

04.71.03

PMM/A-88

COMISION NACIONAL DE ENERGIA ATOMICA
DEPENDIENTE DE LA PRESIDENCIA DE LA NACION

SEPTIMO CURSO PANAMERICANO DE METALURGIA

Dentro del Programa Multinacional de Metalurgia
(Programa Regional de Desarrollo Científico y Tecnológico - OEA)

RELACIONES TENSION-DEFORMACION EN EL RANGO PLASTICO

Conceptos básicos y tendencias modernas en la investigación
teórica y experimental

Guillermo Creus y Horacio Helman

Departamento de Metalurgia
Buenos Aires, Argentina

- 1971 -

COMISION NACIONAL DE ENERGIA ATOMICA
DEPENDIENTE DE LA PRESIDENCIA DE LA NACION

SEPTIMO CURSO PANAMERICANO DE METALURGIA

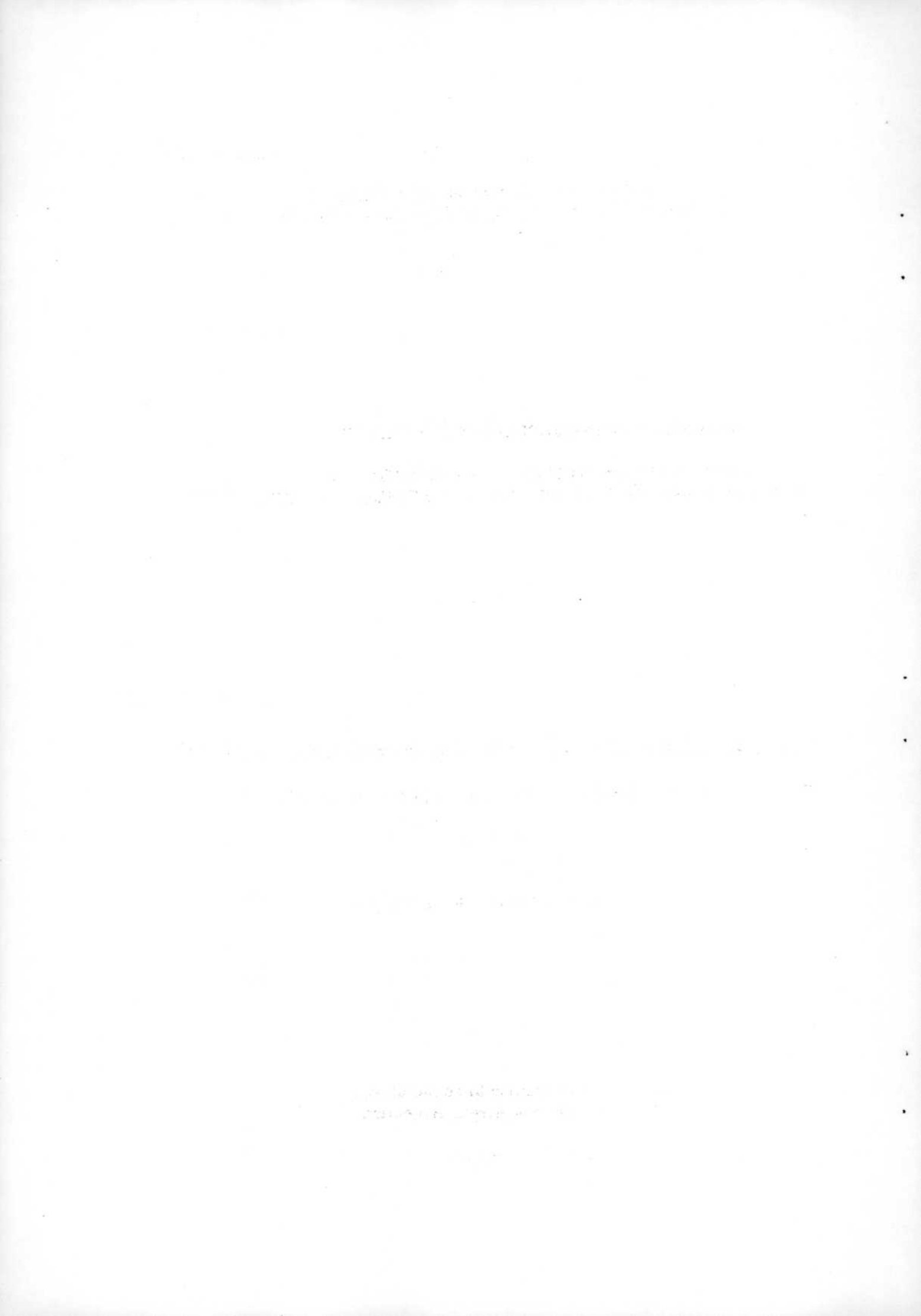
Dentro del Programa Multinacional de Metalurgia
(Programa Regional de Desarrollo Científico y Tecnológico - OEA)

RELACIONES TENSION-DEFORMACION EN EL RANGO PLASTICO

Conceptos básicos y tendencias modernas en la investigación
teórica y experimental

Guillermo Creus y Horacio Helman

Departamento de Metalurgia
Buenos Aires, Argentina



INDICE TEMATICO

Capítulo I : Introducción

- 1- Objetivos generales
- 2- Aspectos fenomenológicos de la plasticidad
- 3- Desarrollo histórico
- 4- Notación empleada.

Capítulo II : Hipótesis básicas

- 1- Existencia de las superficies de fluencia.
- 2- Efecto de presiones hidrostáticas. Cambio de volumen.
- 3- Postulado de Drucker.

Capítulo III : Criterios de fluencia

- 1- Caracterización de la superficie de carga.
- 2- Criterio de fluencia de von Mises
- 3- Criterio de fluencia de Tresca.
- 4- Otros criterios.

Capítulo IV : Relaciones tensión-deformación en el rango plástico

Capítulo V : Reglas de endurecimiento

- 1- Plasticidad ideal
- 2- Endurecimiento isotrópico
- 3- Endurecimiento cinemático
- 4- Generalización de la regla de Prager.

Capítulo VI : Teorías particulares de la Plasticidad.

- 1- Materiales plásticos ideales
- 2- Endurecimiento isotrópico.
- 3- Ecuaciones de Prandtl-Reuss y Levy-Mises
- 4- Ecuación asociada al criterio de Tresca.
- 5- Determinación experimental de la función G.
- 6- Relaciones totales tensión-deformación
- 7- Endurecimiento cinemático

Capítulo VII : Superficies de carga con puntos singulares

Generalización de las ecuaciones generales de la Plasticidad.

Capítulo VIII : Investigación experimental

- 1- Generalidades
- 2- Superficies iniciales de fluencia.
- 3- Relaciones tensión-deformación
- 4- Endurecimiento
- 5- Existencia de puntos angulosos.

Capítulo IX : Termodinámica

Generalización de la termodinámica irreversible lineal para procesos de deformación plástica. Relaciones tensión-deformación en el estado plástico.

CAPITULO I

INTRODUCCION

1- Objetivos generales.

En virtud de los avances realizados en el área de la plasticidad durante los últimos 20 años, por diferentes investigadores, se consideró de interés reunir en este trabajo, las conclusiones más importantes a que se arribará durante este lapso.

Dado que la teoría de la plasticidad no está firmemente establecida, se hace imprescindible para quienes deseen trabajar en este terreno, mantener actualizados sus conocimientos, especialmente en lo que respecta al uso de los criterios de fluencia y reglas de flujo correspondientes, así como al entorno de validez de las suposiciones realizadas en relación a dicha teoría. Con objetivos similares se han realizado diversos trabajos: (1), (2), (3), (4), (5).

Fue intención permanente durante la realización de los capítulos subsiguientes hacer una exposición detallada de las ecuaciones intervinientes a fin de facilitar la lectura a quienes no se encuentren familiarizados con las tendencias más recientes en esta materia.

2- Aspectos fenomenológicos de la plasticidad.

Las teorías de elasticidad y plasticidad describen la deformación de la mayor parte de los materiales habitualmente usados en ingeniería. Dichas teorías se estructuran sobre estudios experimentales de las relaciones entre tensiones y deformaciones de agregados policristalinos y por lo tanto se desenvuelven un tanto independientes del conocimiento de la estructura de la materia. Sus conclusiones macroscópicas se aplican a un modelo de material idealizado al que se denomina "continuo".

No obstante, la solución de problemas reales hace que muchas veces deba recurrirse al conocimiento de la estructura de la materia y a los mecanismos desarrollados por la Física del Sólido para comprender las limitaciones de estas teorías. Hasta tanto no se vinculen totalmente los enfoques microscópicos y macroscópicos, será menester tener presentes ambos puntos de vista, puesto que proveen información complementaria. La tendencia moderna es no realizar aproximaciones unilaterales, ya sean físicas o mecánicas, sino ampliar constantemente el campo de observación (6) (7) (8).

Sería deseable que la Física del Sólido proveyera, sobre la base del estudio de los procesos físicos elementales, los puntos de partida y suposiciones esenciales para la teoría de la plasticidad. La necesidad de dar inmediata solución a los problemas

con que se enfrentan quienes trabajan con la plasticidad desde el punto de vista de sus aplicaciones, y dado que la Física no puede aún satisfacer este requisito, hace inevitable el tener que partir de hipótesis fenomenológicas basadas, en general, en observaciones e investigaciones experimentales. En consecuencia, las leyes que se obtienen por este medio no son generales y resultan una razonable aproximación a un número limitado de procesos reales.

3- Desarrollo histórico

El origen de la plasticidad como rama de la Mecánica del Continuo, puede situarse entre 1864 y 1872, con los trabajos de Tresca (9) sobre extrusión de metales. En ellos se propone el criterio de fluencia de la máxima tensión de corte, que lleva su nombre. La formulación de la teoría con la forma actual fue hecha por Saint Venant (10) en 1870, para estados planos. En sus trabajos se propone la coincidencia entre los ejes principales de incrementos de deformaciones y tensiones. En el mismo año y con posterioridad a los trabajos de Saint Venant, Levy obtiene la ecuación general en tres dimensiones. Una generalización similar fue propuesta independientemente por von Mises hacia 1913, conjuntamente con su criterio de fluencia (11).

En 1924 Prandtl extiende las ecuaciones propuestas por Saint Venant para el problema plano incluyendo las deformaciones elásticas. En 1930, Reuss (12) generalizó dichas ecuaciones a tres dimensiones. Hacia 1928 von Mises generaliza su propio trabajo introduciendo una función general de fluencia y el concepto de potencial plástico, en las reglas de flujo. Estos trabajos estaban orientados hacia materiales perfectamente plásticos.

La extensión de los conceptos preliminares al caso de materiales endurecibles, con superficies de fluencia regulares, fue lograda por Melán (13) en 1938 y Prager (14) en 1949. En relación a este aspecto, un considerable aporte significó la introducción del postulado de Drucker (15) (16) en 1951. Dicho trabajo permitió considerar las ecuaciones constitutivas y diversos aspectos fundamentales relacionados con ellas, de una manera unificada.

Las teorías de plasticidad que utilizan relaciones totales, desarrolladas por Honcky (17) y Nadai (18) alcanzaron gran popularidad por su simplicidad matemática. Su inconsistencia física y matemática fue señalada por Prager, Hill, Drucker, etc. No obstante, resultan adecuadas para procesos con cargas proporcionales como se podrá apreciar en capítulos posteriores. Recientemente, estas ecuaciones resultaron físicamente justificables en relación con superficies de fluencia con puntos singulares. Esto surge de la predicción de la existencia de esquinas (puntos angulosos) en las su cesivas superficies de fluencia, hecha en el trabajo de Batdorf y Budianski (19) en 1949.

En 1953, Koiter (20) realizó la generalización de las relaciones tensión-deformación para el caso de superficies de fluencia con regiones singulares, mediante la utilización de más de una superficie de carga. Con el apoyo experimental de diversos investigadores, la teoría de la existencia de regiones singulares se desarrolló rápidamente. A través de ella Budianski (21) y Kliushnikov (22) indicaron la existencia de otros caminos de carga, además de los proporcionales, consistentes con las teorías totales.

Por otra parte, el concepto de endurecimiento cinemático propuesto por Prager (23) ha resultado particularmente útil para la descripción de algunos aspectos complejos del comportamiento plástico.

4- Notación empleada.

La discusión realizada en el presente trabajo sobre relaciones en el estado plástico de sólidos, se limitará al régimen de deformación "quasi" estático e infinitesimal.

Se operará con referencia a sistemas cartesianos de coordenadas:

$$x_i \quad (i = 1, 2, 3)$$

Las ecuaciones de desplazamiento - deformación y las ecuaciones de equilibrio de tensiones son respectivamente:

$$\epsilon_{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) \quad 1.1$$

$$\frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_j} + F_i = 0 \quad 1.2$$

En estas ecuaciones ϵ_{ij} es el tensor de deformaciones, u_i los componentes del vector desplazamiento, σ_{ij} el tensor de tensiones y F_i los componentes de fuerzas volumétricas.

Para el desarrollo del trabajo se convendrá que los índices tienen rango (1, 2, 3) y que la repetición de uno de ellos implica una suma en el término correspondiente (convención de A. Einstein).

Se indicará con un punto sobre la letra correspondiente la derivación de la misma respecto del tiempo: así

$$\dot{\epsilon}_{ij} = \frac{\partial \epsilon_{ij}}{\partial t}$$

Un supuesto fundamental de la teoría elasto-plástica infinitesimal es ad-

mitir que el tensor deformación puede ser descompuesto en componentes elásticas ϵ_{ij}^e y componentes plásticas ϵ_{ij}^p :

$$\epsilon_{ij} = \epsilon_{ij}^e + \epsilon_{ij}^p \quad 1.3$$

Por consideraciones que se harán posteriormente, se considerará el tensor de tensiones σ_{ij} descompuesto en dos partes: la componente "esférica" $\sigma \delta_{ij}$ y la componente "desviadora" S_{ij} , tales que

$$\sigma_{ij} = S_{ij} + \sigma \delta_{ij} \quad 1.4$$

donde $\sigma = \frac{1}{3} \sigma_{ii}$ y δ_{ij} es la función "delta" de Kronecker.

Las componentes elásticas de deformaciones están relacionadas con las tensiones a través de la ley de Hooke generalizada:

$$\epsilon_{ij}^e = H_{ijkl} \sigma_{kl} \quad 1.5$$

donde H_{ijkl} son los componentes del tensor elástico.

En el desarrollo del trabajo se utilizará, en determinadas oportunidades, un espacio vectorial V de 9 dimensiones para representar a un tensor.

Así a σ_{ij} corresponderá en V el vector \bar{T}

y a ϵ_{ij} corresponderá en V el vector \bar{E}

CAPITULO II

Hipótesis básicas:

1- Existencia de superficies de fluencia: en la Figura II-1 puede verse el diagrama tensión-deformación correspondiente a un material elasto-plástico típico, ensayando en tracción simple.

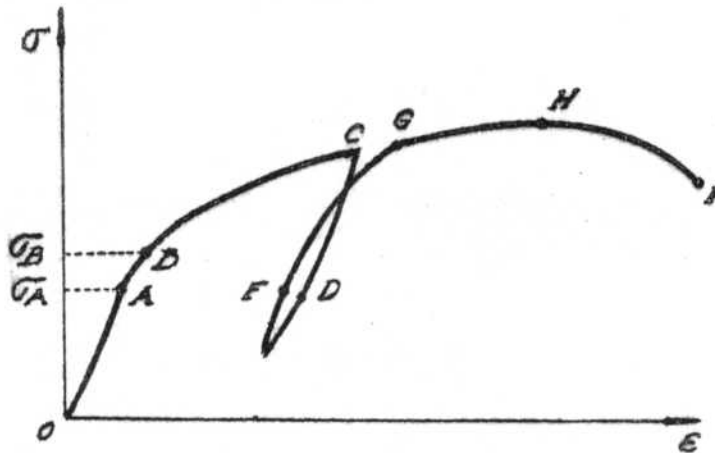


Figura II-1

Desde 0 hasta H la tensión σ es una función monótona creciente de la deformación ϵ . Luego decrece hasta I donde se produce la fractura. Desde 0 hasta B (límite de fluencia) el material es elástico, es decir, la deformación es completamente reversible y la descarga tiene lugar a lo largo de $\overline{B0}$. Sin embargo, la relación tensión-deformación deja de ser lineal ya en A, límite de proporcionalidad.

Para cargas mayores que σ_B la deformación es parcialmente irreversible de manera que la descarga desde un punto tal como C hasta uno con tensión nula dejará en el material ensayado una deformación permanente o plástica. Reiniciando la carga a partir de un punto tal como el E, el proceso continúa a lo largo de EF hasta el nuevo punto de fluencia G y de ahí en adelante prosigue a lo largo de GH.

A partir del punto H puede considerarse que el ensayo deja de ser de tracción simple. En virtud de la aparición de una zona de estricción en la probeta, ésta queda sometida a un estado triaxial de tensiones que se mantiene hasta la rotura. En la zona de estricción la velocidad de reducción del área de la sección normal de la probeta es mayor que la velocidad de endurecimiento del material, produciéndose un proceso de deformación plástica inestable. En lo que sigue, dado que sólo se prestará atención a materiales y procesos estables, la porción HI será ignorada. En general la curva tensión-deformación de la Figura II-1 es influenciada por efectos dependientes del tiempo (velocidad de carga, fluencia lenta o "creep") y de la temperatura.

Prandtl (24) en base a trabajos experimentales de Berliner idealizó la curva tensión-deformación en la forma que se indica en Figura II-2. Esta idealización supone procesos isotérmicos e ignora los efectos dependientes del tiempo (el material es no viscoso).

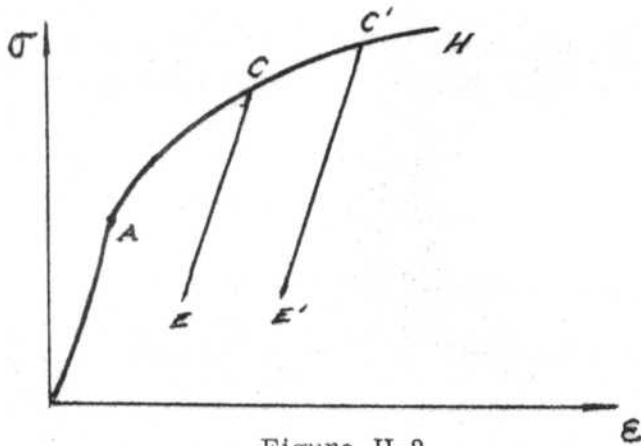


Figura II-2

Las principales características del modelo de Prandtl son las siguientes:

- La pendiente de la tangente a EFG en E (ver figura II-1) se toma igual a la pendiente de OA.
- El lazo de histéresis se supone unívocamente determinado por el punto E.
- Se supone que el camino de recarga pasa por C y prosigue luego desde C hacia H como si la descarga no hubiese tenido lugar.

Estas suposiciones implican que las pérdidas por histéresis son nulas, de manera que el camino CDE coincide con EFG. Además se considera que el límite de proporcionalidad A coincide con el límite de fluencia B y que los caminos de descarga tales como CE, C'E', etc., son líneas rectas paralelas a OA.

Otra idealización corrientemente usada, considera que el endurecimiento por trabajado es nulo y la deformación plástica tiene lugar bajo carga constante. Este material ideal se denomina elástico-perfectamente plástico.

Como se ha señalado, la Figura II-2 corresponde con un ensayo unidimensional. La tensión correspondiente al punto A determina un límite entre el campo elástico y el campo plástico. Si se analizan estados generales de tensiones, habrá infinitas combinaciones posibles de tensiones que den lugar a la fluencia. Considerando un espacio vectorial V cuyas coordenadas son los componentes del tensor de tensiones σ_{ij} , cada punto de ese espacio corresponde a un estado de tensiones y los estados que dan lugar a deformaciones plásticas determinan una superficie cerrada que se denomina en general superficie de fluencia.

En el ejemplo de la Figura II-2 dicha superficie se reduce al punto A.

Un programa de carga puede considerarse como una trayectoria en el espacio vectorial de tensiones. Asociados a cada punto de esa trayectoria están las variables de deformación, las cuales junto con las tensiones describen el estado mecánico del cuerpo. También deben incluirse parámetros que midan la magnitud del endurecimiento por trabajado. Estas variables que describen el estado mecánico no son en general funciones de punto en el espacio de tensiones, dependiendo de la historia del material así como del camino de carga.

En lo que sigue se admitirá que existe, para el tipo de materiales en consideración, un estado único, característico del material que no ha sido nunca deformado. En los metales, este estado virgen o natural puede obtenerse por medio de un tratamiento térmico adecuado.

Los estados de tensiones que producen fluencia en un material deformado a partir de su estado natural determinan la "superficie inicial de fluencia" o simplemente "superficie de fluencia".

Cuando operamos con materiales endurecibles, la superficie anterior se modifica a medida que tiene lugar el proceso de deformación plástica. El concepto de superficies de fluencia posteriores a la primera o "superficies de carga" es una generalización correspondiente a los puntos de fluencia sucesivos tales como C, C', etc. en la Figura II-2.

Phillips y Sierakowski (25) basándose en un modelo de la curva tensión deformación más cercano al real que el modelo de Prandtl, consideran que en el proceso de descarga y carga intervienen dos superficies que delimitan la transición elástico-plástica, entre las cuales existe toda una familia de superficies de fluencia.

La expresión matemática de la superficie inicial y de las siguientes superficies de fluencia, denominadas superficies de carga, es en general, una función complicada de las variables de estado que puede describirse como

$$\dot{f}(\bar{\sigma}_{ij}, \epsilon_{ij}^P, k) = 0 \quad (2.1)$$

donde k es un parámetro que mide el endurecimiento por trabajado.

Para estados elásticos del material es $f < 0$; para estados plásticos $f = 0$; valores $f > 0$ carecen de sentido físico. Consideremos la derivada respecto del tiempo de la ecuación (2.1)

$$\dot{f} = \frac{\partial f}{\partial \bar{\sigma}_{ij}} \dot{\bar{\sigma}}_{ij} + \frac{\partial f}{\partial \epsilon_{ij}^P} \dot{\epsilon}_{ij}^P + \frac{\partial f}{\partial k} \dot{k} \quad (2.2)$$

Postulado de Drucker

Se ha señalado al principio de este capítulo que se considerarán materiales endurecibles y fue definido el endurecimiento de un modo intuitivo, recurriendo a la curva correspondiente a un ensayo en tracción simple. A continuación se considerará una definición más precisa y general de material endurecible, debida a Drucker^{(15) (16) (29)}.

Se utilizará nuevamente la curva tensión-deformación unidimensional de un material endurecible (Figura II-3-a), tratando de generalizar las conclusiones al espacio multidimensional de tensiones (Figura II-3-b).

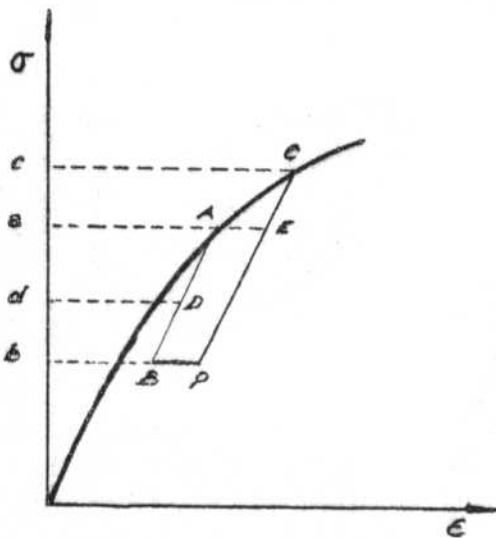


Figura II-3-a

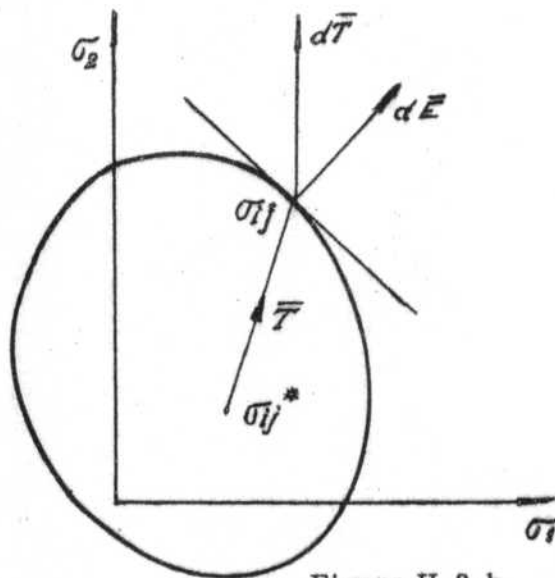


Figura II-3-b

Supóngase que el elemento material bajo consideración se encuentra en un momento dado en un estado representado por B. Mediante la acción de un agente externo se incrementan las tensiones de modo que el proceso de deformación tenga lugar siguiendo el camino B A C. Luego, lentamente, se retira el incremento según C A B.

El trabajo entregado durante el ciclo de carga y descarga, representado por el área BACPB es positivo. Por otra parte, las porciones BAEPB y ACEA de este trabajo son ambas positivas. En el caso particular en que B coincide con A el trabajo total está representado por ACEA.

Generalizando esta observación el postulado de Drucker dice:

- a) El trabajo realizado por el agente externo durante la aplicación de las tensiones adicionales es positivo.
- b) El trabajo neto desarrollado por el agente externo durante el ciclo de aplicación y descarga es positivo o nulo.

Vemos que $f < 0$ corresponde a un estado elástico, ya que $\dot{f} dt$ nos conduce a un valor de f que es necesariamente negativo. Este paso de un estado plástico a uno elástico no es acompañado por deformación plástica y se denomina descarga. Dado que $\dot{k} = 0$ y $\dot{\epsilon}_{ij}^P = 0$ el criterio de descarga, a partir de un estado plástico es

$$\frac{\partial f}{\partial \sigma_{ij}} \dot{\sigma}_{ij} < 0 ; f = 0 \quad (2.3)$$

El cambio de un estado plástico a otro, o de un estado elástico a uno plástico, acompañados de deformación plástica constituyen procesos de carga y tienen lugar cuando es

$$\frac{\partial f}{\partial \sigma_{ij}} \dot{\sigma}_{ij} = 0 ; f = 0 \quad (2.4)$$

El caso

$$\frac{\partial f}{\partial \sigma_{ij}} \dot{\sigma}_{ij} = 0 ; f = 0 \quad (2.5)$$

implica un cambio desde un estado plástico a otro estado plástico sin modificaciones en el estado de deformación plástica y se denomina carga neutra.

Observando que $\frac{\partial f}{\partial \sigma_{ij}}$ es el vector normal a la superficie en el espacio σ_{ij} , las expresiones anteriores tienen una simple interpretación geométrica. Así, se tendrá carga, descarga o carga neutra según el vector $\dot{\sigma}_{ij}$ esté dirigido hacia el exterior, hacia el interior o tangente a la superficie de carga respectivamente. Como $f = 0$ es una superficie cerrada en el espacio de tensiones, el concepto de interior o exterior está perfectamente definido. Por razones que serán claras más adelante, se adopta una convención de signos de manera tal que $\frac{\partial f}{\partial \sigma_{ij}}$ resulte colineal con la normal exterior a $f = 0$.

2.- Efecto de presiones hidrostáticas, Cambio de volumen.

Bridgman (26) (27) ha demostrado que la presencia de presiones hidrostáticas del orden de la tensión de fluencia no afecta la superficie de fluencia inicial. Crossland (28) verificó que tampoco el desarrollo de los procesos plásticos es afectado por la presencia de una presión hidrostática.

Consistentemente con el concepto anterior, se admite que las deformaciones plásticas tienen lugar sin variación de volumen, es decir con $\dot{\epsilon}_{ii}^P = 0$. Por esas razones es conveniente descomponer los tensores de tensiones y de deformaciones en sus componentes esférico y desviador.

Las observaciones anteriores determinan que en general se considere a los componentes desviadores de ambos tensores como los únicos significativos. Algunos materiales parecen no ajustarse completamente a esta regla (86).

Debemos destacar que el trabajo a que se hace referencia es únicamente el trabajo realizado por las fuerzas adicionales en los desplazamientos que resultan.

En otras palabras, endurecimiento para Drucker significa que no puede extraerse del material y del sistema de fuerzas que sobre él actúa ninguna energía por sobre la energía elástica.

Decir que un material es endurecible por trabajado implica que para cualquier incremento de tensiones que se realice, por sobre el sistema inicial de tensiones, el material conservará su equilibrio o estabilidad y ello está relacionado con el signo positivo que se le pide al trabajo realizado.

Pasando a la Figura II-3-b, resulta que σ_{ij}^* corresponde al punto B, σ_{ij} corresponde al punto A, dT representa el incremento de tensiones, dE el incremento de deformación plástica y T la diferencia entre las tensiones correspondientes a A y B. El trabajo plástico total es entonces, en primera aproximación

$$(\bar{T} \cdot d\bar{E}) + \frac{1}{2} (dT \cdot dE) > 0 \quad (2.6)$$

que corresponde al conjunto de las áreas BAEPB y ACEA. Entonces será

$$\begin{aligned} \bar{T} \cdot d\bar{E} > 0 & \quad \text{si} \quad \sigma_{ij} \neq \sigma_{ij}^* \\ T \cdot dE = 0 & \quad \text{si} \quad \sigma_{ij} = \sigma_{ij}^* \end{aligned} \quad (2.7)$$

y, por otra parte

$$dT \cdot dE \geq 0 \quad (2.8)$$

donde el signo igual corresponde al caso de carga neutra. Reuniendo ambas expresiones se tiene

$$\left\{ \begin{array}{l} dT \cdot dE \geq 0 \\ \bar{T} \cdot d\bar{E} \geq 0 \end{array} \right. \quad (2.9)$$

que también se puede escribir como

$$\left\{ \begin{array}{l} (\sigma_{ij} - \sigma_{ij}^*) d\epsilon_{ij}^p \geq 0 \\ d\sigma_{ij} d\epsilon_{ij} \geq 0 \end{array} \right. \quad (2.10)$$

o en función de las velocidades de carga y deformación

$$\left\{ \begin{array}{l} (\bar{\sigma}_{ij} - \sigma_{ij}^*) \dot{\epsilon}_{ij} \geq 0 \\ \dot{\sigma}_{ij} \dot{\epsilon}_{ij} \geq 0 \end{array} \right. \quad (2.11)$$

El postulado de Drucker define un material con un comportamiento determinado; ese tipo de materiales, estables en el sentido de Drucker, será el considerado en el resto de este trabajo. Sin embargo, es necesario admitir que existen situaciones en que esta condición no se cumple. Tal el caso de la primer zona de fluencia en un acero con contenido medio de carbono (límite de fluencia superior, ver Figura II-4).

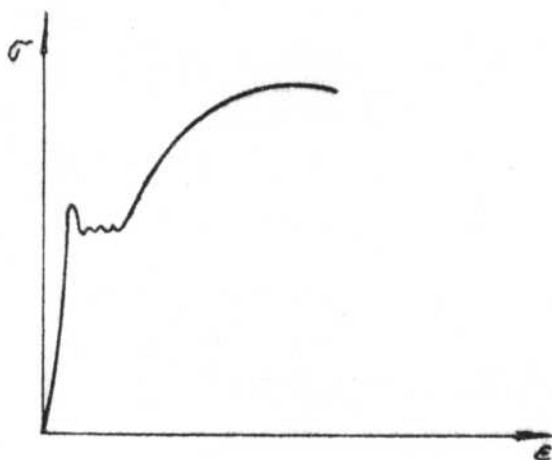


Figura II-4

CAPITULO III

1. - Caracterización de la superficie de carga. Superficie de carga inicial.

La forma de la ecuación (2-1) o de la superficie de carga en el espacio σ_{ij} es, en último análisis, una característica de cada material y como tal deberá ser determinada por medios experimentales.

Sin embargo, es factible haciendo uso de la hipótesis del capítulo anterior, determinar algunas restricciones muy generales a la forma de la superficie de fluencia, es decir, construir un primer entorno de las formas posibles.

La hipótesis de independencia de las tensiones hidrostáticas (ver § 2, ref. (26)(27)(28), indica que si se considera al tensor de tensiones descompuesto en sus partes esférica y desviadora, únicamente esta última es relevante en procesos de fluencia plástica. Entonces en (2.1) es posible reemplazar σ_{ij} por S_{ij} y la ecuación de la superficie de carga se escribe

$$f(S_{ij}, \epsilon_{ij}^p, k) = 0 \quad (3.1)$$

Es decir, la superficie de carga depende de σ_{ij} de una manera muy especial, solamente a través de los componentes desviadores S_{ij} . Más adelante se verá la interpretación geométrica de esta característica, que determina que la superficie de fluencia sea un cilindro de eje normal al plano $\sigma_{kk} = 0$.

Por otro lado, en base al postulado de Drucker (ver § 2) se puede demostrar que las superficies de carga deben ser convexas. La prueba de la convexidad de las superficies de carga está basada en la desigualdad (2.11).

Sea un estado elástico de tensiones σ_{ij}^* cuya representación en el espacio de nueve dimensiones es interior a la superficie de carga, esto es, se verifica que

$$f(\sigma_{ij}^*, \epsilon_{ij}^p, k) < 0$$

Si se incrementa dicho estado de tensiones hasta σ_{ij} , estado que se halla sobre la superficie de carga es:

$$f(\sigma_{ij}, \epsilon_{ij}^p, k) = 0$$

En el espacio V, corresponderá una variación de tensiones señalada por el vector $\bar{T} = \sigma_{ij} - \sigma_{ij}^*$, como se ve en la Figura III-1.

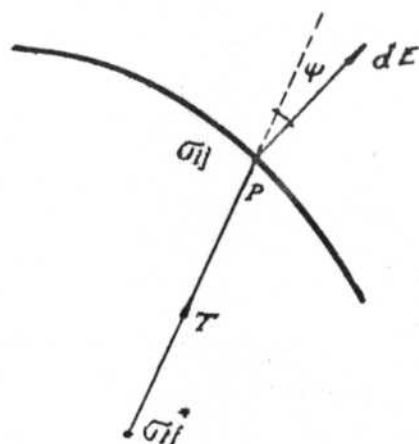


Figura III-1

Hasta el momento no ha habido alteración del estado de deformación plástica del sistema. Si a partir de σ_{ij} se efectúa un incremento diferencial $d\epsilon_{ij}$ de las tensiones resultará un incremento $d\epsilon_{ij}^P$ en el estado de deformaciones, que se indicará en el espacio de tensiones y deformaciones como $d\bar{E}$.

De acuerdo con los postulados de Drucker deberá cumplirse

$$\bar{T} \cdot d\bar{E} \geq 0 \quad (3.2)$$

$$|\bar{T}| |d\bar{E}| \cos \psi \geq 0 \quad (3.3)$$

Para que satisfaga (3.3) deberá ser

$$-\frac{\pi}{2} \leq \psi \leq \frac{\pi}{2} \quad (3.4)$$

Este resultado puede ser interpretado geoméricamente. A partir del extremo de \bar{T} (punto P) se traza el vector $d\bar{E}$ según Figura III-2.

Para que (3.1) sea satisfecha, todos los estados elásticos σ_{ij}^* de partida deberán estar del mismo lado del hiperplano AB pasante por P al cual $d\bar{E}$ es perpendicular, y del lado opuesto al cual está dirigido $d\bar{E}$. Como σ_{ij} es un punto de la superficie de carga entonces P pertenece al hiperplano y a dicha superficie. Esto prueba que dicha superficie es convexa en P y como se trata de un punto genérico, se concluye que toda la superficie de fluencia es convexa.

La demostración anterior está por supuesto limitada a los puntos regulares de la su-

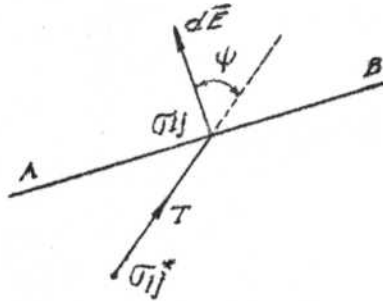


Figura III-2

perficie de fluencia, es decir a los puntos en los cuales se puede definir un plano tangente único. Más adelante se verá (Ø 7) que la noción de convexidad sigue siendo válida en regímenes irregulares, es decir, en puntos angulosos de la superficie de fluencia.

En lo que resta de este capítulo será estudiada la superficie de carga inicial o superficie de fluencia, dejando para el Ø 5 la consideración de las superficies de carga subsiguientes.

En el caso de la superficie de fluencia inicial, la ecuación general (3.1) reduce a

$$f(S_{ij}) = 0 \quad (3.3)$$

pues dado que no ha habido deformación plástica anterior (registrada) $\epsilon_{ij}^P = 0$ y $k = 0$. Si además el material considerado es inicialmente isótropo, es decir si sus propiedades mecánicas no dependen de su orientación con respecto a un sistema fijo de coordenadas, la función f en (3.3) dependerá únicamente de los invariantes escalares de S_{ij} , es decir, puede ser escrita como:

$$f(J_1 = 0, J_2, J_3) = 0 \quad (3.4)$$

o análogamente, en función de las tensiones principales:

$$f(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3) = 0 \quad (3.5)$$

La ecuación (3.5) tiene la ventaja de poder ser representada gráficamente con cierta comodidad en el espacio de tensiones principales $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$, cosa que no sucede con la hipersuperficie (3.3).

En tensiones principales, la descomposición (1.4) se escribe:

$$\sigma_{\alpha} = S_{\alpha} + \sigma, \quad \sigma = \frac{1}{3} \sum_{\alpha=1}^3 \sigma_{\alpha}$$

Las componentes del tensor desviador S_{α} estarán representados sobre un plano $\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3 = 0$ (usualmente denominado plano π). En consecuencia, la superficie toma la forma de un cilindro cuyas generatrices son normales a dicho plano. La intersección de dicho cilindro con el plano π basta para caracterizar la superficie de fluencia. Intersecciones con otros planos son también corrientemente usadas, como se verá más adelante.

Si los ejes ortogonales $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$ son proyectados sobre el plano π aparecen como ejes que se intersectan separados por ángulos de 120° . Si la escala de proyección es incrementada por un factor $\sqrt{2}/3$ las componentes desviadoras pueden ser medidas directamente sobre los ejes proyectados. La representación de la superficie de fluencia sobre el plano π se indica en la Figura III-3.

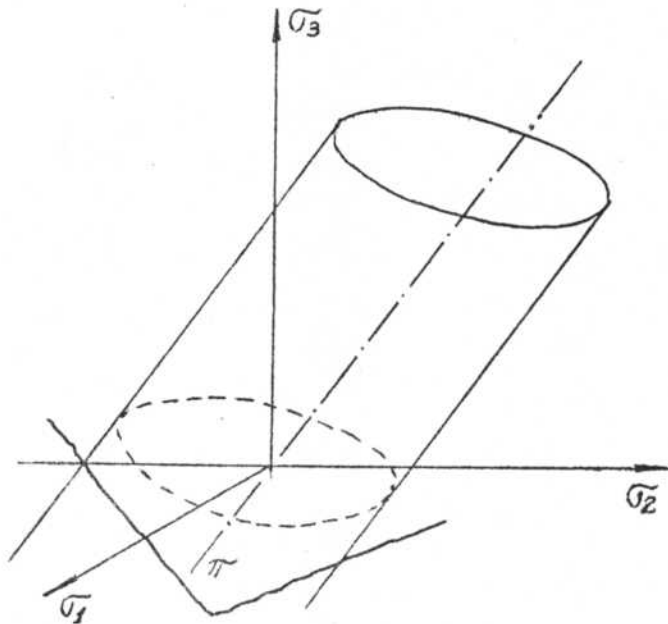


Figura III-3

La existencia de isotropía inicial implica también que la denominación aplicada a los ejes σ_1 , σ_2 , σ_3 es arbitraria. Si la terna (σ_1 , σ_2 , σ_3) representa un estado plástico, el mismo estado será representado por cualquiera de las otras cinco permutaciones posibles de σ_1 , σ_2 y σ_3 .

En el plano χ esto determina simetría axial con respecto a cada uno de los ejes σ_1 , σ_2 , σ_3 .

Por otro lado, debe recordarse que se está estudiando fluencia inicial, por lo que $\epsilon_{ij}^p = 0$ y no existe efecto Bauschinger (30) que es el resultado de un proceso plástico previo.

Si además como es corriente en los metales, el material tiene iguales características mecánicas en tracción y compresión, debemos tener el mismo comportamiento tanto para σ_1 como para $-\sigma_1$, etc., es decir, debemos tener simetría axial respecto de las normales de los ejes de las tensiones principales.

En resumen, isotropía e igual comportamiento en tracción y compresión determinan simetría respecto de 6 ejes separados por ángulos de 30° . Si además se tiene en cuenta que la superficie de fluencia debe ser convexa, como se indicó al principio de este capítulo, un análisis de la Figura III-4 indicará que toda superficie de fluencia posible debe estar comprendida entre las superficies límites determinadas por los hexágonos ABCDEF y A'B'C'D'E'F'. En efecto, si A es un punto de la superficie de fluencia, también lo son por simetría B y F. Además ninguna línea convexa que cumpla esa condición de simetría puede ser interior a FAB. Si se analiza la simetría respecto de σ_1 se concluye que ninguna superficie convexa que pase por A puede ser exterior a la línea F'A A'. De la misma manera, es inmediato completar el razonamiento para los restantes puntos.

Entre los hexágonos límites, cualquier superficie convexa puede ser usada como superficie de fluencia. La forma más adecuada debe ser determinada para cada material por medio de experiencias.

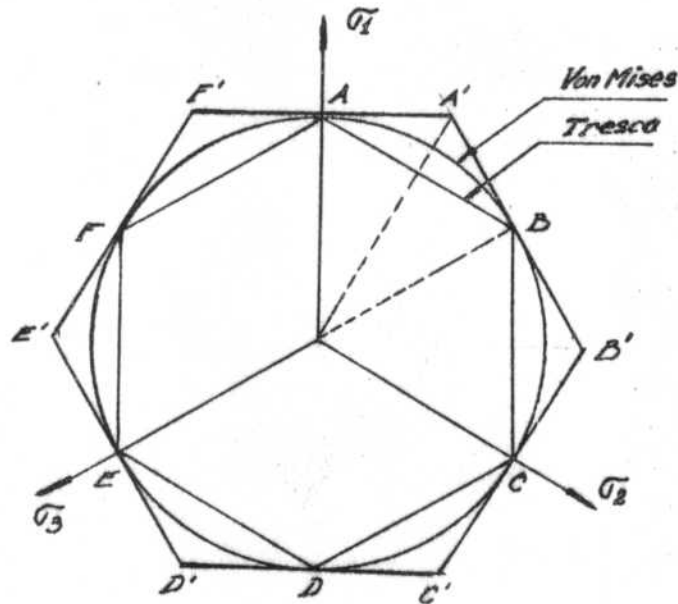


Figura III-4

2. - Criterio de fluencia de von Mises:

Este criterio fue propuesto con diferentes motivaciones, por Huber⁽³¹⁾, von Mises⁽¹¹⁾, Nadai⁽¹⁸⁾ y Hencky⁽¹⁷⁾ y se expresa en la forma:

$$f = J_2 = K^2 \quad (3.6)$$

Es de destacar que no se considera la posible influencia de J_3 en la ecuación 3.4. En función de las componentes del tensor desviador, puede escribirse

$$J_2 = \frac{1}{6} [(\sigma_{11} - \sigma_{22})^2 + (\sigma_{22} - \sigma_{33})^2 + (\sigma_{33} - \sigma_{11})^2] + (\sigma_{12}^2 + \sigma_{23}^2 + \sigma_{31}^2) = K^2 \quad (3.7)$$

o, en función de las tensiones principales:

$$J_2 = \frac{1}{6} [(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2] = K^2 \quad (3.8)$$

El valor de K se determina de manera que el resultado que se obtenga de 3.7 coincida con el obtenido experimentalmente, en casos simples. Por ejemplo, para un ensayo de tracción simple, donde es

$$\bar{\sigma}_{11} = Y, \quad \bar{\sigma}_{22} = \bar{\sigma}_{33} = \bar{\sigma}_{12} = \bar{\sigma}_{23} = \bar{\sigma}_{31} = 0$$

resulta $\frac{2}{6} Y^2 = K^2$ de modo que debe ser $K = Y/\sqrt{3}$ siendo Y el límite de fluencia en tracción.

Para corte puro, en cambio, se tiene

$$\bar{\sigma}_{12} = \mathcal{T}, \quad \bar{\sigma}_{11} = \bar{\sigma}_{22} = \bar{\sigma}_{33} = \bar{\sigma}_{23} = \bar{\sigma}_{31} = 0$$

y resulta $\mathcal{T}_{12} = \mathcal{T}$, de modo que es $K = \mathcal{T}$ siendo \mathcal{T} la tensión de fluencia por corte. Como el valor de K es único debe ser

$$\mathcal{T} = \frac{Y}{\sqrt{3}} = 1,155 \frac{Y}{2} \quad (3.9)$$

La ecuación (3.5), en un sistema coordenado de tensiones principales está representada por un cilindro de sección circular de radio $\sqrt{2} J_2$. La coincidencia de fluencia para un estado bidimensional de tensiones está representada por la curva intersección del cilindro con el plano $\bar{\sigma}_1, \bar{\sigma}_2$ que, en general, es una elipse. En efecto, haciendo $\bar{\sigma}_3 = 0$ en (3.8) se obtiene:

$$\frac{1}{3} (\bar{\sigma}_1^2 + \bar{\sigma}_2^2 - \bar{\sigma}_1 \bar{\sigma}_2) = K^2 \quad (3.10)$$

Otra representación utilizada a menudo para interpretar experiencias en tracción-torsión, en tubos de paredes delgadas, se efectúa en el plano $\bar{\sigma}_{11}$ y $\bar{\sigma}_{12}$. En este caso se obtiene la elipse:

$$\bar{\sigma}_{11}^2 + 3 \bar{\sigma}_{12}^2 = 3K^2$$

Varias interpretaciones físicas han sido propuestas para este criterio. Nadai sugiere que la fluencia depende de la tensión de corte octahédrica. Esto surge de la independencia de la fluencia respecto de la presión hidrostática, que es la componente normal de la tensión actuante sobre el plano octahédrico. Hencky interpreta que se produce la fluencia cuando la energía de distorsión (energía de deformación por corte) alcanza un valor crítico. No debe llamar la atención el hecho de que la energía de deformación por

corte se derive de consideraciones elásticas ya que las propiedades elásticas de los materiales no resultan alteradas por la deformación plástica de los mismos. No obstante, si la energía de deformación de un cuerpo tiene algún significado, éste deberá interpretarse en base a interacciones atómicas y resulta dificultoso considerar la energía de deformación como divisible en dos partes: una relacionada con la variación de volumen y la otra con el cambio de forma. En este sentido, la interpretación del criterio en base a consideraciones energéticas no debe llevarse demasiado lejos⁽⁸⁷⁾.

3. - Criterio de Tresca:

El más antiguo criterio de fluencia fue propuesto por Coulomb, Tresca y Saint Venant y es conocido como "criterio de Tresca"⁽⁹⁾⁽¹⁰⁾.

Este criterio supone que la fluencia se inicia cuando la tensión tangencial máxima alcanza un valor crítico, que se indicará con k^* .

Para expresar esta idea en forma analítica y en su forma más simple se utilizarán las tensiones principales, considerándose $\sigma_1 > \sigma_2 > \sigma_3$.

Así resulta

$$f = \sigma_1 - \sigma_3 - 2k^* = 0 \quad (3.11)$$

No obstante, esta forma no respeta la regla de que la designación arbitraria de los ejes no debe afectar la forma de la superficie de fluencia (condición de isotropía).

Para satisfacer dicha regla se recurre al hecho de que en el comienzo de la fluencia una de las diferencias:

$$|\sigma_1 - \sigma_2|, |\sigma_2 - \sigma_3|, |\sigma_3 - \sigma_1|$$

(la mayor) alcanza un valor $2k^*$. Por lo tanto se puede escribir

$$f = [(\sigma_1 - \sigma_2)^2 - 4k^{*2}] \cdot [(\sigma_2 - \sigma_3)^2 - 4k^{*2}] \cdot [(\sigma_3 - \sigma_1)^2 - 4k^{*2}] = 0 \quad (3.12)$$

Esta ecuación resulta simétrica respecto de las tensiones principales y puede escribirse en forma invariante como sigue:

$$f = 4J_2^3 - 27J_3^2 - 36k^{*2}J_2^2 + 96k^{*4}J_2 - 64k^{*6} = 0 \quad (3.13)$$

expresión debida a Reuss, donde J_2 y J_3 son el segundo y tercer invariantes desviados.

Considerando todas las diferencias posibles entre σ_1 , σ_2 y σ_3 este criterio representa, en el espacio de tensiones, un prisma hexagonal cuyas generatrices son normales al plano π . Su intersección con el plano π define el hexágono ABCDEF, uno de los límites hallados para las posibles superficies de fluencia (Figura III-4).

Como en el caso de von Mises, k^* se determina en experiencias con estados de tensiones simples. Así, para tracción pura es $\sigma_1 = Y$, $\sigma_3 = 0$, por lo que resulta $k^* = Y/2$. Para corte puro es $\sigma_1 = -\sigma_3$, de modo que resulta $k^* = \mathcal{T}$. Como k^* está determinado de manera única, deberá ser $\mathcal{T} = Y/2$.

En la Figura III-4 puede verse que si se fijan las constantes de manera que los criterios de Tresca y von Mises den el mismo resultado en tracción pura, la tensión de fluencia por corte prevista por ambos criterios será diferente. Así resulta

$$\text{Tensión de corte (von Mises)} = 1,155 \text{ Tensión de corte (Tresca)} \quad (3.14)$$

Una crítica frecuente al criterio de Tresca es que no considera los efectos de la tensión intermedia (es decir σ_2 en el caso de $\sigma_1 > \sigma_2 > \sigma_3$) al considerar $\sigma_1 - \sigma_3 = 2k^*$.

En el plano σ_1, σ_2 el criterio de Tresca se representa por medio de dos rectas paralelas a la ordenada $\sigma_1 = k^*$. Los datos de las experiencias (ver § 8) indican que esto no es exactamente así. Sin embargo, el criterio de Tresca puede resultar muy conveniente para la resolución de ciertos problemas. Ha sido muy especialmente en los últimos años y en conexión con el criterio de endurecimiento cinemático de Prager⁽²³⁾.

4. - Otros criterios

Para mejorar la aproximación analítica de resultados experimentales, han sido desarrollados otros criterios. Dentro de la forma de la ecuación (3.4), Osgood⁽³²⁾ encontró muy buena coincidencia entre los resultados experimentales realizados con tubos de aluminio y la ecuación

$$f = J_2^3 - 2,25 J_3^2 \quad (3.14)$$

Esta función es representada en el plano π por una figura intermedia entre los criterios de Tresca y von Mises.

Si la componente hidrostática es importante, en la descripción general intervendrá

J_1 además de J_2 y J_3 , como ocurre en el caso de suelos y en metales sometidos a muy altas presiones⁽⁸⁶⁾(3).

Finalmente, cabe considerar el caso de anisotropía inicial frecuente en materiales que han sufrido un proceso de deformación plástica durante su elaboración. La ley más simple para el caso anisotrópico, que es esencialmente una extensión del criterio de von Mises, es la forma cuadrática

$$f = \frac{1}{2} A_{ijkl} \sigma_{ij} \sigma_{kl} \quad (3.15)$$

donde A_{ijkl} ($i, j, k, l = 1, 2, 3$) es un conjunto de 21 constantes independientes (dado que $A_{ijkl} = A_{klij}$).

Si se agrega el postulado de incompresibilidad

$$\frac{\partial f}{\partial \sigma_{pp}} = A_{ppkl} = 0 \quad (3.16)$$

el número de variables independientes se reduce a 15. Un rápido análisis muestra que la ecuación (3.15) representa en el plano $\sigma_1 - \sigma_2$ una elipse equivalente a la del criterio de von Mises pero con inclinación distinta de sus ejes. Esta inclinación depende de la anisotropía existente. Dado que dicha función es cuadrática, se tendrá igual tensión de fluencia en tracción y compresión; no obstante la tensión de fluencia será diferente para cada dirección⁽⁵¹⁾.

CAPITULO IV

RELACIONES TENSION-DEFORMACION EN EL CAMPO PLASTICO

Al comienzo de este estudio se determinaron los estados de tensiones que señalan la iniciación de la deformación plástica, a través de los "criterios de fluencia".

Es necesario considerar aún otro elemento para completar una teoría de plasticidad: las relaciones existentes entre las tensiones y deformaciones o entre sus respectivos incrementos, en el campo plástico.

Una importante diferencia existe entre las relaciones correspondientes a los rangos elástico y plástico del material: en el rango elástico la deformación está unívocamente determinada por el estado de tensiones, vale decir, dado un estado de tensiones puede calcularse la deformación correspondiente sin tener en cuenta la forma que dicho estado de tensiones fue alcanzado; en el rango plástico las deformaciones no están, en general, determinadas unívocamente por las tensiones sino que dependen de la historia de carga, o de otra forma, de como dicho estado de tensiones fue alcanzado.

A continuación se analizarán las formas de la relación tensión-deformación en el régimen plástico. Se comenzará por probar que el vector incremento de deformación dE es siempre normal a la superficie de fluencia.

Haciendo referencia a la demostración realizada en § 3 sobre convexidad, si se admite que la superficie de carga es regular en P (es decir, P , no es un punto anguloso), deberá ser tangente al hiperplano AB en dicho punto. Como dE es perpendicular a AB , por construcción, será también perpendicular a la superficie de carga. En el modelo de Phillips y Sierakowski⁽²⁵⁾ esta demostración es válida sólo para la superficie de fluencia inicial. Para extender su validez a las superficies de fluencia subsiguientes es necesario introducir una hipótesis de linealidad. La normalidad mencionada no ha sido totalmente corroborada por la experiencia, habiéndose observado desviaciones a esta ley⁽³³⁾.

Relaciones tensión-deformación plástica

El hecho de ser el vector incremento de deformación plástica perpendicular a la superficie de carga permite expresar dicho vector en función del gradiente de la función f , esto es:

$$d\varepsilon_{ij}^P = \lambda \frac{\partial f}{\partial \sigma_{ij}} \quad (4.1)$$

Dado que el postulado de Drucker establece que $d \sigma_{ij} d \epsilon_{ij}^P \geq 0$, entonces:

$$d \sigma_{ij} d \epsilon_{ij}^P = \lambda \frac{\partial f}{\partial \sigma_{ij}} \geq 0$$

En procesos de carga resulta:

$$\frac{\partial f}{\partial \sigma_{ij}} d \sigma_{ij} > 0$$

por lo que λ deberá ser una función no negativa.

Como en el proceso de carga se pasa por puntos que sucesivamente satisfacen la ecuación:

$$f(\sigma_{ij}, \epsilon_{ij}^P, k) = 0$$

(condición de consistencia) deberá ser:

$$df = \frac{\partial f}{\partial \sigma_{ij}} d \sigma_{ij} + \frac{\partial f}{\partial \epsilon_{ij}^P} d \epsilon_{ij}^P + \frac{\partial f}{\partial k} dk = 0 \quad (4.2)$$

Reemplazando en esta ecuación el valor de (4.1) se obtiene:

$$\frac{\partial f}{\partial \sigma_{ij}} d \sigma_{ij} + \lambda \frac{\partial f}{\partial \epsilon_{ij}^P} \cdot \frac{\partial f}{\partial \sigma_{ij}} + \frac{\partial f}{\partial k} dk = 0 \quad (4.3)$$

Suponiendo que k , factor de endurecimiento sea una función del estado de tensiones y de la deformación plástica tal como:

$$dk = h_{kl}(\sigma_{mn}, \epsilon_{mn}^P) d \epsilon_{kl}^P$$

que podemos escribir, utilizando la (4.1), en la misma forma:

$$dk = h_{kl} \lambda \frac{\partial f}{\partial \sigma_{kl}} \quad (4.4)$$

Reemplazando esta expresión en (4.3) se obtiene

$$\frac{\partial f}{\partial \sigma_{ij}} d \sigma_{ij} + \Delta \left[\frac{\partial f}{\partial \sigma_{ij}} \cdot \frac{\partial f}{\partial \epsilon_{ij}^P} + \frac{\partial f}{\partial k} h_{kl} \frac{\partial f}{\partial \sigma_{kl}} \right] = 0$$

Despejando Δ se obtiene:

$$\Delta = - \frac{\frac{\partial f}{\partial \sigma_{ij}} d \sigma_{ij}}{\frac{\partial f}{\partial \sigma_{ij}} \frac{\partial f}{\partial \epsilon_{ij}^P} + \frac{\partial f}{\partial k} h_{kl} \frac{\partial f}{\partial \sigma_{kl}}} \quad (4.5)$$

donde se observa que Δ depende del estado de tensiones, de deformaciones y de la historia previa del material. Llevando esta expresión a (4.1) da por resultado:

$$d \epsilon_{ij}^P = \frac{\frac{\partial f}{\partial \sigma_{kl}} \cdot \frac{\partial f}{\partial \sigma_{ij}} d \sigma_{kl}}{- \left[\frac{\partial f}{\partial \sigma_{ij}} \cdot \frac{\partial f}{\partial \epsilon_{ij}^P} + \frac{\partial f}{\partial k} \frac{\partial f}{\partial \sigma_{kl}} h_{kl} \right]} \quad (4.6)$$

o de otra forma

$$d \epsilon_{ij}^P = A_{ijkl} d \sigma_{kl} \quad (4.7)$$

Esta última expresión indica la linealidad existente entre los incrementos de deformación plástica y los incrementos de tensiones.

Otra forma frecuente de escribir la expresión (4.6) es:

$$d \epsilon_{ij}^P = G \frac{\partial f}{\partial \sigma_{ij}} \cdot \frac{\partial f}{\partial \sigma_{kl}} d \sigma_{kl} \quad (4.8)$$

donde G dependerá de las tensiones, deformaciones y la historia de cargas, y deberá determinarse experimentalmente.

Se han realizado intentos para obtener reglas de flujo no-lineales⁽³⁴⁾. Su objetivo es la justificación de algunas desviaciones observadas en la normalidad entre el vector \bar{E} y la superficie de fluencia, considerada como regla.

CAPITULO V

REGLAS DE ENDURECIMIENTO

El tercer componente de una teoría de la plasticidad debe ser una regla de endurecimiento, que indique de qué manera se comportan las superficies de carga posteriores a la primera. Este es un tema todavía muy abierto a discusiones, especialmente por falta de suficiente información experimental sobre el comportamiento de los materiales reales.

A continuación se mencionan algunas de las reglas de endurecimiento más comúnmente usadas.

1.- Plasticidad ideal: este caso corresponde al de endurecimiento nulo, en que se supone que todas las superficies de carga coinciden con la inicial, como se indica en la Figura V-1-a. Aunque pocos materiales pueden considerarse como perfectamente plásticos el uso de esta teoría ha hecho posible atacar en forma matemáticamente rigurosa gran número de problemas cuyas soluciones permiten acotar el comportamiento real y sirven de base para otras soluciones aproximadas. El tratamiento de muchos problemas de equilibrio y de fluencia en teoría de plasticidad ideal puede encontrarse en referencias (18)(4)(5)(47)(87).

2.- Endurecimiento isotrópico: ésta es la más antigua de las teorías que introducen la consideración del endurecimiento, siguiendo en simplicidad formal a la teoría de la plasticidad perfecta. Su nombre indica que esta teoría supone que la deformación plástica no introduce anisotropía en el material. Consecuentemente, la superficie de fluencia se expande conservando su forma, como se indica en Figura V-1-b. Formalmente las superficies de carga subsiguientes se indican:

$$f = f^* (S_{ij}) - c(k) = 0 \quad (5.1)$$

donde f^* depende solamente de las tensiones y la influencia de la historia de las deformaciones es recogida mediante la variable escalar $c(k)$, que da el "tamaño" de la superficie de fluencia, siempre creciente.

En general k es un funcional de la historia de las deformaciones, es decir:

$$k = k \left[\mathbf{e}_{\tau=0}^P \quad (\tau) \right]$$

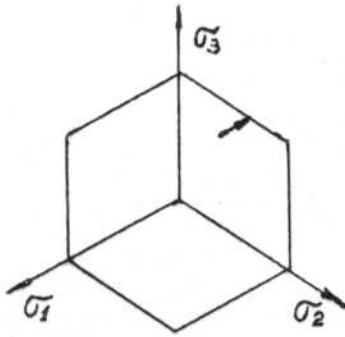


Figura V-1-a

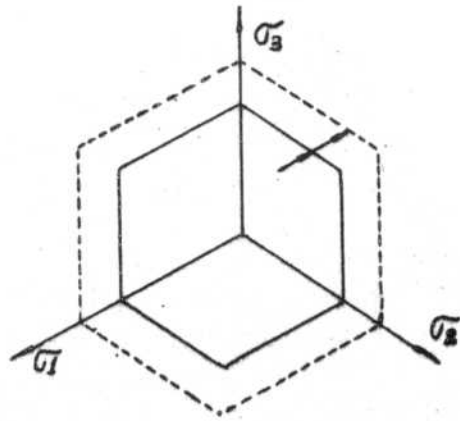


Figura V-1-b

Frecuentemente se expresa el endurecimiento en función del trabajo de deformación plástica, vale decir:

$$k = F (W^P) \quad (5.2)$$

siendo

$$W^P = \int \sigma_{ij} \dot{\epsilon}_{ij}^P dt$$

Esta expresión da lugar a que se le atribuya el nombre de "endurecimiento por trabajado" (work hardening).

Otra forma habitual es expresar el endurecimiento en función de la deformación equivalente o efectiva ϵ_e :

$$k = H (\epsilon_e) = H \left[\int d\epsilon_e \right] \quad (5.3)$$

donde la integral debe tomarse sobre todo el programa de deformación. Esta última expresión es conocida como endurecimiento por deformación (strain hardening).

Fue demostrado por R. Hill⁽⁴⁾ que para el criterio de von Mises y su regla de flujo asociada las expresiones (5.2) y (5.3) son equivalentes. Posteriormente, D. R. Bland⁽³⁵⁾ demostró que ello es cierto para cualquier criterio de fluencia lineal o cuadrática. Estos resultados están ligados al uso de un criterio de endurecimiento isotrópico, pero no serán necesariamente válidos en el caso de un material real, a consecuencia de la anisotropía inicial y el efecto Bauschinger.

En ese caso, por otro lado, la deformación plástica equivalente no es en general suficiente para especificar unívocamente las superficies de carga.

Los experimentos dan en general poco apoyo a la teoría del endurecimiento isotrópico⁽³⁶⁾⁽³⁷⁾⁽³⁸⁾⁽³⁹⁾. En efecto, el concepto de endurecimiento isotrópico no solamente no tiene en cuenta el efecto Bauschinger sino que predice un efecto precisamente opuesto. En Figura V-2 puede observarse, para un ciclo carga-descarga-recarga la comparación de los comportamientos de un material real y un material con endurecimiento isotrópico. La persistencia en el uso de este criterio debe atribuirse a la simplificación matemática que brinda y al hecho que, para procesos que introduzcan cargas siempre crecientes, sin descargas como las indicadas en Figura V-2, el criterio da resultados suficientemente cercanos a los reales.

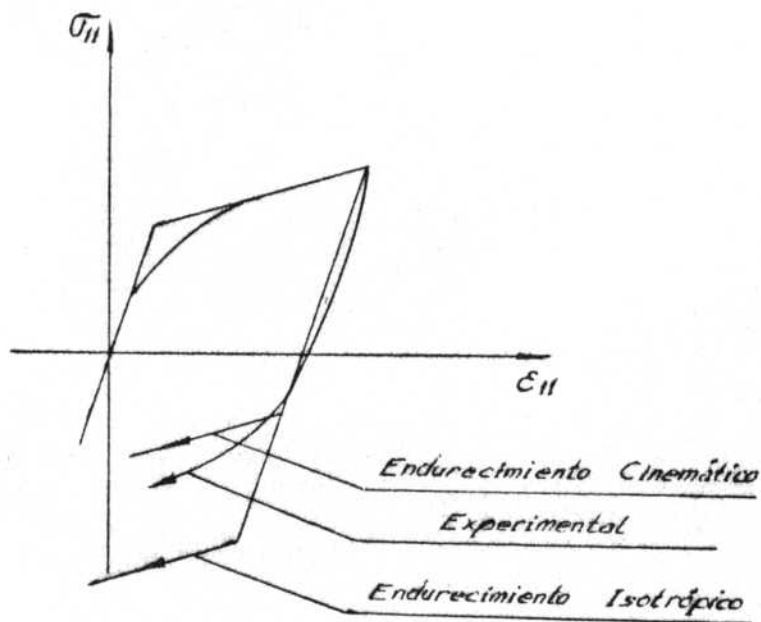


Figura V-2

3. - Endurecimiento cinemático: una teoría simplificada que representa, al menos cualitativamente el efecto Bauschinger y ha alcanzado considerable repercusión ha sido propuesta por Prager⁽²³⁾⁽⁴⁰⁾.

Prager propone una superficie de carga que se mueve en el espacio de tensiones sin cambiar de tamaño o forma y sin rotar.

Para los casos uni o multidimensional la superficie puede ser representada por medio de un marco rígido que se mueve en el espacio empujado por una clavija que representa el punto de carga en Figura V-3. Para cargas en el régimen elástico la clavija se

mueve dentro del marco sin tocarlo. Cuando la clavija toca el marco se inicia la deformación plástica. A medida que se sigue cargando la clavija empuja el marco (cuya rotación está impedida) obligándolo a trasladarse paralelamente a sí mismo.

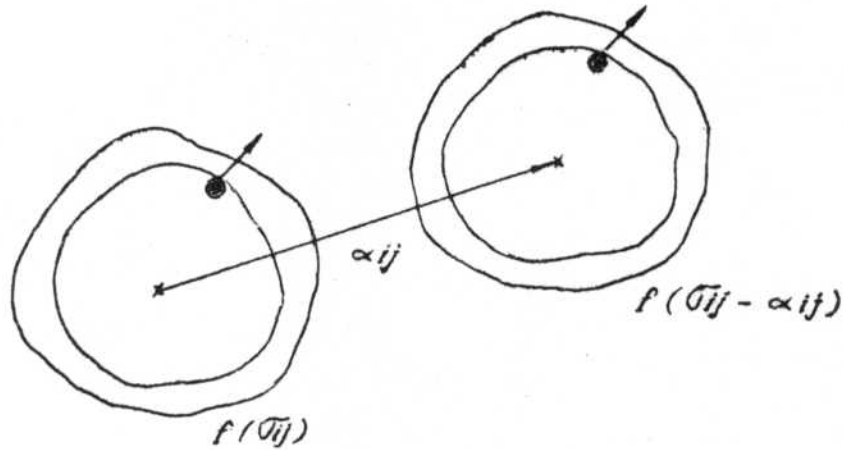


Figura V-3

Se supone que la superficie interior del marco está perfectamente pulida de modo que sólo se producen movimientos normales a sus lados. Formalmente, la translación rígida de la superficie de carga se indica con:

$$f(\bar{\sigma}_{ij} - \alpha_{ij}) = 0 \quad (5.4)$$

donde α_{ij} es un tensor cuyas nueve componentes representan en el espacio vectorial $\bar{\sigma}_{ij}$ la translación del centro de la superficie. Prager supone que:

$$\alpha_{ij} = C \dot{\epsilon}_{ij}^P \quad (5.5)$$

con C constante (endurecimiento lineal).

En la Figura V-2 puede verse que el modelo de Prager introduce en cierto grado el efecto Bauschinger.

Se debe observar también otra importante característica: el estado final puede ser independiente de la trayectoria de carga. Por ejemplo, en Figura V-4 el estado final de la trayectoria de carga ABC y de la trayectoria A'B'C' son equivalentes, mientras que el estado final correspondiente a A''B''C'' no lo es.

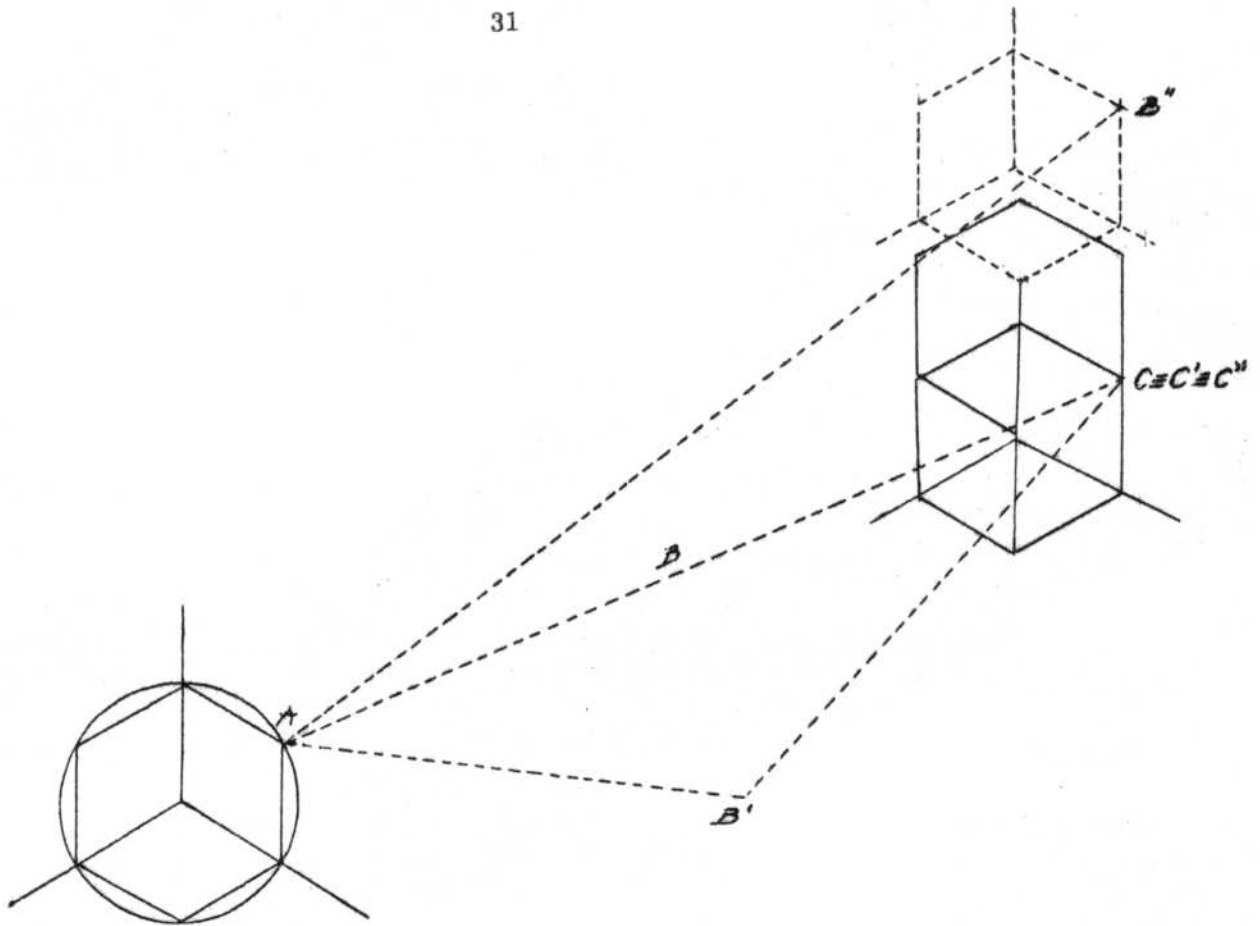


Figura V-4

Este comportamiento es debido a la forma poligonal de la superficie de carga usada. El modelo de Prager representa una relación tensión-deformación incremental en la cual el estado de deformación en cada instante depende no solamente del estado de tensión en ese instante (como en las teorías de deformación total, ver Ø 6), sino también de la historia de carga.

Esa dependencia sobre la historia es lo que hace dificultoso el uso de teorías incrementales, pues el proceso de carga debe ser seguido paso a paso. Por eso, es importante el comportamiento advertido más arriba en el modelo de Prager, que permite ahorrar tiempo de cálculo. La superficie de carga real (usualmente curva) puede ser reemplazada por un marco poligonal (o poliédrico). La aproximación puede ser hecha tan buena como sea necesario, aumentando el número de lados (caras). Un hexágono parecería ser suficiente para la mayoría de los casos.

Por otro lado, el modelo cinemático puede presentar ciertos inconvenientes cuando es usado en subespacios de σ_{ij} .

En efecto, en (5.4) si consideramos que algunos de los $\overline{\sigma}_{ij}$ son nulos (e indicamos tensiones nulas y no nulas con $\overline{\sigma}_{ij}$ y $\overline{\overline{\sigma}}_{ij}$ respectivamente) se tiene para la superficie original

$$f(\overline{\sigma}_{ij}, \overline{\overline{\sigma}}_{ij}) \overline{\sigma}_{ij} = h(\overline{\sigma}_{ij}) = 0 \quad (5.6)$$

y luego de la fluencia

$$f(\overline{\sigma}_{ij} - \overline{\alpha}_{ij}, \overline{\overline{\sigma}}_{ij}) \overline{\sigma}_{ij} = 0 \neq h(\overline{\sigma}_{ij} - \overline{\alpha}_{ij}) \quad (5.7)$$

Ec. (5.7) indica que en ciertos subespacios de la superficie de carga, ésta no se mantiene rígida sino que se deforma.

Esta observación fue hecha por Budiansky⁽⁴¹⁾, Hodge⁽⁴²⁾, Shield-Ziegler⁽⁴³⁾, etc.

Hodge divide las teorías cinemáticas en consistentes o completas que son las que consideran todas las tensiones aún aquellas nulas, y las simples o directas, que suprimen los componentes nulos desde un principio y adoptan un marco que se mueve rígidamente en el correspondiente subespacio de $\overline{\sigma}_{ij}$. Las teorías simples y las completas conducen en general a resultados diferentes. Suponiendo que el concepto básico-ecuación (5.4) del endurecimiento cinemático es correcto (y esto debe aún ser comprobado experimentalmente) el modelo completo es más exacto. Por otro lado el modelo simple es más sencillo, y puede ser usado con ventajas en la solución de problemas prácticos⁽⁴⁰⁾⁽⁴⁶⁾⁽⁴²⁾⁽⁴⁷⁾⁽⁴⁸⁾.

H. Ziegler⁽⁴⁴⁾⁽⁴⁵⁾ por su parte, ha propuesto una teoría modificada que evita el inconveniente anotado más arriba pero introduce algunos otros⁽²⁾.

Otra crítica a la teoría de Prager ha sido hecha por W. Szcypinski⁽⁴⁹⁾. Para entender su idea la Figura V-5 puede ser útil. Szcypinski considera que ninguna parte de la línea de descarga BC es (probablemente) una línea recta, y por lo tanto la determinación de la segunda superficie de carga depende de la exactitud de los ensayos.

Tanto B' y B'' como B pueden indicar una superficie de carga para diferentes experimentadores con diferentes técnicas.

Además, sostiene que considerar a C como punto de fluencia y usar una ley de endurecimiento lineal empezando en C, es tan erróneo como usar una ley de endurecimiento lineal para recarga empezando en D. De esta consideración Szcypinski concluye que el endurecimiento isotrópico es más cercano a la realidad.

Esta dificultad ha sido parcialmente resuelta por Philips con la teoría indicada en (25).

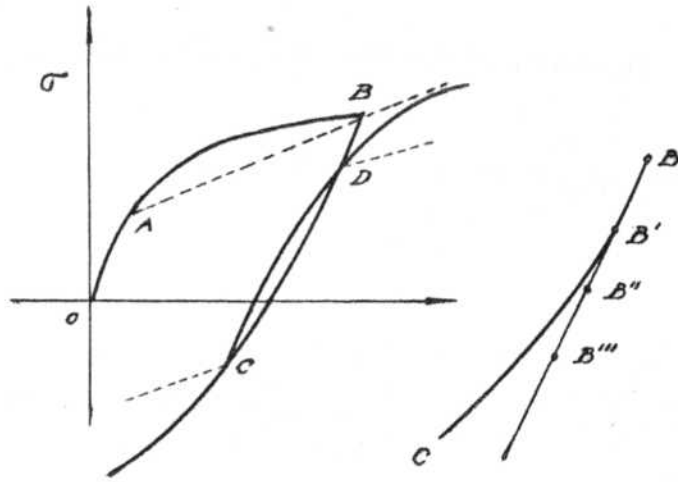


Figura V-5

4. - Generalización de la Regla de Prager

Una generalización que permite una mejor representación de los datos experimentales, ha sido hecha por Baltov y Sawzuk⁽⁵⁰⁾.

Para el caso de anisotropía inicial podemos expresar la ecuación (2.1) en la forma

$$A_{ijkl} S_{ij} S_{kl} - 2k^2 = 0$$

Puede admitirse que las superficies sucesivas siguen una ley similar (5.8) a la señalada por el criterio cinemático, es decir.

$$N_{ijkl} (S_{ij} - \beta_{ij}) (S_{kl} - \beta_{kl}) - 1 = 0 \quad (5.9)$$

donde es

$$\beta_{ij} = \alpha_{ij} - \frac{1}{3} \alpha_{kk} \delta_{ij} \quad (5.10)$$

Si se supone que N_{ijkl} puede expresarse como un polinomio en ϵ_{ij}^P y se introducen las limitaciones debidas a incompresibilidad, simetría de los tensores σ_{ij} y ϵ_{ij}^P

y al uso de una teoría de pequeñas deformaciones, la ecuación (5.9) puede reducirse a la forma

$$S_{ij} \cdot S_{ij} - 2 S_{ij} \beta_{ij} + A \beta_{ij} \beta_{kl} (S_{ij} - \beta_{ij}) (S_{kl} - \beta_{kl}) - 1 = 0 \quad (5.11)$$

La ecuación (5.11) tiene parámetros que permiten representar rotación, translación y expansión o contracción de la superficie de fluencia. Para $\beta_{ij} = 0$ es decir, al iniciarse la deformación plástica, el criterio de fluencia coincide con el de von Mises. El caso $A = 0$ corresponde al caso de endurecimiento cinemático.

Cabe notar la similitud de estas fórmulas con algunas de las expresiones de Edelman y Drucker de 1951⁽⁵¹⁾.

Generalización al rango no lineal:

Probablemente la primera generalización para el caso de endurecimiento no lineal es debida a Kadashevitch y Novozhilov⁽⁵²⁾, que proponen una expresión del tipo de Prager

$$f (\bar{\sigma}_{ij} - \alpha_{ij}) = \text{cte} \quad (5.12)$$

con

$$\epsilon_{ij}^P = \frac{1}{2g} \alpha_{ij}$$

donde g es una función de los invariantes de ϵ_{ij}^P y permiten la representación de endurecimiento no lineal.

Los α_{ij} son llamados "microtensiones residuales" por Kadashevitch y Novozhilov en base a consideraciones físicas. Un modelo dinámico con dos resortes y un bloque de fricción, Figura V-6-a, permite representar elasticidad, plasticidad y endurecimiento. Los autores no comentan demasiado sobre el tema del endurecimiento no lineal, pero la forma de g indicaría que para este caso el resorte 2 debe ser reemplazado por un resorte no lineal. En la Figura V-6-b se indica el comportamiento del modelo en el caso de endurecimiento lineal y endurecimiento no lineal. Se ve que en el último caso se obtiene un comportamiento no consistente con los resultados experimentales. Esto es debido a que un resorte no lineal actúa como se indica en Figura V-6-c. El error de Kadashevitch y Novozhilov proviene de suponer que "el endurecimiento es causado por fuerzas elásticas internas que resisten la deformación plástica".

Como lo indica el calentamiento de las probetas durante los ensayos, existe también un mecanismo de disipación de energía, como se indica en Figura V-6-d. Un mecanismo de esta clase puede ser representado por medio de resortes y bloques con diferentes coeficientes de fricción (Figura V-7)

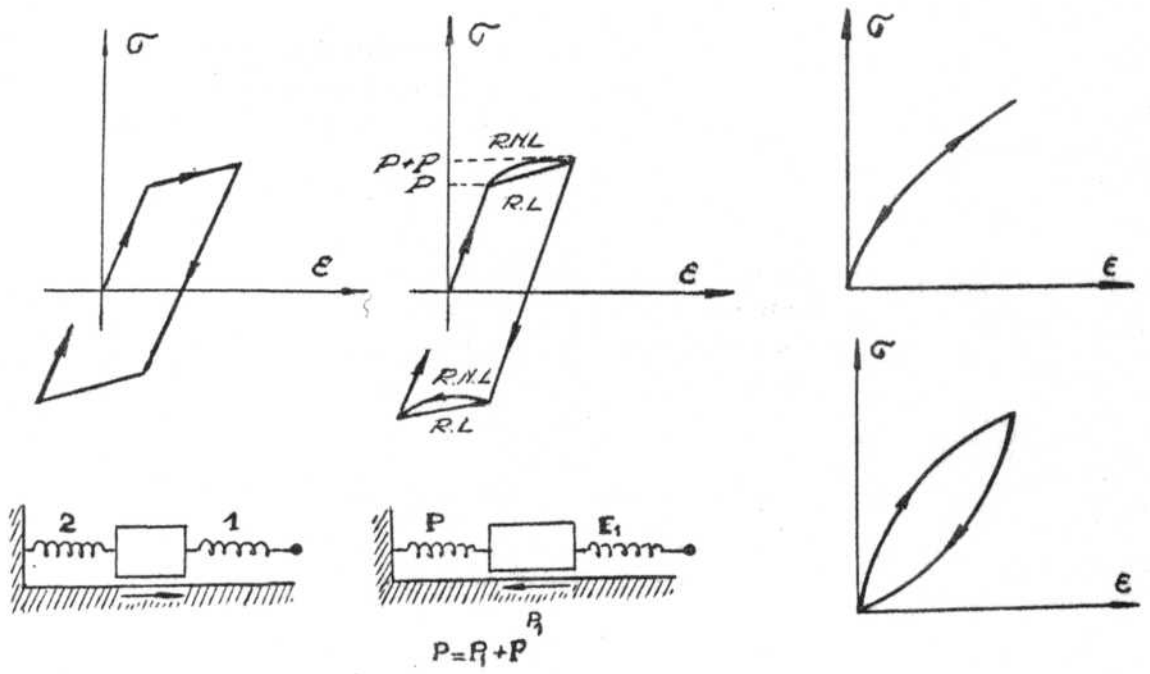


Figura V-6

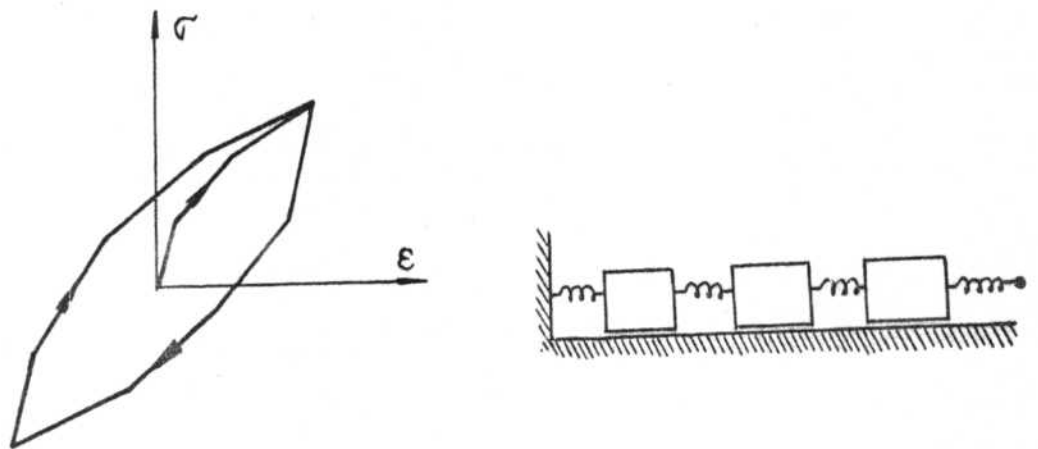


Figura V-7

Mroz⁽⁹⁵⁾ ha propuesto un modelo cinemático equivalente a un agrupamiento de bloques y resortes como el citado en último término; los modelos cinemáticos aparecen como más fáciles de interpretar matemáticamente y menos criticables que los modelos dinámicos⁽⁸⁸⁾.

Otra generalización al caso no lineal fue propuesta por Eisenberg y Phillips⁽⁵³⁾.

Por otro lado ni el endurecimiento isotrópico ni el cinemático dan una respuesta satisfactoria a problemas como el del "shake down" (comportamiento de una estructura elastoplástica bajo cargas alternativas). El modelo isotrópico predice comportamiento elástico luego del primer ciclo y el modelo cinemático predice una continua alteración de elasticidad y plasticidad. La evidencia experimental, en cambio, muestra una aproximación gradual al comportamiento elástico. Ulteriores generalizaciones de los trabajos de Mroz o Phillips o nuevas teorías serán necesarias para solucionar este tipo de problemas.

CAPITULO VI

TEORIAS PARTICULARES DE LA PLASTICIDAD

La utilización de los diferentes criterios de fluencia y las diversas formas de evaluar el endurecimiento conducen a reglas de flujo particulares según sean las condiciones que se acepten como válidas. En el presente capítulo se analizarán las ecuaciones correspondientes a los casos más frecuentemente utilizados.

1.- Materiales plásticos ideales

A partir del concepto de material endurecible dado por Drucker podemos definir plasticidad ideal como deformación plástica sin endurecimiento. Análíticamente esta condición se expresa por:

$$d\sigma_{ij} - \frac{P}{\sigma_{ij}} d\epsilon_{ij} = 0 \quad (6.1)$$

Para los materiales plásticos ideales se admite la existencia de la función de carga pero sólo como función del estado de tensiones: $f(\sigma_{ij})$. Dadas las características de este tipo de material, se producirá flujo plástico sin límite cuando $f(\sigma_{ij}) = K = \text{cte.}$ y se comportará elásticamente para valores de $f(\sigma_{ij}) < K$.

La curva tensión-deformación unidimensional para este tipo de materiales resulta ser, como la indicada en Figura VI-1.

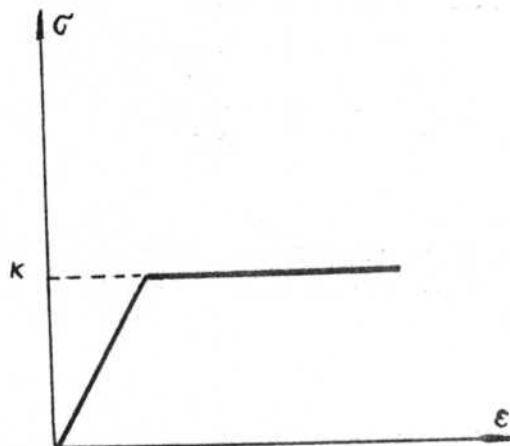


Figura VI-1

Por condición de consistencia deberá ser

$$df = \frac{\partial f}{\partial \sigma_{ij}} d\sigma_{ij} = 0 \quad (6.2)$$

Comparando las expresiones (6.1) y (6.2) se concluye que

$$d\epsilon_{ij}^P = d\lambda \cdot \frac{\partial f}{\partial \sigma_{ij}} \quad (6.3)$$

siendo $d\lambda$ un escalar. Dicha expresión constituye la regla de flujo para este tipo de materiales.

2. - Endurecimiento isotrópico

Si el endurecimiento del material se hace en forma isotrópica, la función $f = 0$ dependerá sólo del estado de tensiones y podrá escribirse como

$$f(\sigma_{ij}) = C$$

donde C mide el endurecimiento del material, siendo función de la historia de deformaciones. En tal caso la expresión (4.11) puede escribirse en la forma

$$d\epsilon_{ij}^P = G \frac{\partial f}{\partial \sigma_{ij}} df \quad (6.4)$$

que es la forma general de la relación "tensión-deformación plástica" compatible con las hipótesis establecidas. En esta ecuación G deberá determinarse experimentalmente.

3. - Ecuación de Prandtl-Reuss y Levy-Mises

Si se adopta como criterio de fluencia el de von Mises, vale decir es:

$$f = \frac{1}{2} S_{ij} S_{ij}$$

y dado que

$$\frac{\partial f}{\partial \sigma_{ij}} = S_{ij}$$

resulta, reemplazando en (6.4)

$$d \mathcal{E}_{ij}^P = G S_{ij} df$$

o

$$d \mathcal{E}_{ij}^P = S_{ij} d\lambda \quad (6.5)$$

donde

$$d\lambda = G df$$

La expresión (6.5), que suele presentarse en la forma:

$$\frac{d \mathcal{E}_{ij}^P}{S_{ij}} = d\lambda \quad (6.6)$$

constituye la ecuación de Prandtl-Rouss. Es de destacar que dicha ecuación está directamente ligada al uso de $f = J_2$ como función de carga.

Para el caso en que las deformaciones elásticas sean despreciables frente a las deformaciones plásticas, y pueda considerarse la deformación plástica $d \mathcal{E}_{ij}^P$ como deformación total $d \mathcal{E}_{ij}$, la ecuación (6.6) puede escribirse como

$$\frac{d \mathcal{E}_{ij}}{S_{ij}} = d\lambda \quad (6.7)$$

que corresponde a la expresión de Levy-Mises.

4. - Ecuación asociada al criterio de Tresca

Conocidas las tensiones principales σ_1 , σ_2 y σ_3 tales que $\sigma_1 > \sigma_2 > \sigma_3$, resulta para el criterio de Tresca la expresión:

$$f = \frac{1}{2} (\sigma_1 - \sigma_3) \quad (6.8)$$

Entonces será:

$$\frac{\partial f}{\partial \sigma_1} = \frac{1}{2} \quad \frac{\partial f}{\partial \sigma_2} = 0 \quad \frac{\partial f}{\partial \sigma_3} = -\frac{1}{2}$$

Utilizando estos valores en la expresión (6.4) resulta:

$$\begin{aligned} d \epsilon_1^P &= \frac{1}{2} d \\ d \epsilon_2^P &= 0 \\ d \epsilon_3^P &= -\frac{1}{2} d \lambda \end{aligned} \quad (6.9)$$

que es la regla de flujo asociada al criterio de Tresca. Es de hacer notar que dichas ecuaciones son diferentes de las asociadas con el criterio de von Mises. Cada criterio tiene asociada su regla de fluencia o relación tensión-deformación.

5. - Determinación experimental de la función G

Para que la ecuación (6.4) tenga aplicación práctica deberá relacionarse en alguna forma, con un ensayo de fácil realización como es el ensayo de tracción simple.

Será entonces necesario encontrar una función de las tensiones, que se denominará "tensión efectiva" y una función de las deformaciones, denominada "deformación efectiva" tales que permitan correlacionar los resultados que se obtienen de ensayar el material bajo cualquier sistema de carga con la curva "tensión-deformación" de un ensayo de tracción uniaxial.

En consecuencia, la tensión efectiva σ_e deberá reducirse a la tensión simple en el ensayo de tracción uniaxial. Ello indica que para cierto valor de σ_e el material deberá entrar en fluencia plástica; por otra parte deberá ser una función positiva y creciente durante el proceso de deformación.

Como la función de carga $f(\sigma_{ij})$ reúne estas condiciones, puede suponerse que dicha función es proporcional a una cierta potencia de la tensión efectiva, vale decir

$$f(\sigma_{ij}) = c \sigma_e^n \quad (6.10)$$

expresión en la que c y n son constantes a determinar. Dicha proporcionalidad entre ambas funciones hace que σ_e pueda utilizarse como criterio de fluencia, como frecuentemente se hace.

Como caso particular, si se admite $f = J_2$ resulta

$$J_2 = c \sigma_e^n$$

y

$$\sigma_e = \left(\frac{J_2}{c} \right)^{\frac{1}{n}} = \left\{ \frac{1}{6c} \left[(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2 \right] \right\}^{\frac{1}{n}}$$

Para determinar las constantes se tiene presente que en el ensayo de tracción uniaxial deberá ser $\sigma_e = \sigma_1$ lo que implica que sea $n = 2$ y $c = 3$. Con ello surge:

$$\sigma_e = \sqrt{3 J_2} \quad (6.11)$$

Para la definición de la "deformación efectiva" ϵ_e se admite que el trabajo plástico por unidad de volumen se expresa como:

$$d W^P = \sigma_e d \epsilon_e$$

Habitualmente dicho trabajo se expresaba en la forma:

$$d W^P = s_{ij} d \epsilon_{ij}^P$$

Como ambas expresiones deberán coincidir resulta:

$$d \epsilon_e = \frac{1}{\sigma_e} s_{ij} d \epsilon_{ij}^P \quad (6.12)$$

Aceptando para ϵ_e la expresión dada en (6.11) resulta:

$$d \epsilon_e = \frac{s_{ij} d \epsilon_{ij}^P}{\sqrt{\frac{3}{2} s_{ij} s_{ij}}}$$

que a través de la regla de flujo correspondiente a $f = J_2$ permite escribir

$$d \mathcal{E}_e = \sqrt{\frac{2}{3} d \mathcal{E}_{ij}^P d \mathcal{E}_{ij}^P} \quad (6.13)$$

En términos de las deformaciones principales queda

$$d \mathcal{E}_e = \frac{2}{3} \left[(d \mathcal{E}_1^P)^2 + (d \mathcal{E}_2^P)^2 + (d \mathcal{E}_3^P)^2 \right]^{\frac{1}{2}} \quad (6.14)$$

El segundo enfoque para la definición de \mathcal{E}_e es más general y no se basa en ninguna función de carga específica. Drucker⁽¹⁶⁾⁽⁸⁹⁾ ha demostrado que la definición dada en (6.13) es razonablemente correcta para, prácticamente, cualquier función de la forma: $f(J_2, J_3) = 0$

Sustituyendo la ecuación general

$$d \mathcal{E}_{ij}^P = G \frac{\partial f}{\partial \sigma_{ij}} d f$$

en la (6.13) se obtiene

$$d \mathcal{E}_e = \sqrt{\frac{2}{3}} G \sqrt{\frac{\partial f}{\partial \sigma_{ij}} \cdot \frac{\partial f}{\partial \sigma_{ij}}} d f \quad (6.15)$$

de donde puede despejarse

$$G d f = d \lambda = \sqrt{\frac{3}{2}} \frac{d \mathcal{E}_e}{\sqrt{\frac{\partial f}{\partial \sigma_{ij}} \cdot \frac{\partial f}{\partial \sigma_{ij}}}} \quad (6.16)$$

Con ello, la ecuación general toma la forma:

$$d \mathcal{E}_{ij}^P = \sqrt{\frac{3}{2}} \cdot \frac{\frac{\partial f}{\partial \sigma_{ij}}}{\sqrt{\frac{\partial f}{\partial \sigma_{mm}} \cdot \frac{\partial f}{\partial \sigma_{mm}}}} d \mathcal{E}_e \quad (6.17)$$

La pendiente de la curva tensión-deformación en tracción uniaxial es

$$\sigma_{e'} = \frac{d\sigma_e}{d\varepsilon_e}$$

ó

$$d\varepsilon_e = \frac{d\sigma_e}{\sigma_{e'}}$$

Y reemplazando en (6.17) resulta

$$d\varepsilon_{ij}^P = \sqrt{\frac{3}{2}} \frac{\frac{\partial f}{\partial \sigma_{ij}}}{\left[\frac{\partial f}{\partial \sigma_{mm}} \cdot \frac{\partial f}{\partial \sigma_{nn}} \right]^{\frac{1}{2}}} \frac{d\sigma_e}{\sigma_{e'}} \quad (6.18)$$

Si se admite que $f = J_2$, la expresión (6.18) se reduce a

$$d\varepsilon_{ij}^P = \frac{3}{2} \frac{S_{ij}}{\sigma_e} \frac{d\sigma_e}{\sigma_{e'}}$$

ó

$$d\varepsilon_{ij}^P = \frac{3}{2} \frac{S_{ij}}{e} d\varepsilon_e \quad (6.19)$$

Las expresiones (6.19) constituyen la regla de flujo asociada al criterio de von Mises, Los valores que en ellas figuran se extraen de la curva experimental tensión-deformación del ensayo de tracción uniaxial.

6. - Relaciones totales tensión-deformación

Ecuaciones como la (6.19) son conocidas como "relaciones incrementales" debido a que relacionan incrementos de deformación plástica con tensiones. Para obtener las componentes finitas de deformación plástica se deberá integrar estas ecuaciones a lo largo de toda la historia de carga.

Hencky⁽¹⁷⁾ propuso el uso de ecuaciones que relacionan directamente las componentes finitas de deformación plástica con las tensiones instantáneas, denominadas "ecuaciones totales". En lugar de las expresiones de la forma dada en (6.19), se tendrá:

$$\epsilon_{ij}^P = \frac{3}{2} \frac{S_{ij}}{\sigma_e} \epsilon_e \quad (6.20)$$

En esta expresión los componentes del estado de deformación plástica son funciones del estado instantáneo de tensiones y son independientes de la historia de carga.

Esta forma de ecuación simplifica grandemente el problema; no obstante, como ya se señaló, la deformación plástica no es, en todos los casos independiente del camino de cargas, de manera que, en general, estas teorías no pueden ser correctas. Sin embargo, para el caso de cargas radiales o proporcionales, ambas teorías conducen al mismo resultado. Es decir si

$$\sigma_{ij} = K \sigma_{ij}^0$$

donde σ_{ij}^0 es un estado de referencia no nulo y K una función del tiempo monótona creciente, lo que implica que

$$S_{ij} = K S_{ij}^0$$

y

$$\sigma_e = K \sigma_e^0$$

entonces la ecuación (6.19) se expresa como:

$$d\epsilon_{ij}^P = \frac{3}{2} \frac{d\epsilon_e}{\sigma_e^0} S_{ij}^0$$

Esta expresión puede integrarse fácilmente obteniéndose

$$\epsilon_{ij}^P = \frac{3}{2} \frac{S_{ij} \epsilon_o}{\sigma_e^0}$$

ó

$$\epsilon_{ij}^P = \frac{3}{2} \frac{{}_o S_{ij}}{\sigma_e} \quad (6.21)$$

donde se observa que la deformación plástica es función solamente del estado instantáneo de tensiones e independientes del programa de carga.

Budiansky⁽²¹⁾ propuso que existen ciertos programas de cargas, además de los proporcionales, con los que se satisfacen los postulados básicos de la plasticidad utilizando teorías totales. Si bien no se han verificado hasta el presente detalles importantes en la formulación de Budiansky, no puede, por el momento descartarse la posibilidad de que otros caminos de cargas den respuestas satisfactorias, a través de las teorías totales. Dicha formulación se basa en la existencia de puntos singulares, los cuales serán considerados más adelante.

7. - Endurecimiento cinemático.

Se determinará la forma de la regla de flujo a que conduce una hipótesis basada en una generalización de la regla de endurecimiento cinemático de Prager.

Expresamos la función de carga en la forma

$$f(\sigma_{ij} - \alpha_{ij}, \epsilon_{ij}^P, k) = 0 \quad (6.22)$$

siendo α_{ij} un tensor representativo del corrimiento del centro de la función inicial de fluencia, a medida que la deformación progresa. De acuerdo con la formulación dada en esta hipótesis, para materiales endurecibles es posible aceptar que:

$$\alpha_{ij} = C \epsilon_{ij}^P \quad (6.23)$$

Admitiendo un corrimiento proporcional a la deformación, C resulta ser una constante: caso de endurecimiento lineal.

Por condición de consistencia, deberá ser:

$$df = \frac{\partial f}{\partial \sigma_{ij}} d\sigma_{ij} + \left(\frac{\partial f}{\partial \epsilon_{ij}^P} - \frac{\partial f}{\partial \sigma_{ij}} C \right) d\epsilon_{ij}^P + \frac{\partial f}{\partial k} dk = 0 \quad (6.24)$$

La condición de normalidad entre el vector incremento de deformación plástica y la superficie de fluencia es:

$$d\epsilon_{ij}^P = \Lambda \frac{\partial f}{\partial \sigma_{ij}}$$

Aceptando como medida del endurecimiento la función $d k = h_{kl} d \epsilon_{kl}^P$, o sea:

$$d k = h_{ij} \Delta \frac{\partial f}{\partial \sigma_{ij}}$$

resulta:

$$\Delta = - \frac{\frac{\partial f}{\partial \sigma_{ij}} d \sigma_{ij}}{\left(\frac{\partial f}{\partial \epsilon_{ij}^P} - c \frac{\partial f}{\partial \sigma_{ij}} + \frac{\partial f}{\partial k} h_{ij} \right) \frac{\partial f}{\partial \sigma_{ij}}}$$

Con esta expresión, la regla de flujo resulta

$$d \epsilon_{ij}^P = G^* \frac{\partial f}{\partial \sigma_{ij}} \frac{\partial f}{\partial \sigma_{kl}} d \sigma_{kl} \quad (6.25)$$

siendo

$$G^* = \left[\left(\frac{\partial f}{\partial \epsilon_{ij}^P} - c \frac{\partial f}{\partial \sigma_{ij}} + \frac{\partial f}{\partial k} h_{ij} \right) \frac{\partial f}{\partial \sigma_{ij}} \right]^{-1}$$

En la expresión (6.25), G^* es función de las tensiones, deformaciones, de la historia de deformaciones y deberá determinarse experimentalmente.

CAPITULO VII

SUPERFICIES DE CARGA CON PUNTOS SINGULARES

En § 3 y 5 se consideró que la superficie de carga no presentaba puntos singulares. Sin embargo, puede admitirse en la teoría general, la existencia de superficies de carga formadas por la superposición de superficies, individualmente regulares, que al cortarse den lugar a la existencia de puntos singulares. El más común de tales casos es la superficie correspondiente al criterio de Tresca.

La función de carga de una superficie genérica f_p es, siguiendo a Koiter⁽⁵⁴⁾

$$f_p(\sigma_{ij}, \epsilon_{ij}^p, k) = 0 \quad p = (1, 2, \dots, n) \quad (7.1)$$

Cuando para toda f_p resulta $f_p < 0$ se está en el rango elástico; la fluencia aparece cuando una (o más) de las f_p se anula. En la intersección (punto singular) de un número q de superficies f_p , tal que $2 \leq q \leq n$, el criterio de carga de las ecuaciones (2.3), (2.4) y (2.5) se aplica a cada f_p separadamente. Por lo tanto, se tendrá descarga para:

$$\frac{\partial f_p}{\partial \sigma_{ij}} \dot{\sigma}_{ij} < 0 \quad , \quad f_p = 0 \quad (7.2)$$

Carga neutra si:

$$\frac{\partial f_\alpha}{\partial \sigma_{ij}} \dot{\sigma}_{ij} = 0 \quad , \quad f_\alpha = 0 \quad (\text{para } \alpha \text{ contenido en el conjunto } q) \quad (7.3)$$

y

$$\frac{\partial f_p}{\partial \sigma_{ij}} \dot{\sigma}_{ij} < 0 \quad , \quad f_p = 0 \quad (\text{para todo } p, \text{ perteneciente a } q, \text{ distinto de } \alpha) \quad (7.4)$$

Tendrá lugar un proceso de carga cuando al menos, para un elemento β del conjunto q se verifique

$$\frac{\partial f_p}{\partial \sigma_{ij}} \dot{\sigma}_{ij} > 0, \quad f_p = 0 \quad (7.5)$$

Las reglas de flujo pueden ser escritas en la forma

$$\dot{\epsilon}_{ij}^P = \sum_{p=1}^n C_p h_p \frac{\partial f_p}{\partial \sigma_{ij}} \frac{\partial f_p}{\partial \sigma_{mm}} \dot{\sigma}_{mm} \quad (7.6)$$

donde es

$$\begin{cases} C_p = 0 & \text{para } f_p < 0, \quad \frac{\partial f_p}{\partial \sigma_{ij}} \dot{\sigma}_{ij} < 0 \\ C_p = 1 & \text{para } f_p = 0, \quad \frac{\partial f_p}{\partial \sigma_{ij}} \dot{\sigma}_{ij} \geq 0 \end{cases} \quad (7.7)$$

En la expresión anterior, h_p es una función positiva de σ_{ij} , ϵ_{ij}^P y ocupa el lugar de G en la ecuación (4.8). Las funciones h_p pueden ser determinadas en base al sistema de ecuaciones $\dot{f}_p = 0$ de una manera similar a aquella en que se determinó Δ en § 4.

En § 3 y 5 se limitó la discusión al caso de superficies de carga regulares, es decir, con tangente única en cada punto. En ese caso se demostró que la superficie de carga debe ser convexa y que el vector incremento de deformación plástica es normal a esa superficie. Para superficies con puntos singulares, la prueba de convexidad sigue siendo válida. No sucede lo mismo, como es natural, con respecto a la normalidad del vector $d \epsilon_{ij}^P$.

Si P , Figura VII-1, no es un punto regular de la superficie de carga no puede demostrarse que la dirección de $d \epsilon_{ij}^P$ sea independiente de la dirección de $d \sigma_{ij}$. En realidad, se verá que si P es un punto singular de la superficie de carga (convexa) formada por la intersección de superficies regulares $f_1 = 0$ y $f_2 = 0$, la dirección de $d \epsilon_{ij}^P$ estará comprendida entre las normales a $f_1 = 0$ y $f_2 = 0$ en P .

A tal fin, sean P_1 y P_2 , de coordenadas

$$\sigma_{ij}^{*(1)} \quad \text{y} \quad \sigma_{ij}^{*(2)}$$

dos puntos sobre $f_1 = 0$ y $f_2 = 0$ respectivamente. Las tangentes a la superficie de car-

ga en P están en el sector APA' (o BPB'). Si el ángulo θ es medido a partir de PP₂ en la dirección antihoraria, para un proceso de carga descarga de P₂ a P, la dirección de $d\epsilon_{ij}^P$, identificada con $\theta = \phi$, estará dada, de acuerdo con Drucker por

$$\frac{\pi}{2} \leq \phi \leq \frac{3\pi}{2}$$

mientras que cargando desde P₁ a P será

$$\left(\frac{\pi}{2} - \beta\right) \leq \phi \leq \left(\frac{3\pi}{2} - \beta\right)$$

donde β es el ángulo $\widehat{P_1 P P_2}$

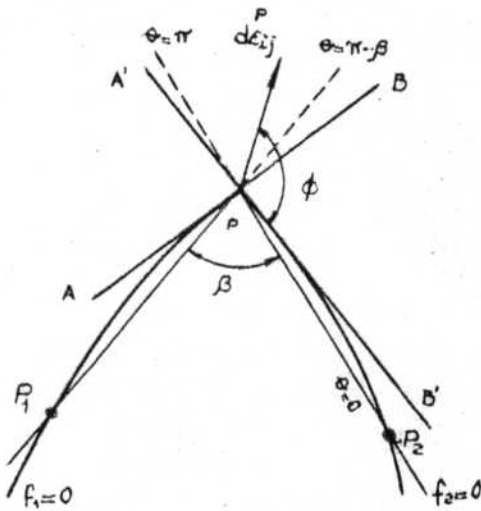


Figura VII-1

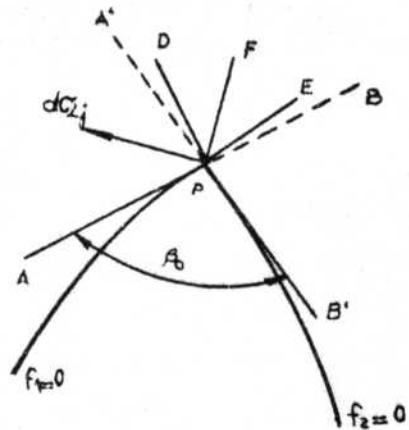


Figura VII-2

Dado que las trayectorias de P₂ a P y de P₁ a P están dentro del dominio elástico, no pueden afectar a ϕ y las dos desigualdades anteriores deben ser consistentes, es decir

$$\frac{\pi}{2} \leq \phi \leq \frac{3\pi}{2} - \beta$$

Además, si se considera que P₁ y P₂ pueden estar tan cerca de P como se desee, vemos que $\beta \rightarrow \beta_0$, donde β_0 es el ángulo $\widehat{APB'}$, formado por las tangentes a $f_1=0$ y $f_2=0$ en P. De modo que, a medida que P₁ y P₂ se acercan a P el entorno para ϕ está dado por

$$-\frac{\pi}{2} \leq \phi \leq \frac{3\pi}{2} - \beta_0 \tag{7.8}$$

Es decir, la dirección de $d\epsilon_{ij}^P$ está limitada al sector comprendido entre las normales a las superficies en P. Cabe observar que si la superficie fuera regular en P, β_0 sería igual a π y de (7.8) obtendríamos la (3.4).

En la representación bidimensional de un punto singular mostrada en Figura VII-2, hay cuatro zonas formadas por la intersección de las tangentes AB y A'B' en P, dentro de las cuales puede estar dirigido el vector incremento de tensión $d\sigma_{ij}$.

Si $d\sigma_{ij}$ está dirigido dentro del sector APB', hay descarga y el incremento de deformación plástica es nulo. La región A'PB es llamada de carga total, dado que ambas superficies $f_1 = 0$ y $f_2 = 0$ contribuyen al incremento de deformación plástica. Las zonas APP' y BPB' son llamadas regiones de carga parcial.

Hasta el momento la única restricción impuesta a $d\epsilon_{ij}^P$ es que pertenezca al haz de normales DPE; el postulado de Drucker impone ciertas restricciones adicionales. La dirección $\theta = \emptyset$ debe formar un ángulo agudo ($\emptyset \leq \pi/2$) con la dirección de $d\sigma_{ij}$. Para todo $d\sigma_{ij}$ en la región de carga parcial, como se indica en Figura VII-2 está restringido al abanico DPF. Vemos pues que la desigualdad (7.8) provee información útil solamente cuando $d\sigma_{ij}$ está dirigida dentro de la región de carga parcial.

Como se mencionó, la más usual de las superficies de carga con puntos singulares es la correspondiente al criterio de Tresca, Figura VII-3.

Sea el punto de tensión P, moviéndose desde el interior de la superficie de carga hasta alcanzar el lado AB, de forma tal que permanezca sobre dicho lado durante la deformación subsiguiente. La expresión del vector velocidad de deformación surge de la Figura VII-3:

$$C \dot{\epsilon}_3 = \dot{\sigma}_3 - \dot{\sigma}_1 ; \quad \dot{\epsilon}_2 = 0 ; \quad \dot{\epsilon}_1 + \dot{\epsilon}_3 = 0 \quad (7.9)$$

Integrando (7.9)

$$C \epsilon_3 = \sigma_3 - \sigma_1 + Y ; \quad \epsilon_2 = 0 ; \quad C \epsilon_2 = \sigma_3 - \sigma_1 - Y \quad (7.10)$$

Análogamente, cuando el punto de tensión llega a B y permanece en B durante el proceso subsiguiente se tiene:

$$\begin{aligned} \dot{\sigma}_1 - \dot{\sigma}_3 &= C (\dot{\epsilon}_1 + \alpha \dot{\epsilon}_2) \\ \dot{\sigma}_2 - \dot{\sigma}_3 &= C (\dot{\epsilon}_2 + \alpha \dot{\epsilon}_1) \end{aligned} \quad (7.11)$$

donde α depende de la dirección considerada dentro del sector CBD. Por ejemplo, considerando la dirección del eje σ_3 se tiene $\alpha = 1$. Integrando (7.11) en esas condiciones es

$$\sigma_1 - \sigma_3 + Y = C (\epsilon_1 + \alpha \epsilon_2)$$

$$\sigma_2 - \sigma_3 + Y = C (\epsilon_1 + \alpha \epsilon_1)$$

De lo anterior se ve que, para ciertas trayectorias de tensiones, es posible obtener leyes de "deformación total." Esta característica, que reduce la labor necesaria para la resolución de problemas prácticos, es una importante ventaja de las superficies de carga de este tipo (Ver Capítulo V).

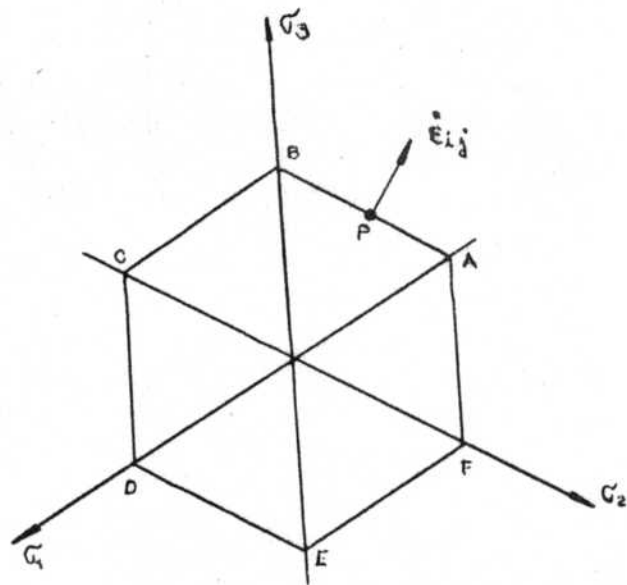


Figura VII-3

J. L. Sanders⁽⁵⁵⁾, W. Prager⁽⁵⁶⁾ y P. G. Hodge⁽⁵⁷⁾⁽⁵⁸⁾⁽⁵⁹⁾ han analizado en diferentes trabajos, estos criterios de fluencia poligonales.

CAPITULO VIII

INVESTIGACION EXPERIMENTAL

1. - Los desarrollos vistos anteriormente, si bien de naturaleza teórica, tienen su punto de partida y su aplicación práctica en la representación del comportamiento de materiales reales.

En última instancia, la correlación entre resultados teóricos y la realidad física debe quedar establecida por medio de experimentos, y a través de uno de los siguientes caminos: realizar cuidadosos ensayos para verificar las leyes propuestas o utilizar esas leyes para resolver problemas de borde cuyos resultados serán luego contrastados con los obtenidos experimentalmente.

El primer camino es el más directo pero exige una técnica muy depurada y una cuidadosa selección del material. El segundo, por su parte, exige el conocimiento de la solución exacta del problema y el tener presente que las hipótesis establecidas en la teoría deberán ser seguidas fielmente en cuanto a condiciones de borde y proceso de carga, durante la verificación experimental.

En el presente trabajo se analizarán experiencias del tipo señalado en primer término y dirigidos específicamente a la verificación de los puntos básicos de la teoría de la plasticidad: los criterios de fluencia inicial, las relaciones tensión-deformación en régimen plástico y la influencia del endurecimiento sobre las superficies de fluencia. Además se destacarán los esfuerzos realizados para poner en evidencia la existencia de puntos angulosos en las superficies de fluencia.

En plasticidad es importante la consideración de experimentos bajo estados complejos de tensión, ya que los ensayos de tracción o compresión pura presentan sólo una faz limitada del fenómeno. Por ejemplo, procesos de carga neutra son imposibles en el caso unidimensional.

Experimentalmente, las relaciones tensión-deformación son exploradas con estados de tensión o deformación homogéneos. El medio más corriente es el uso de probetas con la forma de un cilindro circular hueco, de pared delgada, sometido a torsión, tracción y presión interior, separadamente o en conjunto⁽¹⁹⁾. El uso de presión interior determina ciertas restricciones sobre el espesor de la pared. En efecto, en este caso la tensión en la dirección del espesor varía desde la presión de ensayo, en el interior, a cero en el exterior, de modo que el estado de tensiones no es realmente homogéneo. Cuanto más delgada es la pared más cerca se llega de la homogeneidad deseada y menores son las dudas en cuanto a la distribución de tensiones axiales y circunferenciales⁽³⁰⁾.

Un tipo de ensayo muy utilizado, análogo al de tracción simple y que contiene a éste como un caso particular, es el denominado proporcional o radial. Todas las tensiones son

incrementadas proporcionalmente, en la forma $\sigma_{ij} = K \sigma_{ij}^0$ donde σ_{ij}^0 es un estado dado de tensiones. El término radial proviene del hecho que la correspondiente trayectoria o camino de carga en el espacio vectorial V es una recta que pasa por el origen de coordenadas. Los ensayos proporcionales mantienen fijas las direcciones principales y la relación entre los valores principales de las tensiones. Otros ensayos más generales permiten mantener fijas las direcciones principales cambiando las relaciones entre los valores principales de las tensiones o variar conjuntamente direcciones y tensiones principales. Hill⁽⁹⁰⁾ ha propuesto nuevas técnicas en relación a este problema.

Un hecho que debe destacarse en relación con la comparación de resultados experimentales es la dificultad que se encuentra generalmente en definir con precisión qué se entiende por fluencia en materiales reales en los cuales no existe un punto anguloso bien definido en la relación tensión-deformación.

Un criterio es considerar como límite de fluencia el límite de proporcionalidad, es decir el punto en el cual la curva tensión-deformación se separa de su tangente en el origen. En este punto cabe consignar la observación de Szczipinski⁽⁴⁹⁾ que ninguna porción de la curva tensión-deformación es probablemente una recta, y por lo tanto el perfeccionamiento de los instrumentos de medida llevará a una progresiva desaparición de la superficie de fluencia inicial.

Otro criterio es determinar superficies correspondientes a una deformación previamente fijada. Esto, por un lado, deja arbitraria (muchas veces sin indicar en los trabajos) la deformación elegida. Por otra parte dado que implica una técnica experimental de sucesivas cargas y descargas alrededor de la zona de fluencia, puede producir perturbaciones importantes.

En Figura VIII-1 puede verse para un mismo ensayo, las superficies de fluencia correspondientes a diversas definiciones⁽³⁹⁾.

Si a lo anteriormente mencionado se agregan los efectos de creep y velocidad de deformación, no es difícil comprender la existencia de resultados experimentales de diversos autores que son sólo aparentemente contradictorios. A tal efecto cabe observar que, con una dispersión standard promedio de 10%, la menor diferencia significativa (es decir la diferencia mínima que debe existir entre el resultado de dos ensayos para que pueda estimarse con un 95% de certeza que son diferentes) se eleva al 27,7%. Es decir, diferencias menores no son significativas⁽⁶⁰⁾.

2. - Superficie de fluencia inicial: Numerosos ensayos han sido realizados con el fin de determinar la forma de la superficie inicial de fluencia. A tal respecto son clásicos los experimentos de Lode y de Taylor y Quinney que estaban especialmente dirigidos a comparar los criterios de fluencia de Tresca y von Mises.

Los ensayos de Lode⁽⁶¹⁾ se centraron especialmente sobre la influencia de la tensión

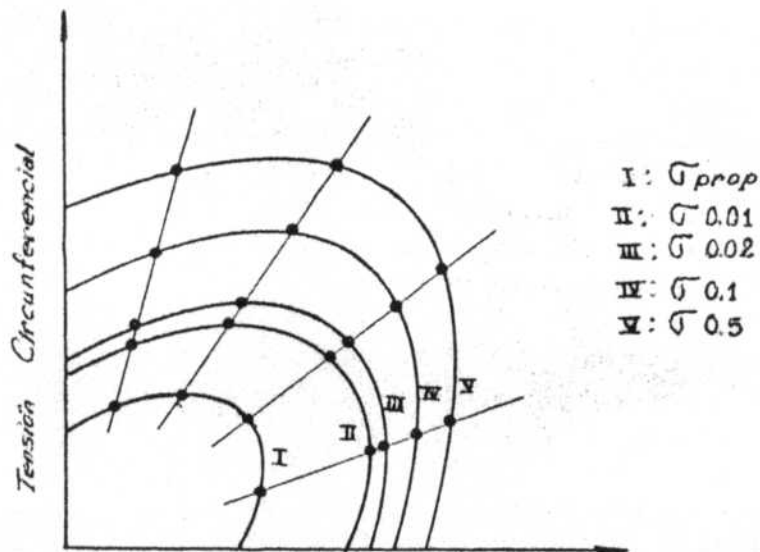


Figura VIII-1 Tensión Axial

principal intermedia sobre la condición de fluencia. Como se ha visto anteriormente, ésta es la tensión σ_2 para ensayos con $\sigma_1 > \sigma_2 > \sigma_3$ esta tensión intermedia es considerada en el criterio de von Mises pero no en el de Tresca.

Para medir el valor relativo de la tensión intermedia Lode usa el parámetro

$$\mu = \frac{\sigma_2 - [(\sigma_1 + \sigma_3)/2]}{(\sigma_1 - \sigma_3)/2}$$

que varía entre -1 para tracción simple a +1 en compresión simple, siendo igual a cero en corte puro.

En la Figura VIII-2 puede verse que la tensión σ_2 tiene un efecto marcado sobre el criterio de fluencia. Los puntos experimentales aparecen agrupados alrededor de la curva obtenida para $J_2 = K$, es decir para la condición de fluencia de von Mises. Esta curva alcanza un máximo para

$$\frac{\sigma_1 - \sigma_3}{\sigma_0} = 1,155$$

Otra comparación entre los criterios de von Mises y Tresca fue hecha por Taylor y Quinny⁽⁶²⁾ mediante ensayos en tracción-torsión de tubos de pared delgada y puede verse en Figura VIII-3.

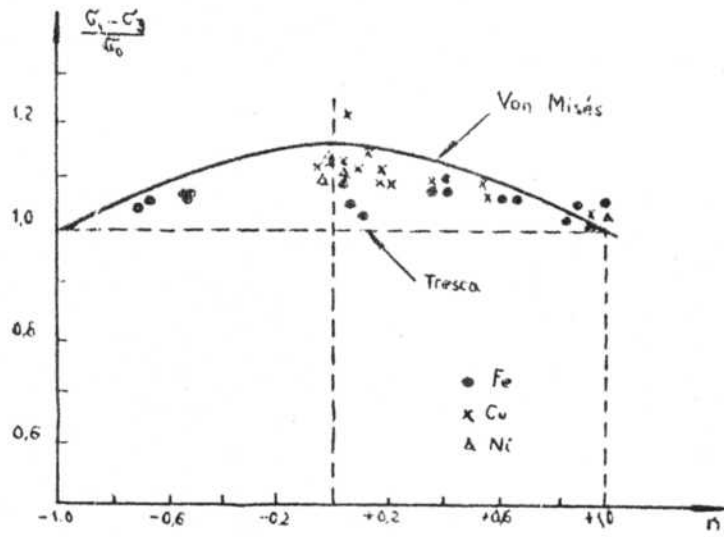


Figura VIII-2

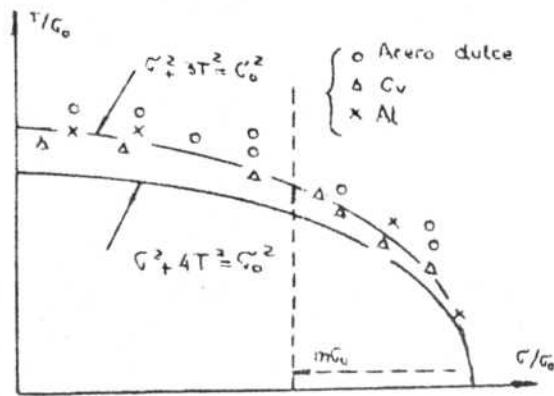


Figura VIII-3

La mayoría de los ensayos posteriores confirman los resultados de Taylor y Quinney en cuanto a la mayor exactitud del criterio de von Mises. Además, esto puede observarse destacando que la relación entre fluencia por tracción y fluencia por corte es mucho más cercana a 0,577 que a 0,5.

Como se ha mencionado anteriormente, una mejor aproximación de las curvas experimentales puede obtenerse usando combinaciones de J_2 y J_3 .

3. - Relaciones tensión-deformación: Uno de los puntos en que se ha centrado la atención de los experimentadores ha sido la verificación de las relaciones de Prandtl-Reuss. La ecuación (6.7) puede ser escrita en la forma:

$$\frac{\sigma_1 - \sigma_2}{de_1 - de_2} = \frac{\sigma_2 - \sigma_3}{de_2 - de_3} = \frac{\sigma_3 - \sigma_1}{de_3 - de_1} = d\lambda$$

ó análogamente

$$\frac{2\sigma_2 - \sigma_1 - \sigma_3}{1 - 3} = \frac{2de_2 - de_1 - de_3}{de_3 - de_1}$$

Llamando, como es tradición

$$\mu = \frac{2\sigma_2 - \sigma_1 - \sigma_3}{\sigma_1 - \sigma_3} ; \nu = \frac{2de_2 - de_1 - de_3}{de_2 - de_1}$$

se tiene $\mu = \nu$, Figura VIII-4. Los resultados de los primeros ensayos de este tipo mostraban una desviación sistemática con respecto a este resultado⁽⁶¹⁾.

Esta diferencia puede ser debida a la falta de coincidencia entre los tensores de tensión y de deformación, que a su vez puede atribuirse a la anisotropía del material. Dado que ensayos bajo tensiones combinadas son usualmente llevados a cabo sobre tubos de pared delgada, la anisotropía inherente a esos tubos, debido al proceso de fabricación, puede muy bien afectar los resultados. Esta anisotropía no puede ser totalmente eliminada ni aún con el tratamiento térmico más elaborado. Por lo tanto no debe esperarse que estos resultados estén en completo acuerdo con los resultados de una teoría que postula la isotropía del material.

La desviación observada puede también deberse a que la superficie de fluencia real no coincide con la superficie de von Mises. Por ejemplo, Prager⁽⁶³⁾ ha obtenido una buena

coincidencia con los resultados experimentales (curva OBA de Figura VIII-4) usando una condición de fluencia de la forma

$$f = J_2 - 0,65 \left(\frac{J_3}{J_2} \right)^2$$

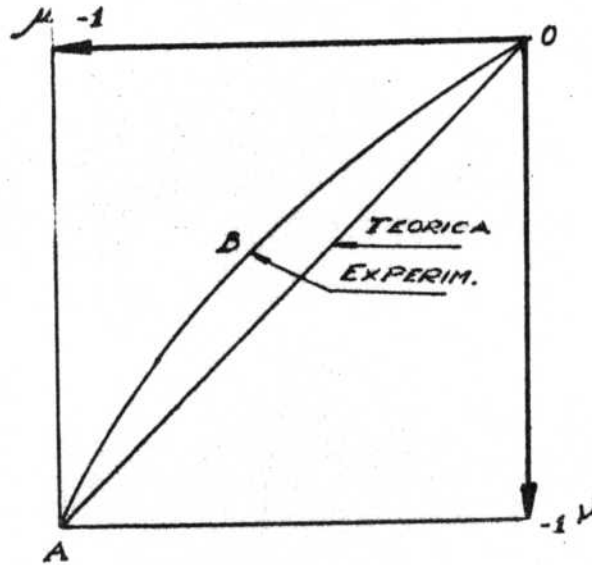


Figura VIII-4

Otros experimentos recientes⁽⁶⁴⁾⁽⁶⁵⁾⁽⁶⁶⁾ parecen indicar una muy buena coincidencia con la condición $\mu = \nu$. Los límites de validez de la hipótesis de endurecimiento isotrópico, debidos a la presencia del efecto Bauschinger, indican que no puede esperarse, en general, una buena coincidencia más allá de las deformaciones iniciales.

4.- Endurecimiento: el conocimiento del efecto de la historia de deformación sobre la condición de fluencia es de gran importancia en el caso de sólidos endurecibles. Los primeros estudios experimentales sobre este tema, por ejemplo el de Cunningham, Thomsen y Dorn⁽⁹¹⁾, estaban restringidos a ensayos proporcionales y mostraron una buena coincidencia con el concepto de endurecimiento isotrópico. Sin embargo, en 1950, Shaw y Wyotherley⁽⁹²⁾ llevaron a cabo un experimento con relaciones de tensiones variables, encontrando contradicciones con la teoría del endurecimiento isotrópico.

Posteriormente, varias investigaciones han sido llevadas a cabo para estudiar el comportamiento de la superficie de carga. Cabe destacar los cuidadosos experimentos de Naghdi, Essenburg y Koff en torsión, tracción y torsión inversa⁽⁹³⁾, Figura VIII-5.

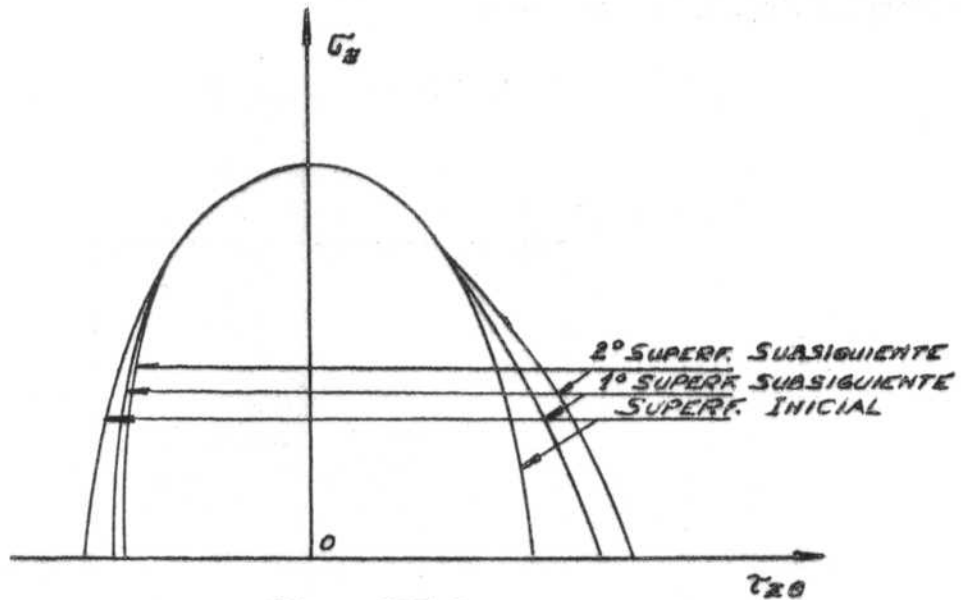


Figura VIII-5

Dichos experimentos concluyen que: a) tanto la superficie de fluencia inicial como las subsiguientes son convexas. b) La superficie de fluencia inicial es simétrica alrededor del eje σ_z . c) La tensión de fluencia en tracción no es alterada (ausencia de efecto cruzado); sin embargo, el efecto Bauschinger, es especialmente pronunciado cerca del eje $\tau_{\theta z}$. d) El efecto del endurecimiento se reduce cerca del eje σ_z . Cerca del eje $\tau_{\theta z}$ aparece una región con elevada curvatura.

Miastkowski⁽⁹⁴⁾ ha investigado el efecto de "memoria" del material sometido a una historia de deformación en el rango plástico. Sus principales conclusiones son las siguientes: a) Las superficies de fluencia se mueven en dirección de la deformación previamente aplicada, cambiando su forma. b) Bajo la influencia de una segunda deformación, de valor adecuadamente alto, el material "olvida" su historia previa y se comporta como si hubiera sido cargado únicamente en la última forma. c) Para los tipos de carga descritos, la teoría del endurecimiento cinemático explica correctamente el efecto de "memoria" observado.

5. - Existencia de puntos angulosos: Varios trabajos han sido llevados a cabo con el fin de verificar la existencia de puntos angulosos en las superficies de fluencia y carga. Los resultados no son completamente coincidentes al respecto. Los trabajos de Stockton⁽⁶⁷⁾, Naghdi⁽⁶⁵⁾⁽⁶⁹⁾⁽⁹³⁾, Phillips⁽⁷⁰⁾, y Phillips y Gray⁽³⁷⁾ y Zhukov y Rabotnov⁽⁷¹⁾ han indicado la presencia de vértices agudos en la superficie de carga. Por otro lado, Budinsky⁽⁷²⁾ y Drucker y Stockton⁽⁷³⁾ no observaron la presencia de vértices.

Es preciso destacar que no parece factible distinguir, mediante experimentos, puntos angulosos y zonas de la superficie con gran curvatura. Para efectuar esa distinción sería necesario poder aplicar experimentalmente incrementos de tensión infinitamente pequeños.

En el caso de puntos angulosos, los incrementos de deformación plástica correspondientes a los incrementos de tensión de diferentes direcciones, tienen distintas direcciones. En cambio, en el caso de un punto con gran curvatura, los incrementos de deformación plástica tienen una dirección fija, normal a la superficie de carga, cualquiera sea la dirección de los incrementos de tensión correspondientes.

Dado que el experimentador puede solamente aplicar incrementos finitos de tensión y debido a la influencia del camino de deformación, la diferencia mencionada no puede observarse. Además, cuando se aplican incrementos finitos de tensión no puede asumirse que dos incrementos finitos están actuando sobre la misma superficie de carga.

Phillips⁽⁷⁴⁾ propone un procedimiento para determinar la existencia de vértices en las superficies de fluencia (puntos angulosos o de gran curvatura) comparando el ángulo α_1 , Figura VIII-6-a, con el ángulo comprendido entre las normales a una superficie no singular (llamada superficie de comparación), luego de la aplicación de incrementos $d s_1$ y $d s_2$. Como superficie de comparación se usa la superficie de von Mises que pasa por el punto de carga. Los experimentos consistieron en ensayos de tracción-torsión de tubos de pared delgada. Consideremos el punto angulosos de Figura VIII-6-b.

La línea M_v es la proyección, sobre el plano $\sigma - \tau$ de la normal a la superficie de comparación (superficie de von Mises) que pasa por el punto O. La proyección del incremento de tensión aplicado es ds y la del incremento de deformación es de . Durante un proceso de deformación plástica, los ángulos α_1 , m y β , varían. Para que exista un vértice, es necesario que el cambio del ángulo α_1 sea considerablemente mayor que el cambio en el ángulo m durante un cambio en β_1 tal, que el vector tensión se mueva de una región del vértice a la opuesta. Además, el cambio en α_1 debería tener el mismo signo del cambio en β_1 , cualquiera sea el cambio en m . El análisis de los resultados, algunos de los cuales se indican en Figura VIII-7 indica la existencia de vértices (angulosos o de gran curvatura). No obstante este tema sigue abierto a la discusión.

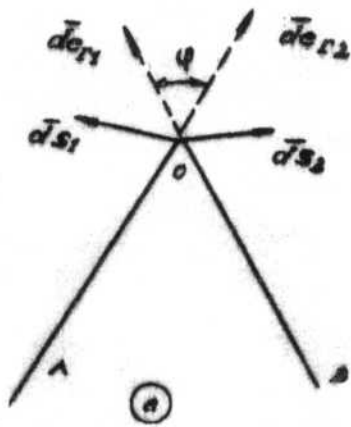


Figura VIII-6-a

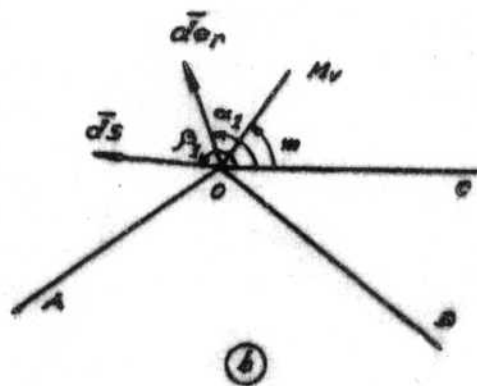


Figura VII-6-b

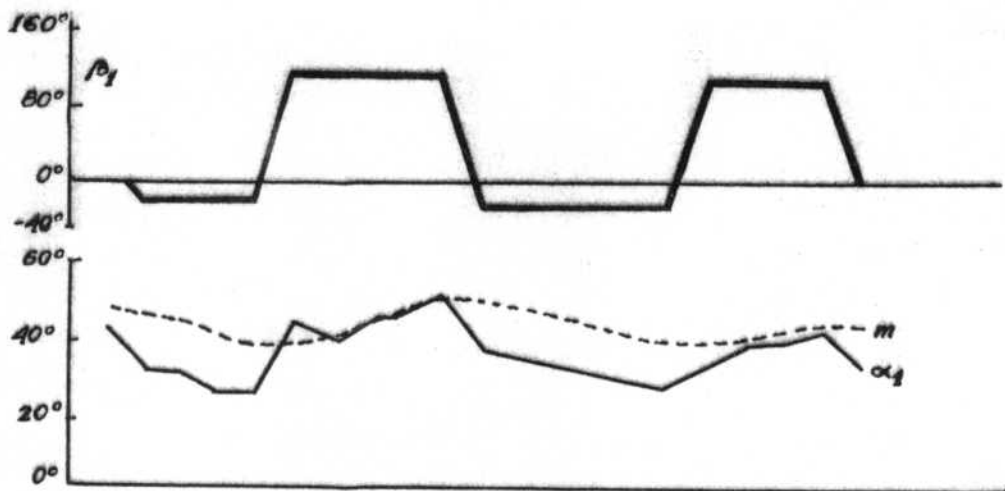


Figura VIII-7

CAPITULO IX

TERMODINAMICA

Se han realizado numerosos intentos para configurar un enfoque termodinámico de los procesos elasto-plásticos. Dicha tarea ha conducido a generalizaciones de los principios de la termodinámica irreversible lineal, ya que el postulado de Onsager⁽⁷⁵⁾⁽⁷⁶⁾⁽⁷⁷⁾ no se aplica dada la no-linealidad de la fluencia plástica.

Por otra parte fue necesario introducir parámetros de estado adicionales que contemplaran procesos netamente irreversibles como endurecimiento por trabajado, efecto Bauschinger, etc. Esta posibilidad ya había sido también propuesta en trabajos previos por Bridgman⁽⁷⁸⁾.

En el marco señalado existen investigaciones tendientes a obtener ecuaciones constitutivas inelásticas de naturaleza general, basándose en una generalización del dominio de validez del principio de Onsager a procesos irreversibles no-lineales. Se pueden citar en este sentido los trabajos de H. Ziegler⁽⁷⁹⁾ y Vakulenko⁽⁸⁰⁾⁽⁸¹⁾.

En los trabajos de Freudenthal⁽⁸²⁾, Eringer⁽⁸³⁾ y Truesdell⁽⁸⁴⁾ se han desarrollado gran parte de los conceptos fundamentales de la aplicación de termodinámica irreversible a la mecánica del continuo.

Sean las funciones U (energía interna) y S (entropía), referidas a la unidad de volumen. Mientras el sistema en estudio evolucione en el rango elástico de deformaciones, será suficiente elegir \mathcal{E}_{ij}^e y T como variables de estado, siendo T la temperatura absoluta. Pero si se producen deformaciones elasto-plásticas las funciones termodinámicas dependerán de algunos parámetros adicionales que se indicarán con $\lambda^{(n)}$, tales que

$$d\lambda^{(n)} = g_{ij}^{(n)} d\mathcal{E}_{ij}^p \quad (n = 1, 2, \dots, r)$$

siendo $g_{ij}^{(n)}$ función de las tensiones, las deformaciones y la historia de deformaciones.

Así se tendrá:

$$\begin{aligned} U &= U(\mathcal{E}_{ij}^e, \lambda^{(n)}, T) \\ S &= S(\mathcal{E}_{ij}^e, \lambda^{(n)}, T) \end{aligned} \quad (9.1)$$

El primer principio de la Termodinámica puede expresarse en la forma:

$$dU = \sigma_{ij} d\epsilon_{ij} + dQ \quad (9.2)$$

donde dQ es el calor absorbido por el sistema.

Del segundo principio de la Termodinámica se desprende que $dQ = T dS$ para procesos reversibles y $T dS \geq dQ$ para procesos irreversibles. Si se indica con ψ_{ij} a la parte de la tensión que produce trabajo no recuperable se podrá escribir:

$$T dS - dQ = \psi_{ik} d\epsilon_{ik}^P = 0 \quad (9.3)$$

De la misma forma que la entropía y la energía interna, la energía libre puede expresarse en la forma

$$F = F(\epsilon_{ij}^e, \lambda^{(n)}, T) = U - TS \quad (9.4)$$

cuyo diferencial se escribe, recurriendo a (9.2) y (9.3)

$$\begin{aligned} \frac{\partial F}{\partial \epsilon_{ij}^e} d\epsilon_{ij}^e + \frac{\partial F}{\partial \lambda^{(n)}} g_{ij}^{(n)} d\epsilon_{ij}^P + \frac{\partial F}{\partial T} dT = \sigma_{ij} d\epsilon_{ij}^e + \\ + (\sigma_{ij} - \psi_{ij}) d\epsilon_{ij}^P - S dT \end{aligned} \quad (9.5)$$

Si sólo se contemplan evoluciones en el campo elástico resulta $d\epsilon_{ij}^P = 0$ y entonces

$$F = F(\epsilon_{ij}^e : T)$$

con la cual, de (9.5) se desprende:

$$\sigma_{ij} = \frac{\partial F}{\partial \epsilon_{ij}^e} \quad \text{y} \quad -S = \frac{\partial F}{\partial T} \quad (9.6)$$

Si se admite que estas expresiones conservan su validez aún en procesos elasto-plásticos, se obtiene entonces:

$$g_{ij}^{(n)} \frac{\partial F}{\partial \lambda^{(n)}} = \sigma_{ij} - \psi_{ij} \quad (9.7)$$

Vakulenko analiza el efecto de endurecimiento del material como función del trabajo de deformación plástica. Así resulta que haciendo

$$g_{ij}^{(1)} = \sigma_{ij} \quad , \quad g_{ij}^{(n)} = 0 \quad \text{para } n = 2$$

$$\text{es } \lambda^{(1)} = \int \sigma_{ij} d\epsilon_{ij}^P$$

con lo cual la expresión (9.7) se escribe:

$$\sigma_{ij} \frac{\partial F}{\partial \lambda^{(1)}} = \sigma_{ij} - \psi_{ij}$$

ó

$$\psi_{ij} = \sigma_{ij} \left(1 - \frac{\partial F}{\partial \lambda^{(1)}} \right) \quad (9.8)$$

Si se considera la expresión (9.3) como condición de irreversibilidad, puede escribirse ahora como

$$\psi_{ij} d\epsilon_{ij}^P = d\lambda^{(1)} \left(1 - \frac{\partial F}{\partial \lambda^{(1)}} \right) \geq 0 \quad (9.9)$$

Puede verificarse que todas las teorías de plasticidad consideradas hasta el presente satisfacen la condición de irreversibilidad.

A los efectos de obtener la ecuación de estado deberán hacerse algunas consideraciones al margen de los principios de la termodinámica. Si bien es cierto que el principio de Onsager es de aplicación en los procesos irreversibles lineales, se aceptará como formalmente válida su utilización en plasticidad, a pesar de tratarse de un proceso esencialmente no lineal.

La producción de entropía del sistema que deforma plásticamente es:

$$\dot{S} = \frac{1}{T} \psi_{ij} \dot{\epsilon}_{ij}^P \quad (9.10)$$

En ella es ψ_{ij} la "fuerza generalizada" y $\dot{\epsilon}_{ij}^P$ el "flujo generalizado". Puede ad-

mitirse que se verifique una relación lineal como

$$\sigma_{ij} = A_{kl}^{ij} \dot{\epsilon}_{kl}^P \quad (9.11)$$

Según el principio de Onsager, la matriz A_{kl}^{ij} es simétrica, es decir se verifica

$$A_{kl} = A_{lk}$$

En base a ello puede suponerse la existencia de una función "disipación" $\phi(\dot{\epsilon}_{ij}^P, T)$, tal que

$$\frac{\partial \phi}{\partial \dot{\epsilon}_{kl}^P} = \psi_{kl} \quad (9.12)$$

(Por ejemplo: $\phi = \frac{1}{2} A_{kl}^{ij} \dot{\epsilon}_{kl}^P \dot{\epsilon}_{ij}^P$)

De la expresión (9.8) se obtiene:

$$\sigma_{ij} = \frac{\psi_{ij}}{1 - \frac{\partial F}{\partial \lambda^{(1)}}} \quad (9.13)$$

o de otra manera

$$\sigma_{ij} = f_1 \cdot \psi_{ij} = f_1 \frac{\partial \phi}{\partial \dot{\epsilon}_{ij}^P} \quad (9.14)$$

siendo:

$$f_1 = \frac{1}{1 - \frac{\partial F}{\partial \lambda^{(1)}}}$$

La expresión (9.14):

$$\sigma_{ij} = f_1 \frac{\partial \phi(\dot{\epsilon}_{ij}^P, T)}{\partial \dot{\epsilon}_{ij}^P}$$

relaciona tensiones con velocidades de deformación. Para obtener la función $\dot{\epsilon}_{ij}^P(\sigma_{ij})$ se analizará la función $f_1 \phi$ a través de una de sus transformadas de Legendre θ :

$$\theta = f_1 \phi - \dot{\epsilon}_{ij}^P \frac{\partial (f_1 \cdot \phi)}{\partial \epsilon_{ij}^P} \quad (9.15)$$

ó

$$\theta = f_1 \phi - \dot{\epsilon}_{ij}^P f_1 \frac{\partial \phi}{\partial \dot{\epsilon}_{ij}^P} = f_1 \phi - \dot{\epsilon}_{ij}^P \sigma_{ij}$$

De esta última expresión se obtiene

$$\dot{\epsilon}_{ij}^P = \frac{\partial \phi(\sigma_{ij}, \lambda^{(1)}, T)}{\partial \sigma_{ij}} \quad (9.16)$$

que relaciona velocidades de deformación con tensiones.

De esta forma, sobre la base de la extensión de la validez del principio de Onsager, se encuentra una ley formalmente similar a

$$d\epsilon_{ij}^P = G \frac{\partial f}{\partial \sigma_{ij}} df \quad (9.17)$$

donde f es el potencial plástico y G una función escalar. En efecto si $\theta(\sigma_{ij}, \lambda^{(n)}, T)$ representa el potencial plástico, el vector $\dot{\epsilon}_{ij}^P$ resultará normal a la superficie $\theta = \text{cte}$.

No obstante, no se hacen consideraciones sobre la vinculación entre la "regla de flujo" y la función de carga así como tampoco se analiza el comportamiento de la expresión (9.16) durante los procesos de descarga o carga neutra.

Admitiendo una vinculación entre la función θ y la función de carga de un material isótropo como:

$$\theta = \theta(\sigma_{ij}, \lambda^{(1)}, T) = f(\sigma_{ij}) + F(\lambda, T) \quad (9.18)$$

donde $f(\bar{\sigma}_{ij})$ es la función de carga, se obtiene una regla de flujo similar a (9.17). Sin embargo, no resulta como consecuencia del principio de Onsager la convexidad de la superficie de fluencia.

El trabajo de Ziegler⁽⁷⁹⁾, también basado en un intento por generalizar el principio de Onsager, se fundamenta en argumentos semi-estadísticos obteniendo una función de la forma

$$\sigma_{ij} = \left[\frac{\partial D}{\partial \varepsilon_{kl}^P} \quad \dot{\varepsilon}_{kl}^P \right]^{-1} D \frac{\partial D}{\partial \dot{\varepsilon}_{ij}^P} \quad (9.19)$$

siendo

$$D = D(\dot{\varepsilon}_{ij}^P) = \sigma_{ij} \dot{\varepsilon}_{ij}^P = T \dot{S}$$

Restringiendo el análisis al caso en que la dirección de los vectores σ_{ij} y ε_{ij}^P en el espacio de tensiones y deformaciones resultan independientes de sus magnitudes, la ecuación (p. 19) se expresa como:

$$\sigma_{ij} = \frac{\partial \Psi}{\partial \varepsilon_{ij}^P} \quad (9.20)$$

siendo

$$\Psi = \Psi(\dot{\varepsilon}_{ij}^P) = \int \left[\frac{\partial D}{\partial \dot{\varepsilon}_{kl}^P} \quad \varepsilon_{kl} \right]^{-1} dD \quad (9.21)$$

luego puede obtenerse

$$\dot{\varepsilon}_{ij}^P = \frac{\partial \Omega}{\partial \sigma_{ij}}$$

siendo

$$(\dot{\varepsilon}_{ij}^P) + \Omega(\sigma_{ij}) = \sigma_{ij} \dot{\varepsilon}_{ij}^P = D$$

donde $\Psi = \text{cte.}$ y $\Omega = \text{cte.}$ resultan ser superficies convexas.

Tanto el trabajo de Vakulenko como el de Ziegler deben ser considerados como tentativos ya que ambos generalizan los postulados de la termodinámica irreversible y la validez de sus suposiciones no ha sido aún establecida. Este último punto y sus implicancias teóricas deberá analizarse profundamente.

Por otra parte será necesario prestar atención a la selección de las variables adicionales, que juegan un papel fundamental.

Otros trabajos intentaron un enfoque general de la teoría elasto-plástica desde el punto de vista termodinámico⁽⁸⁵⁾.

BIBLIOGRAFIA

- 1 D. C. Drucker, ONR Tech, Report, Contract N7-ONR-358, Graduate Division of Applied Mathematics, Brown University (1950)
- 2 P. M. Naghdi, Proc. 2nd Symposium on Naval Structural Mechanics, Ed. Lee and Symonds, Pergamon Press, New York (1960).
- 3 W. Olszak, Z. Mroz y P. Perzyna, Recent Trends in the Development of the Theory of Plasticity, Pergamon Press (1963)
- 4 R. Hill, The Mathematical Theory of Plasticity, Oxford, 1950
- 5 A. Mendelson, Plasticity: Theory and Application, Mac Millan Co.
- 6 B. Jaoul, Etude de la plasticité et application aux métaux, Dunod, Paris, (1965)
- 7 E. Kröner, Arch. Rat. Mech. Anal. 4, 273 (1960)
- 8 M. H. Gradowczyk, Phys. Stat. Sol. 40, 397 (1970)
- 9 H. Tresca, C. Rend. 59, 754 (1864)
- 10 B. de Saint-Venant, C. Rend, 70, 473 (1870)
- 11 R. von Mises, Gottingen Nachricht Math. Phys. 41, 582 (1913)
- 12 A. Reuss, Zeit. Ang. Math. Mech., 10, 266 (1930)
- 13 E. Melan, Ing. Arch., 9, 116 (1938)
- 14 W. Prager, J. Appl. Phys., 20, 235 (1949)
- 15 D. C. Drucker, Quart. Appl. Math., 14, 35 (1949)
- 16 D. C. Drucker, Proc. 1st. US Nat. Congress App. Mecha. Chicago, 1951, Ed. E. Sternberg, Ann Arbor, Mich. 1952, Edwards Brothers Inc.
- 17 H. Hencky, Zeit. Ang. Math. Mech., 4, 323 (1924)
- 18 A. Nadai, Theory of Flow and Fracture of Solids, New York, 1950
- 19 S. B. Batdorf y B. Budiansky, NACA TN 1871 (1949)

- 20 W.T.Koiter, *Quart. Appl. Math.*, 11, 350 (1953)
- 21 B.Budiansky, *J. Appl. Mech.*, 26, 259 (1959)
- 22 V.D.Kliushnikov, *PMM*, 23, 405 (1959)
- 23 W.Prager, *Proc. Instn. Mech, Engres*, 169, 41 (1955)
- 24 L.Prandtl, *Z. Angew. Math. Mech.*, 8, 85 (1928)
- 25 A.Phillips y Sierakowski, *Acta Mech.* 1, 1 (1965)
- 26 P.W.Bridgman, *Proc. Am. Acad. Art. Sci.* 58., 163 (1923)
- 27 P.W.Bridgman, *J. of Appl. Phys.*, 17, 201, (1946)
- 28 B.Crossland, *Proc. Instn. Mech, Angr.* 169, 935 (1954)
- 29 D.C.Drucker, *J. Appl. Mech.*, 26, 101 (1959)
- 30 D.C.Drucker, *Plasticity Basic Concepts*, Chap. 46 of *Handbook of Engineering Mechanics*, Ed. W. Flugge
- 31 M.T.Huber, *Czas, Techn.*, 22, 81 (1904) *Collective Papers*, 2, Varsovia, 1956, PWM
- 32 W.R.Osgood, *J. Appl. Mechanics*, 14, 147 (1947)
- 33 Z.Mróz, *J. de Mécanique*, 2, 21 (1963)
- 34 Z.Mróz, *Bull. Acad. Polon. Sci.* (1964)
- 35 D.R.Bland, *Proc. 9-th Intern. Congr. Appl. Mecha. (Bruxelles)* 8, 45 (1956)
- 36 A.Phillips y L.Kaechle, *J. Appl. Mech.*, 23, 43 (1956)
- 37 A.Phillips y G.Gray, *ONR Tech, Report No.5, Contract Nonr-609 (12)*, Yale University (1958)
- 38 H.J.Ivey, *J. Mech. Eng. Sci.*, 2, 15 (1961)
- 39 J.Miastkowski, *Archiwum Mechaniki Stosowanej*, 3, 261 (1968)
- 40 W.Prager, *J. Appl. Mech.*, 23, 493 (1956)
- 41 B.Budiansky, *Discusión de Ref.40, J. Appl. Mech.*, 24 (1957)

- 42 Hodge, P.G.Jr., *Discusión de Ref.* , *J. Appl. Mech.*, 24 (1957)
- 43 R.T.Shield y H.Ziegler, *Z. Ang. Math. und Phys.*, 260 (1958)
- 44 H.Ziegler, *Quart. Appl. Math.*, 17, 55 (1959)
- 45 C.C.Claviot y H.Ziegler, *Ing. Arch.*, 28, 13 (1959)
- 46 W.E.Boyce, *Quart. Appl. Math.*, 14, 277 (1956)
- 47 P.G.Hodge Jr., *The Mathematical Theory of Plasticity en Elasticity and Plasticity*, por J.N.Goodier y P.G.Hodge Jr., New York, 1958
- 48 W.Prager. *An Introduction to Plasticity*, Reading, Mass. (1959)
- 49 W.Szcepinski, *Arch. Mech. Stos.*, 15, 275 (1963)
- 50 A.Baltov y A.Sawzuk, *Acta Mechanica*, 2, 81 (1965)
- 51 F.Edelman y D.C.Drucker, *J. Franklin Inst.*, 251, 581 (1951)
- 52 Y.I.Kadashevitch y B.V.Novozhilov, *TPMM (Traducción inglesa de Prikl. Mat. i Mekh.)* 22, 104 (1959)
- 53 Eisenberg y A.Phillips, *Comunicación Personal*
- 54 W.T.Koiter, *Quart. Appl. Math.* 11, 350 (1953)
- 55 J.L.Sanders, *Proc. 2nd. US Nat. Congr. Appl. Mecha. Ann Arbor, Mich. (1954)*
Ed. P.M.Naghdi, ASME, New York, 1955
- 56 W.Prager, *J. Appl. Mech.* 20, 317 (1953)
- 57 P.G.Hodge, *Proc. IUTAM Symp. Madrid, 1955*, Ed. R.Grammel, Berlín, 1956,
Springer.
- 58 P.G.Hodge, *J. Rat. Mech. Anal.*, 5, 917 (1956)
- 59 P.G.Hodge, *J. Mech. Phys. Solids*, 5, 242 (1957)
- 60 P.I.F.Wright, *Mag. of Conc. Res.*, 5, 139 (1954)
- 61 W.Lode, *Zeit, Physik*, 36, 913 (1926)
- 62 G.I.Taylor y H.Quinney, *Phil. Trans. Roy. Soc. London*, A-230, 323 (1931)

- 63 W. Prager, *Mém. Sci. Math.*, 87 (1937)
- 64 G. Lianis y H. Ford, *J. Mech. Phys. Solids*, 5, 215 (1957)
- 65 M. P. L. Siebel, *J. Mech. Phys. Solids*, 1, 189 (1953)
- 66 B. B. Hundy y A. P. Green, *J. Mech. Phys. Solids*, 3, 16 (1954)
- 67 F. D. Stockton, *ONR Tech. Report No. 88 Brown Univ.* (1953)
- 68 P. M. Naghdi, J. C. Rowley y C. W. Beadle, *J. Appl. Mecha.*, 22, 416 (1955)
- 69 P. M. Naghdi y J. C. Rowley, *J. Mech. and Phys. of Solids*, 3, 63 (1954)
- 70 A. Phillips, *Proc. 9-th. International Congress of Applied Mechanics*, 8, 23 (1957)
- 71 A. M. Zhukov y Yu. N. Rabotnov, *Inzhenernii Sbornik*, 18 (1954)
- 72 B. Budiansky, N. F. Dow, R. W. Peters y R. P. Shepherd, *Proc. First US Nat. Congr. Appl. Mech.*, 503 ASME (1952)
- 73 D. C. Drucker y F. D. Stockton, *Proc. Soc. Experimental Stress Analysis*, 10, 127 (1953)
- 74 A. Phillips, *Proc. 2nd. Symposium on Naval Structural Mechanics*. Ed. E. H. Lee y P. S. Symonds, Pergamon Press, 1960
- 75 L. Onsager, *Phys. Rev.* 37, 405 (1931)
- 76 S. R. De Groot, *Thermodynamics of Irreversible Processes*, North Holland Publishing Co. Amsterdam (1951)
- 77 I. Prigogine, *Introduction to Thermodynamics of Irreversible Processes* Interscience Publishers, New Yor, (1962)
- 78 P. W. Bridgman, *Re \check{v} . Mod. Phys.*, 22, 56 (1950)
- 79 H. Ziegler, *ZAMP*. 96, 748 (1958)
- 80 A. A. Vakulenko, *DAN SSSR*, 118, 665 (1958)
- 81 A. A. Vakulenko, *DAN SSSR*, 126, 736 (1959)
- 82 A. M. Freudenthal y H. Geiringer, *The Mathematical Theories of Inelastic Continuum Handbuch der Physik*, Vol. VI, Springer-Verlag, Berlin (1958)

- 83 A. C. Eringer, NonLinear theory of continuous media, Mc Graw Hill Company (1962)
- 84 C. Truesdell, R. A. Toupin, The classical field theories. Handbuch der Physik, Vol. III/1, Springer, Verlag, Berlin (1960)
- 85 A. E. Green, P. M. Naghdi, Arch. Rat. Mech. Anal. 18, No. 4, 251 (1965)
- 86 L. W. Hu, Ibid⁽¹⁾, p. 194
- 87 H. Ford, Advanced Mechanics of Materials, Longmans, London (1963)
- 88 D. C. Drucker, J. Appl. Mech. 21, 71 (1954)
- 89 D. C. Drucker, Quart. Appl. Math. 7, 411, 418 (1950)
- 90 R. Hill, Journ. of the Mech. and Phys. of Solids, 1, 271 (1953)
- 91 D. W. Cunnington, E. C. Thomsen, J. E. Dorn, Proc. A. S. T. M. 47, 546 (1947)
- 92 F. S. Shaw, G. W. Wycherley, Structure and Materials Note 181, Department of Supply and Development, Australia (1950)
- 93 P. M. Naghdi, F. Essenberg, W. Koff, Journal of Appl. Mech. 25, Trans. ASME, 80, 201 (1958)
- 94 J. Miastkowski, Arch. Mech. Stos., 3, 20, 262 (1968)
- 95 Z. Mróz, J. Mech. Phys. Solids, 15, 163 (1967)