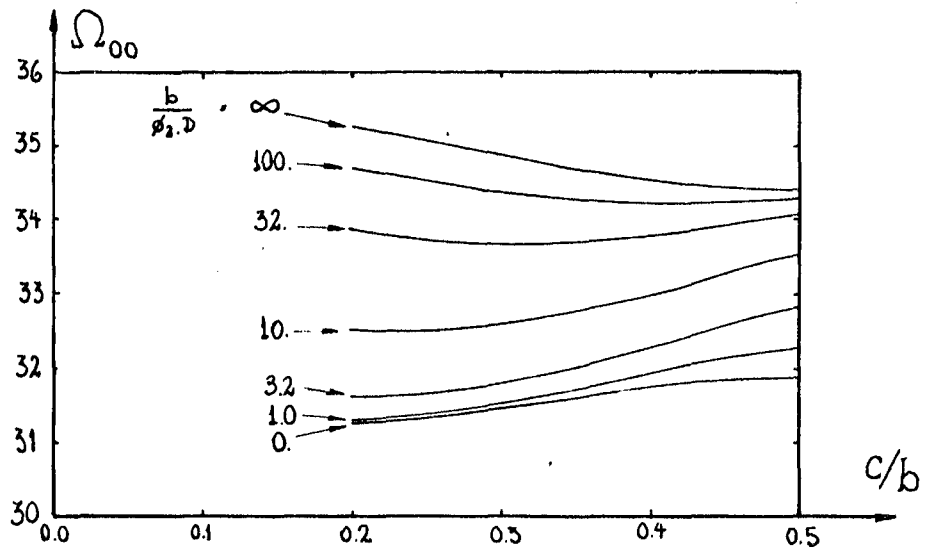
* resultados obtenidos en /10/

Observamos que para el caso sin agujero ($r/b=0$) existe un excelente acuerdo entre los resultados aquí calculados y los obtenidos de la bibliografía.

PLACA CUADRADA CON LADOS COMPLETOS EMPOTRADOS: variación de la frecuencia fundamental en función del radio del agujero y del coeficiente de restricción del lado correspondiente



PLACA CUADRADA CON LADOS COMPLETOS EMPOTRADOS: variación de la frecuencia fundamental en función de la posición del agujero y del coeficiente de restricción del lado correspondiente
($r/b = 0.2$)



Observamos que, al ir aumentando el tamaño de la perforación, en general se observa una disminución de la frecuencia fundamental de vibración, hasta un mínimo, y luego un aumento de la misma. Esto se debe a dos causas con efectos opuestos: una de ellas es que la placa va perdiendo restricción al movimiento (ello hace disminuir la frecuencia de vibración) y la otra es que simultáneamente va perdiendo masa, se hace más pequeña y por ello la frecuencia de vibración tiende a aumentar.

Este fenómeno del mínimo es particularmente notable cuando la placa tiene el borde correspondiente al agujero empotrado; y en el caso de borde simplemente apoyado en ningún momento disminuye la frecuencia fundamental.

También observamos que la posición del agujero en el lado no influye en gran medida en la frecuencia fundamental de vibración de la placa; además para el caso de borde simplemente apoyado ésta disminuye al ir alejándose del centro el agujero, y en el caso de borde rígidamente empotrado se produce el efecto opuesto.

PLACA CUADRADA , FRECUENCIAS SUPERIORES: caso de agujero centrado, borde correspondiente simplemente apoyado y el resto rígidamente empotrados (utilizando cuatro términos en (40))

r/b	$\Omega_{00}(1 \times 1)$	$\Omega_{00}(4 \times 4)$	Ω_{01}	Ω_{10}	Ω_{11}
0.0	31.867	31.835	63.916	71.927	101.20
0.0		31.829#	63.347#	71.084#	100.83#
0.1	31.866	31.838	63.847	71.556	100.17
0.2	31.900	31.895	63.978	71.037	99.602
0.3	32.274	32.263	66.808	71.676	102.78
0.4	33.887	33.851	74.396	78.131	114.96
0.5	37.934	37.644	80.920	109.31	154.07

TABLA 10

resultado obtenido en /10/

Observamos en la tabla precedente un excelente acuerdo entre los valores calculados y los obtenidos de la bibliografía para el caso límite de placa sin perforación. Para el caso de la frecuencia fundamental, vemos también que el uso de cuatro términos en la aproximación mejora la precisión del resultado, como era de esperarse.

Son muchas las variables que podemos usar en este tipo de placas (relación a/b ; relación c/b ; relación r/b ; cuatro coeficientes de restricción) y por lo tanto muchos los números que podemos obtener como resultados, pero creemos que los resultados expuestos son suficientemente explícitos de los fenómenos involucrados en la vibración libre de estas placas.

En la sección 6. compararemos algunos de estos resultados con otros obtenidos para las mismas placas por el método de elementos finitos.

4.4. Placa cuadrada con corte en chanfle libre en una esquina

La placa que estudiaremos está representada en la figura 4:

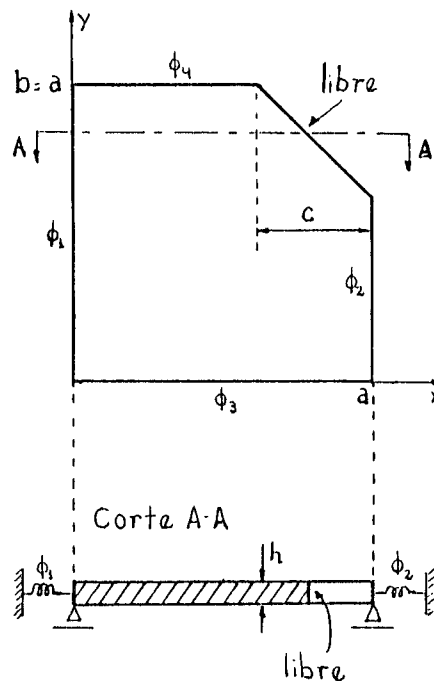


FIGURA 4

Esta placa cuadrada tiene los cuatro bordes elásticamente restringidos contra rotación, siendo diferentes en cada uno de ellos el respectivo coeficiente de flexibilidad. Por razones prácticas, se le efectúa un corte en chanfle en una esquina, en ángulo de 45° con respecto a cada uno de los lados, quedando libre esa porción del contorno.

Este problema lo resolveremos de manera exactamente igual al de la sección 4.3., teniendo en cuenta la distinta geometría al integrar nuestras funciones base sobre la placa. Utilizaremos sólo la aproximación de un solo término en la ecuación (40), y obtendremos así un valor aproximado de la frecuencia de vibración del modo fundamental.

Hemos calculado la frecuencia fundamental de vibración de la placa de la figura 4 para todas las combinaciones posibles de bordes empotrados y simplemente apoyados, y para 21 valores del parámetro c (que indica la magnitud del corte en chanfle que queda libre). Los resultados están en las tablas siguientes:

PLACA CUADRADA CON CORTE EN CHANFLE LIBRE

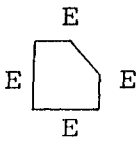
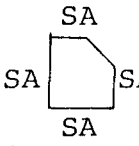
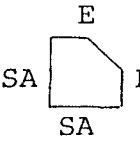
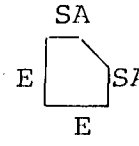
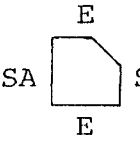
c/b					
0.00	35.999	19.748	27.128	27.128	28.955
0.00	35.992#	19.739#	27.056#	27.056#	28.951#
0.05	35.998	19.729	27.128	27.093	28.954
0.10	35.998	19.677	27.128	26.994	28.942
0.15	35.987	19.596	27.124	26.845	28.901
0.20	35.948	19.494	27.110	26.668	28.813
0.25	35.852	19.382	27.073	26.487	28.667
0.30	35.668	19.269	26.998	26.324	28.466
0.35	35.378	19.166	26.869	26.195	28.219
0.40	34.981	19.083	26.678	26.113	27.943
0.45	34.497	19.024	26.423	26.083	27.660
0.50	33.970	18.996	26.110	26.105	27.393
0.55	33.455	18.999	25.759	26.175	27.162
0.60	33.013	19.033	25.396	26.289	26.984
0.65	32.699	19.095	25.053	26.446	26.870
0.70	32.554	19.181	24.764	26.650	26.831
0.75	32.598	19.285	24.558	26.918	26.873
0.80	32.840	19.400	24.458	27.281	27.008
0.85	33.281	19.517	24.475	27.798	27.251
0.90	33.926	19.624	24.610	28.563	27.629
0.95	34.807	19.708	24.851	29.719	28.181
1.00	35.999	19.748	25.172	31.452	28.955

TABLA 11

corresponde a los resultados de $/10/$

PLACA CUADRADA CON CORTE EN CHANFLE LIBRE

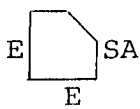
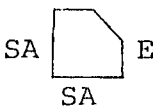
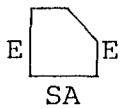
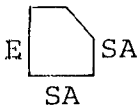
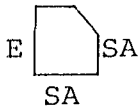
c/b					
	E SA E	SA SA E	E E SA	E SA SA	E SA SA
0.00	31.867	23.679	31.867	23.679	27.128
0.00	31.829#	23.646#	31.829#	23.646#	27.056#
0.05	31.866	23.679	31.867	23.655	27.127
0.10	31.848	23.672	31.867	23.584	27.117
0.15	31.788	23.645	31.861	23.477	27.080
0.20	31.661	23.588	31.838	23.346	27.001
0.25	31.457	23.489	31.779	23.206	26.868
0.30	31.183	23.348	31.663	23.073	26.682
0.35	30.861	23.167	31.474	22.959	26.453
0.40	30.521	22.957	31.201	22.876	26.201
0.45	30.199	22.733	30.853	22.829	25.949
0.50	29.929	22.512	30.448	22.821	25.724
0.55	29.737	22.312	30.019	22.853	25.549
0.60	29.640	22.150	29.608	22.923	25.442
0.65	29.645	22.036	29.256	23.027	25.413
0.70	29.755	21.978	29.003	23.167	25.465
0.75	29.975	21.979	28.878	23.342	25.594
0.80	30.314	22.035	28.898	23.558	25.793
0.85	30.800	22.140	29.071	23.829	26.052
0.90	31.490	22.281	29.398	24.175	26.362
0.95	32.483	22.444	29.877	24.628	26.719
1.00	33.926	22.607	30.511	25.228	27.128

TABLA 12

corresponde a los resultados de /10/

Observamos una excelente correspondencia con los resultados obtenidos de bibliografía para el caso límite de corte libre nulo.

Vemos aquí también los dos efectos ya citados en la sección anterior de pérdida de restricción y pérdida de masa en la placa al ir haciéndose más pronunciado el corte libre; lo que provoca la existencia de un mínimo valor de frecuencia para unas determinadas condiciones de borde correspondiente con un cierto valor del corte c/b. Este mínimo es particularmente pronunciado cuando los bordes que se van cortando tie-

nen condiciones de empotramiento rígido.

También observamos el siguiente fenómeno: cuando se ha cortado la mitad de la placa ($c/b = 1$) la frecuencia fundamental de vibración coincide con la de la placa completa para los casos simétricos con respecto a la línea de corte (o sea E-E-E-E; SA-SA-SA-SA; SA-SA-E-E; E-SA-SA-E enumerados según la figura 4). Esto se debe a que el método empleado como primera medida impone las condiciones de contorno de la placa completa, y luego integra la función energía sobre el área de la placa, tomando en cuenta recién que ésta está cortada; de esa manera, la frecuencia resultante será la misma para media placa o placa completa, cuando el modo de vibración sea simétrico con respecto a la línea de corte, lo que efectivamente ocurre en los cuatro casos citados.

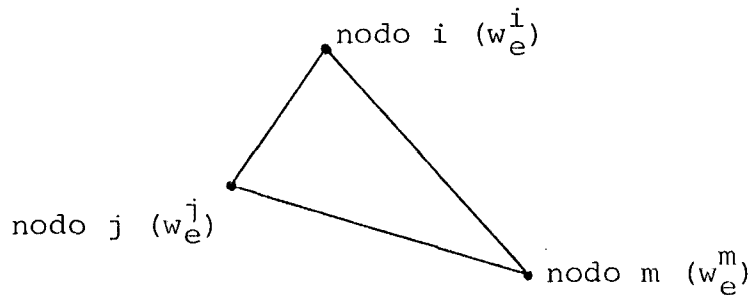
En la sección 6. efectuaremos algunas comparaciones entre los resultados aquí obtenidos y resultados por el método de elementos finitos.

5. FORMULACION DEL METODO DE ELEMENTOS FINITOS PARA VIBRACIONES DE MEMBRANAS

5.1. Generalidades

El problema de vibraciones de membranas corresponde a la ecuación de Helmholtz (3) según hemos visto en la sección 2.1. y su solución equivale a la minimización del funcional (13) con las condiciones de borde apropiadas /20,21,29/.

Para el cálculo por elementos finitos, utilizaremos elementos triangulares trinodales con un grado de libertad por cada nodo: el desplazamiento transversal al área de la membrana.



Dentro de cada elemento e (determinado por sus nodos i, j, m) aproximaremos la función w de (13) por la siguiente expresión:

$$w_e = N_i(x,y) \cdot w_e^i + N_j(x,y) \cdot w_e^j + N_m(x,y) \cdot w_e^m \quad (49)$$

donde los w_e^k representan el valor de w_e en el nodo k , y las $N_k(x,y)$ son las funciones de forma que hemos elegido para utilizar. Estas funciones varían linealmente dentro del elemento con respecto a x e y /4,p.26/ y podemos encontrar sus expresiones en el apéndice VII. Además, están elegidas de tal manera que valen 1 en el nodo k y cero en los restantes.

5.2. Discretización de la membrana

Para construir las redes de elementos finitos triangulares utilizamos el código REDEF /26/, que fabrica una red regular de elementos triangulares trinodales y luego la deforma adaptándola a la geometría en estudio, utilizando para ello el mismo método de elementos finitos.

5.3. Planteo de las condiciones de borde

Hay dos condiciones de borde aplicables a la ecuación de la membrana vibrante (3), y son:

$$\text{tipo Dirichlet: } w=0 \text{ sobre el borde} \quad (50)$$

$$\text{tipo Neumann: } \frac{\partial w}{\partial n}=0 \text{ sobre el borde} \quad (51)$$

La condición de borde (51) ya está incluida en el funcional (13), por lo tanto debemos tener en cuenta solamente la condición (50). Esto lo hacemos anulando la variable w_e^k cuando el nodo k en cuestión está sobre el contorno de la membrana.

5.4. Obtención del problema de autovalores generalizado

Si reemplazamos la solución aproximada (49) dentro de un elemento, en el funcional (13), y derivamos éste con respecto a los valores w_e^k en los nodos de ese elemento, obtenemos un problema algebraico de autovalores generalizado:

$$S_e \cdot v_e = \frac{\omega^2}{c^2} \cdot M_e \cdot v_e \quad (52)$$

donde S_e y M_e son matrices de 3×3 elementos cuyas expresiones las hemos tabulado en el apéndice VIII, y v_e es el vector de tres componentes siguiente:

$$v_e = (w_e^i, w_e^j, w_e^m)^T \quad (53)$$

Hemos pasado ahora, de un problema continuo, a un problema discreto (sistema de ecuaciones con un número finito de incógnitas).

Acoplando ahora todos los sistemas lineales correspondientes a cada uno de los elementos de la red, resulta el siguiente problema de autovalores generalizado:

$$S.v = \frac{\omega^2}{c^2} \cdot M.v \quad (54)$$

donde las matrices S y M resultan de sumar ordenadamente por nodo cada uno de los términos de las matrices elementales S_e y M_e , y v es el vector formado por todos los valores de w_e^k en todo el recinto de la discretización. Si enumeramos los nodos de manera de dejar al final los que corresponden a las condiciones de borde (50) y los eliminamos en v y eliminamos también las filas y columnas correspondientes de S y M , estas matrices resultan cuadradas, simétricas, de tipo banda y definidas positivas.

5.5. Resolución del problema de autovalores generalizado

Resolver el sistema (54) consiste en obtener los autovalores ω^2/c^2 y los autovectores v correspondientes que lo satisfacen. Esos autovalores y autovectores son valores a

proximados de las frecuencias y modos normales de vibración de la membrana.

Para la resolución de (54) aprovecharemos una de las virtudes de las matrices S y M, y es que tienen una gran cantidad de ceros; o sea que son matrices esparcidas o "ralas".

Los dos métodos que utilizaremos están descriptos en /30/ y consisten en lo siguiente:

1^{er} método:

descomponer la matriz M según la factorización:

$$M = U^T \cdot D \cdot U = U^T \cdot D^{1/2} \cdot D^{1/2} \cdot U \quad (55)$$

donde U es una matriz triangular superior y D es una matriz diagonal; luego efectuar el cambio de variable:

$$y = U^{-1} \cdot D^{-1/2} \cdot v \quad (56)$$

y a continuación resolver el sistema de autovalores:

$$D^{-1/2} \cdot U^{-T} \cdot S \cdot U^{-1} \cdot D^{-1/2} \cdot y = \lambda \cdot y \quad (57)$$

$$\text{donde } \lambda = \omega^2 / c^2 \quad (58)$$

para resolver el problema (57) utilizaremos el método del cociente de iteración de Rayleigh, en los tres pasos siguientes, repetidos para cada iteración s:

$$k_s = (y_s^T \cdot y_s)^{-1/2} \quad (59)$$

$$(D^{-1/2} \cdot U^{-T} \cdot S \cdot U^{-1} \cdot D^{-1/2} - \lambda_s \cdot I) \cdot y_{s+1} = k_s \cdot y_s \quad (60)$$

$$\lambda_{s+1} = \frac{(y_s^T \cdot D^{-1/2} \cdot U^{-T} \cdot S \cdot U^{-1} \cdot D^{-1/2} \cdot y_s)}{y_s^T \cdot y_s} \quad (61)$$

2^{do} método:

expresar el sistema (54) de la siguiente forma:

$$(S - \lambda \cdot M) \cdot v = 0$$

y efectuar los siguientes pasos repetidos para cada ite
ración s:

$$(S - \lambda_s \cdot M) \cdot y_{s+1} = M \cdot v_s \quad (59')$$

$$v_{s+1} = y_{s+1} / (y_{s+1}^T \cdot M \cdot y_{s+1})^{1/2} \quad (60')$$

$$\lambda_{s+1} = v_{s+1}^T \cdot S \cdot v_{s+1} \quad (61')$$

Para realizar todas las operaciones necesarias con matrices esparcidas utilizamos subrutinas desarrolladas en el Centro Atómico Bariloche /32/.

Para la resolución de las ecuaciones (60) y (59') utilizamos el algoritmo SYMMLQ descrito en /31/ y también usa
do en /30/. Este algoritmo resuelve el sistema:

$$(A - \lambda \cdot I) \cdot x = b \quad (62)$$

y no necesita tener almacenada la matriz A, sino solamente conocer el vector resultado del producto de A por un vector cualquiera, realizado por una rutina externa.

Estos dos métodos descritos los hemos probado compa
ra

tivamente en cuanto a tiempo de máquina y cantidad de iteraciones requeridos para la resolución de los problemas de autovalores generalizados de 135 y 299 incógnitas de /30/ en dos versiones: expresando las matrices involucradas en representación banda y en representación esparcida. Ambos casos los hemos resuelto con los dos métodos descritos precedentemente.

Los resultados figuran en las dos tablas siguientes:

PROBLEMA DE 135 INCOGNITAS : autovalor resultado = 26.985

Método	R. BANDA			R. ESPARCIDA	
	precisión en SYMMLQ	Nº de iterac.	tiempo total	Nº de iterac.	tiempo total
1 ^{ro}	10^{-3}	no converge		no converge	
	10^{-4}	5	9m 08s	5	55s
	10^{-5}	4	7m 45s	4	50s
	10^{-6}	4	9m 42s	4	58s
	10^{-7}	4	9m 41s	4	57s
	10^{-8}	4	9m 42s	4	58s
2 ^{do}	10^{-1}	no converge		no converge	
	10^{-2}	7	8m 12s	7	31s
	10^{-3}	5	7m 12s	5	27s
	10^{-4}	5	8m 12s	4	25s
	10^{-5}	4	7m 14s	4	28s
	10^{-6}			4	29s
	10^{-7}			4	29s

TABLA 13

PROBLEMA DE 299 INCOGNITAS : autovalor resultado = 26.921

Método	R. BANDA			R. ESPARCIDA	
	precisión en SYMMLQ	Nº de iterac.	tiempo total	Nº de iterac.	tiempo total
1 ^{ro}	10^{-3}	no converge		no converge	
	10^{-4}	4	26m 14s	5	2m 46s
	10^{-5}	4	30m 40s	4	3m 01s
	10^{-6}	4	31m 50s	4	3m 07s
	10^{-7}	4	31m 46s	4	3m 08s
	10^{-8}	4	31m 41s	4	3m 08s
2 ^{do}	10^{-1}	no converge		no converge	
	10^{-2}	10	36m 52s	7	1m 48s
	10^{-3}	6	36m 00s	5	1m 12s
	10^{-4}	5	26m 02s	4	1m 10s
	10^{-5}	4	22m 41s	4	1m 18s
	10^{-6}	4	24m 12s	4	1m 23s
	10^{-7}			4	1m 24s

TABLA 14

Observamos que, en ambos problemas, los tiempos se reducen un orden de magnitud al efectuar el cálculo en representación esparcida de las matrices, además vemos que, mientras para la representación banda los dos métodos demoran aproximadamente el mismo tiempo, para la representación esparcida el segundo método ocupa la mitad de tiempo que el primero, y esta diferencia se hace más acentuada todavía al aumentar el número de incógnitas del problema.

También vemos que el tiempo total de cálculo es poco sensible al parámetro de precisión en las iteraciones internas que realiza la rutina SYMMLQ, siempre que haya convergencia.

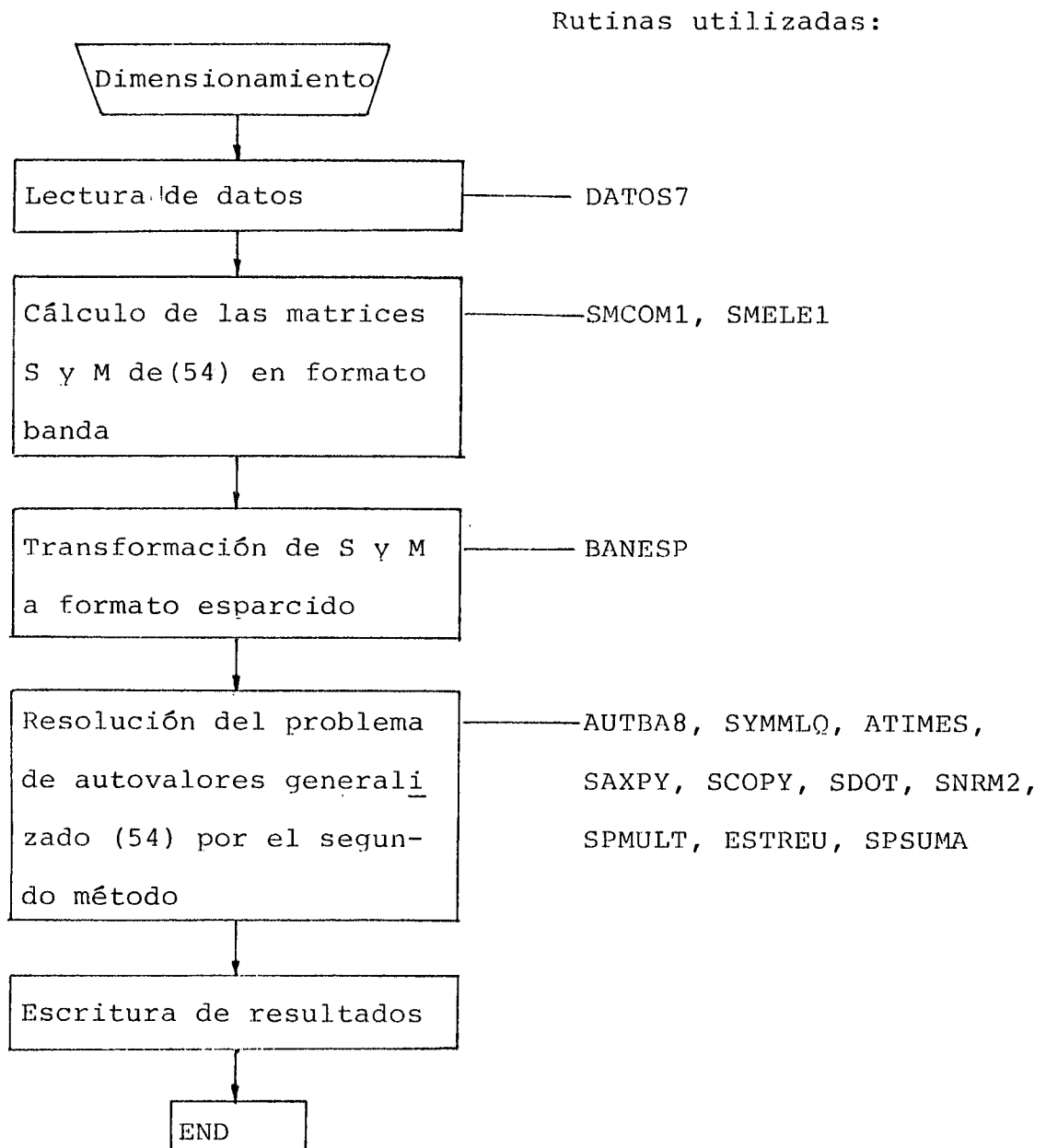
Como última conclusión, y como era de esperarse, los cálculos en ambas representaciones nos llevan al mismo resultado para cada uno de los problemas.

5.6. El código AUTEF2

Este programa es una variante del programa AUTEF1 descrito en /29/ que obtiene autovalores y autofunciones de vibraciones libres de membranas de cualquier geometría.

Utiliza, en cambio, las matrices S y M del problema de autovalores generalizado, expresadas en representación rala o esparcida, en lugar de representación banda.

Su diagrama de flujo es el siguiente:



La entrada de datos para este código es exactamente igual a la del código AUTEF1 /29/ y por ello no la reproducimos.

Los listados en FORTRAN IV del programa AUTEF1, AUTEF2, y de todas las subrutinas que componen ambos códigos, como asimismo los paquetes de tarjetas correspondientes, están a disposición de los usuarios en el Centro de Cómputos del CAB.

5.7. Resultados obtenidos

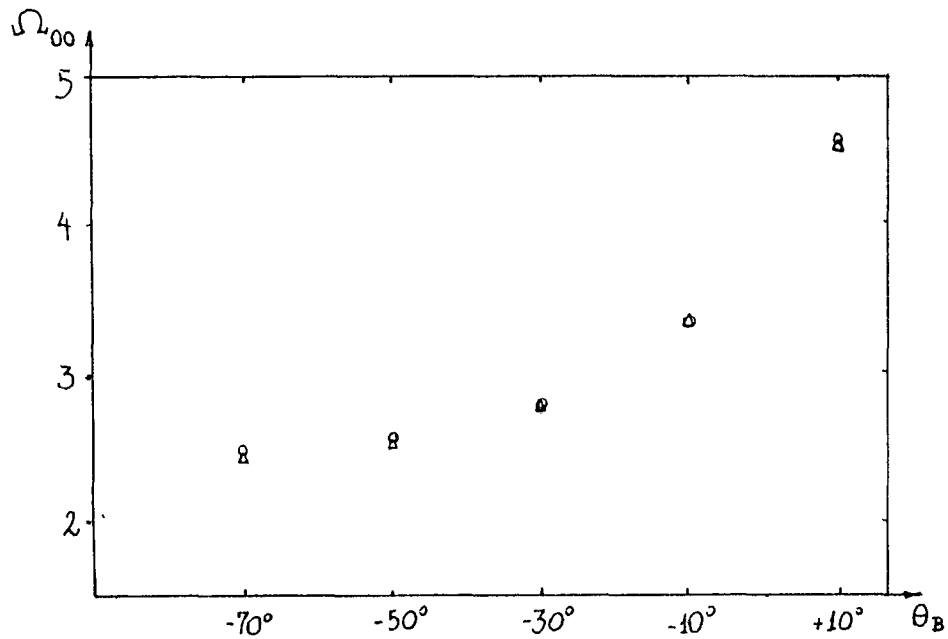
Con el programa AUTEF2 calculamos las frecuencias y modos normales de vibración para la membrana circular con corte secante, para cinco valores diferentes de θ_B . Hemos calculado el modo fundamental y cuatro familias de orden superior:

θ_B	Ω_{00} 	Ω_{01} 	Ω_{10} 	Ω_{11} 	Ω_{20} 
-70°	2.426	3.855	3.914	5.257	5.642
-50°	2.520	3.889	4.150	5.363	5.936
-30°	2.789	4.092	4.731	5.560	6.747
-10°	3.363	4.658	5.780	6.248	8.090
+10°	4.532	5.519	7.327	8.375	10.196

TABLA 15

Observamos de esta tabla que las frecuencias de vibración se hacen más grandes a medida que la membrana se hace más pequeña, para todos los modos de vibración considerados.

Hemos comparado estos resultados obtenidos por elementos finitos con los obtenidos en la sección 3.2. por métodos variacionales; en particular con los del caso IV usando dos funciones en la aproximación de w . Los hemos representado en el gráfico siguiente:



FRECUENCIA FUNDAMENTAL - MEMBRANAS (figura 1)

- solución por el caso IV de métodos variacionales
- Δ solución por elementos finitos

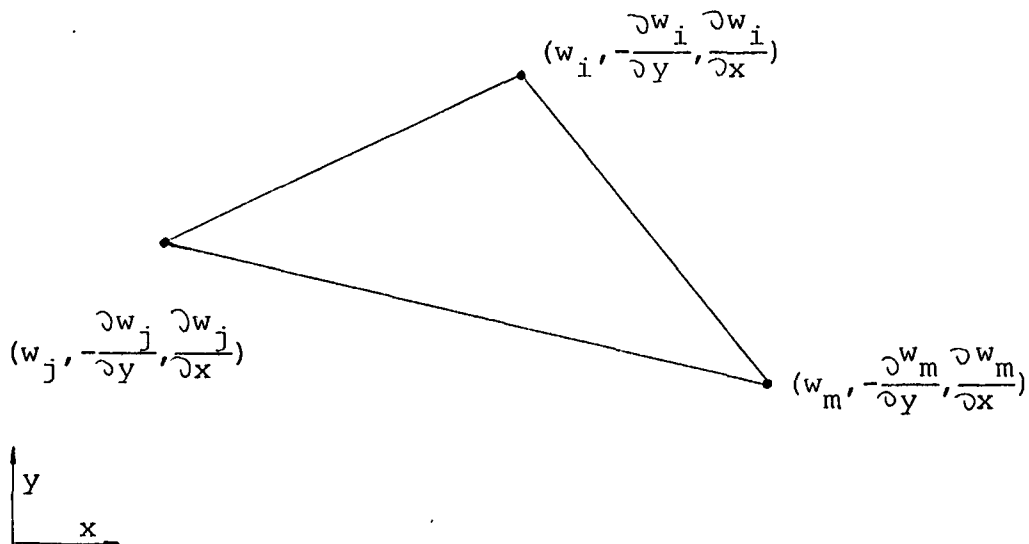
Observamos un acuerdo aceptable entre los resultados obtenidos con ambos métodos, siendo siempre ligeramente mayores los valores obtenidos mediante el método variacional, ésto se debe al hecho que los métodos aquí usados (método de Ritz), da siempre una cota superior del valor de frecuencia de vibración.

6. FORMULACION DEL METODO DE ELEMENTOS FINITOS PARA VIBRACIONES DE PLACAS DELGADAS

6.1. Generalidades

El problema de vibraciones libres de placas delgadas corresponde a la ecuación (6) según hemos visto, y su solución equivale a la minimización del funcional (25) con las condiciones de borde apropiadas a cada caso.

Para el cálculo por elementos finitos, utilizaremos elementos triangulares trinodales con tres grados de libertad por cada nodo: el desplazamiento transversal al área de la placa (w), y las derivadas de éste con respecto a dos coordenadas cartesianas ($-\frac{\partial w}{\partial y}$; $\frac{\partial w}{\partial x}$). Este elemento está descrito en /33, página 184 y siguientes/:



Dentro de cada elemento e (determinado por sus nodos i, j, m) aproximaremos la función w de (25) por la siguiente expresión:

$$w^e = \sum_{k=1}^3 N_{1k}(x,y) \cdot w_k^e + N_{2k}(x,y) \cdot \left(-\frac{\partial w_k^e}{\partial y}\right) + N_{3k}(x,y) \cdot \frac{\partial w_k^e}{\partial x} \quad (63)$$

donde $(w_k^e, -\frac{\partial w_k^e}{\partial y}, \frac{\partial w_k^e}{\partial x})$ representan los valores de las variables correspondientes en el nodo k del elemento e; y las N_{1k} son las funciones de forma del elemento, que figuran listadas en /33, página 187/.

Este elemento pertenece a la familia de los "non-conforming", o sea que no satisface necesariamente las condiciones de igualdad de derivada primera de la función w sobre todo el lado común de dos elementos vecinos. Por lo tanto, la solución obtenida con estos elementos es una aproximación de la solución exacta en general.

De todos modos, su precisión ha sido probada desde el punto de vista práctico por varios autores /33/ dentro del rango del 2%.

6.2. Discretización de la placa

Para construir las redes de elementos finitos utilizamos el programa REDEF /26/ ya citado en la sección 5.2.

6.3. Planteo de las condiciones de borde

Las condiciones de borde que utilizaremos son las representadas por las ecuaciones (7) y (8), que comprenden todos los casos de constreñimiento elástico (desde borde empotrado a borde simplemente apoyado). Los bordes libres no tendrán ningún constreñimiento y por lo tanto trataremos como incóg-

nititas a las variables correspondientes a nodos en bordes libres.

La condición de contorno (8) la incluimos en el funcional (25) remplazando:

$$\left. \frac{\partial^2 w}{\partial n^2} \right|_L = \frac{1}{\phi} \cdot \left. \frac{\partial w}{\partial n} \right|_L \quad (64)$$

en el último término de la expresión (23) , considerando como L a los lados de los elementos que poseen la correspondiente condición de borde (8).

La expresión (64) se justifica derivada de la (8) bajo las suposiciones que hemos hecho para la vibración de la placa en particular debido a que cualquier punto de la placa sólo puede desplazarse en la dirección normal a la misma, y que el borde constreñido está sometido además a la condición (7).

En cuanto a la condición de borde (7) procedemos de manera similar a la indicada en la sección 5.3., o sea que anulamos las variables w_k^e que corresponden a nodos sobre el borde restringido contra rotación. En este caso, y dadas las funciones de forma elegidas, también debemos anular las derivadas de w^e en la dirección del borde para esos nodos, de esta forma garantizamos que todo el borde constreñido cumple con la condición (7).

6.4. Obtención del problema de autovalores generalizado

Si reemplazamos la solución aproximada para un elemento (63) en el funcional (25) y derivamos éste con respecto a los valores de las variables en los nodos, obtenemos el siguiente sistema de ecuaciones:

$$S_e \cdot v_e = \Omega^2 \cdot M_e \cdot v_e \quad (65)$$

donde S_e y M_e son matrices de 9x9 cuyas expresiones figuran en el apéndice IX, y v_e es un vector de nueve componentes:

$$v_e = (w_i^e, -\frac{\partial w_i^e}{\partial y}, \frac{\partial w_i^e}{\partial x}, w_j^e, -\frac{\partial w_j^e}{\partial y}, \frac{\partial w_j^e}{\partial x}, w_m^e, -\frac{\partial w_m^e}{\partial y}, \frac{\partial w_m^e}{\partial x})^T \quad (66)$$

De esta forma hemos pasado de un problema continuo a un problema discreto. Acoplando todos los sistemas de ecuaciones lineales correspondientes a cada uno de los elementos, ordenadamente por nodo y por incógnita, obtenemos nuevamente un problema de autovalores generalizado:

$$S \cdot v = \Omega^2 \cdot M \cdot v \quad (67)$$

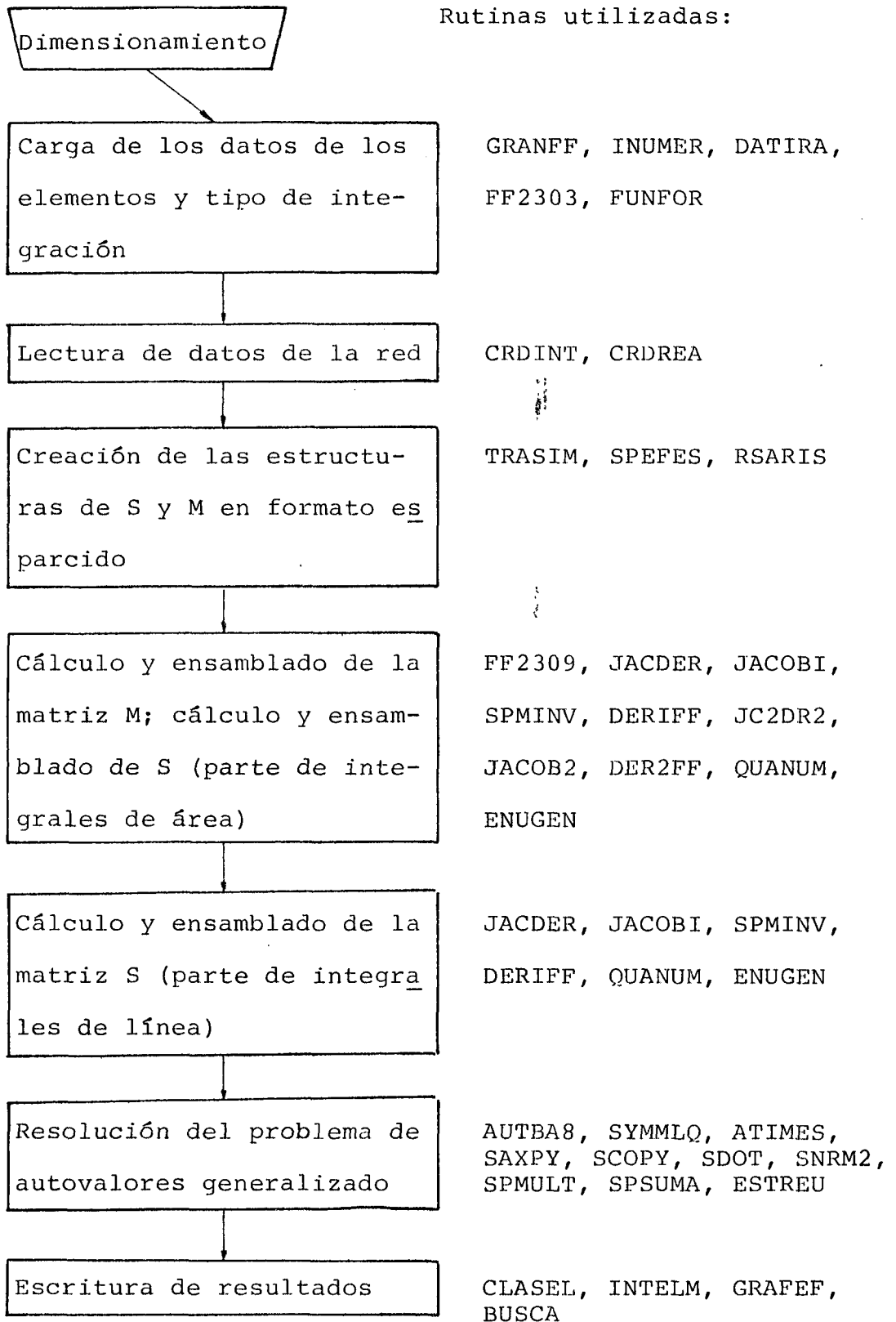
cuya solución la efectuaremos según lo tratado en la sección 5.5.

Una complicación que se nos presenta en este caso es que las funciones de forma y sus derivadas primeras y segundas que aparecen en (65) están expresadas en coordenadas isoparamétricas de área para poder realizar eficientemente las integraciones involucradas; y nosotros las necesitamos en función de las coordenadas globales x, y . Este problema fue resuelto en /34/ especialmente para este trabajo, tanto para el caso de las integrales de superficie como para el caso de integrales de línea.

6.5. El código VIPLAK1

Este programa calcula una frecuencia y un modo normal de vibración de una placa delgada plana de cualquier geometría que cumple con las hipótesis formuladas en la sección 2.2, o sea cuya ecuación de movimiento es la (5).

Su diagrama de flujo es el siguiente:



En la sección 11. figura un listado del programa VIPLAK1, y en el apéndice X la explicación sobre la entrada de datos.

Este código, con todas las rutinas que lo componen, se encuentra a disposición de los usuarios en el Centro de Cómputos del Centro Atómico Bariloche.

6.6. Resultados obtenidos

PLACA CIRCULAR CON CORTE SECANTE EMPOTRADA EN TODO SU PERIMETRO (ver figura 5) . Analizamos la frecuencia de vibración del modo fundamental, en función de la profundidad del corte b:

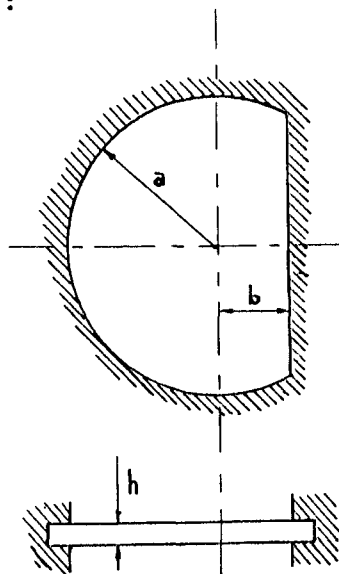


FIGURA 5

b /a	Ω_{00}	Ω_{00} (#)
1.0	10.19	10.21
0.9	10.49	
0.8	11.02	
0.7	11.79	
0.6	12.80	
0.5	14.09	
0.4	15.71	
0.3	17.78	
0.2	20.42	
0.1	23.83	
0.0	28.84	

TABLA 16

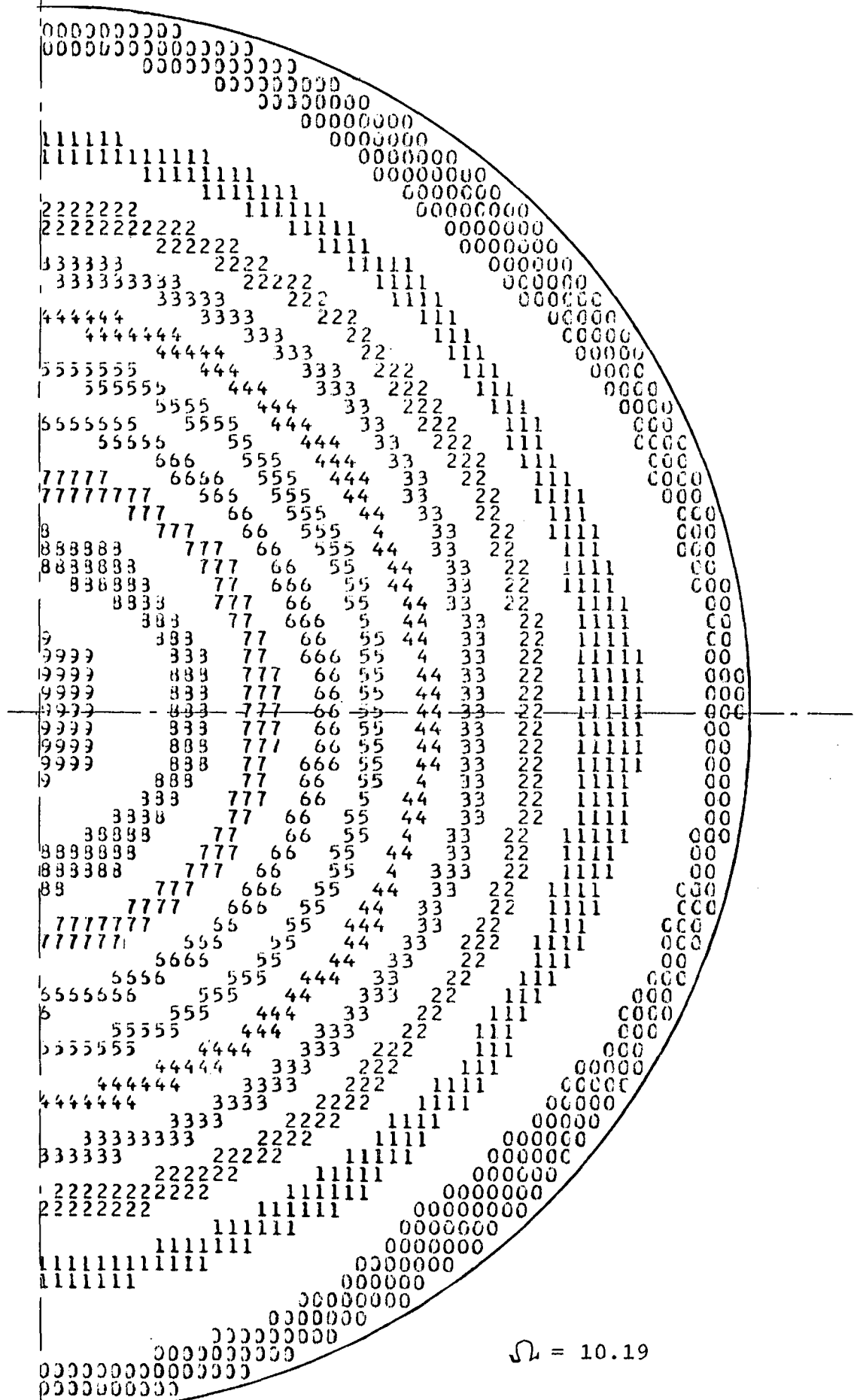
exacto

Observamos que, a medida que la placa se hace más pequeña, la frecuencia de vibración aumenta, debido a la menor masa que presenta la placa.

En los once gráficos siguientes, observamos las "curvas de nivel" correspondientes a esta placa, para los valores de b indicados en la tabla anterior. Estas curvas fueron obtenidas por impresora, para media placa, con el autovalor resultante del cálculo con el código VIPLAK1.

GRAFICO 1

PLACA CIRCULAR CON CORTE SECANTE RIGIDAMENTE EMPOTRADA EN TODO
SU PERIMETRO (b/a=1.)



Q = 10.49

$$\Omega = 10.49$$

$\Omega = 11.02$

GRAFICO 4

PLACA CIRCULAR CON CORTE SECANTE RIGIDAMENTE EMPOTRADA EN TODO
SU PERIMETRO ($b/a=0.7$)

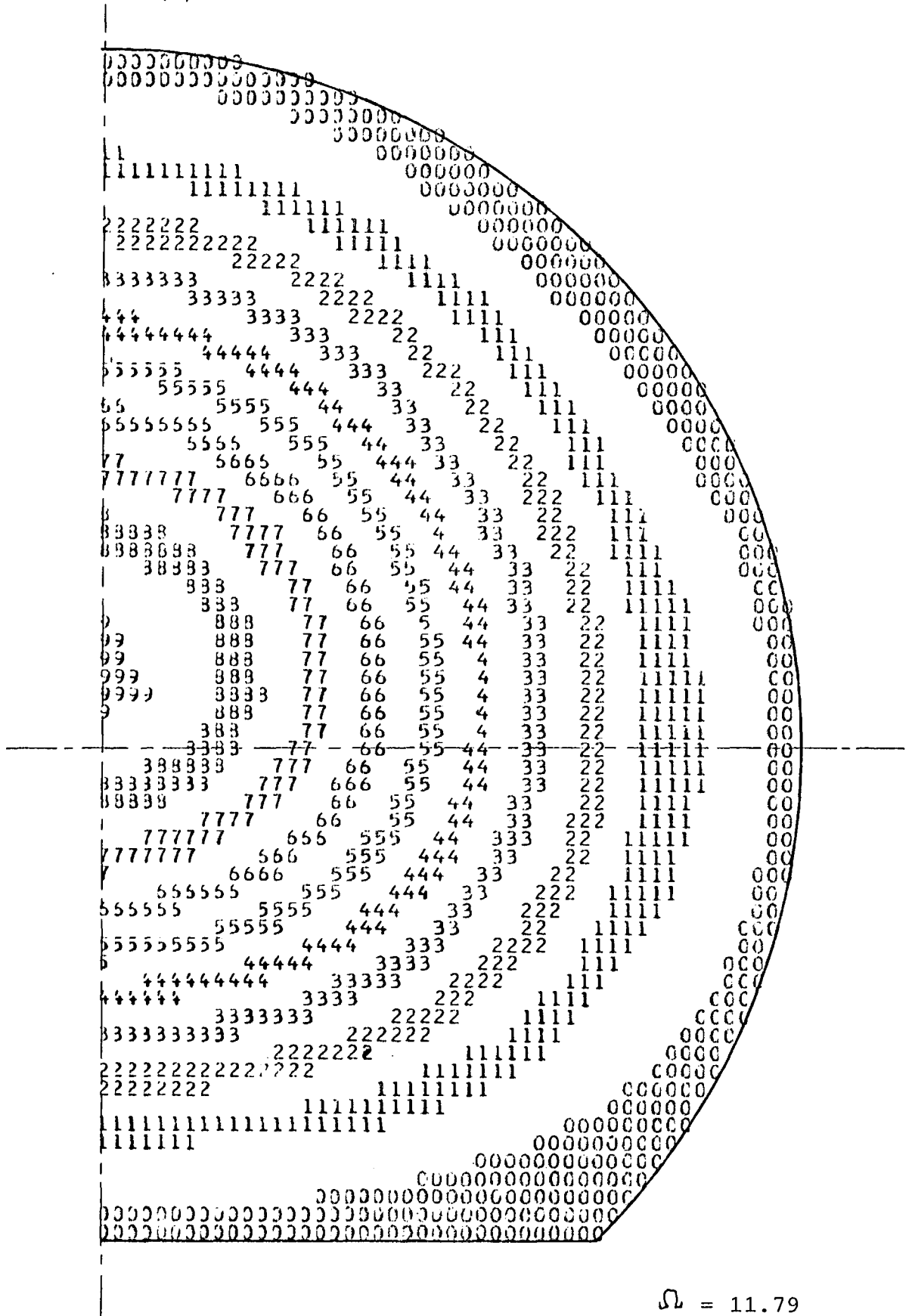
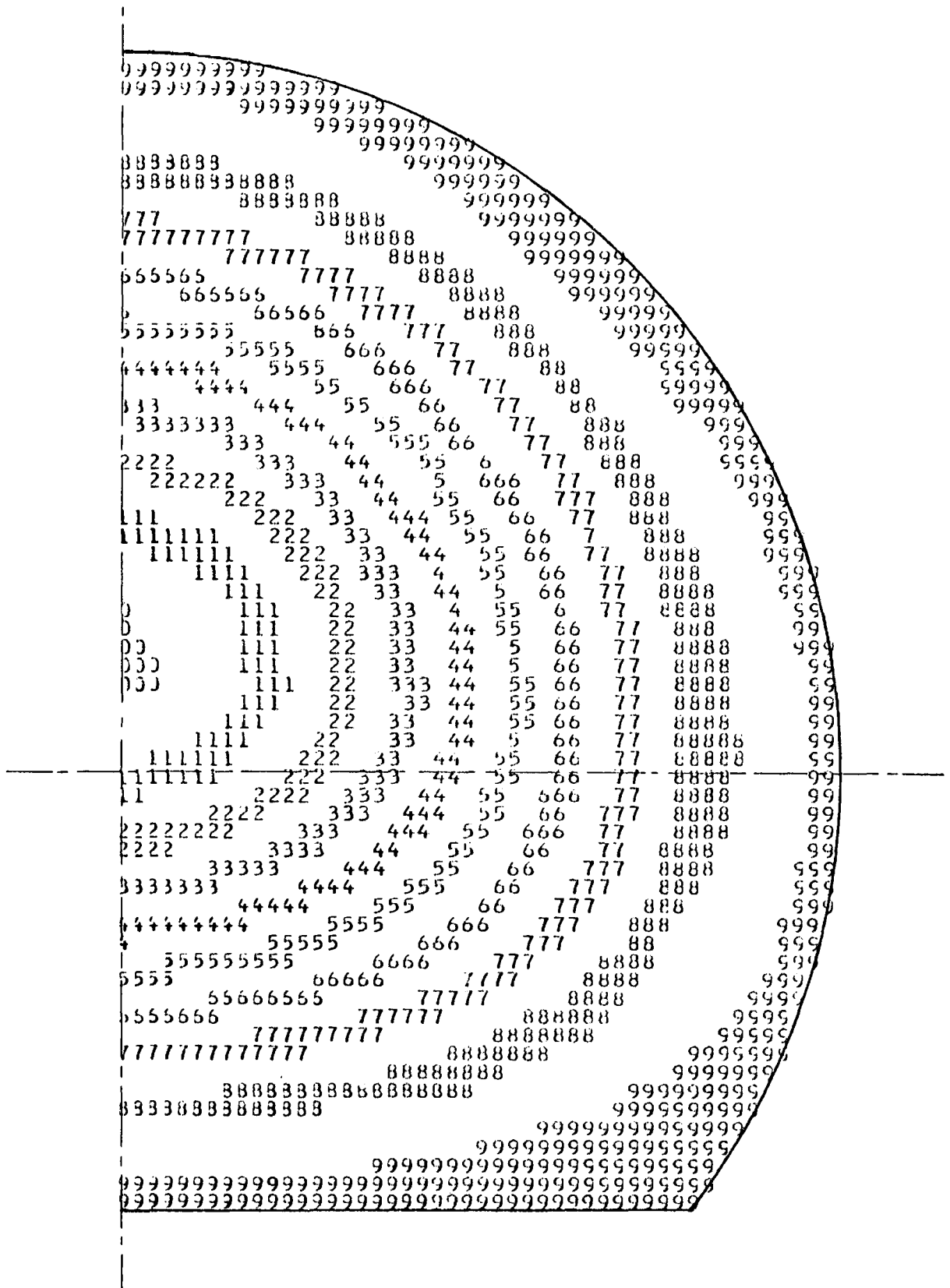


GRAFICO 5

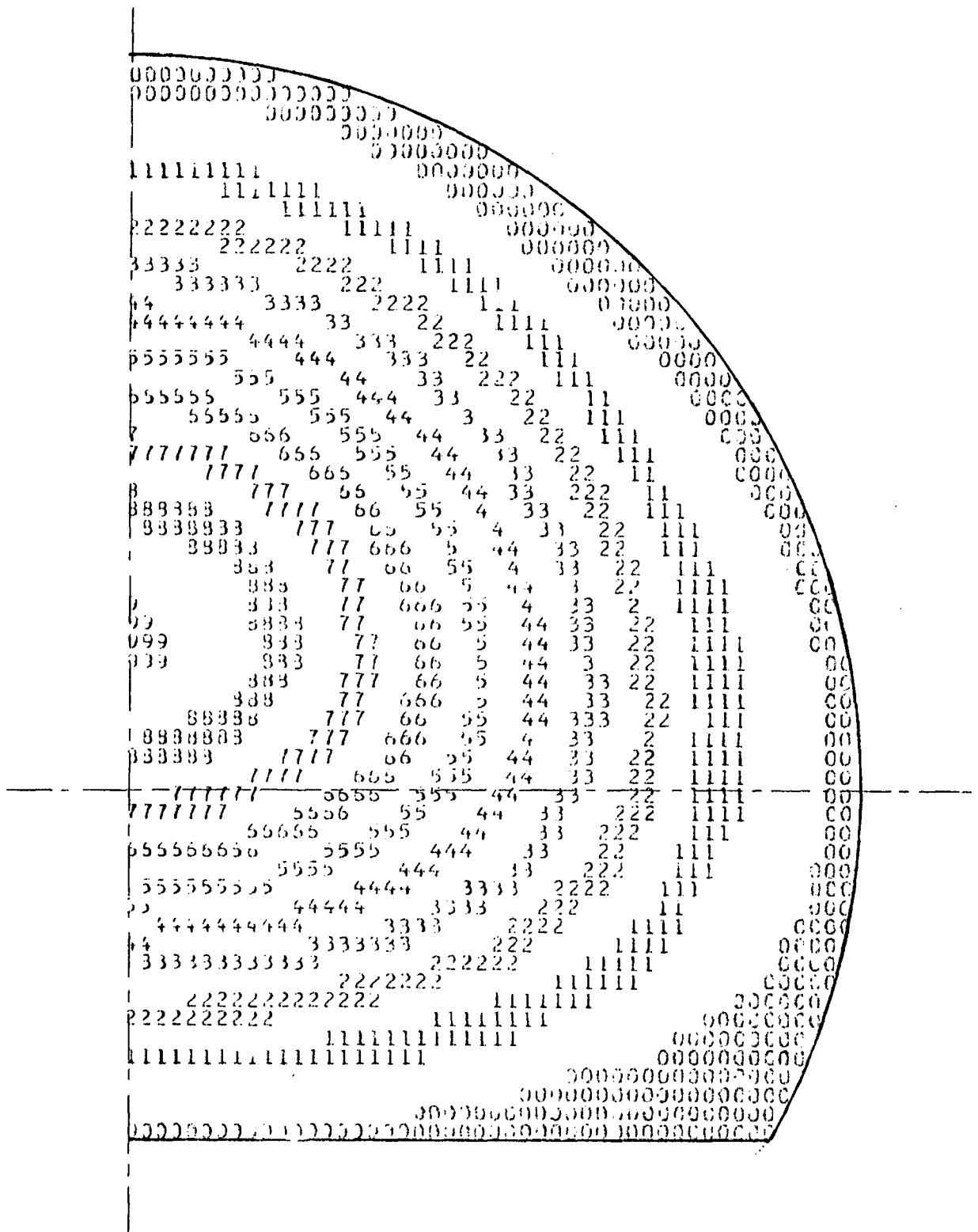
PLACA CIRCULAR CON CORTE SECANTE RIGIDAMENTE EMPOTRADA EN TODO
SU PERIMETRO ($b/a=0.6$)



$$\Omega = 12.80$$

GRAFICO 6

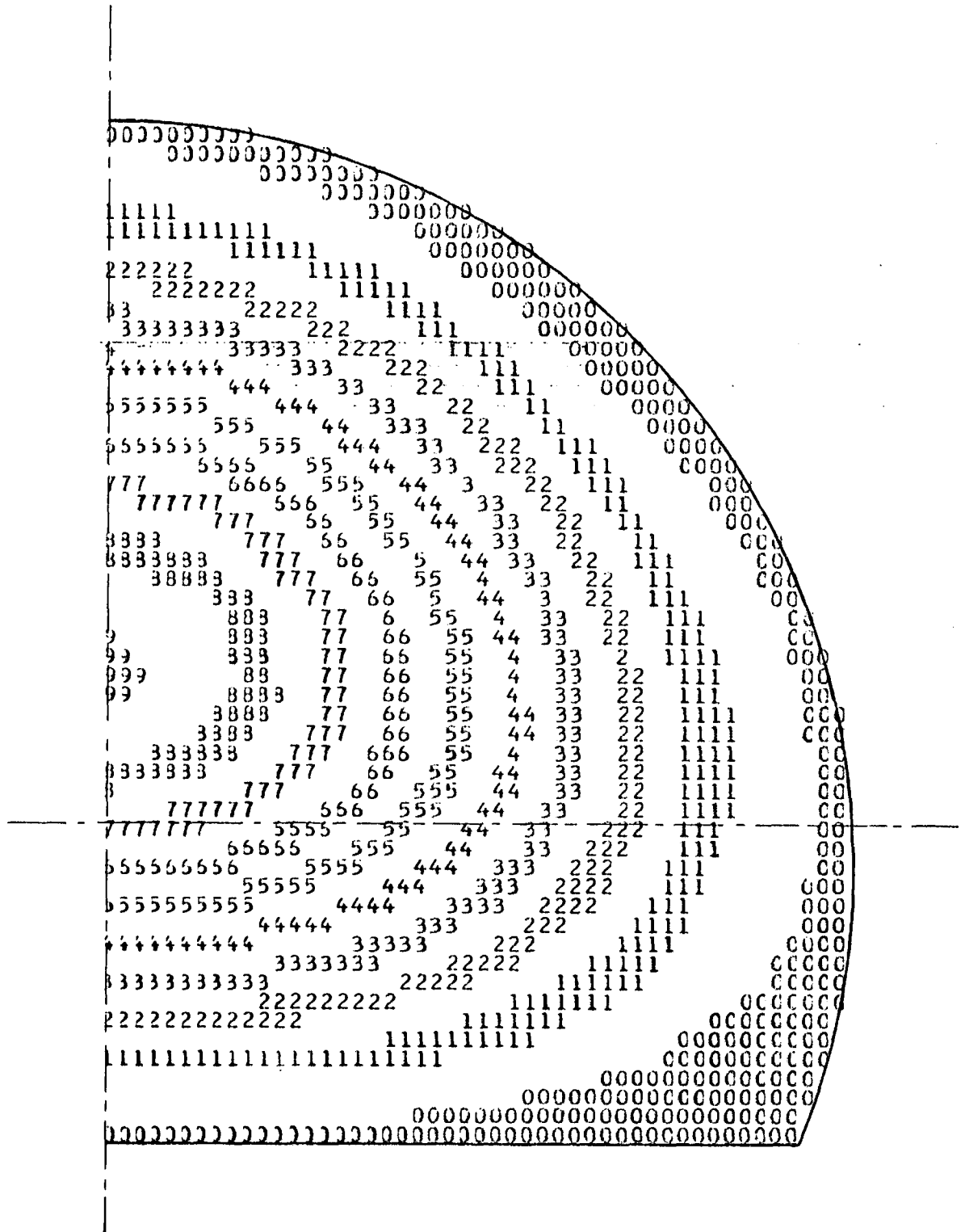
PLACA CIRCULAR CON CORTE SECANTE RIGIDAMENTE EMPOTRADA EN TODO
SU PERIMETRO ($b/a=0.5$)



$$\Omega = 14.09$$

GRAFICO 7

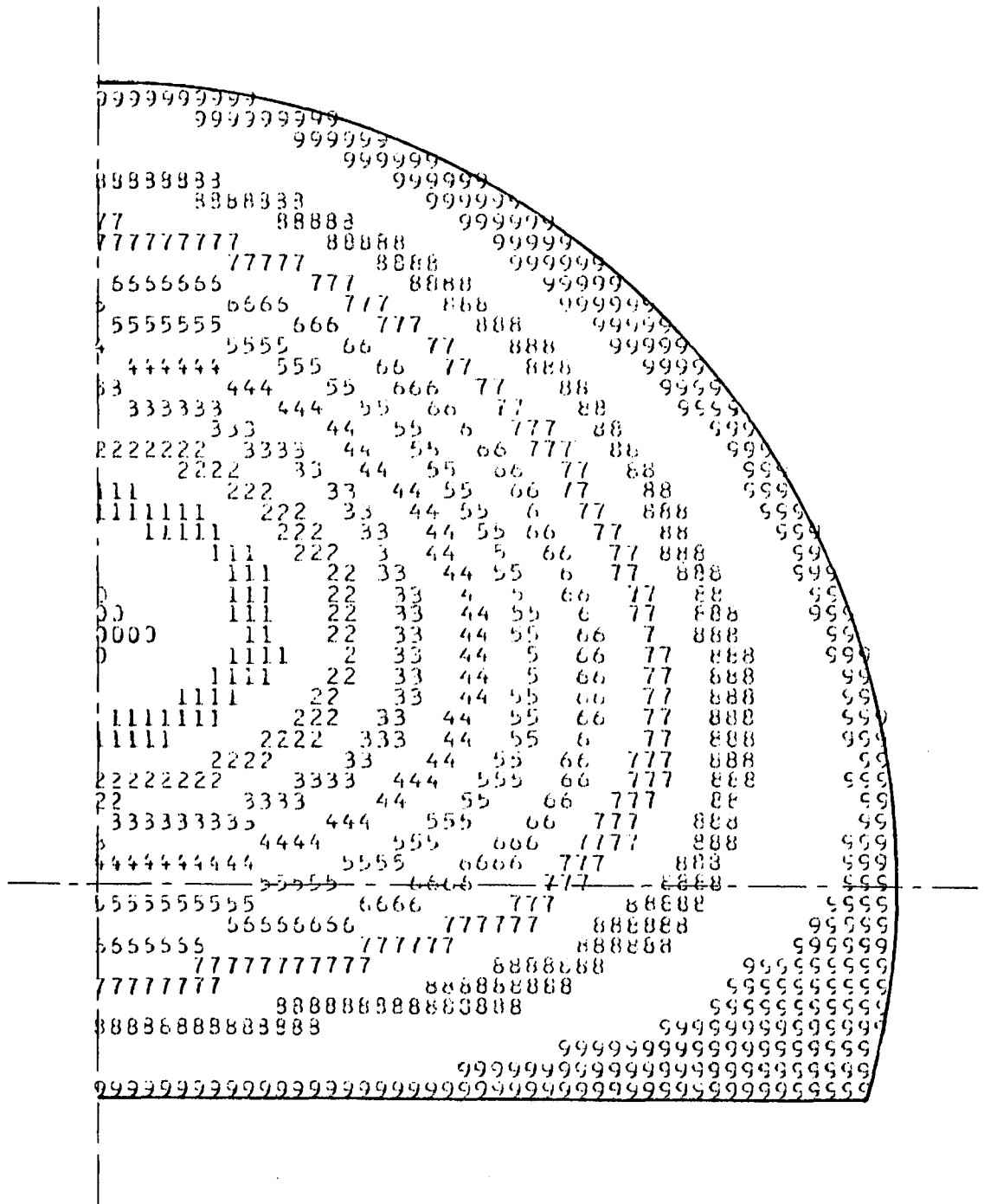
PLACA CIRCULAR CON CORTE SECANTE RIGIDAMENTE EMPOTRADA EN TODO
SU PERIMETRO ($b/a=0.4$)



$$\Omega = 15.71$$

GRAFICO 8

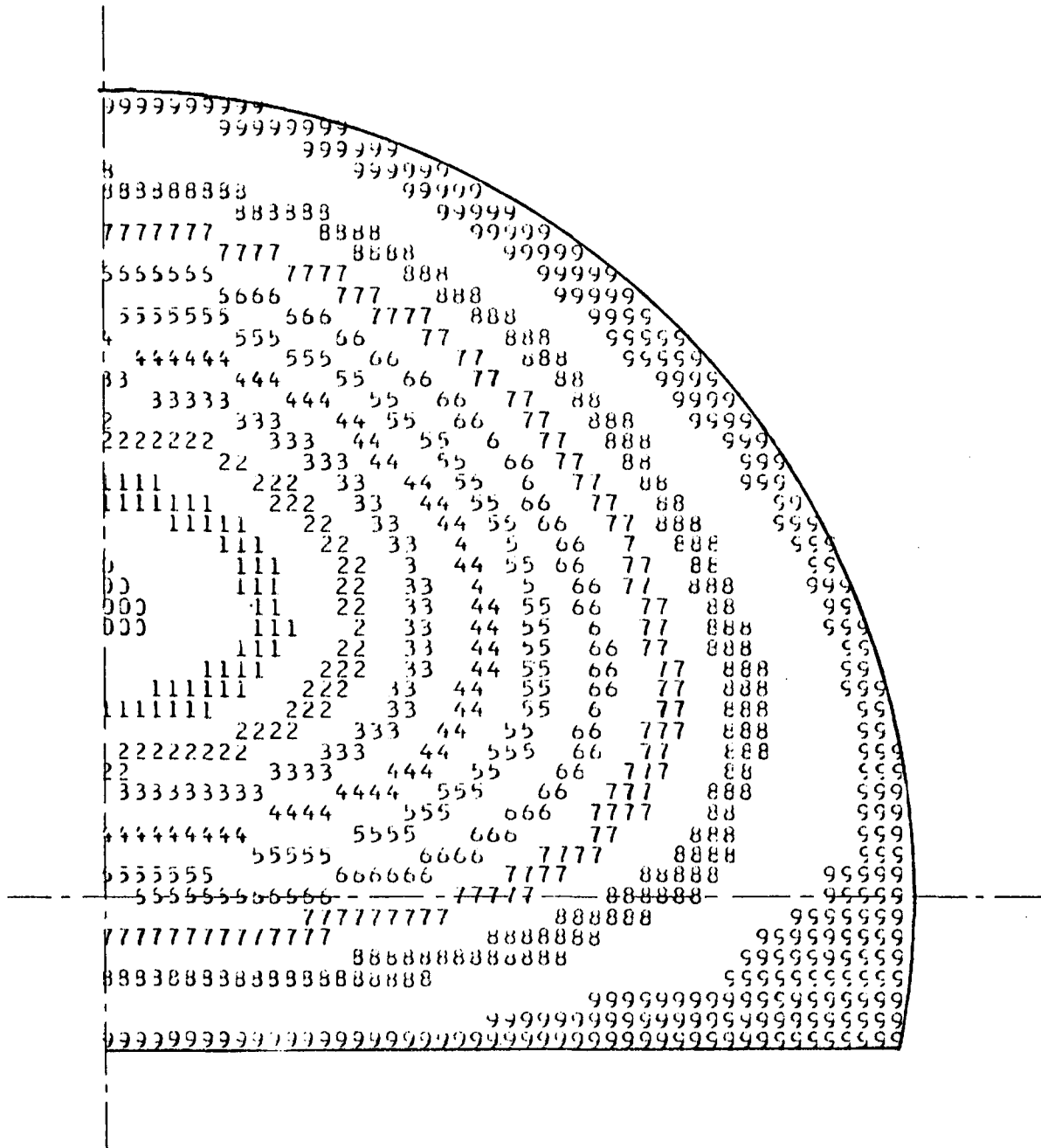
PLACA CIRCULAR CON CORTE SECANTE RIGIDAMENTE EMPOTRADA EN TODO
SU PERIMETRO ($b/a=0.3$)



$$\Omega = 17.78$$

GRAFICO 9

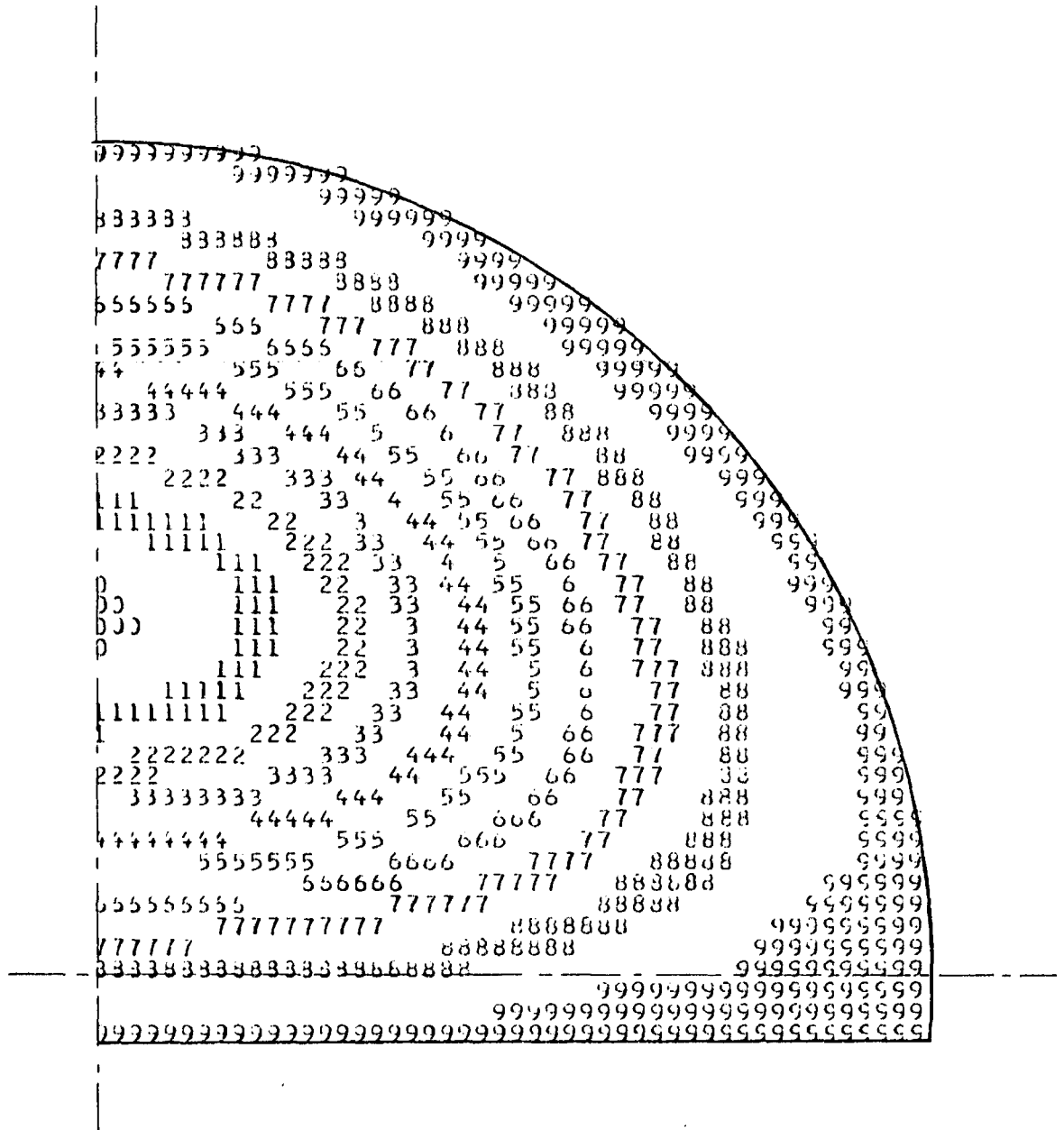
PLACA CIRCULAR CON CORTE SECANTE RIGIDAMENTE EMPOTRADA EN TODO
SU PERIMETRO ($b/a=0.2$)



$$\Omega = 20.42$$

GRAFICO 10

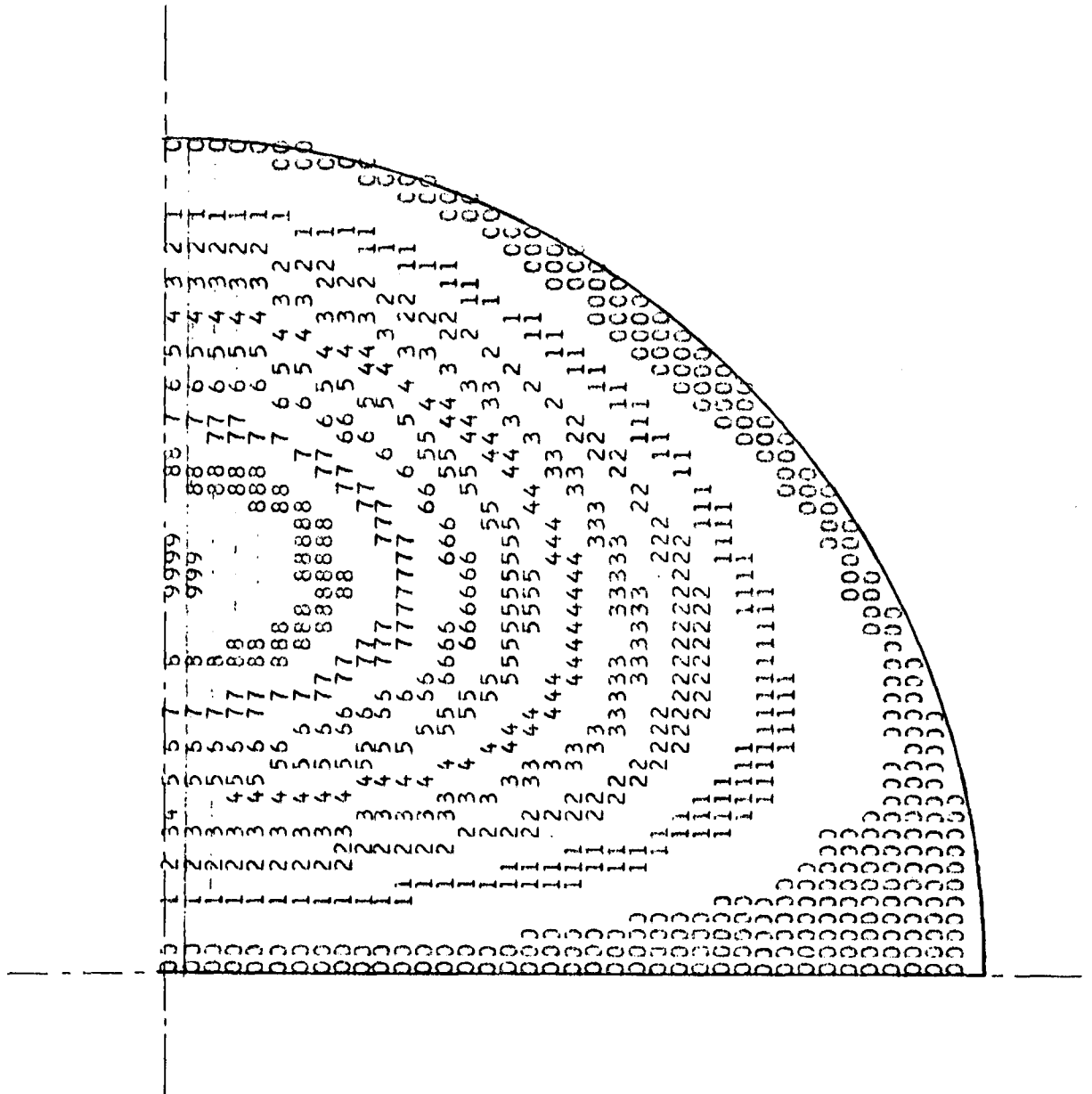
PLACA CIRCULAR CON CORTE SECANTE RIGIDAMENTE EMPOTRADA EN TODO
SU PERIMETRO ($b/a=0.1$)



$$\Omega = 23.83$$

GRAFICO 11

PLACA CIRCULAR CON CORTE SECANTE RIGIDAMENTE EMPOTRADA EN TODO
SU PERIMETRO ($b/a=0.0$)



$$\Omega = 28.84$$

PLACA CIRCULAR CON CORTE SECANTE SIMPLEMENTE APOYADO Y CON EL BORDE CURVO RIGIDAMENTE EMPOTRADO (ver figura 6). Analizamos la frecuencia de vibración del modo fundamental, en función de la profundidad del corte b:

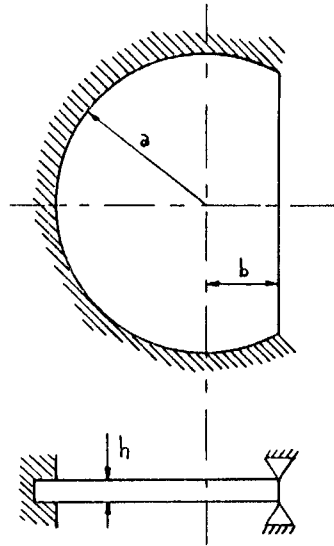


FIGURA 6

b/a	Ω_{00}
0.9	9.90
0.8	9.91
0.7	10.17
0.6	10.74
0.5	11.60
0.4	12.68
0.3	14.17
0.2	16.14
0.1	18.97
0.0	22.52

TABLA 17

Aquí también observamos que, a medida que la placa se hace más pequeña, la frecuencia de vibración aumenta, debido a la pérdida de masa, a pesar de que el borde simplemente apoyado tiene menor restricción que el borde rígidamente empotrado.

Comparando esta tabla con la del caso anterior, vemos que las frecuencias normales resultan menores, lo que está de acuerdo con el razonamiento físico de la menor restricción en este último caso.

PLACA CUADRADA CON TRES LADOS EMPOTRADOS: variación de la frecuencia de vibración fundamental en función del coeficiente de restricción del cuarto borde.

Este caso corresponde a la placa de la figura 4 en el caso de no tener corte en chanfle ($c=0$).

$\frac{b}{\phi_2 \cdot D}$	$\Omega_{00}^{\#}$	Ω_{00}^*	Ω_{00}^+
∞	35.78	35.999	-
100.	35.62	35.663	35.668
32.	34.79	35.099	-
10.	33.87	34.037	34.051
3.2	32.84	32.935	-
1.0	32.05	32.269	32.275
0.0	31.41	31.867	31.868

exacto:
35.99

TABLA 18

solución por elementos finitos

* solución por método variacional (4 funciones)

+ resultados de /3/

Los resultados figuran comparados con los obtenidos mediante métodos variacionales y también con los de /3/. Si bien los resultados (*) presentan una gran coincidencia con los de /3/, debemos advertir que en ese trabajo también se usó un método variacional (método de Galerkin).

Observamos que los resultados de elementos finitos dan valores ligeramente menores a los del otro método, esto está de acuerdo con el hecho que los métodos variacionales dan resultados que son cotas superiores para las frecuencias de vibración.

La comparación con el resultado exacto nos dice, sin embargo, que los resultados de elementos finitos nos dan por debajo de los valores verdaderos, por lo menos en ese caso. De todos modos, la discrepancia es menor que el 1%.

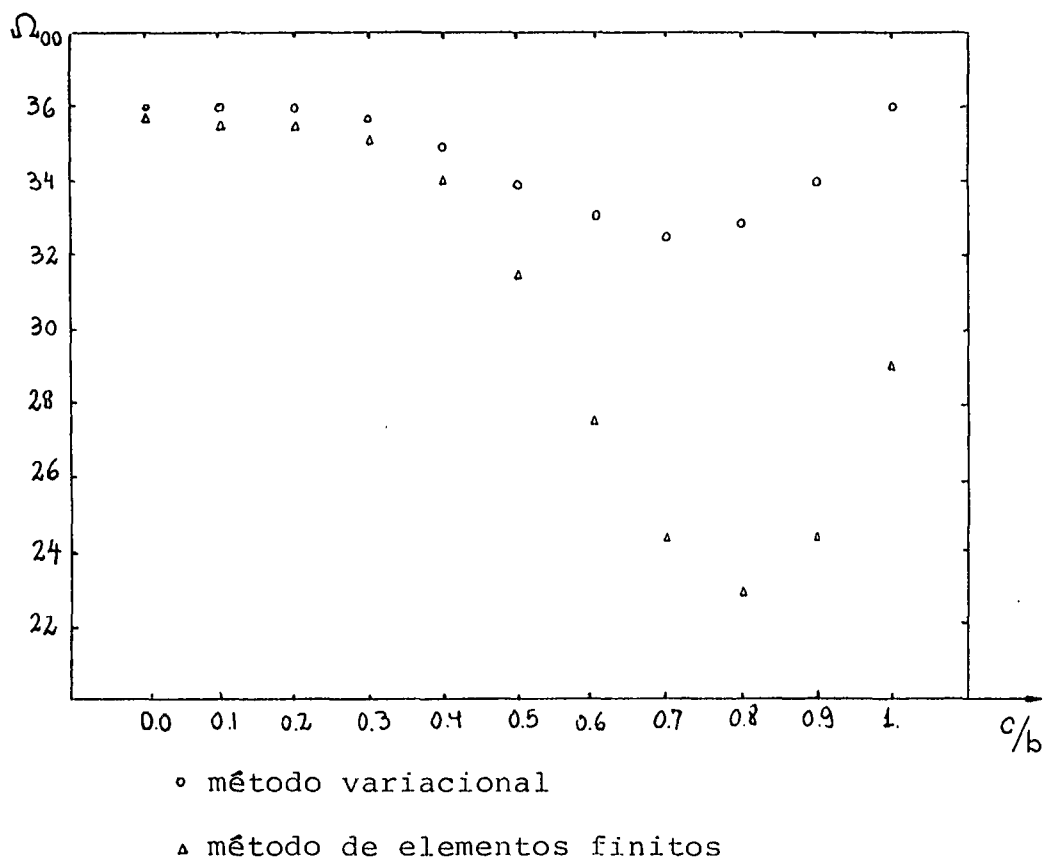
PLACA CUADRADA EMPOTRADA CON CORTE EN CHANFLE LIBRE : este caso también corresponde a la placa de la figura 4, con los cuatro bordes no cortados rígidamente empotrados.

Hemos estudiado la variación de la frecuencia fundamental de vibración en función de la profundidad del corte c/b

c/b	Ω_{00}
0.0	35.78
0.1	35.55
0.2	35.45
0.3	35.04
0.4	34.01
0.5	31.45
0.6	27.54
0.7	24.38
0.8	22.97
0.9	24.38
1.0	28.95

TABLA 19

Estos resultados los comparamos en el gráfico siguiente con los obtenidos por métodos variacionales:



Observemos que ambas curvas presentan igual comportamiento, o sea que la frecuencia disminuye hasta un mínimo y luego comienza a aumentar. Esto se debe a las dos causas que ya habíamos citado y que tienen efectos opuestos, una es la pérdida de masa de la placa, y la otra la pérdida de restricciones al movimiento, que hacen aumentar y disminuir la frecuencia respectivamente.

De todos modos, ambas curvas difieren bastante entre sí sobre todo cuando el corte es pronunciado, y la solución de elementos finitos provee resultados notablemente menores que los de la solución variacional.

Ahora bien, cuando el corte es pronunciado sabemos que la solución variacional es poco confiable, ya que obliga a las funciones base a cumplir con las condiciones de contorno de la placa completa, y sólo tiene en cuenta el corte al integrar la función energía sobre la placa. Este es el defecto más importante del método variacional usado y se hace más notable precisamente cuando el corte es pronunciado, dando resultados superiores a los reales.

Por otra parte, no encontramos ninguna razón para suponer incorrecta la solución por elementos finitos, en consecuencia suponemos que la frecuencia de vibración sigue aproximadamente la curva inferior.

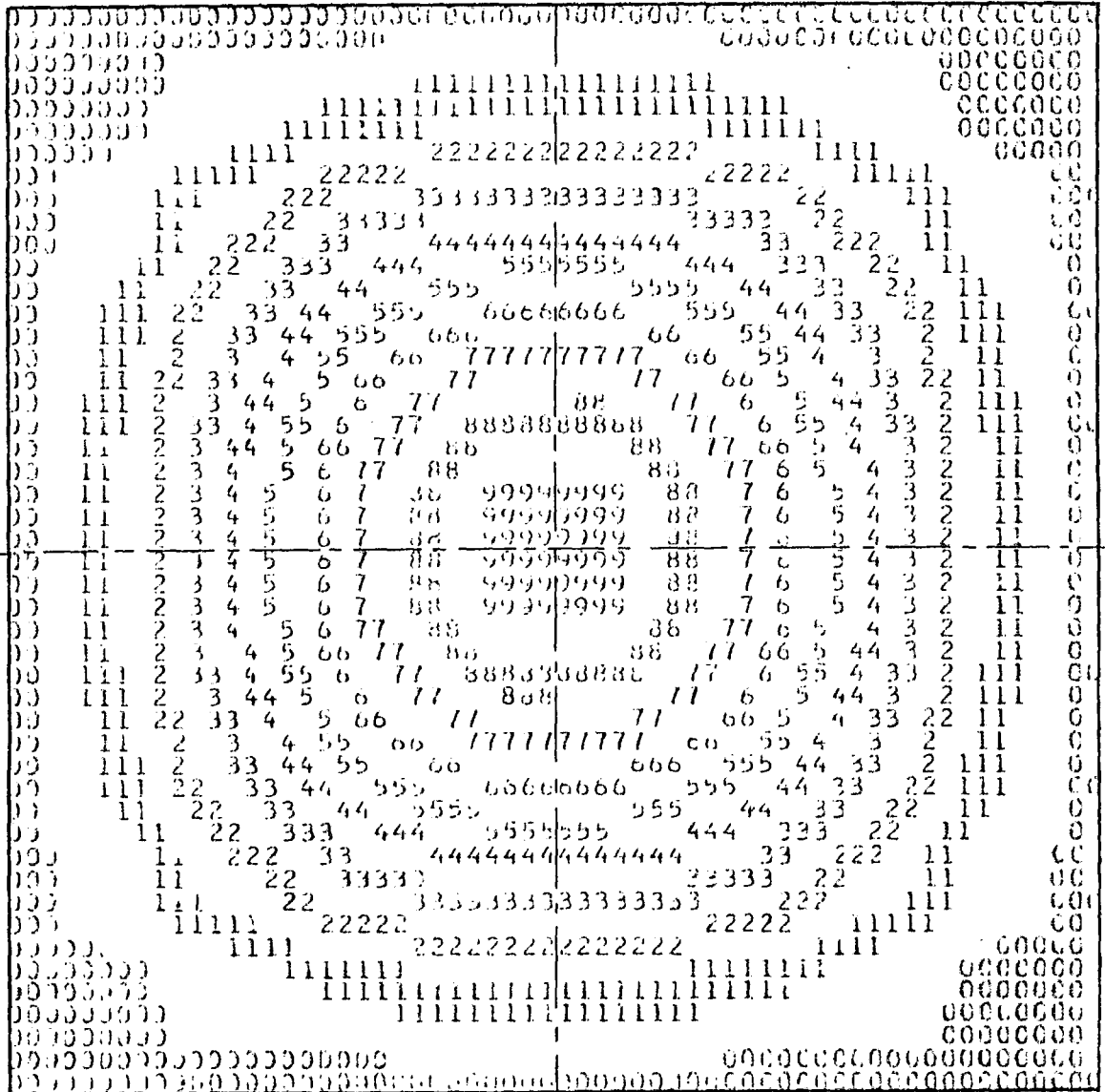
Hemos representado el modo fundamental de vibración para la placa en cuestión en los once casos tabulados, utilizando "curvas de nivel" en los gráficos siguientes.

Observando estos gráficos, vemos que el modo de vibración no es simétrico con respecto a la diagonal de la placa, principalmente si el corte es pronunciado, lo que de alguna manera confirma nuestro razonamiento de los párrafos anterioro

res, ya que la solución variacional obliga al modo a ser simétrico respecto de la diagonal, y no hay razón para pensar que el modo real de vibración deba tener esa simetría.

GRAFICO 12

PLACA CUADRADA RIGIDAMENTE EMPOTRADA CON CORTE EN CHANFLE
LIBRE EN UNA ESQUINA ($c/b = 0.0$)

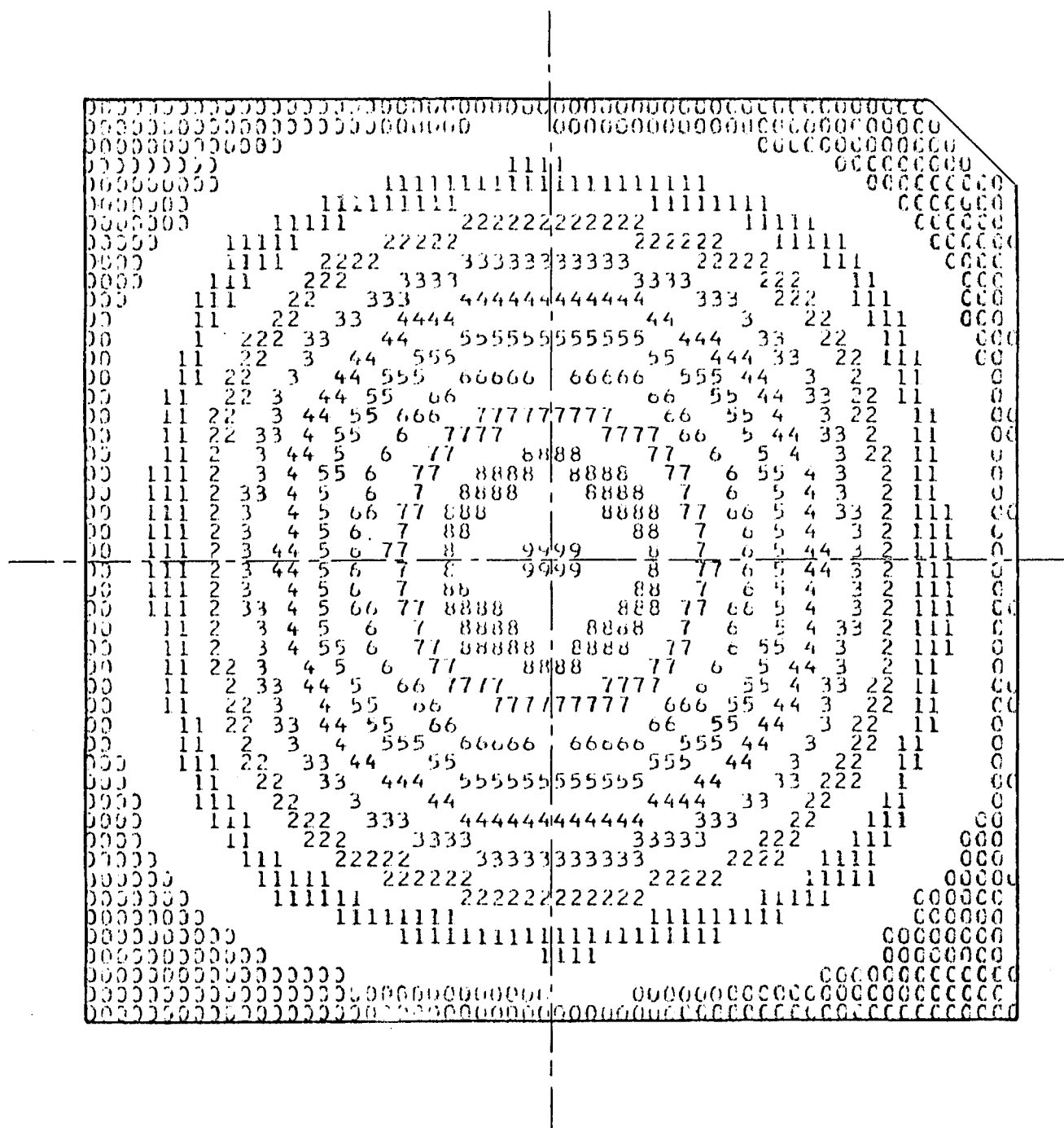


$$\Omega = 35.78$$

GRAFICO 13

PLACA CUADRADA RIGIDAMENTE EMPOTRADA CON CORTE EN CHANFLE

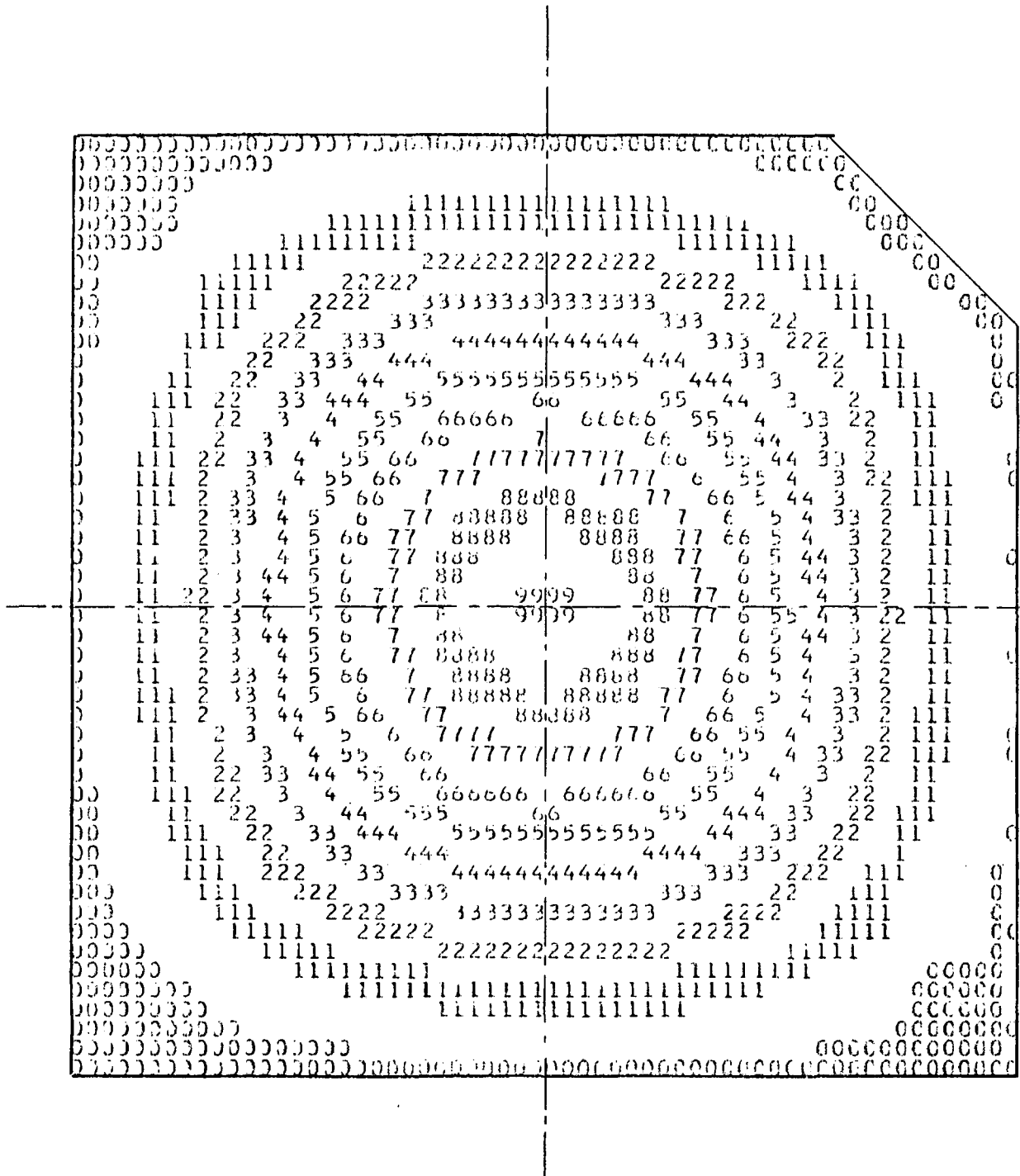
LIBRE EN UNA ESQUINA ($c/b = 0.1$)



$$\Omega = 35.55$$

GRAFICO 14

PLACA CUADRADA RIGIDAMENTE EMPOTRADA CON CORTE EN CHANFLE
LIBRE EN UNA ESQUINA ($c/b = 0.2$)

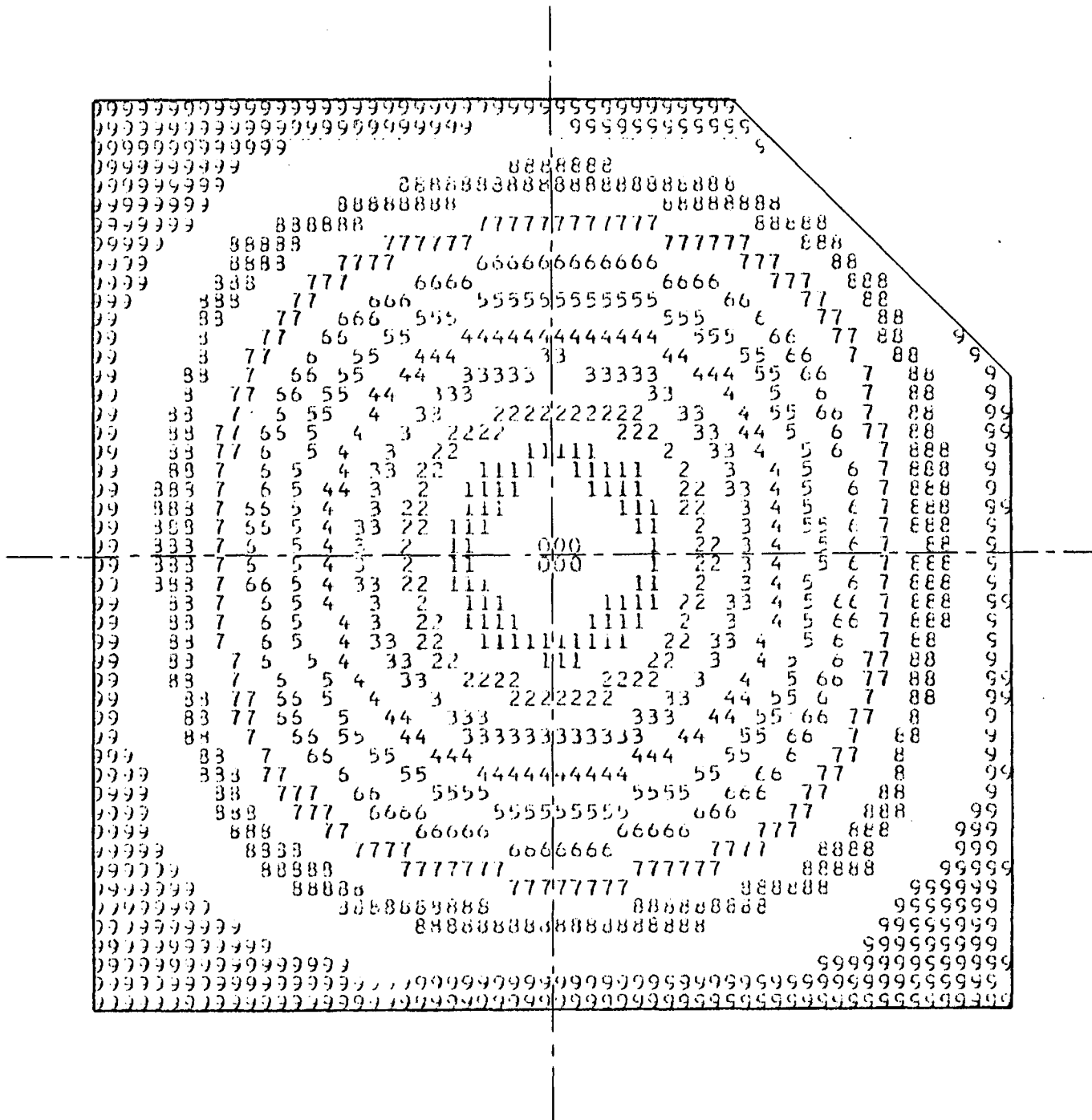


$$\Omega = 35.45$$

GRAFICO 1.5

PLACA CUADRADA RIGIDAMENTE EMPOTRADA CON CORTE EN CHANFLE

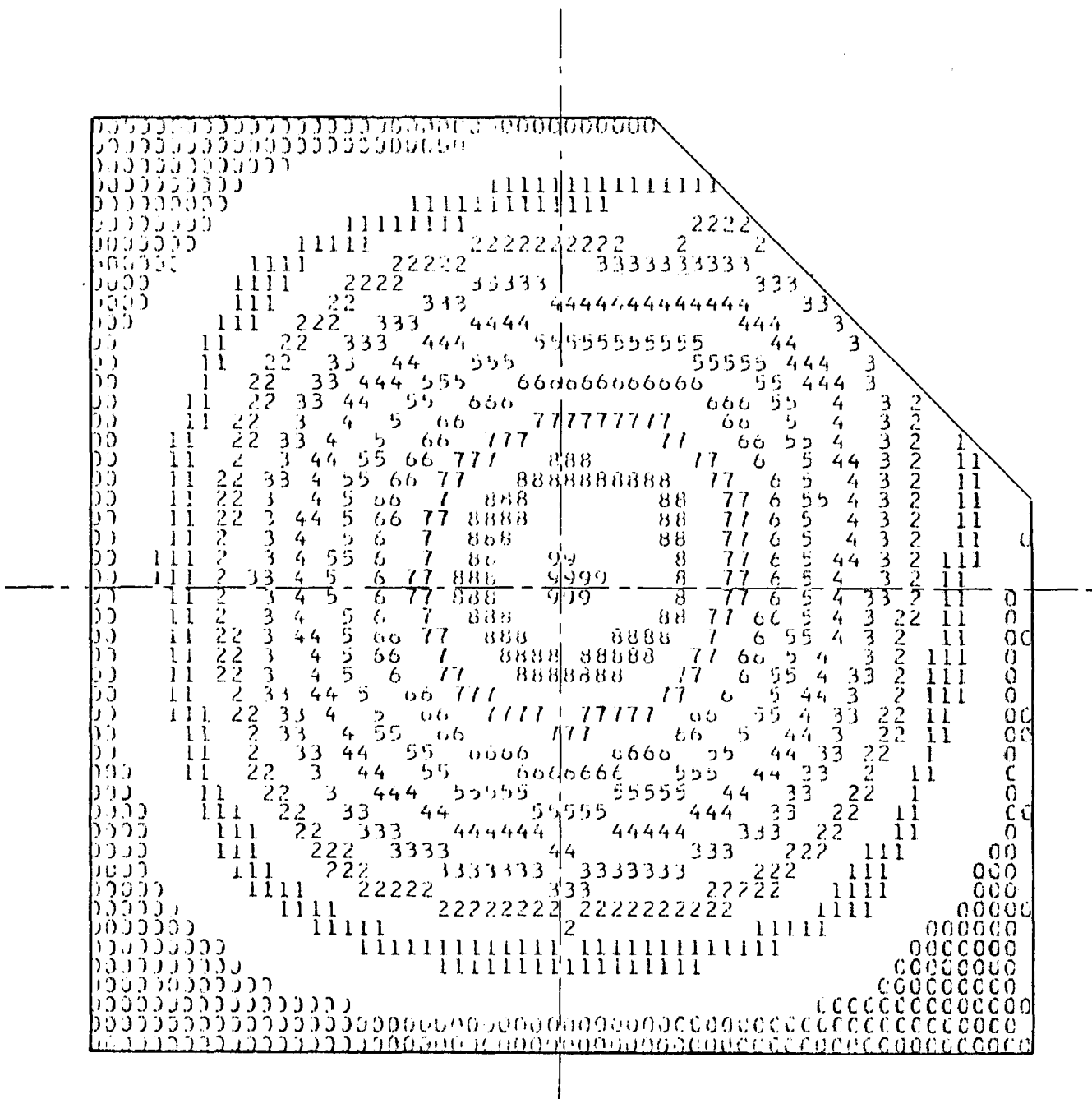
LIBRE EN UNA ESQUINA ($c/b = 0.3$)



$$\Omega = 35.04$$

GRÁFICO 16

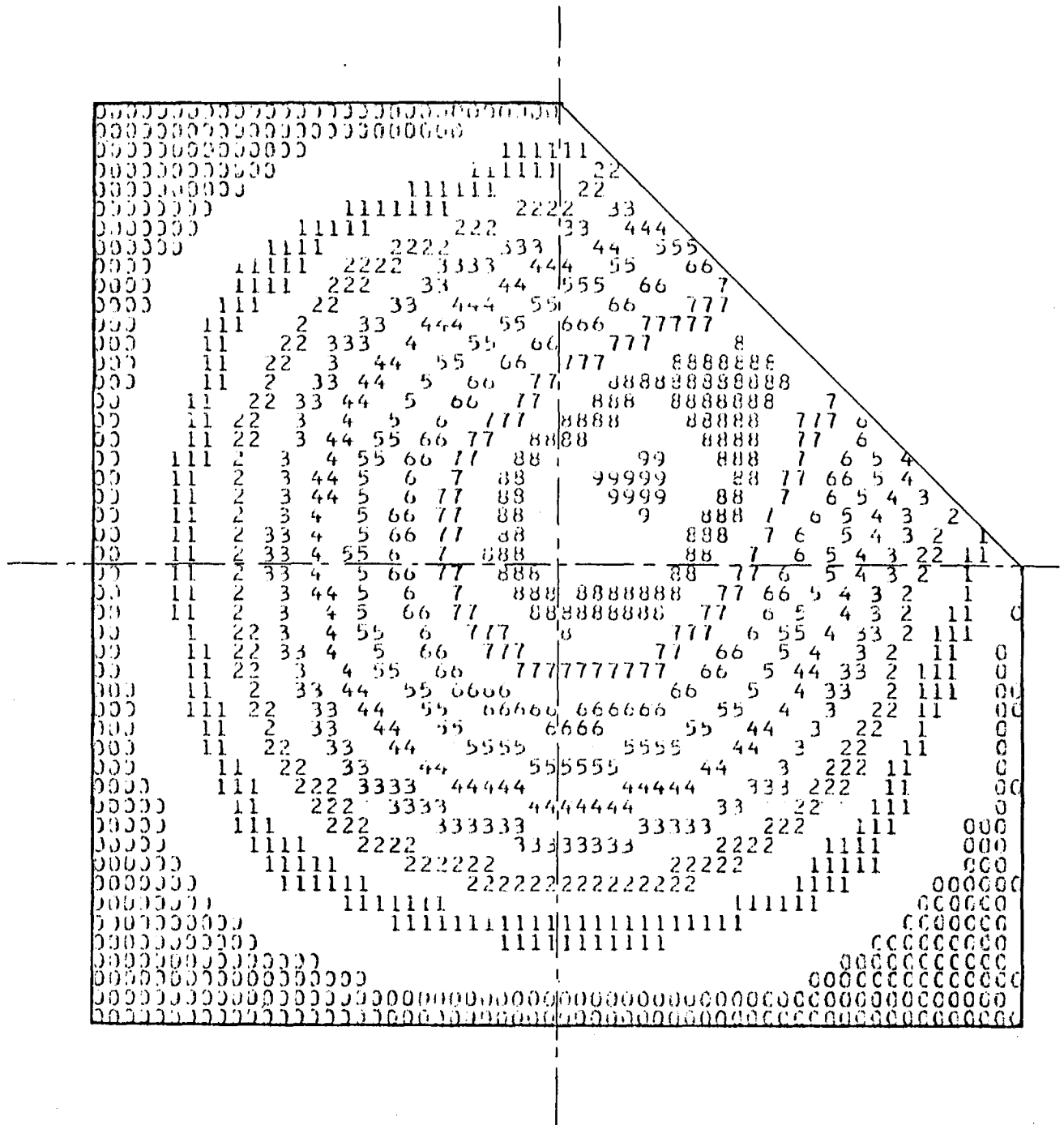
PLACA CUADRADA RIGIDAMENTE EMPOTRADA CON CORTE EN CHANFLE
LIBRE EN UNA ESQUINA ($c/b = 0.4$)



$$\Omega = 34.01$$

GRAFICO 17

PLACA CUADRADA RIGIDAMENTE EMPOTRADA CON CORTE EN CHANFLE
LIBRE EN UNA ESQUINA ($c/b = 0.5$)

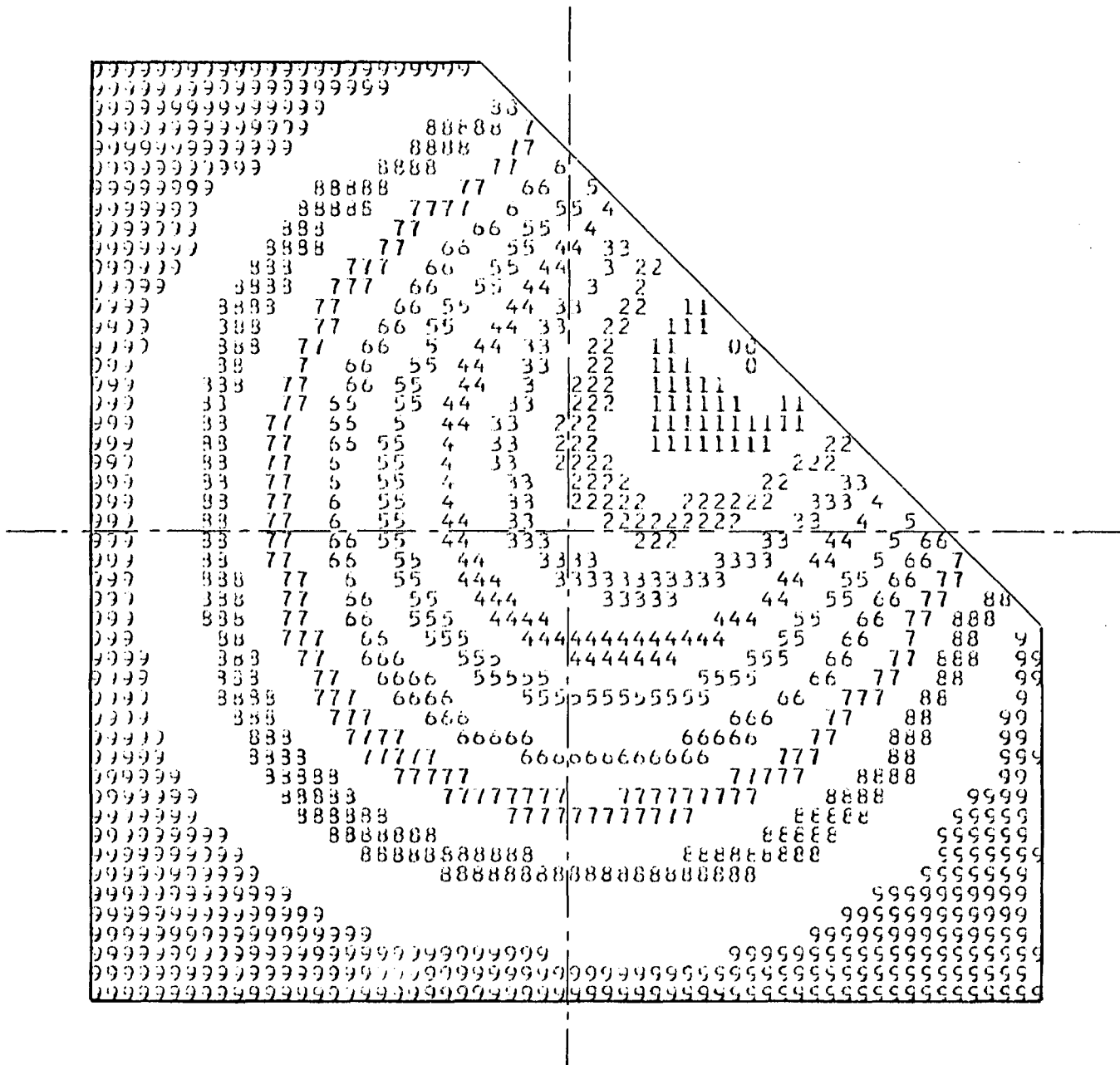


$$\Omega = 31.45$$

GRAFICO 18

PLACA CUADRADA RIGIDAMENTE EMPOTRADA CON CORTE EN CHANFLE

LIBRE EN UNA ESQUINA ($c/b = 0.6$)

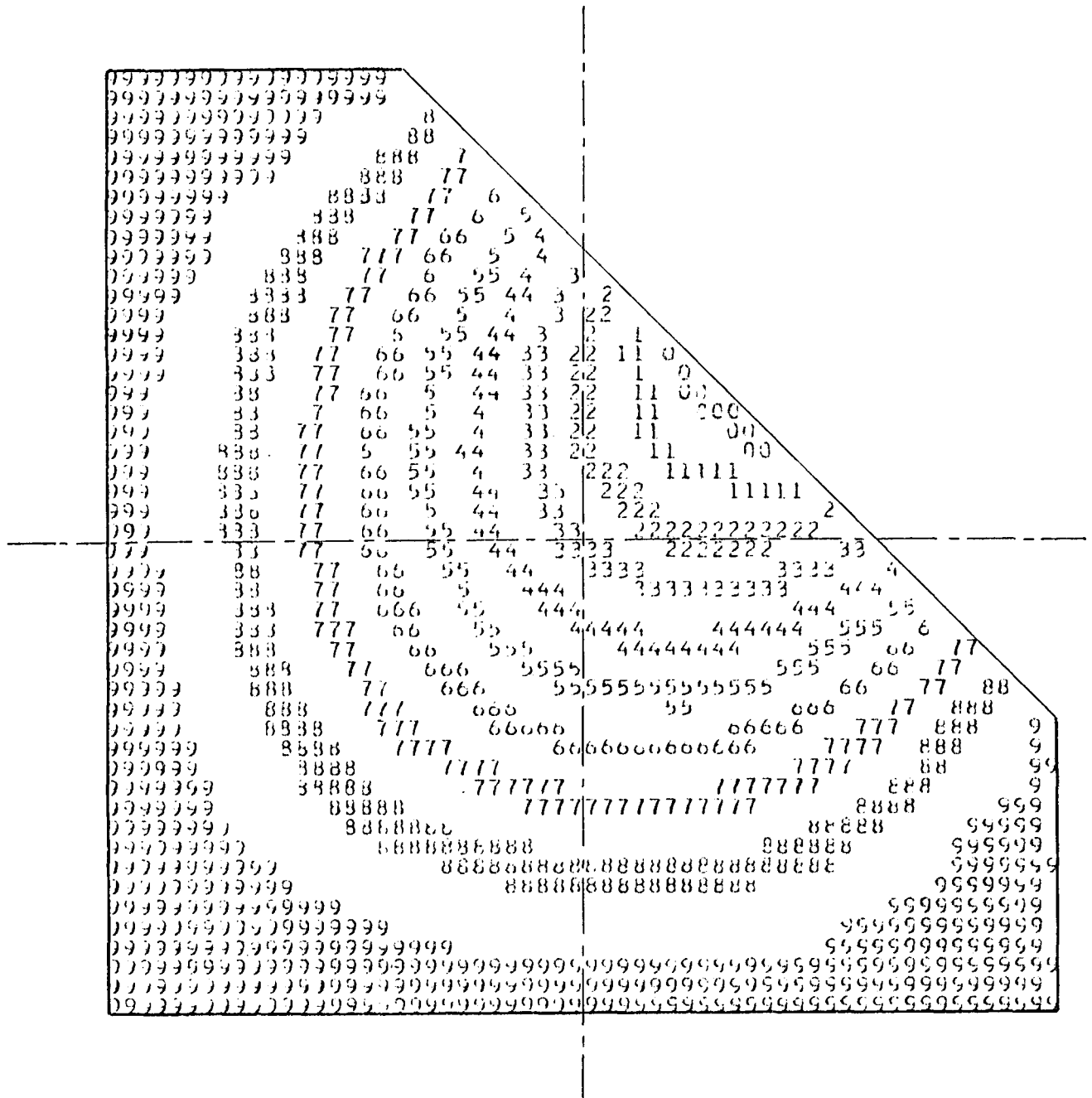


$$\Omega = 27.54$$

GRAFICO 19

PLACA CUADRADA RIGIDAMENTE EMPOTRADA CON CORTE EN CHANFLE

LIBRE EN UNA ESQUINA ($c/b = 0.7$)

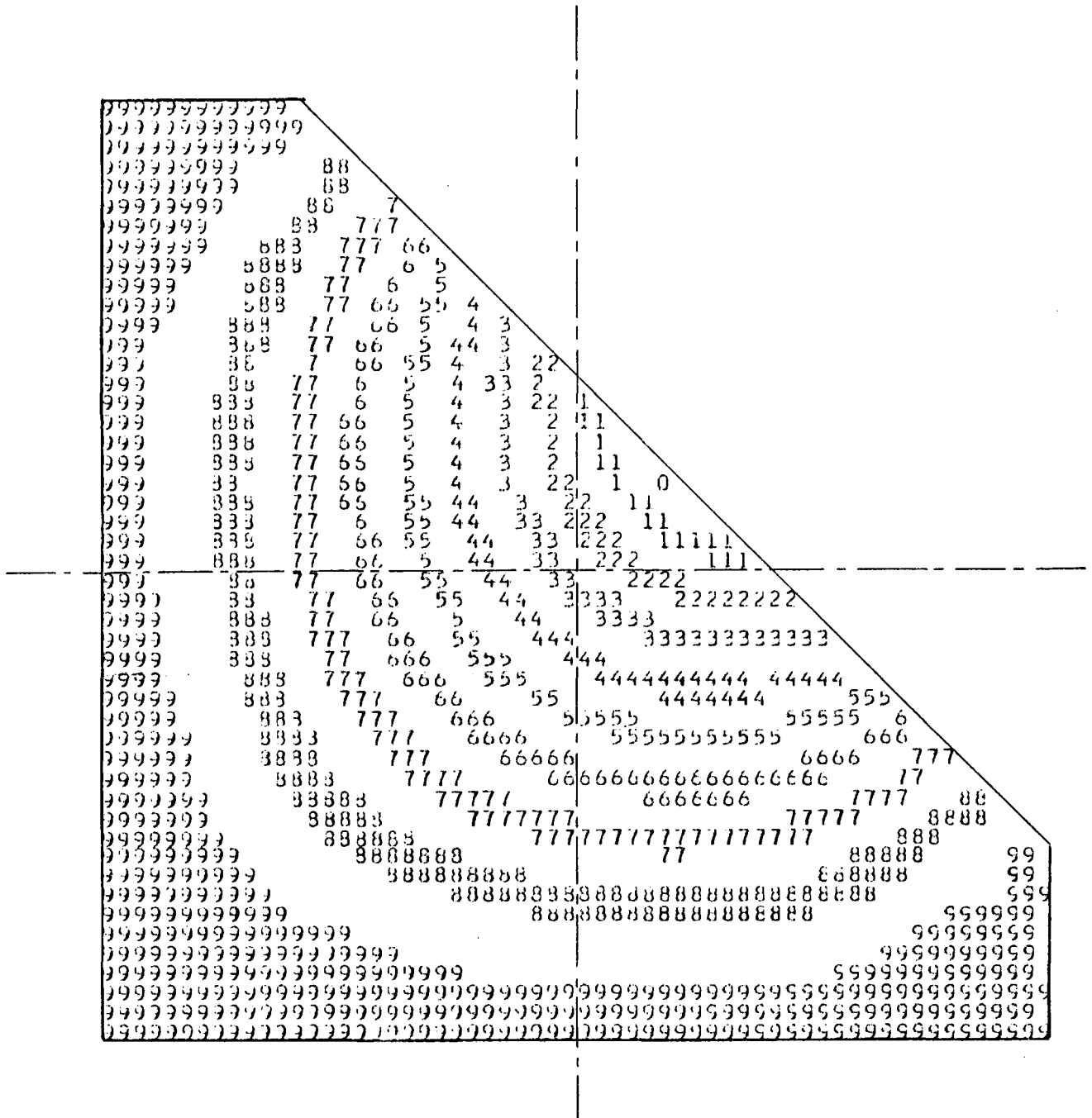


$$\Omega = 24.38$$

GRAFICO 20

PLACA CUADRADA RIGIDAMENTE EMPOTRADA CON CORTE EN CHANFLE

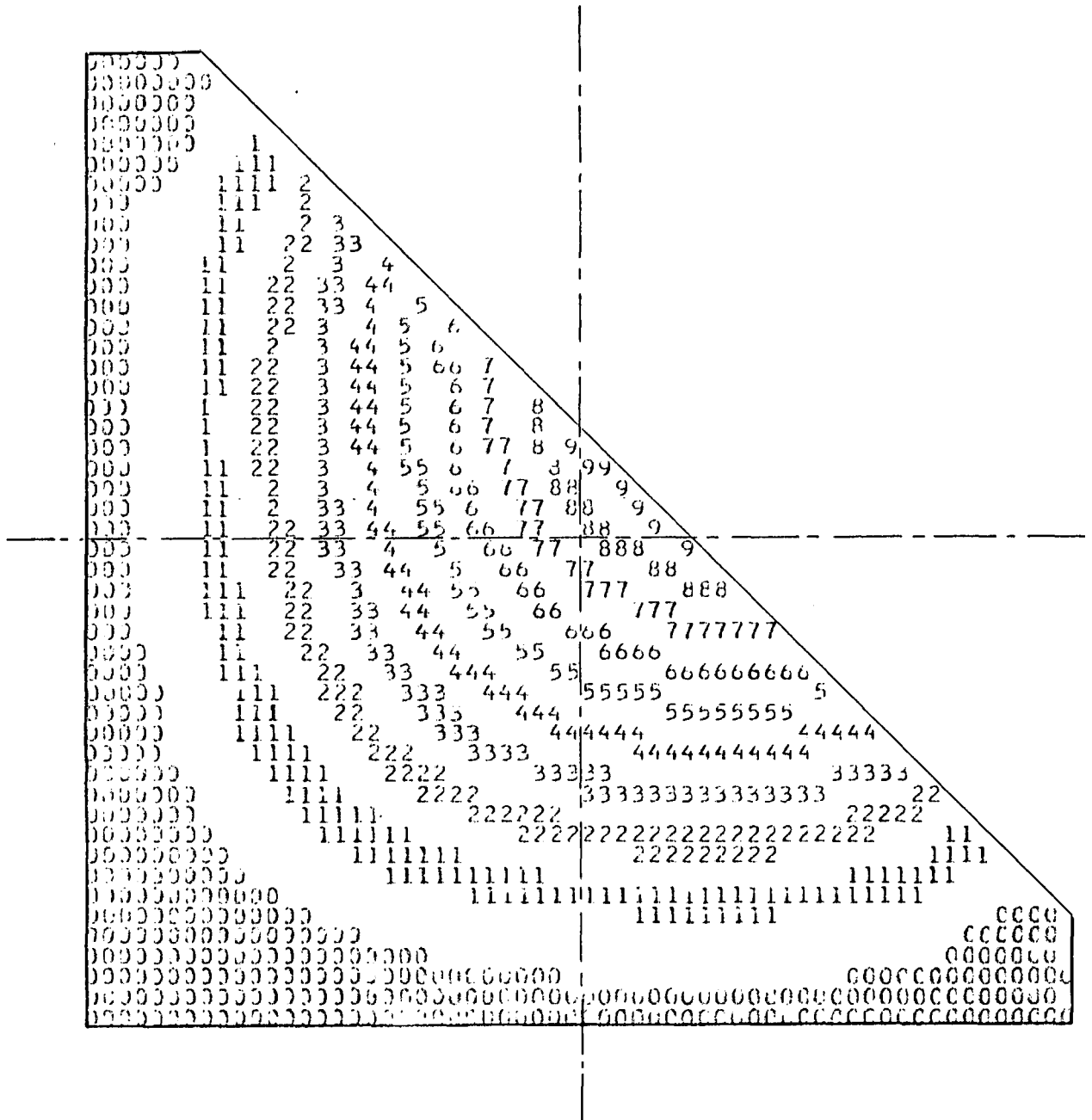
LIBRE EN UNA ESQUINA ($c/b = 0.8$)



$$\Omega = 22.97$$

GRAFICO 21

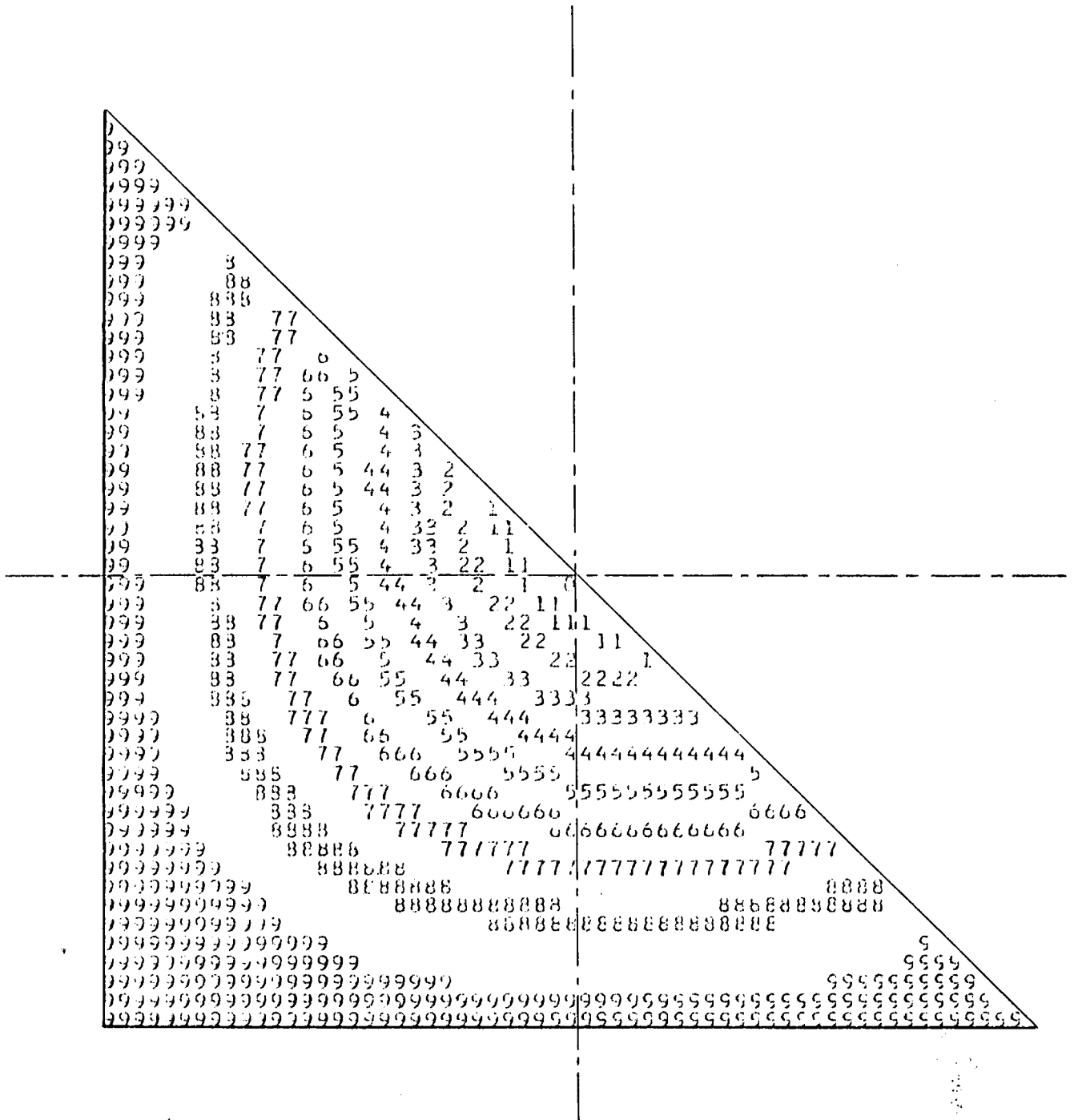
PLACA CUADRADA RIGIDAMENTE EMPOTRADA CON CORTE EN CHANFLE
LIBRE EN UNA ESQUINA ($c/b = 0.9$)



$$\Omega = 24.38$$

GRÁFICO 22

PLACA CUADRADA RIGIDAMENTE EMPOTRADA CON CORTE EN CHANFLE
LIBRE EN UNA ESQUINA ($c/b = 1.0$)



$$\Omega = 28.95$$

PLACA CUADRADA RIGIDAMENTE EMPOTRADA: MODOS SUPERIORES DE VI
BRACION. Obtuvimos los siguientes valores de las frecuencias
normales de vibración de la placa para modos superiores:

modo	Ω	Ω (de /10/)
0	35.78	35.992
1	72.82	73.413
2	106.63	108.27
3	130.84	131.64
4	161.84	
5	214.44	
6	306.67	
7	333.66	
8	451.04	
9	536.68	
10	562.27	

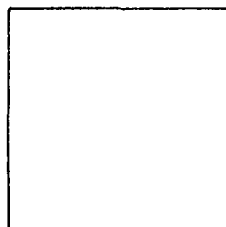
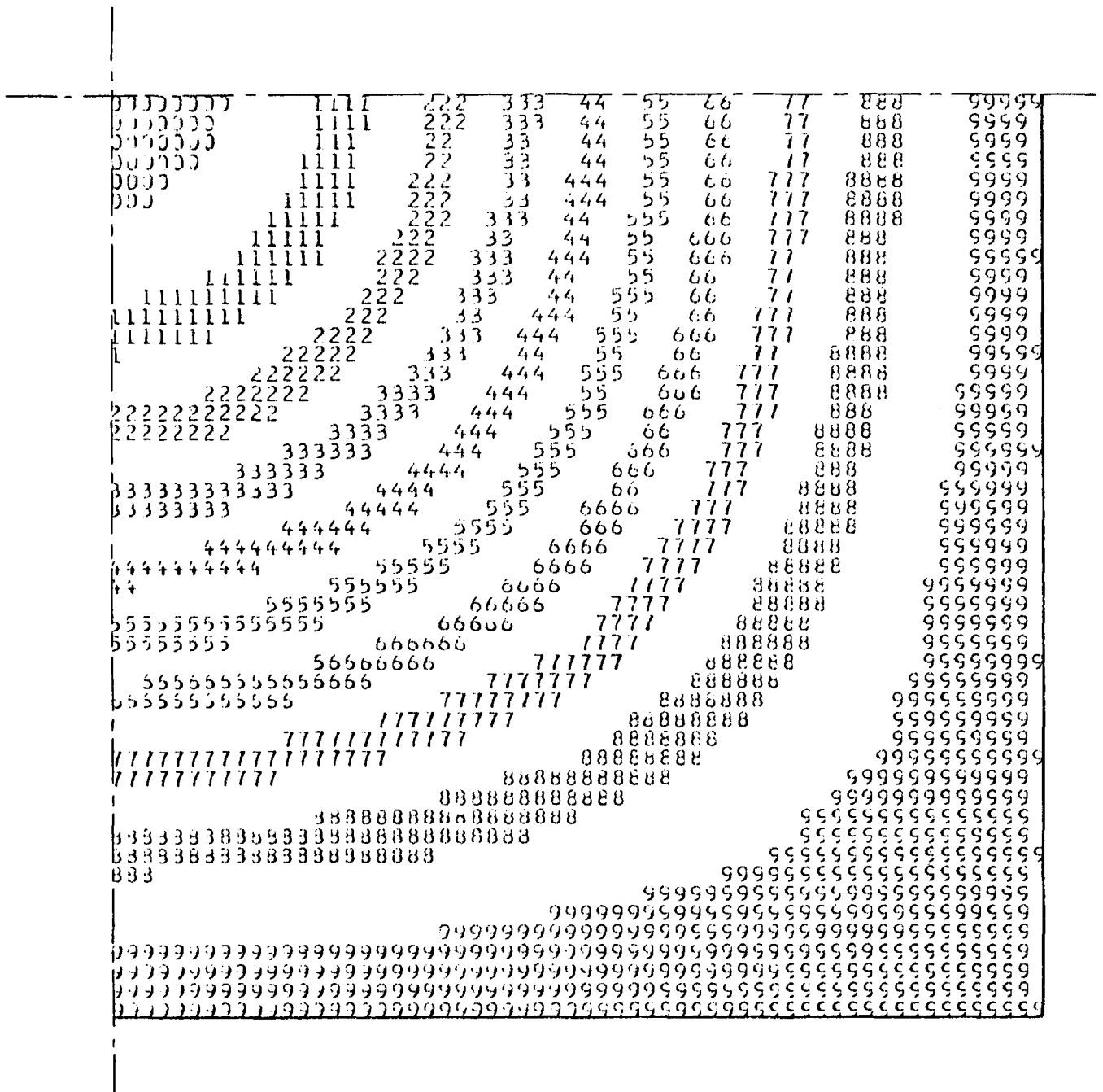
TABLA 20

Estos modos de vibración están representados por las cur
vas de nivel de las autofunciones correspondientes en los on-
ce gráficos siguientes, en los cuales se ve sólo un cuarto de
la placa completa, por razones de simetría.

Observamos un acuerdo aceptable entre los valores aquí
obtenidos y los que encontramos en la bibliografía, al menos
para los cuatro primeros modos, que son los que pudimos compa
rar.

GRAFICO 23

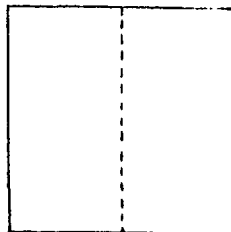
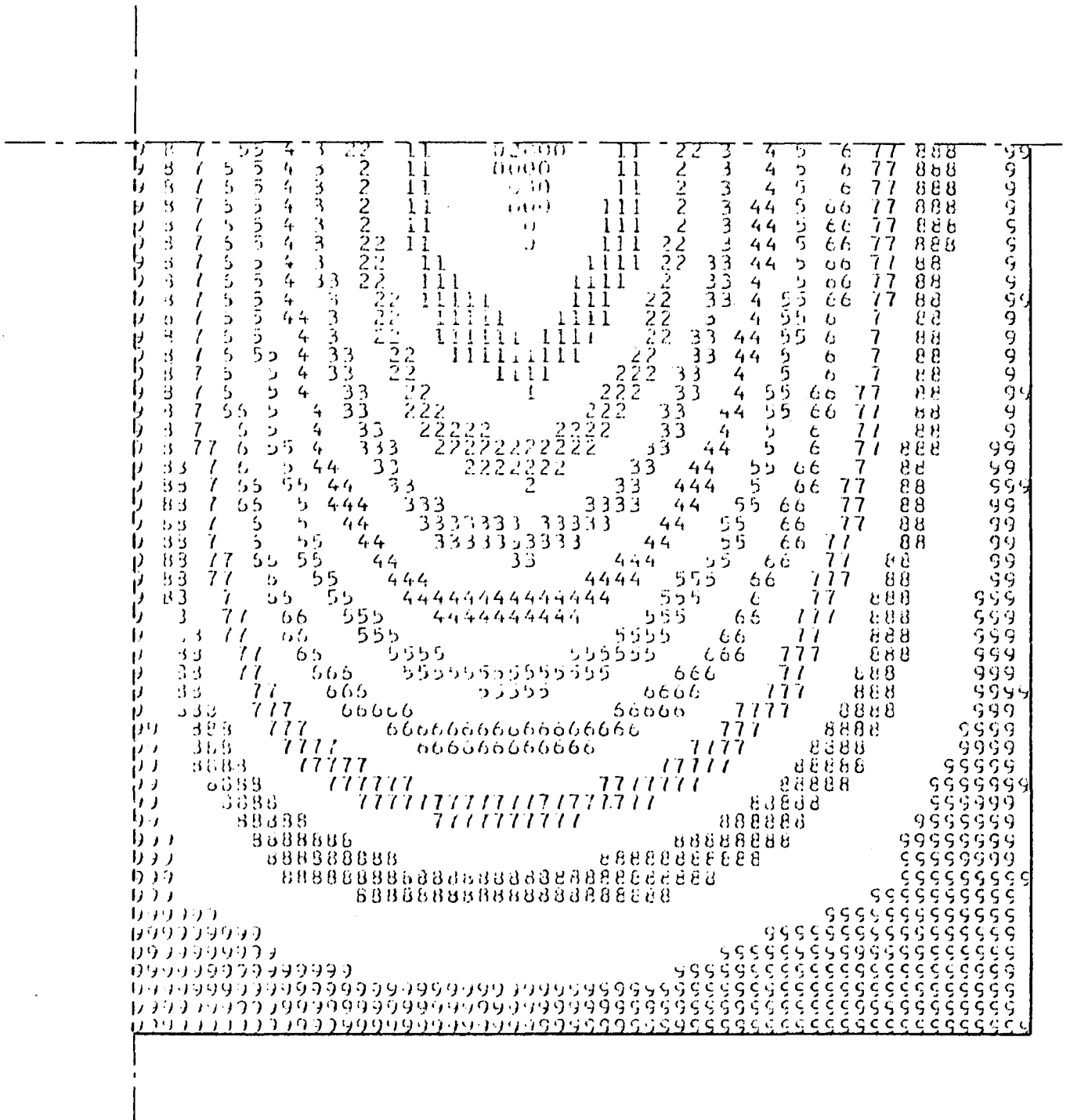
PLACA CUADRADA RIGIDAMENTE EMPOTRADA: MODO DE VIBRACION 0



$$\Omega = 35.78$$

GRAFICO 24

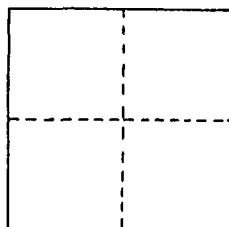
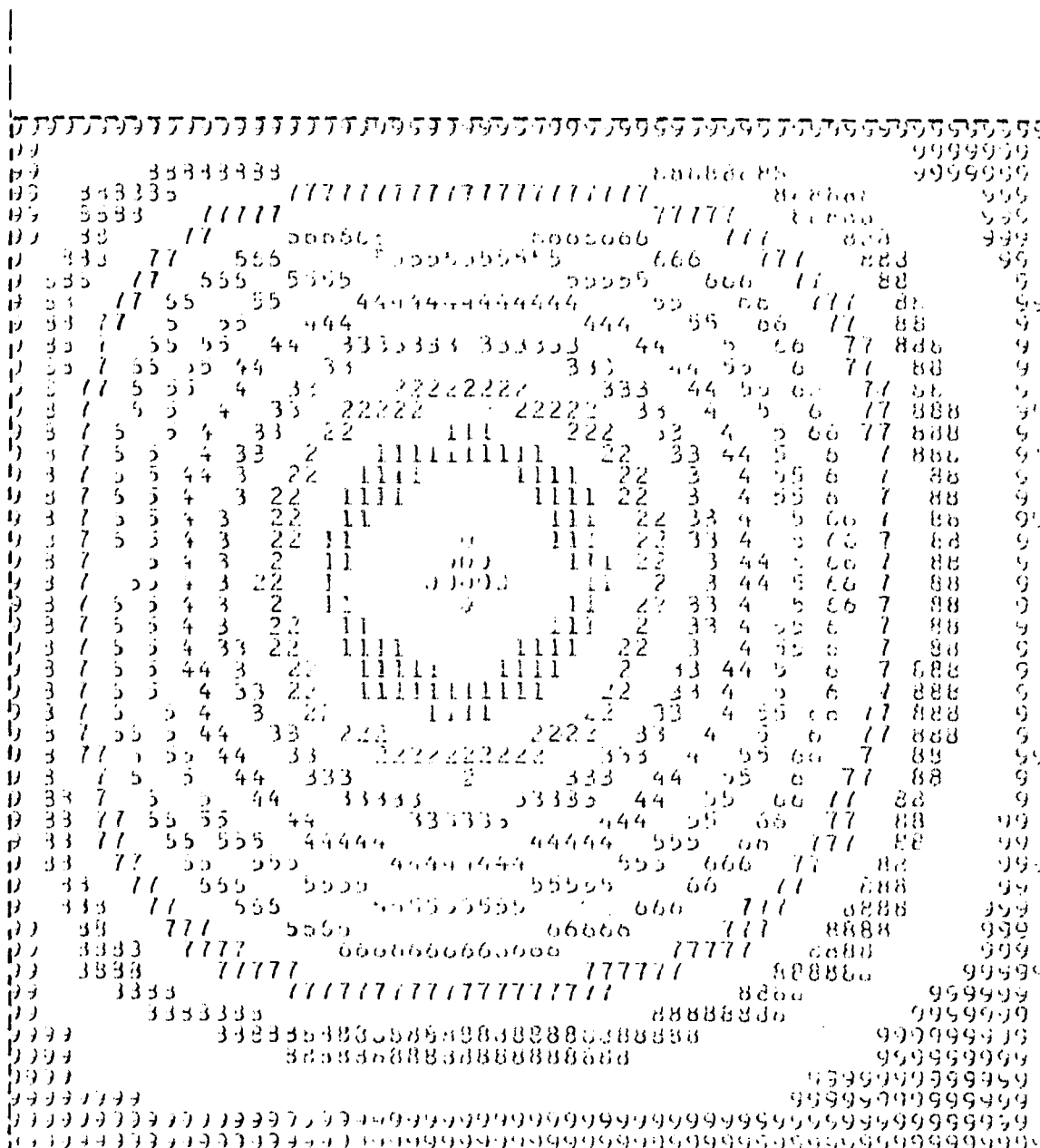
PLACA CUADRADA RIGIDAMENTE EMPOTRADA: MODO DE VIBRACION 1



$$\Omega = 72.82$$

GRAFICO 25

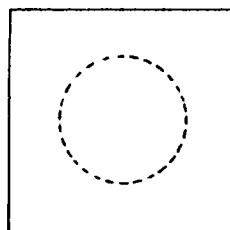
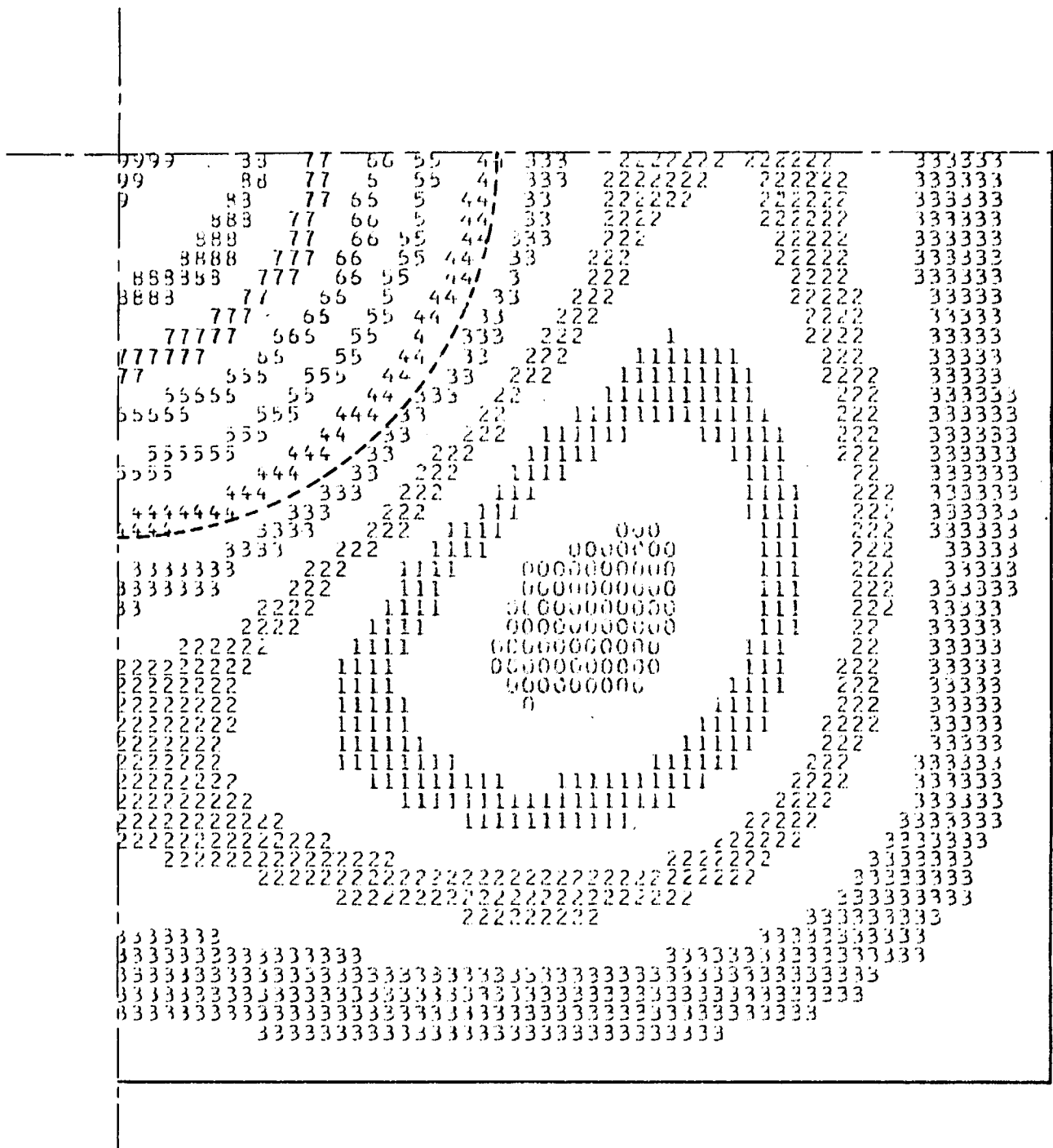
PLACA CUADRADA RIGIDAMENTE EMPOTRADA: MODO DE VIBRACION 2



$$\Omega = 106.63$$

GRAFICO 26

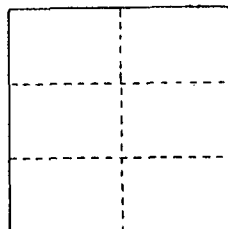
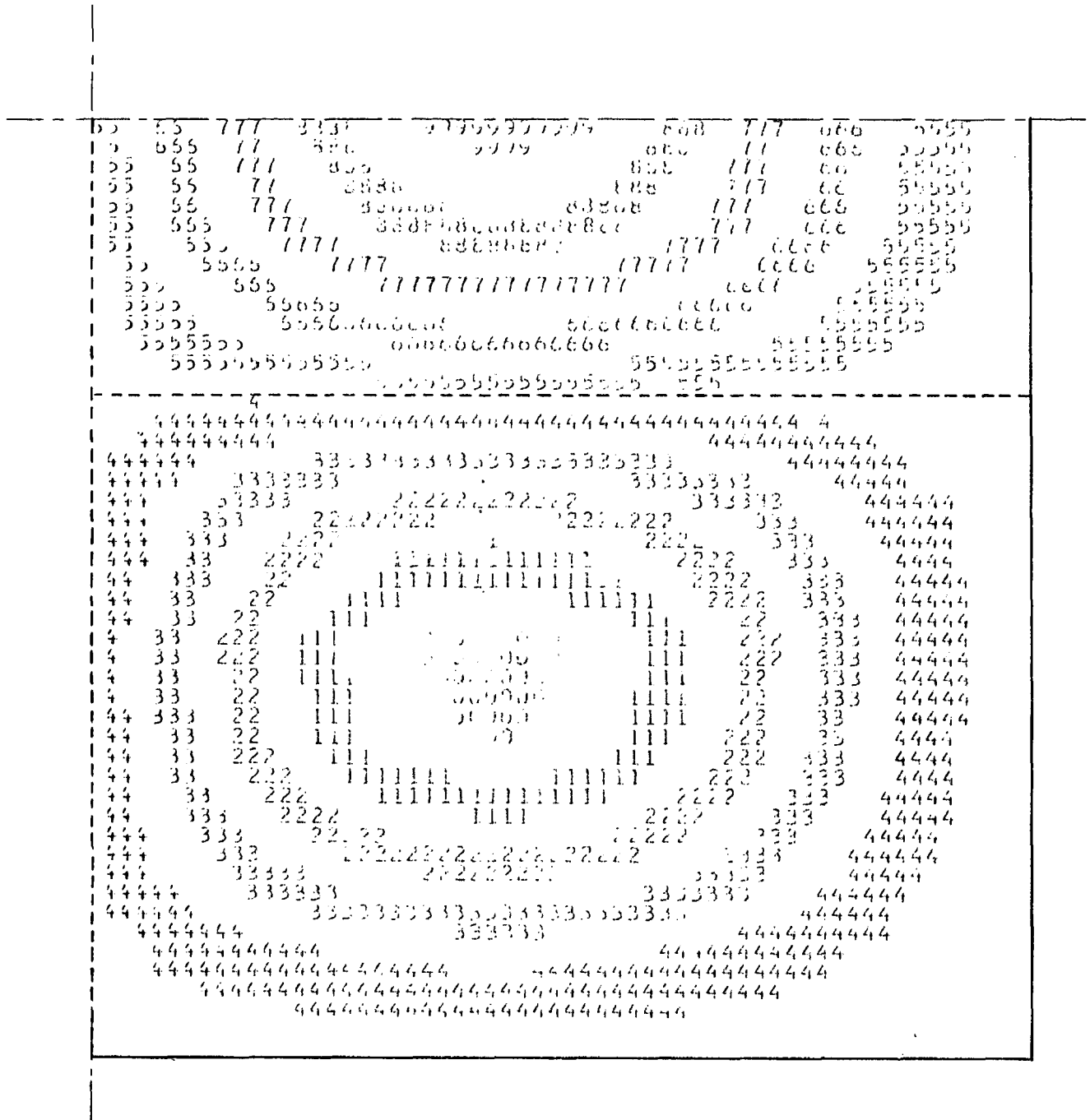
PLACA CUADRADA RIGIDAMENTE EMPOTRADA: MODO DE VIBRACION 3



$$\Omega = 130.84$$

GRAFICO 27

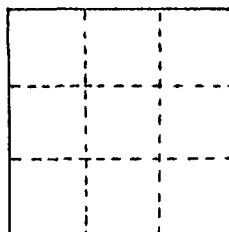
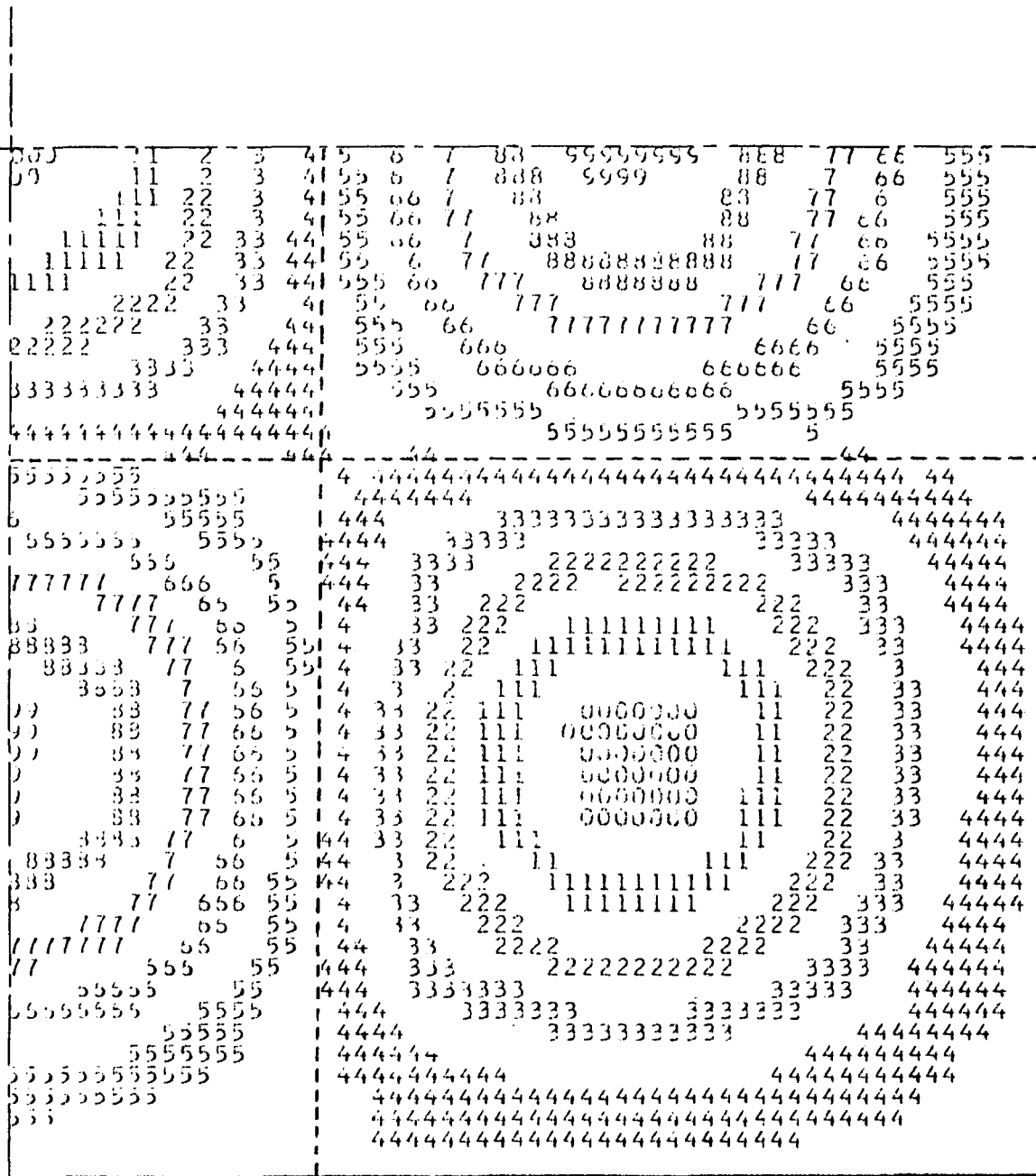
PLACA CUADRADA RIGIDAMENTE EMPOTRADA: MODO DE VIBRACION 4



$$\Omega = 161.84$$

GRAFICO 28

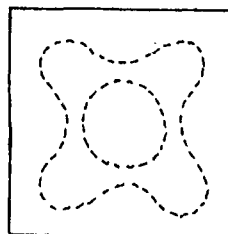
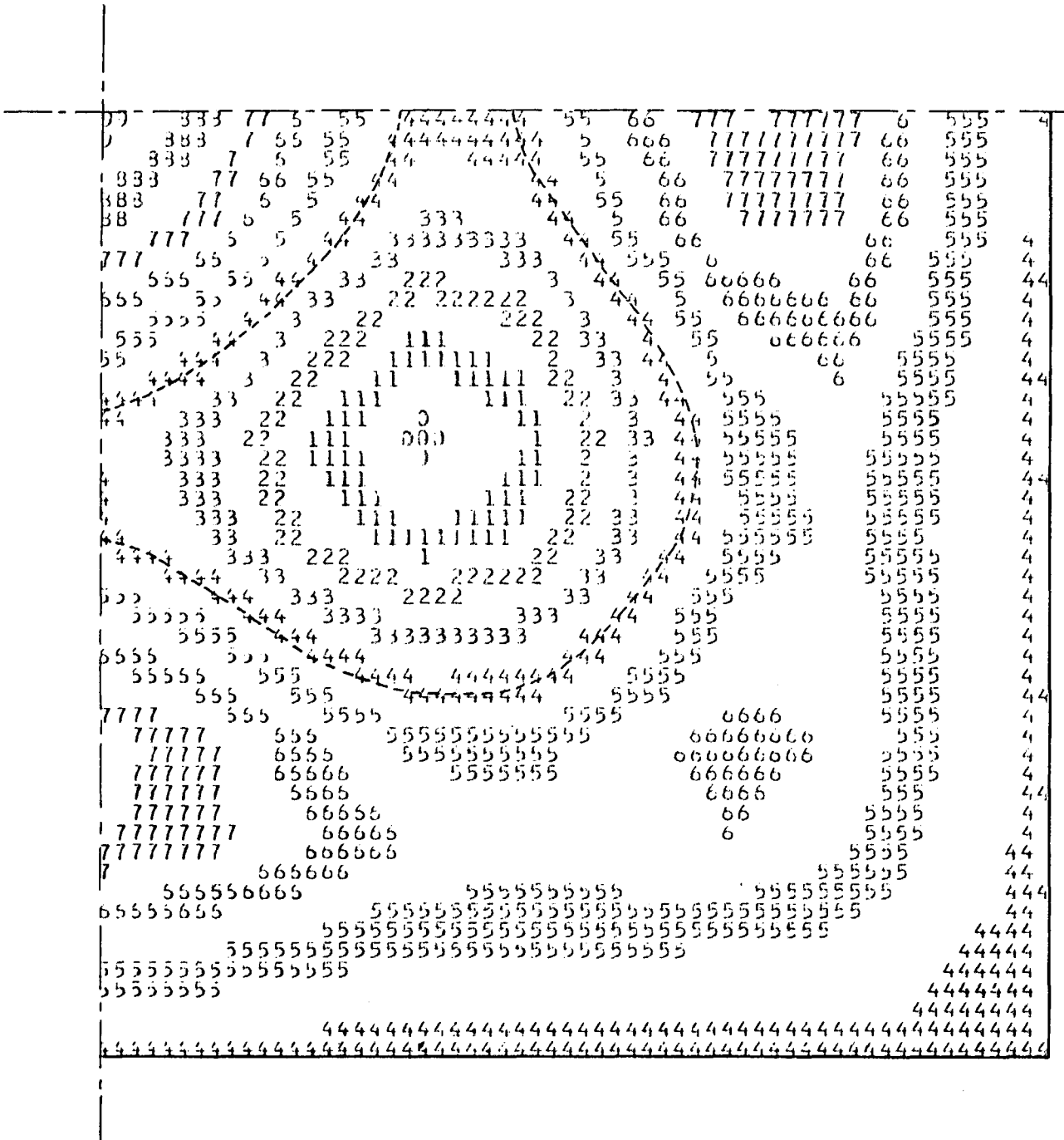
PLACA CUADRADA RIGIDAMENTE EMPOTRADA: MODO DE VIBRACION 5



$$\Omega = 214.44$$

GRAFICO 29

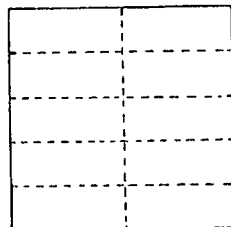
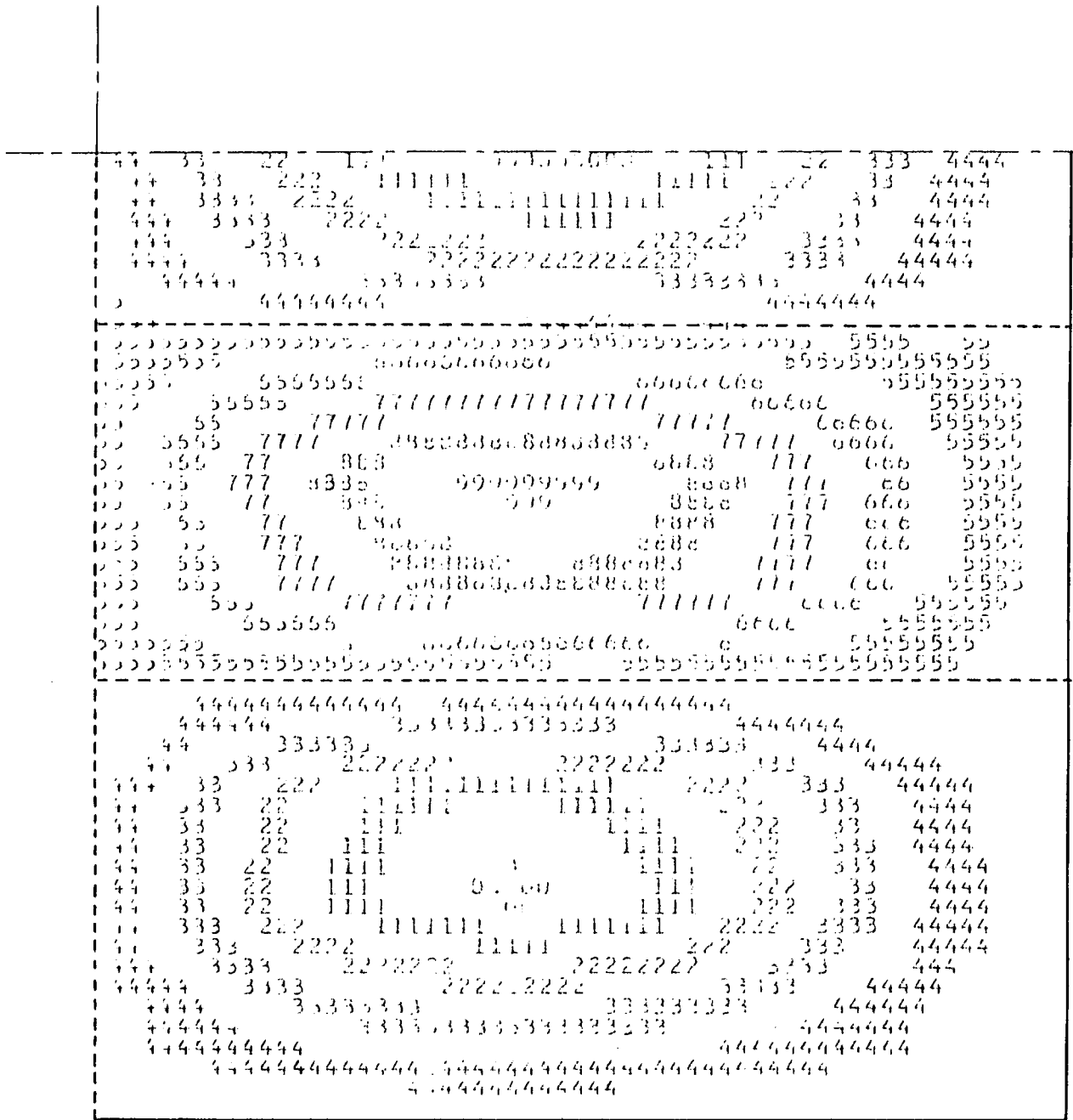
PLACA CUADRADA RIGIDAMENTE EMPOTRADA: MODO DE VIBRACION 6



$$\Omega = 306.67$$

GRAFICO 30

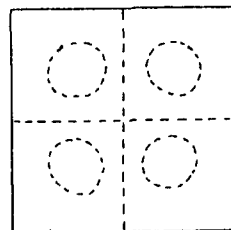
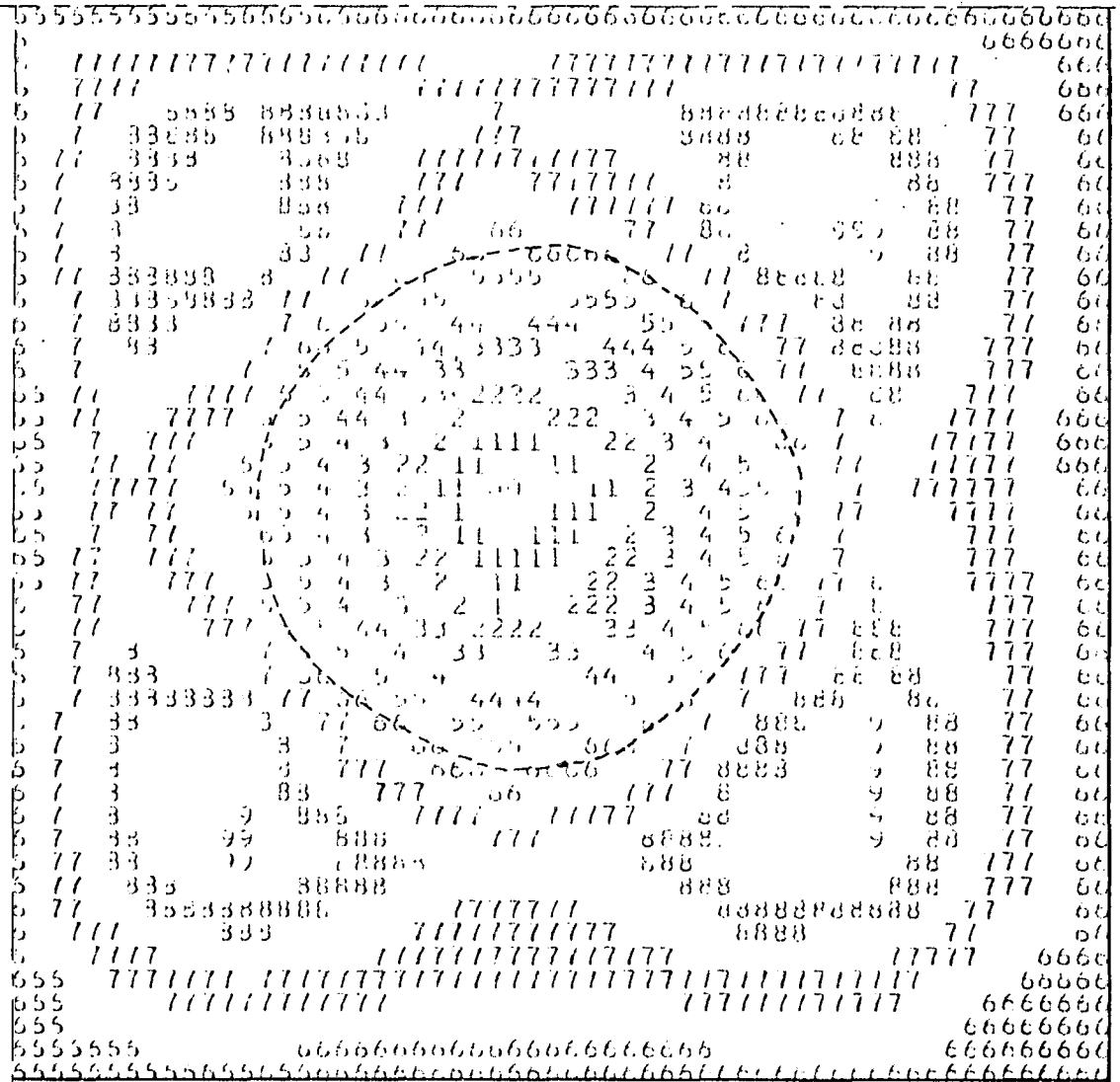
PLACA CUADRADA RIGIDAMENTE EMPOTRADA: MODO DE VIBRACION 7



$$\Omega = 333.66$$

GRAFICO 31

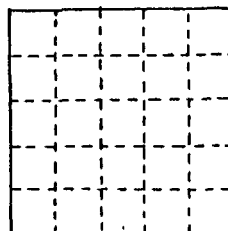
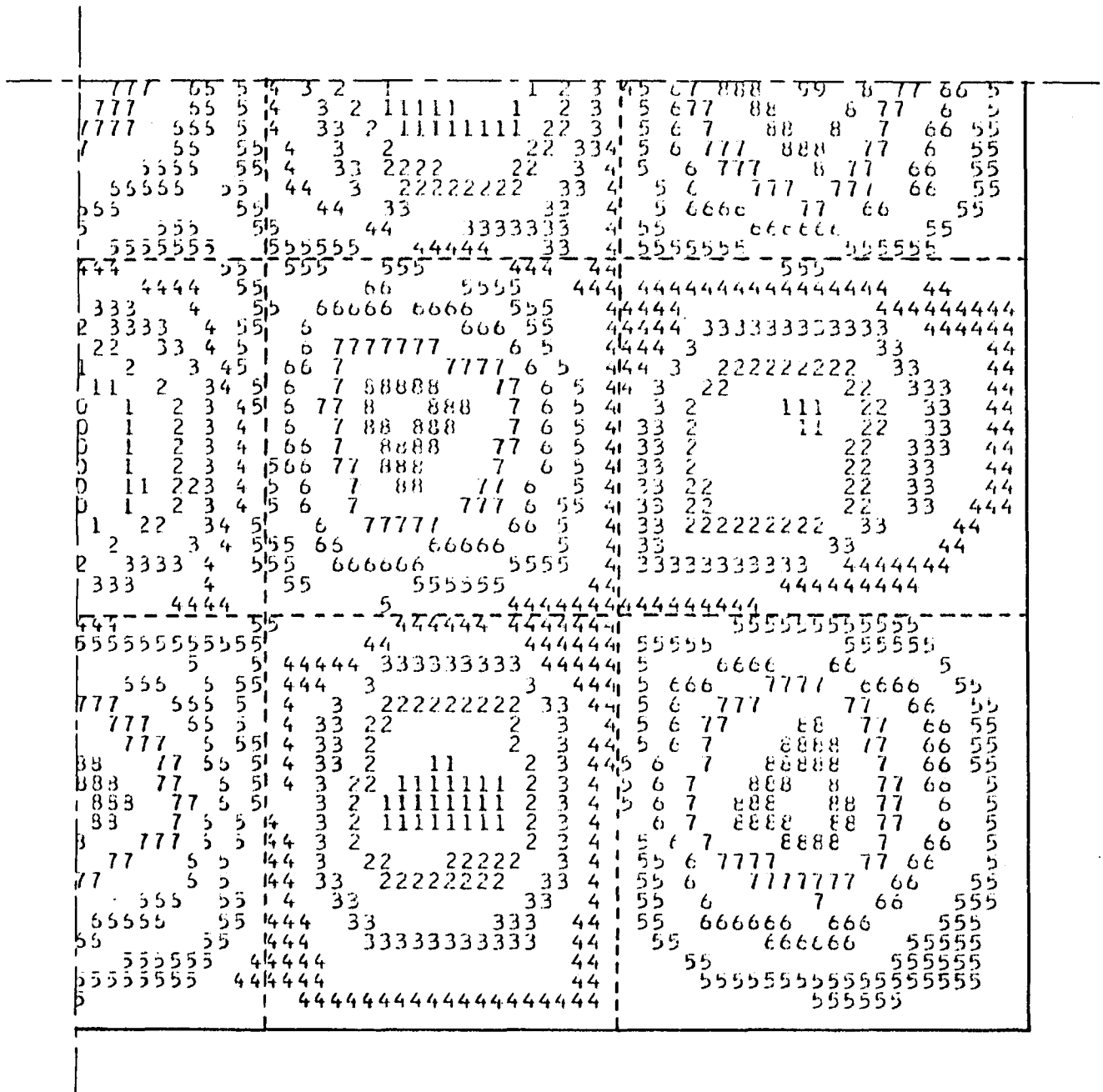
PLACA CUADRADA RIGIDAMENTE EMPOTRADA: MODO DE VIBRACION 8



$$\Omega = 451.04$$

GRAFICO 32

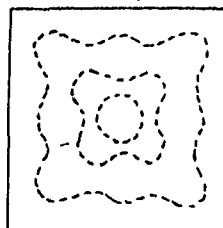
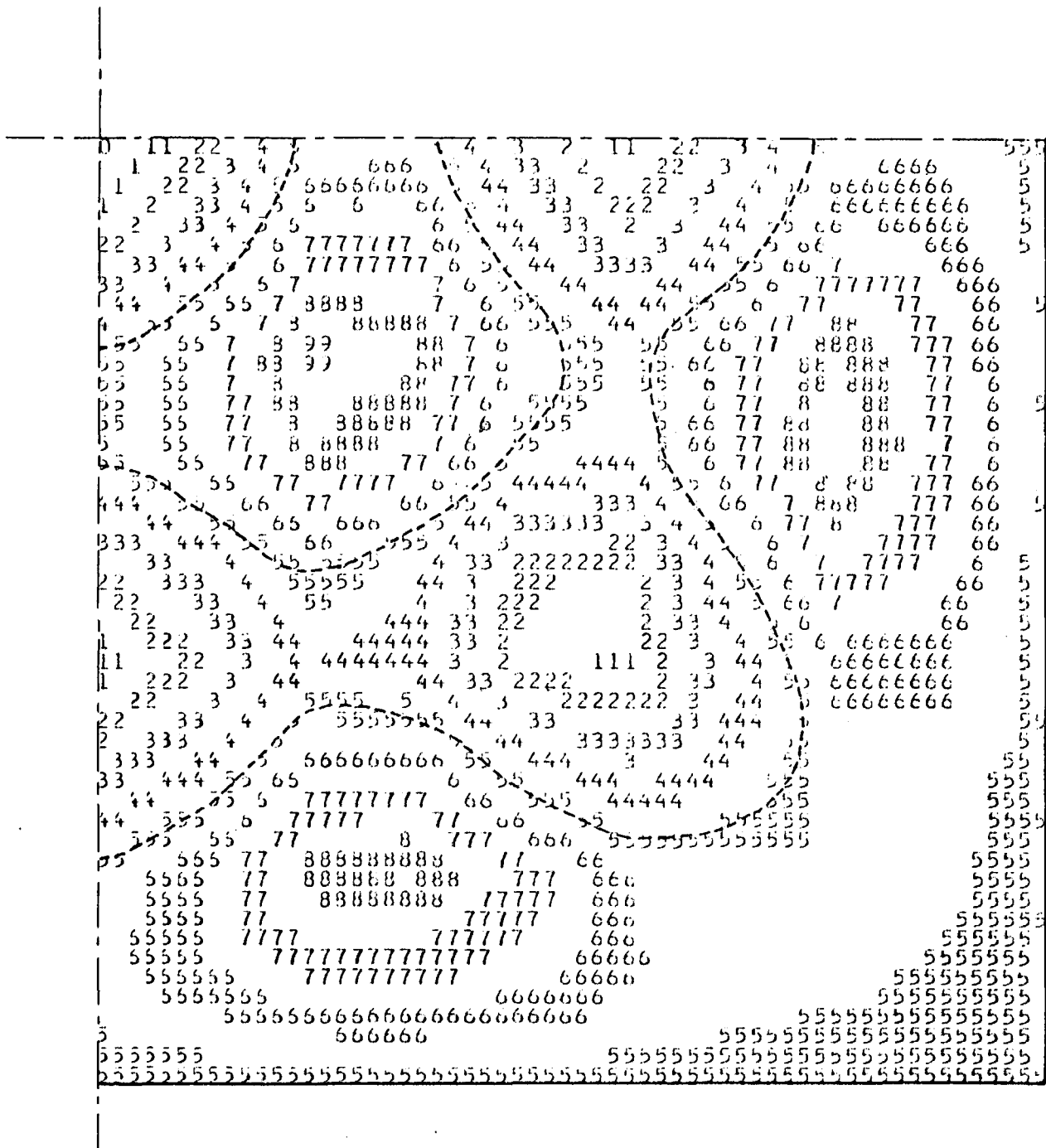
PLACA CUADRADA RIGIDAMENTE EMPOTRADA: MODO DE VIBRACION 9



$$\Omega = 536.68$$

GRAFICO 33

PLACA CUADRADA RIGIDAMENTE EMPOTRADA: MODO DE VIBRACION 10



$$\Omega = 562.27$$

7. CONCLUSIONES Y DISCUSION DE LOS RESULTADOS

7.1. Membranas

Hemos analizado el problema de las membranas circulares con corte secante por métodos variacionales y hemos obtenido excelentes resultados (comparados con resultados por elementos finitos) para el modo fundamental de vibración, usando como funciones base del método variacional la función J_0 de Bessel y las potencias del radio.

Los resultados obtenidos por elementos finitos son aparentemente más confiables, por el método en sí, y con ellos hemos calculado modos superiores de vibración de la membrana.

Ha sido un importante aporte la construcción del código AUTEF2, que como vimos utiliza un orden de magnitud menos en la resolución que el AUTEF1. Los códigos operan con matrices en formato esparcido ó ralo y en formato banda respectivamente. La comparación no es absoluta, ya que ambos códigos no están completamente optimizados, pero nos da una idea de las ventajas en cuanto al tiempo de cálculo de las matrices ralas, además, los requerimientos de memoria para ambos códigos son similares, tanto para el primero como para el segundo método.

7.2. Placas

Dado el mucho mayor tiempo de máquina que requiere la solución de un problema por elementos finitos comparado con el que ocupa la solución variacional (del orden de 30 minutos frente a tres) hemos resuelto muchos casos por métodos variacionales y relativamente pocos por elementos finitos.

Frente a esta desventaja, es muy importante la ventaja del método de elementos finitos basada en su generalidad, ya que con el mismo código podemos tratar cualquier geometría de placas y con muy variadas condiciones de borde. Además, podemos obtener muchos modos normales de vibración, simplemente variando el autovalor de partida de la resolución del problema de autovalores generalizado.

De todos modos, los métodos variacionales nos han dado resultados válidos para las geometrías en estudio, y la comparación con elementos finitos ha sido, en general, satisfactoria, como así también la comparación con resultados obtenidos de la bibliografía.

Hemos observado los siguientes fenómenos en las vibraciones libres de placas:

- una pérdida de masa hace aumentar las frecuencias de vibración
- una pérdida de restricciones en los bordes hace disminuir las frecuencias de vibración
- los métodos variacionales usados nos dan en general resultados superiores a los verdaderos
- el método de elementos finitos usado nos da resultados levemente inferiores a los verdaderos

Este último fenómeno se debe probablemente a que los elementos usados son muy "blandos" para análisis modal, ya que permiten que la placa se articule sobre el lado común de elementos vecinos (non-conforming elements). De todos modos, son los elementos más sencillos (sólo nueve grados de libertad) que se pueden usar para vibraciones de placas, y por lo tanto los que ocupan menor tiempo de cálculo.

A pesar de estas desventajas, los resultados obtenidos

con el código VIPLAK1 que hemos podido comparar con resultados de la bibliografía, nos revelan una buena precisión.

El código VIPLAK1 y todas las subrutinas por él usadas, están a disposición de los usuarios que lo necesiten en el Centro de Cómputos del Centro Atómico Bariloche.

Como última conclusión diremos que el trabajo no está terminado completamente. En particular la extensión del VIPLAK para vibraciones de placas de espesor variable parece ser sencilla y queda para futuros desarrollos.

8. AGRADECIMIENTOS

- al Lic. Gustavo Sánchez Sarmiento, que estuvo siempre dispuesto para consultas y dudas, y fue el motor de este trabajo

- al Dr. Patricio A. A. Laura, que junto con el personal del Instituto de Mecánica Aplicada, colaboró diligentemente y nos prestó una cordial bienvenida en una visita al mismo

- al Dr. Sergio Pissanetzky, que colaboró ampliamente en el desarrollo del VIPLAK, dedicándole muchas horas

- a la Gerencia de Protección Radiológica y Seguridad de la CNEA, que propuso un trabajo en vibraciones y además apoyó económicamente nuestra visita al IMA

- al personal del Centro de Cómputos del CAB, que pese a la gran cantidad de tiempo de máquina usado y molestias causadas para poner a punto el VIPLAK, siempre estuvo dispuesto a dar una mano

Debería agradecer a muchas más personas e instituciones, que de una manera u otra permitieron llevar adelante este trabajo, y lo hago en general diciéndoles: gracias.

9. BIBLIOGRAFIA

- /1/ -P.A.A.Laura: "Introducción a la Teoría de Vibraciones de Sistemas Discretos y Continuos", edit. Eudeba, Buenos Aires (1973)
- /2/ -P.A.A.Laura y M.J.Maurizi: "Introducción a la Mecánica de los Sólidos", edit. Eudeba, Buenos Aires (1979)
- /3/ -P.A.A.Laura, L.E.Luisoni and G.Ficcadenti: "On the Effect of Different Edge Flexibility Coefficients on Transverse Vibration of Rectangular Plates", Journal of Sound and Vibration 57(3), pp.333-340 (1978)
- /4/ -O.C.Zienkiewicz: "The Finite Element Method in Structural and Continuum Mechanics", Mc.Graw-Hill Publishing Co., London(1967)
- /5/ -A.W.Leissa and Y.Narita: "Natural Frequencies of Simply Supported Circular Plates", Journal of Sound and Vibration 70(2), pp.221-229 (1980)
- /6/ -Y.Narita and A.W.Leissa: "Transverse Vibrations of Simply Supported Circular Plates Having Partial Elastic Constraints", Journal of Sound and Vibration 70(1), pp.103-116 (1980)
- /7/ -A.W.Leissa: "The relative complexities of Plate and Shell Vibrations", The Shock and Vibration Bulletin 50(3) (1980)

- /8/ -A.W.Leissa:"Recent Research in Plate Vibrations: Classical Theory", The Shock and Vibration Digest 9(10), (1977)
- /9/ -A.W.Leissa:"Recent Research in Plate Vibrations, 1973-76: Complicating Effects", The Shock and Vibration Digest 10(12), (1978)
- /10/ -A.W.Leissa:"The Free Vibration of Rectangular Plates", Journal of Sound and Vibration 31(3), pp.257-293 (1973)
- /11/ -P.A.A.Laura, L.F.Luisoni and C.Filipich:"A Note on the Determination of the Fundamental Frequency of Vibration of Thin, Rectangular Plates with Edges Possessing Different Rotational Flexibility Coefficients", Journal of Sound and Vibration 55(3), pp.327-333 (1977)
- /12/ -A.W.Leissa, P.A.A.Laura and R.H.Gutiérrez:"Vibration of Rectangular Plates With Nonuniform Elastic Edge Supports" Journal of Applied Mechanics 47(4), (1980)
- /13/ -P.A.A.Laura and R.O.Grossi:"Transverse Vibrations of Rectangular Plates with Edges Elastically Restrained Against Translation and Rotation", Instituto de Mecánica Aplicada, Base Naval Puerto Belgrano, Bahía Blanca (1980)
- /14/ -P.A.A.Laura and R.Gelos:"Further Results on the Vibration and Stability of a Circular Plate elastically Restrained Against Rotation", Journal of Sound and Vibration 41(3), (1975)

- /15/ -P.A.A.Laura, J.C.Paloto and R.D.Santos:"A Note on the Vibration and Stability of a Circular Plate Elastically Restrained Against Rotation", Journal of Sound and Vibration 41(2),pp.177-180 (1975)
- /16/ -P.A.A.Laura, L.E.Luisoni and J.J.López:"A note on free and Forced Vibrations of Circular Plates; the Effect of Support Flexibility", Journal of Sound and Vibration 47(2),pp.287-291 (1976)
- /17/ -G.C.Pardoen:"Static, Vibration and Buckling Analysis of Axissymmetric circular plate using Finite Elements", Computers and Structures, vol.3, pp.355-375 (1973)
- /18/ -G.C.Pardoen:"Vibration and Buckling Analysis of Axissymmetric Polar Ortothropic Circular Plates". Computers and Structures, vol.4, pp.951-960 (1974)
- /19/ -G.C.Pardoen:"Asymmetric Vibration and Stability of Circular Plates", Computers and Structures, vol.9, pp.89-95 (1978)
- /20/ -P.L.Arlett, A.K.Bahrani and O.C.Zienkiewicz:"Application of Finite Elements to the solution of Helmholtz's Equation", Proceedings IFE vol.115, n°12 (1968)
- /21/ -P.A.A.Laura, R.H.Gutiérrez and G.Sánchez Sarmiento:"Comparison of Variational and Finite Element Solutions of Helmholtz Equation", Journal of the Acoustical Society of America 68(4),pp.1160-1162 (1980)

- /22/ -J.Barón, P.A.A.Laura y G.Sánchez Sarmiento:"Aproximaciones Polinómicas en el Análisis de Vibraciones de Placas Rectangulares con diferentes Coeficientes de Flexibilidad en los Bordos y una Perforación Semicircular"; IX reunión de la A.A.T.N., Bariloche (1980)
- /23/ -J.N.Reddy and C.S.Tsay:"Free Vibration of Thin Rectangular Plates by a Mixed Finite Element", A.S.M.E. journal 77-DET-143 (1977)
- /24/ -J.N.Reddy and C.S.Tsay:"Stability and Vibration of Thin Rectangular Plates by Simplified Mixed Finite Element", Journal of Sound and Vibration 55(2),pp.283-302 (1977)
- /25/ -C.S.Tsay and J.N.Reddy:"Bending, Stability and Free Vibration of Thin Orthotropic Plates by Simplified Mixed Finite Elements", Journal of Sound and Vibration 59(2),pp. 307-311 (1978)
- /26/ -G.Sánchez Sarmiento:"Redef: un Esquema Simple para la Generación Automática de Redes de Elementos Finitos Bidimensionales", CNEA NT 16/80, Buenos Aires (1980)
- /27/ -J.L.Bathoz, K.J.Bathe and L.W.Ho:"A Study of three-noded Triangular Plate Bending Elements", International Journal for Numerical Methods in Engineering, vol.15,pp.1771-1812 (1980)
- /28/ -F.G.Basombrío, G.Sánchez Sarmiento y S.Pissanetzky:"El Método de Elementos Finitos en la Física del Continuo. Desarrollo Adquirido y Trabajos Realizados en el Centro Atóm. Bche.(informe 2)", CNEA NT 28-78, Bs. As. (1978)

- /29/ -G.Sánchez Sarmiento y M.E.Olivetto:"Resolución de la Ecuación de Helmholtz en Sistemas de Simetría Plana Arbitraria por el método de Elementos Finitos (programa AUTEF1)", CNEA NT-4/78, Buenos Aires (1978)
- /30/ -D.B.Szyld, G.Sánchez Sarmiento y S.Tsuji:"Análisis de diversos métodos iterativos para la resolución del problema $A.x=\lambda.B.x$ ", revista SIGMA(Universidad de Chile), 6(1), pp.1-15 (1980)
- /31/ -C.C.Paige and M.A.Saunders:"Solution of Sparse Indefinite Systems of Linear Equations", SIAM Journal of Numerical Analysis, vol. 12, pp.617-629 (1975)
- /32/ -S.Pissanetzky:"Operaciones con matrices ralas", CNEA NT- /80, en impresión
- /33/ -O.C.Zienkiewicz:"The Finite Element Method in Engineering Science", Mc. Graw-Hill Publishing Co., London (1971)
- /34/ -S.Pissanetzky:"Numerical Quadrature in the Finite Element Method", CNEA NT- /81, en impresión
- /35/ -C.S.Desai and J.F.Abel:"Introduction to the Finite Element Method", Van Nostrand Reinhold Co., New York (1972)
- /36/ -E.Hinton and D.R.J.Owen:"An Introduction to Finite Element Computations", Pineridge Press Ltd., Swansea U.K. (1979)

APENDICE I

Expresiones de los A_{ij} , B_{ij} de la ecuación (19) del texto

$$A_{11} = \iint_S w_1^2(r, \theta) \cdot r \cdot dr \cdot d\theta$$

$$A_{12} = \iint_S w_1(r, \theta) \cdot w_2(r, \theta) \cdot r \cdot dr \cdot d\theta$$

$$A_{22} = \iint_S w_2^2(r, \theta) \cdot r \cdot dr \cdot d\theta$$

$$B_{11} = \iint_S \left[\left(\frac{\partial w_1}{\partial r} \right)^2 + \left(\frac{1}{r} \cdot \frac{\partial w_1}{\partial \theta} \right)^2 \right] \cdot r \cdot dr \cdot d\theta$$

$$B_{12} = \iint_S \left(\frac{\partial w_1}{\partial r} \cdot \frac{\partial w_2}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \cdot \frac{\partial w_1}{\partial \theta} \cdot \frac{\partial w_2}{\partial \theta} \right) \cdot r \cdot dr \cdot d\theta$$

$$B_{22} = \iint_S \left[\left(\frac{\partial w_2}{\partial r} \right)^2 + \left(\frac{1}{r} \cdot \frac{\partial w_2}{\partial \theta} \right)^2 \right] \cdot r \cdot dr \cdot d\theta$$

APENDICE II

Expresiones de los coeficientes α_i y β_i de las ecuaciones (27) y (28); (34), (35), (36) y (37) del texto

$$\alpha_i = \frac{1+\phi(4i-3+\mu)}{1+\phi(4i+1+\mu)}$$

$$\beta_i = -2 \cdot \frac{1+\phi(4i-1+\mu)}{1+\phi(4i+1+\mu)}$$

APENDICE III

Expresiones de los K_i y J_i de la ecuación (31) del texto

Nota: los supraíndices ' y " indican respectivamente derivada con respecto a r primera y segunda.

$$J_1 = \iint_S (R'' + \frac{1}{r} \cdot R_1')^2 \cdot r \cdot dr \cdot d\theta$$

$$J_2 = \iint_S (R_2'' + \frac{1}{r} \cdot R_2' + \frac{1}{r^2} \cdot R_2)^2 \cdot \text{sen}^2 \theta \cdot r \cdot dr \cdot d\theta$$

$$J_3 = \iint_S (R_1'' + \frac{1}{r} \cdot R_1') \cdot (R_2'' + \frac{1}{r} \cdot R_2' - \frac{1}{r^2} \cdot R_2) \cdot \text{sen} \theta \cdot r \cdot dr \cdot d\theta$$

$$J_4 = \iint_S R_1'' \cdot R_1' \cdot dr \cdot d\theta$$

$$J_5 = \iint_S \left[R_1'' \cdot (R_2' - \frac{1}{r} \cdot R_2) + R_1' \cdot R_2'' \right] \cdot \text{sen} \theta \cdot dr \cdot d\theta$$

$$J_6 = \iint_S R_2'' \cdot (R_2' - \frac{1}{r} \cdot R_2) \cdot \text{sen}^2 \theta \cdot dr \cdot d\theta$$

$$J_7 = \iint_S (\frac{1}{r} \cdot R_2' - \frac{1}{r^2} \cdot R_2)^2 \cdot \cos^2 \theta \cdot r \cdot dr \cdot d\theta$$

$$J_8 = R_1'^2(1) \cdot (\theta_A - \theta_B)$$

$$J_9 = R_1'(1) \cdot R_2'(1) \cdot (\cos \theta_A - \cos \theta_B)$$

$$J_{10} = R_2'^2(1) \cdot \left[\theta_A - \theta_B - \frac{1}{2} \cdot (\text{sen} 2\theta_A - \text{sen} 2\theta_B) \right]$$

$$J_{11} = \iint_S R_1^2 \cdot r \cdot dr \cdot d\theta$$

$$J_{12} = \iint_S R_1 \cdot R_2 \cdot \text{sen} \theta \cdot r \cdot dr \cdot d\theta$$

$$J_{13} = \iint_S R_2^2 . r . \text{sen}^2 \theta . dr . d\theta$$

$$K_1 = J_{1-1,4} . J_4 + \frac{1}{\phi} . J_8$$

$$K_2 = J_{2-0,7} . J_5 + \frac{1}{\phi} . J_9$$

$$K_3 = J_{3-1,4} . (J_6 - J_7) + \frac{1}{\phi} . J_{10}$$

$$R_1 = \alpha_1 . r^4 + \beta_1 . r^2 + 1$$

$$R_2 = \alpha_2 . r^6 + \beta_2 . r^4 + r^2$$

APENDICE IV

Expresiones de los K_i y J_i de la ecuación (39) del texto

Nota: los supraíndices ' y " indican respectivamente derivada con respecto a r primera y segunda

$$J_1 = \iint_S (R_1'' + \frac{1}{r} \cdot R_1')^2 \cdot r \cdot dr \cdot d\theta$$

$$J_2 = \iint_S (R_2'' + \frac{1}{r} \cdot R_2' - \frac{1}{r^2} \cdot R_2)^2 \cdot \text{sen}^2 \theta \cdot r \cdot dr \cdot d\theta$$

$$J_3 = \iint_S (R_3'' + \frac{1}{r} \cdot R_3' - \frac{1}{r^2} \cdot R_3)^2 \cdot \text{sen}^2 \theta \cdot r \cdot dr \cdot d\theta$$

$$J_4 = \iint_S (R_4'' + \frac{1}{r} \cdot R_4' - \frac{1}{r^2} \cdot R_4)^2 \cdot \text{sen}^2 \theta \cdot r \cdot dr \cdot d\theta$$

$$J_5 = \iint_S (R_1'' + \frac{1}{r} \cdot R_1') \cdot (R_2'' + \frac{1}{r} \cdot R_2' - \frac{1}{r^2} \cdot R_2) \cdot \text{sen} \theta \cdot r \cdot dr \cdot d\theta$$

$$J_6 = \iint_S (R_1'' + \frac{1}{r} \cdot R_1') \cdot (R_3'' + \frac{1}{r} \cdot R_3' - \frac{1}{r^2} \cdot R_3) \cdot \text{sen} \theta \cdot r \cdot dr \cdot d\theta$$

$$J_7 = \iint_S (R_1'' + \frac{1}{r} \cdot R_1') \cdot (R_4'' + \frac{1}{r} \cdot R_4' - \frac{1}{r^2} \cdot R_4) \cdot \text{sen} \theta \cdot r \cdot dr \cdot d\theta$$

$$J_8 = \iint_S (R_2'' + \frac{1}{r} \cdot R_2' - \frac{1}{r^2} \cdot R_2) \cdot (R_3'' + \frac{1}{r} \cdot R_3' - \frac{1}{r^2} \cdot R_3) \cdot \text{sen}^2 \theta \cdot r \cdot dr \cdot d\theta$$

$$J_9 = \iint_S (R_2'' + \frac{1}{r} \cdot R_2' - \frac{1}{r^2} \cdot R_2) \cdot (R_4'' + \frac{1}{r} \cdot R_4' - \frac{1}{r^2} \cdot R_4) \cdot \text{sen}^2 \theta \cdot r \cdot dr \cdot d\theta$$

$$J_{10} = \iint_S (R_3'' + \frac{1}{r} \cdot R_3' - \frac{1}{r^2} \cdot R_3) \cdot (R_4'' + \frac{1}{r} \cdot R_4' - \frac{1}{r^2} \cdot R_4) \cdot \text{sen}^2 \theta \cdot r \cdot dr \cdot d\theta$$

$$J_{11} = \iint_S R_1'' \cdot R_1' \cdot dr \cdot d\theta$$

$$J_{12} = \iint_S R_2'' \cdot (R_2' - \frac{1}{r} \cdot R_2) \cdot \text{sen}^2 \theta \cdot dr \cdot d\theta$$

$$J_{13} = \iint_S R_3'' \cdot (R_3' - \frac{1}{r} \cdot R_3) \cdot \text{sen}^2 \theta \cdot dr \cdot d\theta$$

$$J_{14} = \iint_S R_4'' \cdot (R_4' - \frac{1}{r} \cdot R_4) \cdot \text{sen}^2 \theta \cdot dr \cdot d\theta$$

$$J_{15} = \iint_S [R_1'' \cdot (R_2' - \frac{1}{r} \cdot R_2) + R_2'' \cdot R_1'] \cdot \text{sen} \theta \cdot dr \cdot d\theta$$

$$J_{16} = \iint_S [R_1'' \cdot (R_3' - \frac{1}{r} \cdot R_3) + R_3'' \cdot R_1'] \cdot \text{sen} \theta \cdot dr \cdot d\theta$$

$$J_{17} = \iint_S [R_1'' \cdot (R_4' - \frac{1}{r} \cdot R_4) + R_4'' \cdot R_1'] \cdot \text{sen} \theta \cdot dr \cdot d\theta$$

$$J_{18} = \iint_S [R_2'' \cdot (R_3' - \frac{1}{r} \cdot R_3) + R_3'' \cdot (R_2' - \frac{1}{r} \cdot R_2)] \cdot \text{sen}^2 \theta \cdot dr \cdot d\theta$$

$$J_{19} = \iint_S [R_2'' \cdot (R_4' - \frac{1}{r} \cdot R_4) + R_4'' \cdot (R_2' - \frac{1}{r} \cdot R_2)] \cdot \text{sen}^2 \theta \cdot dr \cdot d\theta$$

$$J_{20} = \iint_S [R_3'' \cdot (R_4' - \frac{1}{r} \cdot R_4) + R_4'' \cdot (R_3' - \frac{1}{r} \cdot R_3)] \cdot \text{sen}^2 \theta \cdot dr \cdot d\theta$$

$$J_{21} = \iint_S (R_2' - \frac{1}{r} \cdot R_2)^2 \cdot \frac{1}{r} \cdot \cos^2 \theta \cdot dr \cdot d\theta$$

$$J_{22} = \iint_S (R_3' - \frac{1}{r} \cdot R_3)^2 \cdot \frac{1}{r} \cdot \cos^2 \theta \cdot dr \cdot d\theta$$

$$J_{23} = \iint_S (R_4' - \frac{1}{r} \cdot R_4)^2 \cdot \frac{1}{r} \cdot \cos^2 \theta \cdot dr \cdot d\theta$$

$$J_{24} = \iint_S (R_2' - \frac{1}{r} \cdot R_2) \cdot (R_3' - \frac{1}{r} \cdot R_3) \cdot \frac{1}{r} \cdot \cos^2 \theta \cdot dr \cdot d\theta$$

$$J_{25} = \iint_S (R_2' - \frac{1}{r} \cdot R_2) \cdot (R_4' - \frac{1}{r} \cdot R_4) \cdot \frac{1}{r} \cdot \cos^2 \theta \cdot dr \cdot d\theta$$

$$J_{26} = \iint_S (R_3' - \frac{1}{r} \cdot R_3) \cdot (R_4' - \frac{1}{r} \cdot R_4) \cdot \frac{1}{r} \cdot \cos^2 \theta \cdot dr \cdot d\theta$$

$$J_{27} = R_1'^2(1) \cdot (\theta_A - \theta_B)$$

$$\text{llamemos: } T = \frac{1}{2} \cdot \theta_A - \theta_B - \frac{1}{2} \cdot (\text{sen} 2\theta_A - \text{sen} 2\theta_B)$$

$$J_{28} = R_2'^2(1) \cdot T$$

$$J_{29} = R_3'^2(1) \cdot T$$

$$J_{30} = R_4'^2(1) \cdot T$$

$$J_{31} = -R_1'(1) \cdot R_2'(1) \cdot (\cos \theta_A - \cos \theta_B)$$

$$J_{32} = -R_1'(1) \cdot R_3'(1) \cdot (\cos \theta_A - \cos \theta_B)$$

$$J_{33} = -R_1'(1) \cdot R_4'(1) \cdot (\cos \theta_A - \cos \theta_B)$$

$$J_{34} = R_2'(1) \cdot R_3'(1) \cdot T$$

$$J_{35} = R_2'(1) \cdot R_4'(1) \cdot T$$

$$J_{36} = R_3'(1) \cdot R_4'(1) \cdot T$$

$$J_{37} = \iint_s R_1^2 \cdot r \cdot dr \cdot d\theta$$

$$J_{38} = \iint_s R_2^2 \cdot \text{sen}^2 \theta \cdot r \cdot dr \cdot d\theta$$

$$J_{39} = \iint_s R_3^2 \cdot \text{sen}^2 \theta \cdot r \cdot dr \cdot d\theta$$

$$J_{40} = \iint_s R_4^2 \cdot \text{sen}^2 \theta \cdot r \cdot dr \cdot d\theta$$

$$J_{41} = \iint_s R_1 \cdot R_2 \cdot \text{sen} \theta \cdot r \cdot dr \cdot d\theta$$

$$J_{42} = \iint_s R_1 \cdot R_3 \cdot \text{sen}\theta \cdot r \cdot dr \cdot d\theta$$

$$J_{43} = \iint_s R_1 \cdot R_4 \cdot \text{sen}\theta \cdot r \cdot dr \cdot d\theta$$

$$J_{44} = \iint_s R_2 \cdot R_3 \cdot \text{sen}^2\theta \cdot r \cdot dr \cdot d\theta$$

$$J_{45} = \iint_s R_2 \cdot R_4 \cdot \text{sen}^2\theta \cdot r \cdot dr \cdot d\theta$$

$$J_{46} = \iint_s R_3 \cdot R_4 \cdot \text{sen}^2\theta \cdot r \cdot dr \cdot d\theta$$

$$K_1 = J_{1-1,4} \cdot J_{11} + \frac{1}{\phi} \cdot J_{27}$$

$$K_2 = J_{2-1,4} \cdot (J_{12} - J_{21}) + \frac{1}{\phi} \cdot J_{28}$$

$$K_3 = J_{3-1,4} \cdot (J_{13} - J_{22}) + \frac{1}{\phi} \cdot J_{29}$$

$$K_4 = J_{4-1,4} \cdot (J_{14} - J_{23}) + \frac{1}{\phi} \cdot J_{30}$$

$$K_5 = J_{5-0,7} \cdot J_{15} + \frac{1}{\phi} \cdot J_{31}$$

$$K_6 = J_{6-0,7} \cdot J_{16} + \frac{1}{\phi} \cdot J_{32}$$

$$K_7 = J_{7-0,7} \cdot J_{17} + \frac{1}{\phi} \cdot J_{33}$$

$$K_8 = J_{8-0,7} \cdot (J_{18} - 2 \cdot J_{24}) + \frac{1}{\phi} \cdot J_{34}$$

$$K_9 = J_{9-0,7} \cdot (J_{19} - 2 \cdot J_{25}) + \frac{1}{\phi} \cdot J_{35}$$

$$K_{10} = J_{10-0,7} \cdot (J_{20} - 2 \cdot J_{26}) + \frac{1}{\phi} \cdot J_{36}$$

$$R_1 = \alpha_1 \cdot r^4 + \beta_1 \cdot r^2 + 1$$

$$R_2 = \alpha_2 \cdot r^6 + \beta_2 \cdot r^4 + r^2$$

$$R_3 = \alpha_3 \cdot r^8 + \beta_3 \cdot r^6 + r^4$$

$$R_4 = \alpha_4 \cdot r^{10} + \beta_4 \cdot r^8 + r^6$$

APENDICE V

Expresiones de los coeficientes α_{ni} y β_{mj} de las ecuaciones (41) y (42) del texto

$$\alpha_{10} = 2 \cdot \alpha_{20} \cdot a / k_1$$

$$\alpha_{20} = \text{arbitrario}$$

$$\alpha_{30} = \frac{-2 \cdot \alpha_{20}}{a} \cdot \frac{3 \cdot k_2 + 5 \cdot k_1 + k_1 \cdot k_2 + 12}{k_1 \cdot (k_2 + 6)}$$

$$\alpha_{40} = \frac{\alpha_{20}}{a^2} \cdot \frac{4 \cdot k_2 + 4 \cdot k_1 + k_1 \cdot k_2 + 12}{k_1 \cdot (k_2 + 6)}$$

$$\alpha_{11} = 0$$

$$\alpha_{21} = \text{arbitrario}$$

$$\alpha_{31} = \frac{-2 \cdot \alpha_{21}}{a} \cdot \frac{(k_2 + 7)}{(k_2 + 8)}$$

$$\alpha_{41} = \frac{\alpha_{21}}{a^2} \cdot \frac{(k_2 + 6)}{(k_2 + 8)}$$

los correspondientes β_{mj} los obtenemos cambiando a por b, k_1 por k_3 , k_2 por k_4 en las expresiones anteriores

$$k_1 = a / \phi_1 \cdot D$$

$$k_2 = a / \phi_2 \cdot D$$

$$k_3 = b / \phi_3 \cdot D$$

$$k_4 = b / \phi_3 \cdot D$$

APENDICE VI

Expresiones de los J_i y L_i de las ecuaciones (48) y (48') del texto

Nota: los supraíndices ' y " indican respectivamente derivada primera y segunda respecto a la variable que corresponda

$$J_1 = \iint_S (X_0'' \cdot Y_0 + X_0 \cdot Y_0'')^2 \cdot dx \cdot dy$$

$$J_2 = \iint_S (X_0'' \cdot Y_1 + X_1 \cdot Y_0'')^2 \cdot dx \cdot dy$$

$$J_3 = \iint_S (X_1'' \cdot Y_0 + X_1 \cdot Y_0'')^2 \cdot dx \cdot dy$$

$$J_4 = \iint_S (X_1'' \cdot Y_1 + X_1 \cdot Y_1'')^2 \cdot dx \cdot dy$$

$$J_5 = \iint_S (X_0'' \cdot Y_0 + X_0 \cdot Y_0'') \cdot (X_0'' \cdot Y_1 + X_0 \cdot Y_1'') \cdot dx \cdot dy$$

$$J_6 = \iint_S (X_0'' \cdot Y_0 + X_0 \cdot Y_0'') \cdot (X_1'' \cdot Y_0 + X_1 \cdot Y_0'') \cdot dx \cdot dy$$

$$J_7 = \iint_S (X_0'' \cdot Y_0 + X_0 \cdot Y_0'') \cdot (X_1'' \cdot Y_1 + X_1 \cdot Y_1'') \cdot dx \cdot dy$$

$$J_8 = \iint_S (X_0'' \cdot Y_1 + X_0 \cdot Y_1'') \cdot (X_1'' \cdot Y_0 + X_1 \cdot Y_0'') \cdot dx \cdot dy$$

$$J_9 = \iint_S (X_0'' \cdot Y_1 + X_0 \cdot Y_1'') \cdot (X_1'' \cdot Y_1 + X_1 \cdot Y_1'') \cdot dx \cdot dy$$

$$J_{10} = \iint_S (X_1'' \cdot Y_0 + X_1 \cdot Y_0'') \cdot (X_1'' \cdot Y_1 + X_1 \cdot Y_1'') \cdot dx \cdot dy$$

$$J_{11} = \iint_S X_0 \cdot X_0'' \cdot Y_0 \cdot Y_0'' \cdot dx \cdot dy$$

$$J_{12} = \iint_S X_0 \cdot X_0'' \cdot Y_0 \cdot Y_1'' \cdot dx \cdot dy$$

$$J_{13} = \iint_S x_0 \cdot x_0'' \cdot y_1 \cdot y_0'' \cdot dx \cdot dy$$

$$J_{14} = \iint_S x_0 \cdot x_0'' \cdot y_1 \cdot y_1'' \cdot dx \cdot dy$$

$$J_{15} = \iint_S x_0 \cdot x_1'' \cdot y_0 \cdot y_0'' \cdot dx \cdot dy$$

$$J_{16} = \iint_S x_0 \cdot x_1'' \cdot y_0 \cdot y_1'' \cdot dx \cdot dy$$

$$J_{17} = \iint_S x_0 \cdot x_1'' \cdot y_1 \cdot y_0'' \cdot dx \cdot dy$$

$$J_{18} = \iint_S x_0 \cdot x_1'' \cdot y_1 \cdot y_1'' \cdot dx \cdot dy$$

$$J_{19} = \iint_S x_1 \cdot x_0'' \cdot y_0 \cdot y_0'' \cdot dx \cdot dy$$

$$J_{20} = \iint_S x_1 \cdot x_0'' \cdot y_0 \cdot y_1'' \cdot dx \cdot dy$$

$$J_{21} = \iint_S x_1 \cdot x_0'' \cdot y_1 \cdot y_0'' \cdot dx \cdot dy$$

$$J_{22} = \iint_S x_1 \cdot x_0'' \cdot y_1 \cdot y_1'' \cdot dx \cdot dy$$

$$J_{23} = \iint_S x_1 \cdot x_1'' \cdot y_0 \cdot y_0'' \cdot dx \cdot dy$$

$$J_{24} = \iint_S x_1 \cdot x_1'' \cdot y_0 \cdot y_1'' \cdot dx \cdot dy$$

$$J_{25} = \iint_S x_1 \cdot x_1'' \cdot y_1 \cdot y_0'' \cdot dx \cdot dy$$

$$J_{26} = \iint_S x_1 \cdot x_1'' \cdot y_1 \cdot y_1'' \cdot dx \cdot dy$$

$$J_{27} = \iint_S x_0'^2 \cdot y_0'^2 \cdot dx \cdot dy$$

$$J_{28} = \iint_S x_0'^2 \cdot y_1'^2 \cdot dx \cdot dy$$

$$J_{29} = \iint_S x_1'^2 \cdot y_0'^2 \cdot dx \cdot dy$$

$$J_{30} = \iint_S x_1'^2 \cdot y_1'^2 \cdot dx \cdot dy$$

$$J_{31} = \iint_S x_1'^2 \cdot y_0' \cdot y_1' \cdot dx \cdot dy$$

$$J_{32} = \iint_S x_0' \cdot x_1' \cdot y_0'^2 \cdot dx \cdot dy$$

$$J_{33} = \iint_S x_0' \cdot x_1' \cdot y_0' \cdot y_1' \cdot dx \cdot dy$$

$$J_{34} = \iint_S x_1'^2 \cdot y_0' \cdot y_1' \cdot dx \cdot dy$$

$$J_{35} = \iint_S x_0' \cdot x_1' \cdot y_1'^2 \cdot dx \cdot dy$$

$$J_{36} = \iint_S x_0^2 \cdot y_0^2 \cdot dx \cdot dy$$

$$J_{37} = \iint_S x_0^2 \cdot y_1^2 \cdot dx \cdot dy$$

$$J_{38} = \iint_S x_1^2 \cdot y_0^2 \cdot dx \cdot dy$$

$$J_{39} = \iint_S x_1^2 \cdot y_1^2 \cdot dx \cdot dy$$

$$J_{40} = \iint_S x_0^2 \cdot y_0 \cdot y_1 \cdot dx \cdot dy$$

$$J_{41} = \iint_S x_0 \cdot x_1 \cdot y_0^2 \cdot dx \cdot dy$$

$$J_{42} = \iint_S x_0 \cdot x_1 \cdot y_0 \cdot y_1 \cdot dx \cdot dy$$

$$J_{43} = \iint_S x_1^2 \cdot y_0 \cdot y_1 \cdot dx \cdot dy$$

$$J_{44} = \iint_S x_0 \cdot x_1 \cdot y_1^2 \cdot dx \cdot dy$$

$$K_1 = \int_0^a x_0^2 \cdot dx$$

$$K_2 = \int_0^a x_1^2 \cdot dx$$

$$K_3 = \int_0^a x_0 \cdot x_1 \cdot dx$$

$$K_4 = \int_0^{c-r} y_0^2 \cdot dy$$

$$K_5 = \int_0^{c-r} y_1^2 \cdot dy$$

$$K_6 = \int_0^{c-r} y_0 \cdot y_1 \cdot dy$$

$$K_7 = \int_{c+r}^b y_0^2 \cdot dy$$

$$K_8 = \int_{c+r}^b y_1^2 \cdot dy$$

$$K_9 = \int_{c+r}^b y_0 \cdot y_1 \cdot dy$$

$$K_{10} = y_0' \cdot y_0'' \quad (\text{en } y=0)$$

$$K_{11} = y_0' \cdot y_1'' + y_0'' \cdot y_1' \quad (\text{en } y=0)$$

$$K_{12} = y_1' \cdot y_1'' \quad (\text{en } y=0)$$

$$K_{13} = Y_0' \cdot Y_0'' \quad (\text{en } y=b)$$

$$K_{14} = Y_0' \cdot Y_1'' + Y_0'' \cdot Y_1' \quad (\text{en } y=b)$$

$$K_{15} = Y_1' \cdot Y_1'' \quad (\text{en } y=b)$$

$$K_{16} = X_0' \cdot X_0'' \quad (\text{en } x=0)$$

$$K_{17} = X_0' \cdot X_1'' + X_0'' \cdot X_1' \quad (\text{en } x=0)$$

$$K_{18} = X_1' \cdot X_1'' \quad (\text{en } x=0)$$

$$K_{19} = X_0' \cdot X_0'' \quad (\text{en } x=a)$$

$$K_{20} = X_0' \cdot X_1'' + X_0'' \cdot X_1' \quad (\text{en } x=a)$$

$$K_{21} = X_1' \cdot X_1'' \quad (\text{en } x=a)$$

$$K_{22} = \int_0^b Y_0^2 \cdot dy$$

$$K_{23} = \int_0^b Y_1^2 \cdot dy$$

$$K_{24} = \int_0^b Y_0 \cdot Y_1 \cdot dy$$

$$L_1 = J_{1-1,4} \cdot (J_{11} - J_{27}) + K_1 \cdot (K_{10} - K_{13}) + K_{16} \cdot K_{22} - K_{19} \cdot (K_4 + K_7)$$

$$L_2 = J_{2-1,4} \cdot (J_{14} - J_{28}) + K_1 \cdot (K_{12} - K_{15}) + K_{16} \cdot K_{23} - K_{19} \cdot (K_5 + K_8)$$

$$L_3 = J_{3-1,4} \cdot (J_{23} - J_{29}) + K_2 \cdot (K_{10} - K_{13}) + K_{18} \cdot K_{22} - K_{21} \cdot (K_4 + K_7)$$

$$L_4 = J_4^{-1,4} \cdot (J_{26} - J_{30}) + K_2 \cdot (K_{12} - K_{15}) + K_{18} \cdot K_{23} - K_{21} \cdot (K_5 + K_8)$$

$$L_5 = J_5^{-1,4} \cdot \left(\frac{J_{12} + J_{13}}{2} - J_{31} \right) + K_1 \cdot \left(\frac{K_{11} - K_{14}}{2} \right) + K_{16} \cdot K_{24} - K_{19} \cdot (K_6 + K_9)$$

$$L_6 = J_6^{-1,4} \cdot \left(\frac{J_{15} + J_{19}}{2} - J_{32} \right) + K_3 \cdot (K_{10} - K_{13}) + \frac{K_{17} \cdot K_{22}}{2} - K_{20} \cdot \left(\frac{K_4 + K_7}{2} \right)$$

$$L_7 = J_7^{-1,4} \cdot \left(\frac{J_{17} + J_{20}}{2} - J_{33} \right) + K_3 \cdot \left(\frac{K_{11} - K_{14}}{2} \right) + \frac{K_{17} \cdot K_{24}}{2} - K_{20} \cdot \left(\frac{K_6 + K_9}{2} \right)$$

$$L_8 = J_8^{-1,4} \cdot \left(\frac{J_{21} + J_{16}}{2} - J_{33} \right) + K_3 \cdot \left(\frac{K_{11} - K_{14}}{2} \right) + \frac{K_{17} \cdot K_{24}}{2} - K_{20} \cdot \left(\frac{K_6 + K_9}{2} \right)$$

$$L_9 = J_9^{-1,4} \cdot \left(\frac{J_{18} + J_{22}}{2} - J_{35} \right) + K_3 \cdot (K_{12} - K_{15}) + \frac{K_{17} \cdot K_{23}}{2} - K_{20} \cdot \left(\frac{K_5 + K_8}{2} \right)$$

$$L_{10} = J_{10}^{-1,4} \cdot \left(\frac{J_{24} + J_{25}}{2} - J_{34} \right) + K_2 \cdot \left(\frac{K_{11} - K_{14}}{2} \right) + K_{18} \cdot K_{24} - K_{21} \cdot (K_6 + K_9)$$

APENDICE VII

Expresiones de las funciones de forma de la ecuación (49)
del texto

$$N_i = \frac{1}{2A} \cdot (A_i + B_i \cdot x + C_i \cdot y)$$

$$N_j = \frac{1}{2A} \cdot (A_j + B_j \cdot x + C_j \cdot y)$$

$$N_m = \frac{1}{2A} \cdot (A_m + B_m \cdot x + C_m \cdot y)$$

A = área del elemento

$$A_i = x_j \cdot y_m - x_m \cdot y_j$$

$$B_i = y_j - y_m$$

$$C_i = x_m - x_j$$

Nota: el resto de los coeficientes A_k , B_k y C_k resulta de permutar cíclicamente los subíndices i, j, m en las tres últimas expresiones.

x_n, y_n = coordenadas del nodo n

APENDICE VIII

Expresiones de S_e y M_e de la ecuación (52) del texto:

$$(S_e)_{ij} = \iint_S \left(\frac{\partial N_i}{\partial x} \cdot \frac{\partial N_j}{\partial x} + \frac{\partial N_i}{\partial y} \cdot \frac{\partial N_j}{\partial y} \right) \cdot dx \cdot dy$$

$$(M_e)_{ij} = \iint_S N_i \cdot N_j \cdot dx \cdot dy$$

APENDICE VIII

Expresiones de S_e y M_e de la ecuación (52) del texto:

$$(S_e)_{ij} = \iint_S \left(\frac{\partial N_i}{\partial x} \cdot \frac{\partial N_j}{\partial x} + \frac{\partial N_i}{\partial y} \cdot \frac{\partial N_j}{\partial y} \right) \cdot dx \cdot dy$$

$$(M_e)_{ij} = \iint_S N_i \cdot N_j \cdot dx \cdot dy$$

APENDICE IX

Expresiones de S_e y M_e de la ecuación (65) del texto:

$$\begin{aligned} (S_e)_{ij} = & \iint_S \left(\frac{\partial^2 N_i}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 N_i}{\partial y^2} \right) \cdot \left(\frac{\partial^2 N_j}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 N_j}{\partial y^2} \right) - \\ & 0,7 \cdot \left(\frac{\partial^2 N_i}{\partial x^2} \cdot \frac{\partial^2 N_j}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 N_i}{\partial y^2} \cdot \frac{\partial^2 N_j}{\partial x^2} - 2 \cdot \frac{\partial^2 N_i}{\partial x \partial y} \cdot \frac{\partial^2 N_j}{\partial x \partial y} \right) \cdot dx \cdot dy + \\ & \frac{1}{\phi \cdot D} \cdot \int_1 \frac{\partial N_i}{\partial n} \cdot \frac{\partial N_j}{\partial n} \Big|_1 \cdot dl \end{aligned}$$

$$(M_e)_{ij} = \iint_S N_i \cdot N_j \cdot dx \cdot dy$$

donde 1 indica la porción de borde del elemento con condición de contorno especificada por ϕ .

APENDICE X

Entrada de datos para el código VIPLAK1:

Grupo de tarjetas	Variable	Formato	Descripción
1	J JE K	I2 37A2 I4	Debe ser 2 Título del problema Cantidad de tarjetas de los grupos 2 al 7 incl.
2	IT NDIM NREG N NH NEL NELH L	I4 38A2	Control de las K tarjetas que siguen (IT=1) Dimensiones (NDIM=2) Regiones (NREG=2) Nº de nodos de la red Nº de nodos de la red +1 Nº de elem. de la red Nº de elem. de la red +1 Nº de elem. de la red x3
3	IE(NELH)	según CRDINT	Punteros de la matriz de elementos de la red
4	JE(L)	según CRDINT	Columnas de la matriz de elementos de la red
5	MODUL(NEL)	según CRDINT	Valores cualesquiera
6	X(N)	según CRDREA	Coordenadas x de los nodos
7	Y(N)	según CRDREA	Coordenadas y de los nodos
8	KANT IGRAF NC NPH	16I5	Cantidad de tarjetas con datos de Dirichlet =0 no grafica ≠0 grafica incógnita IGRAF cantidad de curvas de nivel a graficar (2-32) ancho del gráfico (2-132)

siguen KANT tarjetas cada una con el grupo 9:

Grupo de tarjetas	Variable	Formato	Descripción
9	AA	F10.0	Valor de la incógnita
	II	I1	Número de la incógnita
	IP	23I3	Nodos donde II vale AA
10	IKON	I5	Cantidad de nodos del contorno
Si IKON=0 no incluir los grupos de tarjetas 11 y 12:			
11	NODKON(IKON)	16I5	Nodos del contorno, enumerados en sentido antihor. y en ciclo cerrado
12	COEKON(IKON)	8F10.5	Coef. de restricción del lado de elem. inmediatamente siguiente a NODKON
13	AUTO	F10.5	Autovalor de partida

```

*****
*                                     *
*                                     *
*          PROGRAMA VIPLAKI          *
*                                     *
* VIBRACIONES LIBRES DE PLACAS DELGADAS POR EL *
*   METODO DE ELEMENTOS FINITOS   *
*                                     *
* TRIANGULOS EN DOS DIMENSIONES CON TRES NODOS *
* GEOMETRICOS Y SIETE PUNTOS DE INTEGRACION    *
*                                     *
* TRES VARIABLES POR NODO           W      *
*                                   -DW/DY     *
*                                   DW/DX      *
*                                     *
*****

```

```

C-----
      DO 227 IDOS=1,100
      DO 30 I=1,27
      FC(I,1)=-0.7
      FDI(I,2)=1.4
      30
C-----PROTECCION DE MEMORIA
      MELX I=22
      MEDA=11
      MECFF=96
      MEDBB=192
      MEDIR=150
      MEDA=2000

```

PROGRAMA VIPLAKI

```

MECB=2000
C-----CARGA LOS DATOS DE LOS ELEMENTOS
IS9=1
KOD9=0
INC=1
KFN=3
KIN=INC*KFN
IMP=0
NDIM=2
NDIMC=4
NTIP=2
IRAM(1)=72
IRAM(2)=4
NOLFF(1)=3
NOLFF(2)=6
CALL LOAD('UND')
CALL GRANFF
NOLFF(2)=3
IB2G(1)=1
IB2F(1)=64
IB2G(2)=1
IB2F(2)=64
DO 10 I=1,63
10    B2B(I)=0.
C-----LECTURA DE LA INFORMACION DE LA REC.
15    READ(5,15)J,(JE(I),I=1,37),K
      FORMAT(12,37A2,14)
25    WRITE(6,25)(JE(I),I=1,37)
      FORMAT(7/37A2//)
35    IF(J.NE.2)GOTO 360
      FORMAT(14,36A2)
      READ(5,35)IT,NDIM,NREC,N,NH,NEL,NELH,L
      IF(IT.NE.1)GOTO 360
      IT=2
      KOD=5
      CALL LOAD('DOS')
      CALL CRDINT(IE,NELH,IT,KOD)
      CALL CRDINT(JE,L,IT,KOD)
      CALL CRDINT(MODUL,NEL,IT,KOD)
      CALL CRDREA(X,N,IT,KOD)
      CALL CRDREA(Y,N,IT,KOD)
      IF(IT.NE.<+1)GOTO 360
      WRITE(6,75)NDIM,N,NEL,L
      FORMAT('LEIDA UNA REC.NDIM='12' N='15' NEL='15' L='15')
75    C-----LECTURA DE DATOS DE DIRICHLET.
120   READ(5,85)KANT,IGRAF,NC,NPH
85    FORMAT(16I5)
      IF(KANT.LT.0.OR.KANT.GT.N)GOTO 360
      NDIR=0
      IF(KANT.EQ.0)GOTO 70
      DO 60 IT=1,KANT
      READ(5,45)AA,II,(IP(I),I=1,23)
      WRITE(6,45)AA,II,(IP(I),I=1,23)
45    FORMAT(F10.0,11,22I3)
      IF(II.LI.1.OR.II.GT.KIN)GOTO 360
      I=1
62    K=IP(I)
      IF(K.LT.0.OR.K.GT.N)GOTO 360
      IF(K.EQ.0)GOTO 60
      JJ=(K-1)*KIN+II
      NDIR=NDIR+1
      IF(NDIR.GT.MEDIR) GO TO 360
      LDIR(NDIR)=JJ
      I=I+1
      IF(I.LT.24)GOTO 62
60    CONTINUE
      WRITE(6,65)(LDIR(I),I=1,NDIR)
65    FORMAT('DIRICHLET'12(14))

```

PROGRAMA VIPLAK1

```

70      CONTINUE
C-----
C-----GENERA LA ESTRUCTURA DE LA MATRIZ RALA
      CALL LOAD('TRES')
      CALL TRASIM(IE,JE,IEI,JET,N,MEL)
      CALL SPEFES(ISUMA,JSUMA,NDIR,LDIR,IDIR)
      ITIP=2
      ISIM=1
      DO 40 I=1,KT
        BD(I)=0.
        IF( ICDIR(I).NE.0)BD(I)=1.
40      IP(I)=0
        L=ISUMA(KTF)-1
        DO 50 I=1,L
50      BN(I)=0.
      CALL LOAD('CUATRO')
C-----
C-----CALCULA LA MATRIZ M
      DO 100 IEL=1,NEL
        IEA=IE( IEL )
        IEAM=IEA-1
        IXI1=IXI( ITIP )
        IB2B=IB2F( ITIP )
        IBF1=IBF( ITIP )
        IFF1=IFF( ITIP )
        DO 20 IPI=1,7
          CALL FF2309( IEA,XI(IXI1),XI(IXI1+1),FF( IFF1 ),EE(
          *      IBF1),B2B( IB2B ), DO )
          IXI1=IXI1+2
          IFF1=IFF1+9
          IBF1=IBF1+18
          IB2B=IB2B+27
20      CONTINUE
        CALL JACDER
        CALL JC2DR2
        CALL QUANUM( INTB,Q )
        CALL ENUGEN( ISUMA,JSUMA,BN,BD,ALXC,IDIR,IP )
100     CONTINUE
        DO 140 I=1,KTF
          AD(I)=0.
          IF( IDIR(I).NE.0) AD(I)=1.
140     IP(I)=0
          L=ISUMA(KTF)-1
          DO 150 I=1,L
150     AN(I)=0.
      CALL LOAD('CUATRO')
C-----
C-----CALCULA LA MATRIZ S (PARTE DE AREA)
      DO 1000 IEL=1,NEL
        IEA=IE( IEL )
        IEAM=IEA-1
        IXI1=IXI( ITIP )
        IB2B=IB2F( ITIP )
        IBF1=IBF( ITIP )
        IFF1=IFF( ITIP )
        DO 200 IPI=1,7
          CALL FF2309( IEA,XI(IXI1),XI(IXI1+1),FF( IFF1 ),EE(
          *      IBF1),B2B( IB2B ), DO )
          IXI1=IXI1+2
          IFF1=IFF1+9
          IBF1=IBF1+18
          IB2B=IB2B+27
200     CONTINUE
        CALL JACDER
        CALL JC2DR2
        CALL QUANUM( INTA,Q )
        CALL ENUGEN( ISUMA,JSUMA,AN,AD,ALXC,IDIR,IP )
1000    CONTINUE
C-----
C-----CALCULA LA MATRIZ S (PARTE DE LINEA)
      ITIP=1
      READ(5,505) IKON
      IF( IKON.EQ.0) GO TO 283
      READ(5,505)(NDKON(I),I=1,IKON)

```

PROGRAMA VIPLAK1

```

505 READ(5,506)((COEKON(I),I=1,IKON)
506 FORMAT(16I5)
506 FORMAT(8F13.5)
DO 2000 IEL=1,NEL
WRITE(6,440) IEL
440 FORMAT('ELEMENTO ',I2)
IEA=IE(IEL)
IFAM=IEA-1
JEA=JE(IEA)
JEB=JE(IEA+1)
JEC=JE(IEA+2)
WRITE(6,441)JEA,JEB,JEC
441 FORMAT(10I10)
442 FORMAT(10F13.5)
DO 701 I=1,IKON
IF(JEA-NODKON(I))701,702,701
701 CONTINUE
DO 703 I=1,IKON
IF(JEB-NODKON(I))703,704,703
703 CONTINUE
DO 705 I=1,IKON
IF(I=1)719,720,719
IF(JEB-NODKON(I+1))705,710,705
710 IF(JEB-NODKON(I-1))706,717,706
706 IF(JEC-NODKON(I+1))707,717,707
707 IF(JEC-NODKON(I-1))2000,711,2000
704 IF(JEC-NODKON(I+1))709,712,709
709 IF(JEC-NODKON(I-1))2000,717,2000
720 IF(JEB-NODKON(1KON))721,717,721
721 IF(JEB-NODKON(I+1))723,710,723
723 IF(JEC-NODKON(1KON))724,725,724
724 IF(JEC-NODKON(I+1))2000,717,2000
725 I=IKON+1
GO TO 711
710 CA=COEKON(I)
GO TO 788
711 JE(IEA)=JEC
JE(IEA+1)=JEA
JE(IEA+2)=JEB
CA=COEKON(I-1)
GO TO 788
712 JE(IEA)=JCB
JE(IEA+1)=JEC
JE(IEA+2)=JEA
CA=COEKON(I)
788 CONTINUE
WRITE(6,441)JE(IEA),JE(IEA+1),JE(IEA+2)
WRITE(6,442)CA
CALL JACDER
YDIF=Y(JE(IEA+1))-Y(JE(IEA))
XDIF=X(JE(IEA+1))-X(JE(IEA))
ELE=SQRT(YDIF*YDIF+XDIF*XDIF)
SENA=YDIF/ELE
COSA=XDIF/ELE
WRITE(6,442)YDIF,XDIF,ELE,SENA,COSA
DO 789 INDI=1,4
FD(INDI,1)=SENA*SENA*CA
FD(INDI,2)=-SENA*COSA*CA
FD(INDI,3)=COSA*COSA*CA
789 G(INDI)=ELE
WRITE(6,442)(FD(1,LL),LL=1,3)
CALL QUANUM(INTS,Q)
CALL ENUGEN(SUMA,JSUMA,AN,AD,ALXC,IDIR,IP)
2000 CONTINUE
283 CONTINUE
CALL LOAD('SIETE')
C-----RESUELVE EL PROBLEMA DE AUTOVALORES
C-----GENERALIZACC
RTOL = 0.00001
NOUT=0
ICASO = 1

```

PROGRAMA VIPLAK1

```

      DO 99 I=1,KTF
      AVEC(I) = 1.
      IF (IDIR(I).EQ.1) AVEC(I) = 0.
99    CONTINUE
      MAXIT=7
      REAL(5,506) AUTO
      CALL AUTOBA8(ISUMA,JSUMA,AN,AD,ISUMA,JSUMA,BN,BD,KTF,AVEC,
      *   AUTO,MAXIT,
      *   RIOL,NOUI,ICASO,AUXA,AUXB,AUXC,AUXD,AUXE,ALXF,
      *   ISUMA,JSUMA,SUMAN,SUMAD)
      DO 98 I=1,KTF
98    AD(I)=AVEC(I)
C-----Escribe el resultado
      WRITE(6,666) AUTO
      WRITE(6,666) (AD(I),I=1,KIF)
666    FORMAT(10E11.5)
C-----GRAFICA LAS CURVAS DE NIVEL
      IF (IGRAF.LI.O.OR.IGRAF.GT.3) GOTO 360
      IF (IGRAF.EQ.0) GOTO 110
      CALL LOAD('SEIS')
      X1=1E50
      X2=-X1
      Y1=X1
      Y2=X2
      DO 90 I=1,N
      IF (X(I).LT.X1) X1=X(I)
      IF (X(I).GT.X2) X2=X(I)
      IF (Y(I).LT.Y1) Y1=Y(I)
      IF (Y(I).GT.Y2) Y2=Y(I)
      IDIR(I)=0
      AD(I)=AD((I-1)*KIN+IGRAF)
90    CONTINUE
      XM IN=(X2-X1)/5.
      YM IN=(Y2-Y1)/5.
      IEXT=48
      CALL CLASEL(X,Y,IE,JE,AN,BN,JSUMA,ISUMA,IP,JA,IUP,JET,
      *   IPQ,IA,AUXB,XM IN,
      *   YM IN,KTF,KTF,MEDU,INIX,INY,I,REC,MEL,KIF,KIF)
      CALL GRAFEC(JSUMA,ISUMA,X,Y,IE,JE,AN,BN,AD,G,DF,I,IDIR,
      *   X1,X2,Y1,Y2,N,NC,
      *   IJ,NPF,0.25,I,REC,INIX,INY,I,EXT,I0)
110   CONTINUE
C-----
227   CONTINUE
360   WRITE(6,365) KANT,KIN,J,K,L,II,N,II,NOIR,MEDIR
      STOP
365   FORMAT('ERROR'20I5)
777   WRITE(6,778) JEA,JEB,JEC,IEL,NODKON(I),NODKON(I+1),NODKON(I-
      *1),I
      STOP
778   FORMAT('ERROR EN INTEGRAL DE BORDE',10I10)
      END

```