C.N.E.A. Biblioteca
ARCHIVO PUBLICACIONES
Nº 1 AÑO 1973

08.73.02

EN-27/96

COMISION NACIONAL DE ENERGIA ATOMICA
DEPENDIENTE DE LA PRESIDENCIA DE LA NACION

CONTROL OPTIMO

Carlos Enrique D'Attellis

Buenos Aires
1973

EN-27/96

COMISION NACIONAL DE ENERGIA ATOMICA

DEPENDIENTE DE LA PRESIDENCIA DE LA NACION

CONTROL OPTIMO

Carlos Enrique D'Attellis

Buenos Aires

1973

CONTROL OPTIMO

CAPITULO 1

CONDICIONES NECESARIAS

PRINCIPIO DE MAXIMO DE PONTRYAGIN

1. *El problema fundamental*
2. *Propiedades simples de trayectorias y controles óptimos*
3. *El principio de máximo*
4. *Ejemplo 1. Problema de mínimo tiempo*
5. *Ejemplo 2. Movimiento armónico*
6. *Ejemplo 3. Problema con dos controles.*
7. *Ejemplo 4. Movimiento rectilíneo de un cohete*
8. *Ejemplo 5. Tiempo mínimo en navegación*
9. *Condiciones de transversalidad*
10. *Ejemplo 6.*
11. *Ejemplo 7.*
12. *El principio de máximo para sistemas no autónomos*

CAPITULO 2

CONDICIONES SUFICIENTES

TEORIA DE HAMILTON-JACOBI-BELLMAN

PROGRAMACION DINAMICA

1. *Caso discreto*
2. *Ejemplo*
3. *Caso continuo*
4. *Ejemplo*
5. *Sistema lineal con funcional cuadrático*
6. *Ejemplo*
7. *Ejemplo donde no vale la condición suficiente*

CAPITULO 3

TEORIA CUALITATIVA

CONTROLABILIDAD Y OBSERVABILIDAD

0. Introducción

01. Formas cuadráticas

02. Sistemas lineales de ecuaciones diferenciales

03. Sistemas lineales no homogéneos

04. Cálculo de la matriz de transición

1. Sistemas dinámicos

2. Controlabilidad (I)

3. Controlabilidad en sistemas autónomos y lineales

4. Controlabilidad (II) y observabilidad

5. Controlabilidad y optimización.

CAPITULO 1

CONDICIONES NECESARIAS

PRINCIPIO DE MAXIMO DE PONTRYAGIN

1.1 EL PROBLEMA FUNDAMENTAL

Consideraremos la conducta de un objeto cuyo estado en cada instante está dado por n números reales x_1, x_2, -----, x_n, (v. gr. n=2, posición y velocidad) y en un intervalo de tiempo por la variación de dichos números.

Supondremos además que el objeto está equipado con ciertos controles, y que del valor que demos a éstos depende su conducta. Estos controles pueden ser, según el problema que consideremos, fuerzas, corrientes, voltajes, temperatura, cantidad de combustible entregada, elementos que podremos manejar desde fuera del objeto para condicionar su comportamiento; vemos así, que el valor del control está restringido debido a su naturaleza: ninguno de los citados previamente puede ser arbitrariamente grande, de manera que el valor del control debe variar entre límites previamente establecidos. Si, para generalizar, suponemos que r controles equipan al objeto (o sea, el control será un vector de r componentes) lo anterior significa que los valores de control varían dentro de una determinada región del espacio de dimensión r (R^r), que llamaremos región de control y denotaremos U :

$$u = (u_1, u_2, \text{-----}, u_r) \in U$$

Como veremos más adelante es muy importante considerar el caso en que U es una región cerrada, o sea, contiene a su borde; una región cerrada es por ejemplo el siguiente cubo en el espacio de dimensión r:

$$|u_i| \leq 1 \qquad\qquad i: 1, 2, \text{-----}, r.$$

El control del objeto se debe realizar durante un intervalo de

tiempo $[t_o,t_1]$ y en cada instante debemos utilizar un valor de control que esté en la región U. De esta manera, a cada función definida en $[t_o,t_1]$ y que tome valores en U la llamaremos <u>control</u>.

Un control será entonces una función vectorial

$$u:[t_o,t_1] \longrightarrow U$$

$$u(t) = (u_1(t),u_2(t),------,u_r(t))$$

Es claro además que, dependiendo del carácter del problema, tendremos que imponer ciertas condiciones sobre las funciones u(t) que utilicemos como controles, o sea, determinar la clase de funciones que pueden considerarse, a la que llamaremos de <u>controles admisibles</u>. Resultará útil la clase de funciones seccionalmente continuas, pues corresponden a la idea de control "on-off" ya que los valores u(t) pueden saltar, en cada punto de discontinuidad, de un lugar a otro de la región U.

Supongamos que la ley de movimiento del objeto en cuestión está dada por un sistema de ecuaciones diferenciales

$$\frac{dxi}{dt} = f_i(x_1(t),x_2(t),----,x_n(t),u_1(t),----u_r(t)) \quad (1.1)$$

o, en forma vectorial

$$\frac{dx}{dt} = f(x(t),u(t))$$

donde $f(x,u) = (f_1(x,u),--------,f_n(x,u))$

$x(t) = (x_1(t),--------,x_n(t))$

$u(t) = (u_1(t),-----,u_r(t))$

con las hipótesis $f_i(x,u)$, $\frac{\partial fi(x,u)}{\partial xj}$ definidas y continuas para

para todo i, j: 1,.----n (Por ahora sólo trataremos el caso autónomo, para considerar más adelante el no autónomo).

Si fijamos un control u(t) y damos una condición inicial $x(t_o) = x^o$, el movimiento del objeto, x(t), queda univocamente determinado como solución del sistema (1.1); diremos entonces que x(t) es la solución correspondiente a u(t) con la condición $x(t_o) = x^o$. Diremos también que el control admisible u(t), $t\in[t_o,t_1]$ transfiere al sistema del estado x^o al x^1, si la solución x(t) correspondiente a ese u(t) satisface $x(t_o) = x^o$, está definida en todo $[t_o,t_1]$ y pasa por x^1 en t_1, o sea $x(t_1) = x^1$.

Además de los elementos ya definidos, debemos introducir algún criterio que determine el costo de la operación de transferir un estado a otro, que dependerá, por supuesto, del problema planteado y que puede ser la energía consumida, el tiempo empleado, etc.; es claro que dependerá también de la transferencia realizada y del control; tomaremos como caso general de costo el siguiente funcional

$$J = \int_{t_o}^{t_1} f_o\,(x(t),u(t))dt \qquad (1.2)$$

Observemos aquí que los límites de la integral, una vez fijados los estados inicial (x^o) y final (x^1), no son números fijos sino que dependen del control u(t) que realice la transferencia. En efecto, aún partiendo del mismo tiempo inicial t_o, dos controles distintos $u_1(t),u_2(t)$ pueden producir dos trayectorias distintas $x(t),\bar{x}(t)$ de tal manera que $x(t_1)=x^1$, $\bar{x}(\bar{t}_1)=x^1$, $t_1 \neq \bar{t}_1$.

Con todo lo anterior, estamos en condiciones de enunciar el problema fundamental:

> Dados dos estados x^o y x^1, entre todos los controles admisibles que transfieren x^o a x^1 (si

tales controles existen) hallar aquel
que minimice el funcional o costo (1.2).

Tal control será llamado <u>óptimo</u>.

Un caso particular importante del problema enunciado es aquel en que $f_o(x,u)=1$, con lo cual el funcional se reduce a $J=t_1-t_o$ Recordando que los tiempos t_o y t_1 dependen de $u(t)$, aquel control que haga mínimo este funcional, será el <u>control de tiempo mínimo</u>.

Con el objeto de establecer las condiciones necesarias de optimización, reformularemos el problema.

Definimos una nueva coordenada x_o que varía con la ecuación

$$\frac{dx_o}{dt} = f_o(x_1,----,x_n,u_1,---,u_r)$$

(donde f_o es la función que aparece en J)

Juntamos esta ecuación al sistema (1.1):

$$\frac{dx_i}{dt}=f_i(x_1,----,x_n,u_1,---,u_r) \qquad \text{con } i:0,1,2,----,n \qquad (1.3)$$

Llamaremos $\bar{x}=(x_o,x_1,x_2,-----,x_n)$ al vector en el espacio aumentado (dimensión n+1).

En forma vectorial será

$$\frac{d\bar{x}}{dt}=\bar{f}(x,u)$$

donde $\bar{f}(x,u)=(f_o(x,u),f_1(x,u),------,f_n(x,u))$

($\bar{f}(x,u)$ no depende de x_o).

Sea u(t) el control que transfiere x^o a x^1 (en dim. n). Tomemos $\bar{x}^o=(0,x^o)$ (Ver fig.1); si la solución del sistema (1.1) correspondiente a esa condición inicial y a ese control es $x=x(t)$, la solución de (1.3) correspondiente al u(t) con la condición inicial $\bar{x}^o=(0,x^o)$ será:

$$\begin{cases} x_o=\int_{t_o}^{t} f_o(x(\tau),(\tau))d\tau \\ x=x(t) \end{cases}$$

En particular, si $t=t_1$

$$x_o(t_1) = \int_{t_o}^{t_1} f_o(x(\tau),u(\tau))d\tau = J$$

$$x(t_1) = x_1 \qquad \text{(en dim. n)}$$

O sea, si dibujamos la recta π, paralela por x^1 a la nueva coordenada x_o tomada, la solución $\bar{x} = \bar{X}(t)$ pasa en $t=t_1$ por un punto de π de coordenada $x_o=J$

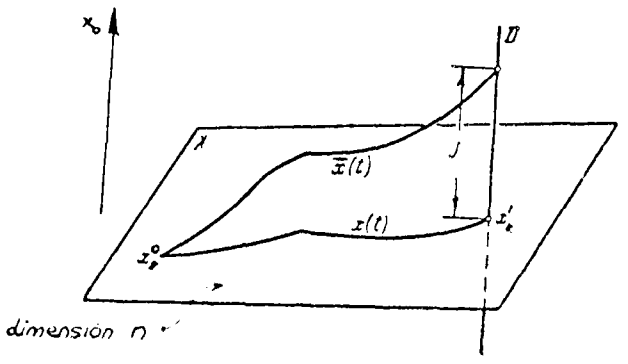


Fig.1

La forma equivalente en que enunciamos el problema es:

> En el espacio aumentado de dimensión n+1 se dan: el punto $\bar{x}^o=(0,x^o)$ y la recta π paralela al nuevo eje x_o que pasa por $(0,x^1)$. Entre todos los controles u(t) tales que la solución correspondiente a ellos (soluc. del (1.3)) con la condición inicial $\bar{x}(t_o)=\bar{x}^o$, corta a la recta π, hallar aquel cuyo punto de

intersección con π tenga mínima coordenada

De esta manera, la minimización del funcional de tipo integral (1.2) queda reducida a la minimización de una coordenada en el espacio de estados aumentado.

1.2 PROPIEDADES SIMPLES DE TRAYECTORIAS Y CONTROLES OPTIMOS

Dado el sistema (1.1) y la clase de funciones seccionalmente continuas como controles admisibles, podemos enunciar las siguientes propiedades:

1) Una traslación en el eje t no cambia las propiedades de los controles, es decir, si $u(t)$ t $\varepsilon[t_o,t_1]$ transfiere x^o a x^1 con un costo J, entonces, para todo h, $u(t+h)$ con t en $[t_o-h,t_1-h]$ también lleva x^o a x^1 y le da al funcional el mismo valor J. La razón de esto es la autonomía de (1.1). Se ve aquí que es posible colocar el tiempo inicial t_o del intervalo en cualquier punto del eje t (Ver fig.2).

2) Sean x^o, x^1,-----,x^k puntos del espacio de estados. Si existe un control $u_i(t)$ definido en $[t_{i-1},t_i]$ que transfiere x^{i-1} a x^i con un costo J_i para i=1,2,----,k, entonces existe u(t) tal que transfiere x^o a x^k con un costo $\sum_{i=1}^{k} J_i$.

En efecto, según 1) podemos desplazar los u_i a lo largo del eje t de manera que quede uno a continuación del otro. Definimos ahora un nuevo control en $[t_o,t_k]$

$$u(t) = u_i(t) \qquad \text{si } t\in[t_{i-1},t_i] \qquad i=1,\dots,k$$

que es admisible. (hg 3)

Afirmamos que este cumple con lo enunciado: es claro que transfiere x^o a x^k, y además:

$$J = \int_{t_o}^{t_k} f_o(x,u)dt = \sum_{i=1}^{k} \int_{t_{i-1}}^{t_i} f_o(x,u)dt = \sum_{i=1}^{k} J_i$$

3) Toda parte de trayectoria óptima es óptima.

Supongamos que $u(t)$, $t\in[t_o,t_1]$ es un control óptimo que transfiere x^o a x^1, y que $x(t)$ es la trayectoria óptima. Tomemos τ_o y τ_1 de manera que $t_o < \tau_o < \tau_1 < t_1$. Veremos que $u(t)$ restringido a $[\tau_o,\tau_1]$ es óptimo para la transición de $x(\tau_o)$ a $x(\tau_1)$ y que $x(t)$ para $t\in[\tau_o,\tau_1]$ es la correspondiente trayectoria óptima.

Sean J_1, J_2, J_3 los costos en los intervalos $[t_o,\tau_o]$, $[\tau_o,\tau_1]$, $[\tau_1,t_1]$ respectivamente. (ver fig. abajo)

Por 2), $u(t)$ con $t\in[t_o,t_1]$ da un costo $J=J_1+J_2+J_3$.

Supongamos que $u(t)$ en el intervalo $[\tau_o,\tau_1]$ no fuera óptimo; entonces existe otro control $v(t)$ que lleva $x(\tau_o)$ a $x(\tau_1)$ con un costo $\hat{J}_2 < J_2$.

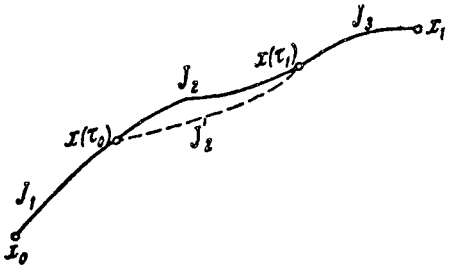
Si definimos

$$\hat{u}(t) = \begin{cases} u(t) & \text{si } t\in[t_o,\tau_o] \cup [\tau_1,t_1] \\ v(t) & \text{si } t\in[\tau_o,\tau_1] \end{cases}$$

obtendremos un control que realiza la misma transferencia con un costo

$$J_1 + \hat{J}_2 + J_3 < J$$

lo que contradice la optimalidad de $u(t)$.



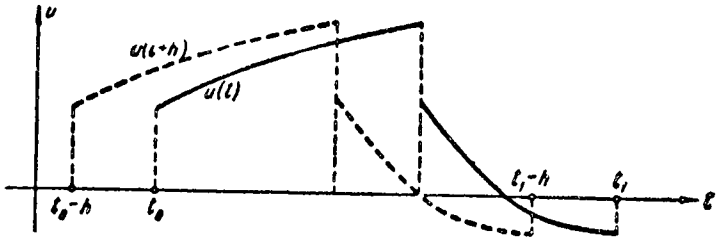


Figura 2

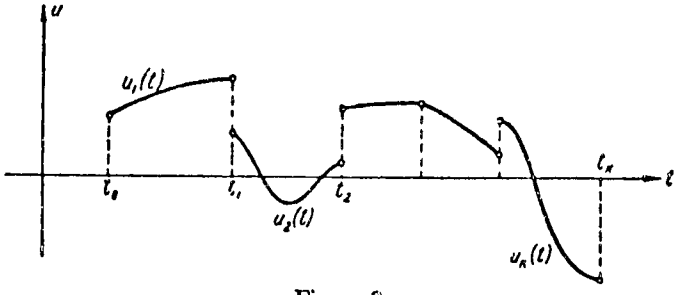


Figura 3

1.3 EL PRINCIPIO DE MAXIMO

Formularemos en esta sección el teorema que da solución al problema fundamental

Consideremos el sistema aumentado

$$\dot{x}_i = f_i(x,u) \qquad i=0,1,2,----,n \tag{1.4}$$

y otro sistema de ecuaciones en las variables auxiliares $\psi_o,\psi_1,\psi_2,-----,\psi_n$:

$$\dot{\psi}_i = -\sum_{k=0}^{n} \frac{\partial f_k(x,u)}{\partial x_i}\,\psi_k(t) \qquad i=0,1,---,n \tag{1.5}$$

Si tomamos un control admisible $u(t)$, $t\in[t_o,t_1]$ y la condición inicial $\bar{x}(t_0) = \bar{x}^o$, el sistema (1.4) nos da la trayectoria en el espacio aumentado $\bar{x}(t)$(Recordemos que $\bar{x}(t) = (x_o(t),x(t))$ con $x(t)$ en el espacio de estados n-dimensional)
Con ese control $u(t)$ y esa trayectoria $x(t)$,el sistema (1.5) queda:

$$\dot{\psi}_i = -\sum_{k=0}^{n} \frac{\partial f_k(x(t),u(t))}{\partial x_i}\,\psi_k(t) \qquad i=0,1,2,----,n \tag{1.6}$$

Este sistema es lineal y homogéneo;para cada condición inicial que fijemos,admite una solución

$$\psi(t) = (\psi_o(t),\psi_1(t),------,\psi_n(t))$$

Observemos que esta solución no queda univocamente determinada por $u(t)$,sino que hay infinitas soluciones para ese $u(t)$,una para cada condición inicial que fijemos.

Cada solución obtenida (para cualquier condición inicial) con $u(t)$ y $x(t)$,será llamada solución correspondiente a esos $u(t)$ y $x(t)$.

Combinaremos los sistemas (1.4) y (1.5) en uno solo.Para ello

consideremos la siguiente función de las variables $x_1,-----,x_n$, $\psi_o,\psi_1,-----,\psi_n,u_1,----,u_r$:

$$H(x,\bar{\psi},u) = <\bar{\psi},f(x,u)> = \sum_{k=0}^{n} \psi_k f_k(x,u) \qquad (1.7)$$

Observemos que H es continua en x, $\bar{\psi}$, u .

Con ésto,los sistemas (1.4) y (1.5) pueden ser reescritos en la forma siguiente:

$$\frac{dx_i}{dt} = \frac{\partial H}{\partial \psi_i} \qquad i=o,1,----,n \qquad (1.8)$$

$$\frac{d\psi_i}{dt} = \frac{\partial H}{\partial x_i} \qquad i=0,1,---,n \qquad (1.9)$$

llamado sistema Hamiltoniano.

Tomando un control admisible u(t) , $t\in[t_o,t_1]$ y la condición inicial $\bar{x}(t_o) = \bar{x}^o$ podemos hallar la trayectoria correspondiente $\bar{x}(t) = (x_o(t),x_1(t),-----,x_n(t))$ es decir, la que satisface(1.8); después podemos determinar la solución de (1.9) correspondiente a u(t) y $\bar{x}(t)$: $\bar{\psi}(t) = (\psi_o,\psi_1,----,\psi_n)$.

Las funciones $\bar{x}(t)$ y $\bar{\psi}(t)$ así obtenidas son continuas y con derivada respecto a t continua excepto en un número finito de puntos.

Observemos la función H definida previamente como si fuera función solamente de u ,o sea para x y $\bar{\psi}$ fijos.Notemos que no tomamos un control u y las x y $\bar{\psi}$ que le corresponden, sino que fijamos de antemano los valores de x y $\bar{\psi}$ y así tenemos,para cada par de éstos fijos,una función de la variable u. Llamemos

$$M(x,\bar{\psi}) = \sup_{u\in U} H(x,\bar{\psi},u)$$

La función H (como función de u),alcanza su máximo en U siempre que éste sea un conjunto cerrado y acotado ya que " es

continua.

Ahora enunciaremos, sin demostrarlo dada su dificultad, el Teorema 1, que es el Principio de Máximo (el nombre proviene de lo anterior); es una condición necesaria para optimización, cuyo principal contenido es la ecuación (1.10)

TEOREMA 1 (Pontryagin 1958)

> Sean $u(t)$, $t\in[t_o,t_1]$ un control admisible tal que la trayectoria correspondiente $\bar{x}(t)$ que comienza en $\bar{x}^o$ en t_o, pasa, en algún tiempo t_1 por algún punto de la recta π

Si $u(t)$ y $\bar{x}(t)$ son óptimos, entonces

Existe $\bar{\psi}(t)=(\psi_o(t),\psi_1(t),----,\psi_n(t)) \not\equiv 0$ continua, correspondiente a $u(t)$ y $\bar{x}(t)$, tal que:

1º)para cada $t\in[t_o,t_1]$, la función $H(x(t),\bar{\psi}(t),u)$ de la variable $u\in U$, alcanza su máximo en el punto $u=u(t)$:

$$H(\bar{\psi}(t),x(t),u(t))=M(\bar{\psi}(t),x(t)) \qquad (1.10)$$

2º) En el instante t_1,

$$\psi_o(t_1)\leq 0 \quad , \quad M(\bar{\psi}(t_1),x(t_1))=0 \qquad (1.11)$$

Además, si $\bar{x}(t)$, $u(t)$ y $\bar{\psi}(t)$ satisfacen las ecuaciones (1.8),(1.9) y la condición 1º), entonces las funciones

$$\psi_o(t) \text{ y } M(\bar{\psi}(t), x(t))$$

son constantes.Así las ecuaciones (1.11) se verifican para todo $t \in [t_o, t_1]$ y no solamente en t_1;de allí ,sobre la trayectoria óptima el Hamiltoniano H es nulo.

Del teorema 1,obtendremos una condición necesaria análoga para problemas de tiempoóptimo.
En este caso $f_o \equiv 1$,como ya vimos.Entonces

$$H = \psi_o(t) + \sum_{k=1}^{n} \psi_k(t) f_k(x,u) \qquad (1.12)$$

Llamando $\psi = (\psi_1, -----, \psi_n)$

y $H^* = \sum_{\kappa=1}^{n} \psi_\kappa \, f_\kappa$

(1.12) queda

$$H(x,\bar{\psi}) = \psi_o + H^*(x,\psi,u) \qquad (1.13)$$

Ahora ,las ecuaciones que gobiernan al sistema pueden ser escritas

$$\dot{x}_i = \frac{\partial H^*}{\partial \psi_i} \qquad i=1,---,n \qquad (1.14)$$

Por otra parte,el sistema auxiliar puede escribirse

$$\dot{\psi}_i = - \frac{\partial H^*}{\partial x_i} \qquad i=1,---,n \qquad (1.15)$$

ya que $\frac{\partial f_o}{\partial x_i} = 0$ pues $f_o \equiv 1$, con lo cual el primer sumando de (1.5) se anula.

En el teorema tomábamos a H como función de u para x y ψ fijos;ahora,por (1.13),vemos que basta considerar H^*. Llamemos

$$M^*(\psi,x) = \sup_{u \in U} H^*(x,\psi,u) \quad .$$

De (1.13) tenemos

$$M^*(\psi,x) = M(\bar{\psi},x) - \psi_0 \qquad (1.16)$$

Con esto podemos escribir el teorema 1 para el caso de mínimo tiempo.

Teníamos en 1°) (ver teorema 1)

$$H(x,\bar{\psi},u) = M(\bar{\psi},x)$$

y ahora,usando (1.13) y (1.15)

$$\psi_o + H^*(x,\psi,u) = M^*(\psi,x) + \psi_o$$

$$\Rightarrow \quad H^*(x,\psi,u) = M^*(\psi,x) \qquad (1.17)$$

En el punto 2°) decíamos

$$\psi_o(t_1) \leq 0 \quad y \quad M(\dot{x}(t_1),\bar{\psi}(t_1)) = 0 \ ;$$

ahora,con (1.16):

$$M^*(\psi(t_1),x(t_1)) + \psi_o(t_1) = M(x(t_1),\bar{\psi}(t_1)) = 0$$

$$\Rightarrow \quad M^*(\psi(t_1),x(t_1)) = -\psi_o(t_1)$$

y como $\psi_o(t_1) \leq 0$, resulta

$$M^*(\psi(t_1),x(t_1)) \geq 0 \qquad (1.18)$$

Así conseguimos enunciar el teorema sin utilizar el espacio aumentado,es decir,sin hacer intervenir la coordenada que definíamos con el funcional.En resumen,enunciamos el

TEOREMA 2

Sea $u(t)$, $t\in[t_o,t_1]$ un control admisible que transfiere el estado x^o al x^1 ,y sea $x(t)$ la trayectoria correspondiente a $u(t)$ tal que $x(t_o) = x^o$ y $x(t_1) = x^1$.

Si $u(t)$ y $x(t)$ minimizan el tiempo para ir de x^o a x^1, entonces

existe $\psi(t) = (\psi_1(t),-----,\psi_n(t)) \not\equiv 0$ continua,corresp. a $u(t)$ y $x(t)$ tal que:

1°) para cada $t\in[t_o,t_1]$,la función $H^*(\psi(t),x(t),u)$ de la variable $u\in U$ alcanza su máximo en el punto $u = u(t)$:

$$H^*(\psi(t),x(t),u(t))=M^*(\psi(t),x(t)) \qquad (1.19)$$

2°) en t_1, vale

$$M^*(\psi(t_1),x(t_1)) \geq 0 \qquad (1.20)$$

Además, si x(t), u(t) y $\psi(t)$ satisfacen (1.14),(1.15) y la condición 1°). entonces la función $M^*(\psi(t), x(t))$ es constante Así, la desigualdad (1.20) se verifica para todo $t\in[t_0,t_1]$ y no sólo en t_1.

1.4 EJEMPLO 1

Consideremos una masa m que se mueve sobre un riel horizontal. La posición x en cada t está determinada por la ley de Newton:

$$m\ddot{x} = u(t)$$

donde u(t) es una fuerza externa aplicada sobre el cuerpo. Supongamos que la posición y la velocidad iniciales son datos.

Resolveremos el problema siguiente: alcanzar el estado final, que es el origen de distancias y velocidad cero, en mínimo tiempo, usando como control la fuerza aplicada u(t) sujeta a la acotación

$$|u(t)| \leq 1$$

Introduciendo la nomenclatura $x_1=x$ y $x_2=\dot{x}$ la ecuación de Newton se escribe como un sistema de ecuaciones de 1er. orden:

$$\dot{x}_1 = x_2$$

$$\dot{x}_2 = \frac{u}{m}$$

Por simplicidad, tomaremos m=1, entonces

$$\dot{x}_1 = x_2$$

$$\dot{x}_2 = u$$

Como hemos visto ya, al considerar problemas de tiempo óptimo no interviene el espacio aumentado sino que el Hamiltoniano se escribe (ver Teorema 2)

$$H = \psi_1 x_2 + \psi_2 u \qquad (1.22)$$

y el sistema auxiliar, será entonces:

$$\dot{\psi}_1 = - \frac{\partial H}{\partial x_1} = 0$$

$$\dot{\psi}_2 = - \frac{\partial H}{\partial x_2} = -\psi_1 \qquad (1.23)$$

La función H, vista como función de u, alcanzará su máximo cuando sea máximo el producto $\psi_2 . u$; como $-1 \leq u \leq 1$, el producto será máximo cuando u tome sus valores extremos, o sea -1 ó 1, u=1 si $\psi_2 > o$ y u=-1 si $\psi_2 < o$. En resumen:

$$u = sg\ \psi_2 \qquad (1.24)$$

(Observemos que si hubiera sido $|u| \leq M$, $u = M\ sg\ \psi_2$)

Luego para determinar el control, hay que conocer ψ_2; para eso volvemos al sistema (1.23) :

de la primera ecuación obtenemos $\psi_1(t) = C_1 = cte.$,
con lo cual la segunda queda

$$\dot{\psi}_2 = - C_1 \quad \Rightarrow \quad \psi_2 = - C_1 t + C_2$$

y reeplazando en (1.24)

$$u(t) = sg\ (C_2 - C_1 t) \ .$$

Observemos que como la función $C_2 - C_1 t$ es lineal,a lo sumo cambiará de signo una vez.De esta manera queda caracterizado el control óptimo $u(t)$: es una función constante por secciones,que toma los valores $+1$ y -1 y que tiene a lo sumo un punto de salto.

Veamos ahora las trayectorias en el espacio de estados $x_1 x_2$ (posición,velocidad) que producen las funciones de control $u(t) = 1$ y $u(t) = -1$.

1°) $u(t) = 1$.

El sistema se escribe ahora

$$\dot{x}_1 = x_2$$
$$\dot{x}_2 = 1$$

Como buscamos representar las soluciones en el plano $x_1 x_2$,hacemos

$$\dot{x}_2 = 1 \quad \Rightarrow \quad dx_2 = dt \quad \Rightarrow \quad x_2 = t + k_2 \qquad (1.25)$$

Con eso,

$$\dot{x}_1 = t + k_2 \quad \Rightarrow \quad x_1 = 1/2\ t^2 + k_2 t + k_1 \qquad (1.26)$$

$$\Rightarrow \quad x_1 = \frac{1}{2}(t^2 + 2k_2 t) + k_1$$

$$= \frac{1}{2}((t + k_2)^2 - k_2^2) + k_1$$

$$= \frac{1}{2} x_2^2 - \frac{1}{2} k_2^2 + k_1$$

Llamando $k = -\frac{1}{2} k_2^2 + k_1$, resulta

$$x_1 = \frac{1}{2} x_2^2 + k \qquad (1.27)$$

que son las trayectorias correspondientes a $u = 1$ en el espacio de estados $x_1 x_2$.

2°) $u(t) = -1$.

Así tenemos $\dot{x}_1 = x_2$

$\dot{x}_2 = -1$

$\Rightarrow \quad dx_2 = -dt \quad \Rightarrow \quad x_2 = -t + k_2$

$\Rightarrow \quad \dot{x}_1 = -t + k_2 \quad \Rightarrow \quad x_1 = -\frac{t^2}{2} + k_2 t + k_1$

Busquemos las trayectorias en el plano $x_1 x_2$:

$$x_1 = -\frac{1}{2}(t^2 - 2k_2 t) + k_1$$

$$= -\frac{1}{2}((t-k_2)^2 - k_2^2) + k_1$$

$$= -\frac{1}{2} x_2^2 + 1/2\, k_2 + k_1$$

=> obtenemos

$$x_1 = -\frac{1}{2} x_2^2 + k' \qquad (1.28)$$

Resultan así, las siguientes trayectorias en el espacio de estados:

si $u(t) = 1$, según (1.27), figura 4

si $u(t) = -1$, según (1.28), figura 5

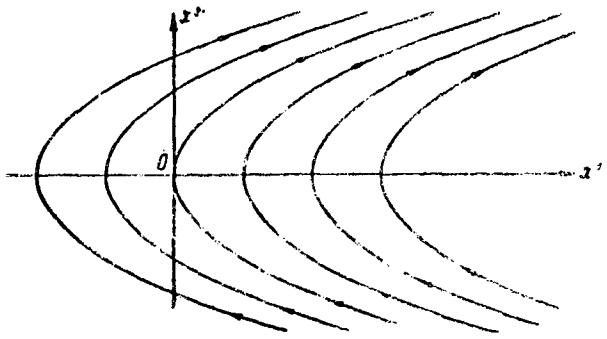


Fig. 4

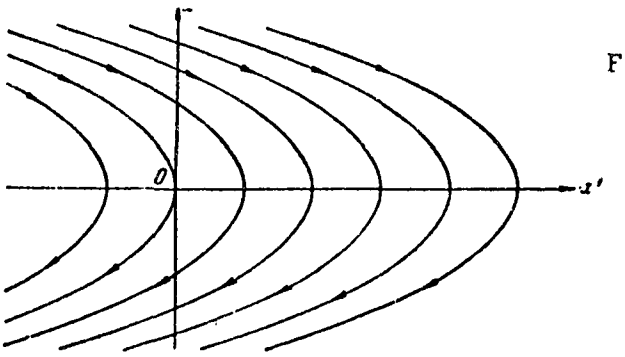


Fig. 5

Analicemos ahora el sentido en que se recorren las trayectorias halladas a medida que crece t .

En el primer caso, o sea $u(t) = 1$, vimos que $\dot{x}_2 = 1$, de donde $x_2(t)$ es creciente.

En el segundo, $u(t) = -1$, teníamos $\dot{x}_2 = -1$, y así $x_2(t)$ es decreciente.

Con esto quedan los sentidos indicados en las figuras 4 y 5 .

Observemos que:

1) por cada punto del plano x_1x_2 pasa una parábola de cada familia de las definidas, por lo tanto siempre habrá un control que lleve al origen (que es el estado a alcanzar)

2) hay una sola parábola de cada familia que pasa por el origen; además cada una de esas parábolas tiene una rama que va al origen y otra que se aleja de él.

Con la observación 2) queda determinada una curva que divide al espacio en dos partes; por ella deberemos llegar al origen. (ver figura 6)

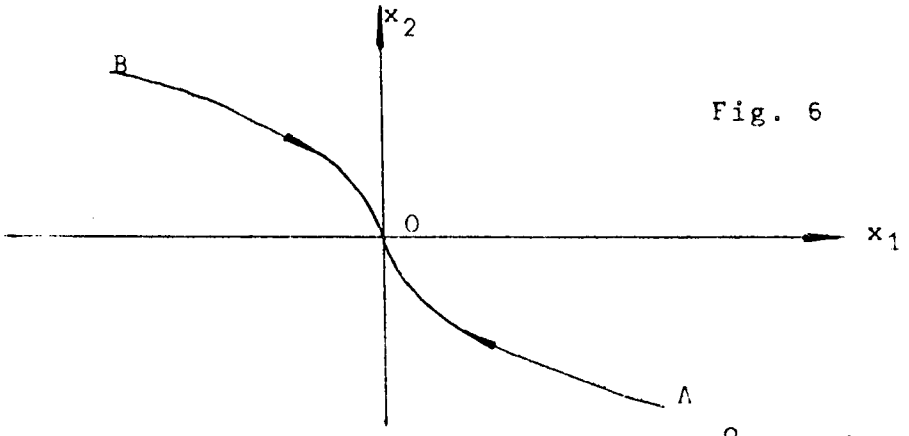


Fig. 6

Supongamos que nuestro estado inicial x^o está por debajo de la curva BOA:

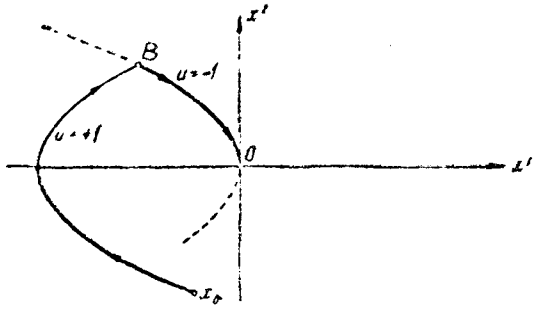


Fig. 7

Vemos que para llegar al origen debemos aplicar primero $u = 1$ y luego, cuando se llega a la curva BO , $u = -1$.

Supongamos ahora que x^o está sobre la curva BOA:

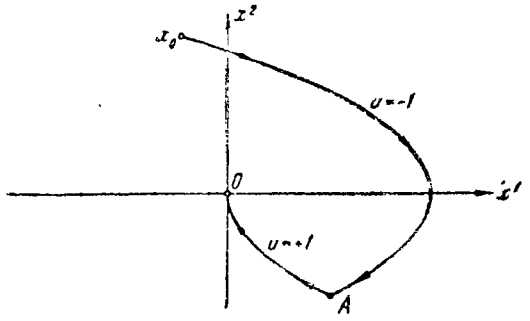


Fig. 8

Ahora vemos que primero se toma $u = -1$ y luego $u = 1$.

O sea que tenemos, para cualquier estado inicial x^o, las trayectorias óptimas que conducen al origen son las indicadas en la Fig. 9

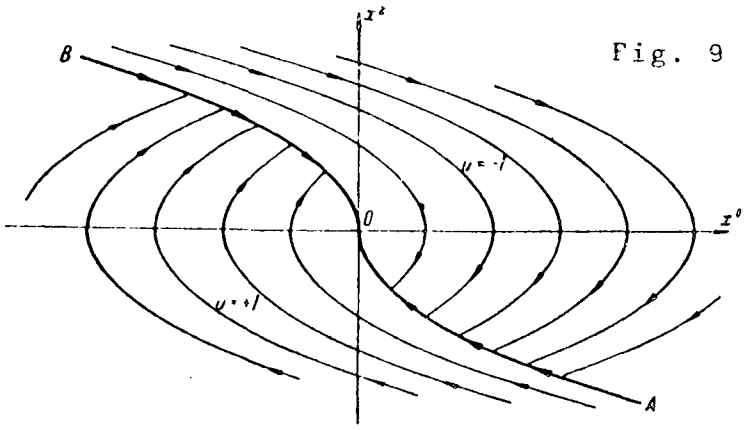


Fig. 9

El significado del control óptimo para este problema es: someter al cuerpo a máxima aceleración (u=1) (ó máxima desaceleración(u=-1), según donde esté ubicado el x^o) y luego máxima desaceleración(ó aceleración).

Con el objeto de lograr la síntesis del control óptimo, definamos la siguiente función: $(x=(x_1,x_2))$

$$v(x) = \begin{cases} 1 \text{ si } x\varepsilon \text{ abajo de BOA ó sobre OA} \\ -1 \text{ si } x\varepsilon \text{ arriba de BOA ó sobre BO} \end{cases}$$

Así, $u(t)=v(x(t))$, es decir podemos escribir al control no como función del tiempo, sino como función del estado del sistema en ese instante, lo cual es vital para establecer un lazo de realimentación .

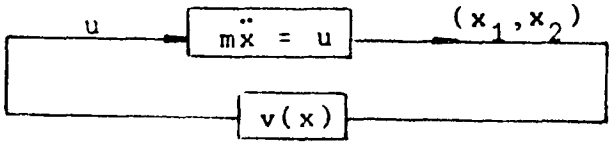
Con ésto el sistema se puede escribir:

$$\dot{x}_1 = x_2$$

$$\dot{x}_2 = v(x_1, x_2)$$

y la solución para un arbitrario estado inicial x^o da la trayectoria óptima que conduce al origen.

Con el control en función de x_1, x_2 se cierra el ciclo de realimentación:

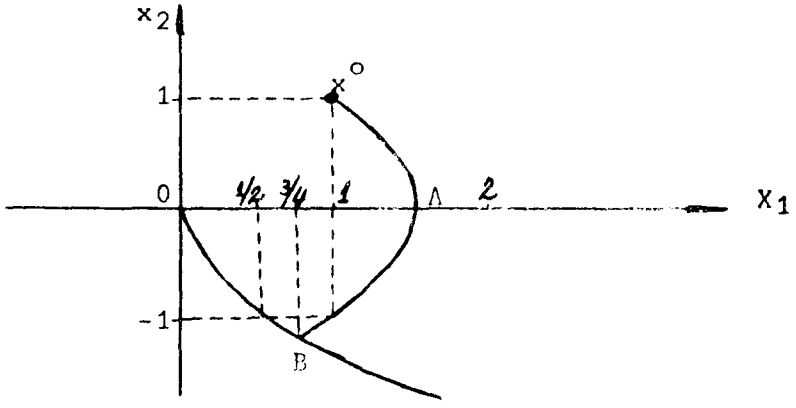


Ejemplo numérico

Tomemos como condiciones iniciales

$$x_1^o = 1 \quad , \quad x_2^o = 1$$

La solución será como vimos antes:



Con u=-1, la trayectoria es: $x_1=-\frac{1}{2}\,x_2^2+k'$

Con u=1, " " ": $x_1=\frac{1}{2}\,x_2^2+k$

Como la 1ra. parte debe comenzar en $x^o=(1,1)$, habrá que desacelerar con u=-1, y la ecuación debe satisfacer

$$1=-\frac{1}{2}\,1+k' \quad \Rightarrow \quad k'=\frac{3}{2}$$

Luego, la ecuación con esas condiciones iniciales es:

$$x_1=-\frac{1}{2}\,x_2^2+\frac{3}{2}$$

y seguiremos aplicando ese control hasta que la curva anterior empalme con la de la flia. de u=1, que pasa por el origen; esas curvas eran:

$$x_1=+\frac{1}{2}\,x_2^2+k$$

y para la que lleva el origen, k=o

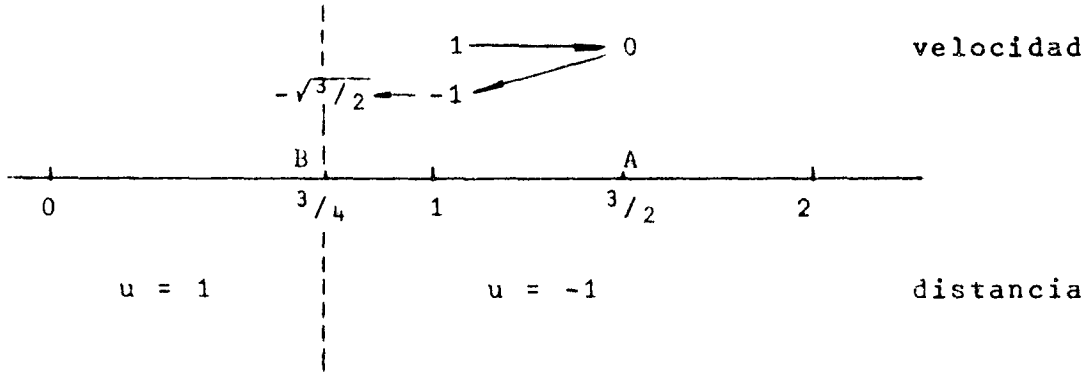
$$x_1=\frac{1}{2}x_2^2$$

La intersección de ambas será:

$$\frac{1}{2}\,x_2^2=-\frac{1}{2}\,x_2^2+\frac{3}{2}$$

$$x_2=-\sqrt{3/2} \quad \Rightarrow \quad x_1=\frac{3}{4}$$

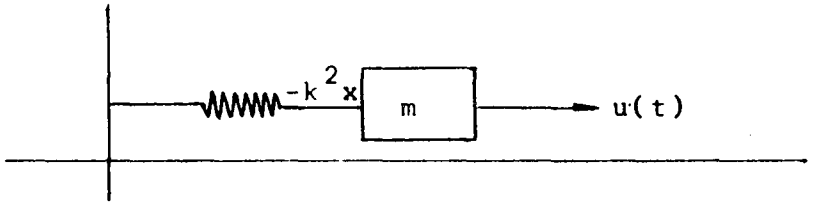
LLamemos $B = (3/4 , -\sqrt{3/2})$. Destaquemos también el punto $A = (3/2 , 0)$ que es donde el vector velocidad se hace negativo, o sea,cambia de sentido.



La distancia inicial era 1 y la velocidad inicial 1.Tomamos el vector velocidad positivo cuando coincide con el sentido del eje de distancias.O sea que el cuerpo en su estado inicial se estaba alejando del origen con v = 1.Comenzamos a frenarlo con u = -1; con esto irá perdiendo velocidad y al llegar a la distancia 3/2, se encontrará parado.Pero seguimos aplicando u = -1 ,de manera que la velocidad se hace negativa (ver en la figura el punto A),es decir,el cuerpo comienza a retroceder.Pasará nuevamente por la distancia 1 con la misma velocidad que tenía allí antes pero de signo contrario: -1.Continuará acercándose al origen hasta llegar a la distancia 3/4 con velocidad $-\sqrt{3/2}$ (ver punto B).En ese momento cambiamos el control que habíamos mantenido constante en -1, a +1.Con él se moverá hasta el origen y llegará con velocidad nula.El proceso se hizo en mínimo tiempo.

1.5 EJEMPLO 2

Consideremos una masa m cuya posición en el tiempo t es $x(t)$;ella es atraída hacia el origen con una fuerza $-k^2x(t)$.
El problema es llegar al origen con velocidad nula en mínimo tiempo,utilizando como control la fuerza $u(t)$,con $|u(t)| \leq 1$.



La ecuación de Newton será:

$$m\ddot{x} = u(t) - k^2x$$

Llamando $x_1 = x$ y $x_2 = \dot{x}$,queda el sistema

$$\dot{x}_1 = x_2$$
$$\dot{x}_2 = \frac{-k^2x_1 + u}{m}$$

y haciendo por simplicidad $k = 1$, $m = 1$

$$\dot{x}_1 = x_2$$
$$\dot{x}_2 = -x_1 + u \qquad (1.29)$$

Formemos el Hamiltoniano

$$H = \langle \psi, f(x,u) \rangle = \psi_1 x_2 + \psi_2 (-x_1 + u)$$
$$= \psi_1 x_2 + \psi_2 u - \psi_2 x_1$$

y de allí,para que H sea máximo como función de u ,

$$u(t) = sg\ \psi_2(t) .$$

Busquemos entonces ψ_2;para eso planteamos el sistema auxiliar:

$$\dot{\psi}_1 = -\frac{\partial H}{\partial x_1} = \psi_2$$

$$\dot{\psi}_2 = -\frac{\partial H}{\partial x_2} = -\psi_1$$

$$\Rightarrow \quad \ddot{\psi}_2 = -\dot{\psi}_1 = -\psi_2 \qquad \text{O sea,} \qquad \ddot{\psi}_2 + \psi_2 = 0$$

$$\Rightarrow \quad \psi_2(t) = C_1 e^{it} + C_2 e^{-it}$$

Como del signo de ψ_2 depende el valor del control, busquemos otra expresión

$$\psi_2(t) = C_1(\cos t + i \operatorname{sen} t) + C_2(\cos t - i \operatorname{sen} t)$$

$$= (C_1 + C_2) \cos t + i(C_1 - C_2) \operatorname{sen} t$$

Llamemos $K_1 = C_1 + C_2$ y $K_2 = i(C_1 - C_2)$ y observemos que si C_1 y C_2 son complejos conjugados, entonces K_1 y K_2 son reales.

Esto es lo que pasa en nuestro caso; en efecto, cualquiera sea la condición inicial ψ_2^o y final ψ_2^1, resulta:

$$\psi_2(t_o) = \psi_2^o = C_1 e^{it_o} + C_2 e^{-it_o}$$

$$\psi_2(t_1) = \psi_2^1 = C_1 e^{it_1} + C_2 e^{-it_1}$$

De allí,

$$C_1 = \frac{\psi_2^o e^{-it_1} - \psi_2^1 e^{-it_o}}{e^{i(t_o - t_1)} - e^{-i(t_o - t_1)}} \qquad (1.30)$$

$$C_2 = \frac{\psi_2^o e^{it_1} - \psi_2^1 e^{it_o}}{e^{-i(t_o - t_1)} - e^{i(t_o - t_1)}} \qquad (1.31)$$

de donde $C_1 = \bar{C}_2$ y así K_1 y K_2 reales.

Entonces siempre existen dos parámetros $A>0$ y α_o tales que

$$K_1 = A \operatorname{sen} \alpha_o \qquad K_2 = A \cos \alpha_o \ ,$$

en efecto basta tomar $A = +\sqrt{K_1^2 + K_2^2}$ y $\alpha_o = \text{arc tg } K_1/K_2$.

Como teníamos

$$\psi_2(t) = K_1 \cos t + K_2 \operatorname{sen} t$$

ahora $\psi_2(t) = A \operatorname{sen} \alpha_o \cos t + A \cos \alpha_o \operatorname{sen} t$

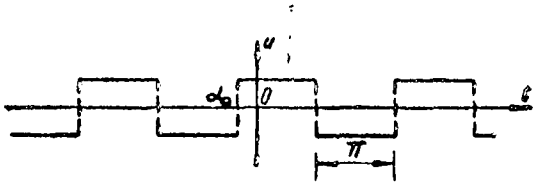
$$\rightarrow \quad \psi_2(t) = A \operatorname{sen} (t + \alpha_o)$$

o sea,

$$u = \operatorname{sg} \psi_2 = \operatorname{sg}[A \operatorname{sen}(t+\alpha_o)] = \operatorname{sg}[\operatorname{sen}(t + \alpha_o)]$$

ya que $A > 0$

Con esto se ve que el control u(t) será alternativamente +1 y -1 en intervalos de longitud π, con un desplazamiento α_o respecto del origen:



Es decir, al satisfacer la condición necesaria dada por el Principio de Máximo tenemos identificadas a las funciones que son posibles controles óptimos:
las seccionalmente constantes que toman +1 y -1 en intervalos de longitud π.

Ahora estudiaremos los segmentos de trayectoria que corresponden a intervalos en los que u=1 y en los que u=-1. Es decir,

tendremos que resolver el sistema (1.29) con u=1 y u=-1:

u=1	u=-1
$\dot{x}_1 = x_2$	$\dot{x}_1 = x_2$
$\dot{x}_2 = -x_1+1$	$\dot{x}_2 = -x_1-1$
$\dot{x}_1 = x_2$	$\dot{x}_1 = x_2$
$\dot{x}_2 = -(x_1-1)$	$\dot{x}_2 = -(x_1+1)$
$\frac{d(x_1-1)}{dt} = x_2$	$\frac{d(x+1)}{dt} = x_2$
$\frac{dx_2}{dt} = -(x_1-1)$ (1.32)	$\frac{dx_2}{dt} = -(x_1+1)$ (1.33)

Se ve que estos dos últimos sistemas son similares; entonces resolveremos sólo uno, el que ponemos a continuación, del cual se obtendrán facilmente las soluciones de los dos anteriores:

$$\begin{cases} \frac{dx_1}{dt} = x_2 \\ \frac{dx_2}{dt} = -x_1 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \frac{d^2x_2}{dt} = -\frac{dx_1}{dt} = -x_2$$

$$\Rightarrow \quad \frac{d^2x_2}{dt} + x_2 = 0$$

que es la misma ecuación que resolvimos antes para ψ_2.

$\Rightarrow$ su solución es:

$$x_2(t) = R \operatorname{sen}(t+\gamma) \qquad \text{con } R \geq 0$$

$$\Rightarrow \quad x_1(t) = -\frac{dx_2}{dt} = -R \cos(t+\gamma) \qquad (1.35)$$

$$\Rightarrow \quad x_1^2 + x_2^2 = R^2$$

o sea que las trayectorias son circunferencias con centro en el origen.

Analicemos ahora el sentido del movimiento sobre estas trayectorias y cual es el recorrido en un intervalo de longitud π, ya que π es lo que se mantiene el control u(t) en +1 ó en -1.

Tomemos $\quad 0 \leq t + \gamma \leq \pi$

$$\Rightarrow \quad -\gamma \leq t \leq \pi - \gamma$$

$\Rightarrow$ en las soluciones dadas por : (1.35):

si $t = -\gamma$, $\quad x_1 = -R \cos 0 = -R$

$$x_2 = R \operatorname{sen} 0 = 0$$

si $t=\pi - \gamma$, $x_1 = -R \cos(\pi-\gamma+\gamma) = R$

$x_2 = R \operatorname{sen}(\pi-\gamma+\gamma) = 0$

de forma que el sentido es el indicado en la fig. 11

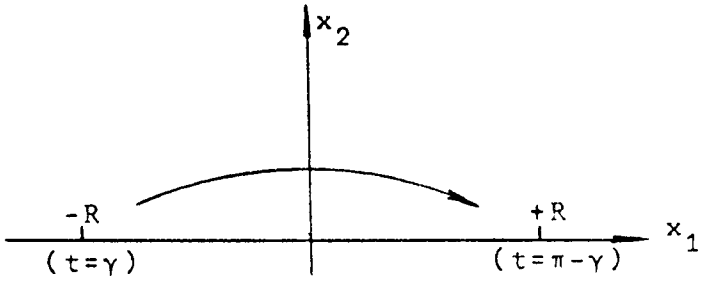


Fig. 11

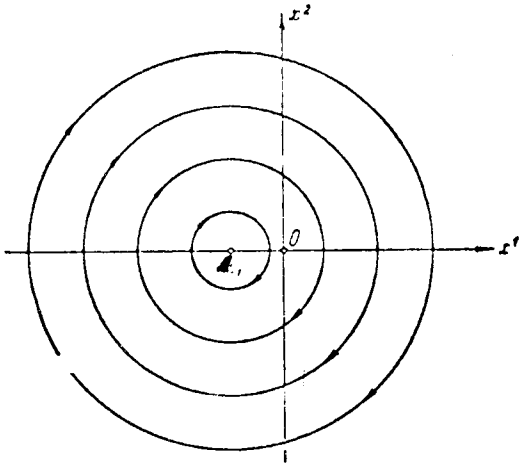
O sea que ya tenemos respuesta para las dos cuestiones formuladas arriba:

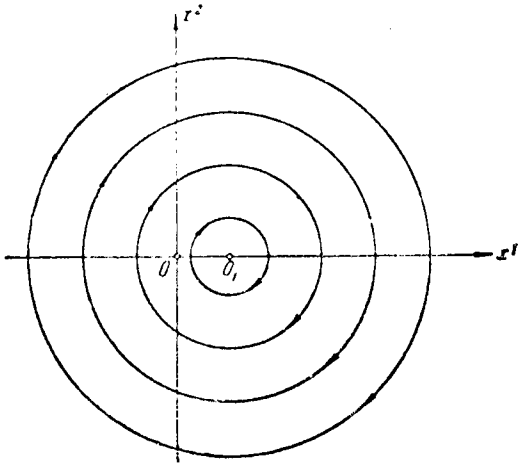
- el sentido de giro es el de las agujas del reloj
- cuando t recorre un intervalo de longitud π, el punto (x_1, x_2) recorre exactamente media circunf.

Con esto resolvemos el problema para el sistema (1.34). De (1.32) y (1.33) se ve que, si la solución de (1.34) da las trayectorias (1.35), las de (1.32) y (1.33) darán:

$$(x_1 - 1)^2 + x_2^2 = R^2 \qquad (1.36)$$

$$(x_1 + 1)^2 + x_2^2 = R^2 \qquad (1.37)$$





Construyamos ahora la trayectoria óptima correspondiente al control hallado.

Supongamos que el u(t) es el de la fig. 13

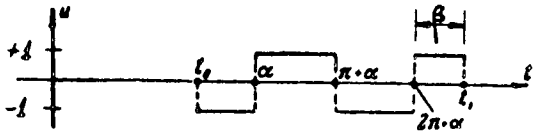


Fig. 13

esdecir,suponemos que durante el intervalo final de tiempo,de longitud $\beta < \pi$, $u(t) = 1$;entonces de acuerdo a lo anterior,el punto se estará moviendo en una trayectoria de centro (0,1)(fig.14) Como el estado final es el (0,0),la trayectoria tendrá radio 1 . El punto llega al origen moviéndose sobre esa circunferencia un arco menor que media vuelta,ya que $\beta < \pi$;por el sentido que tienen las trayectorias,llega al origen por abajo.
En resumen tenemos la trayectoria de la fig.14.

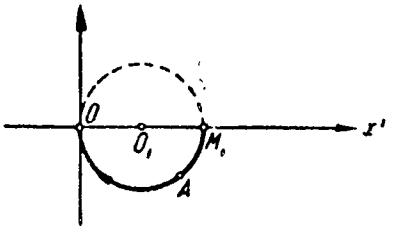


Fig. 14

Ahora,el punto alcanza A moviéndose durante un intervalo π , bajo la influencia de $u = -1$;o sea,el segmento de trayectoria que antecede al descripto es una media circunferencia BA con centro en (0,-1).Observemos que,como BA es media circunferencia,el punto B es simétrico a A con respecto al (0,-1) (fig 15).
Por lo tanto B se mueve,de acuerdo a la ubicación de A ,sobre la semicircunferencia N_1N_2.

Exactamente de la misma manera se construye el arco CB que precede a BA ,y que corresponde a un intervalo π en el que

u = +1,o sea,es una media circunferencia de centro (0,1).Igual que antes,C estará sobre M_2M_3 . (Fig. 16)

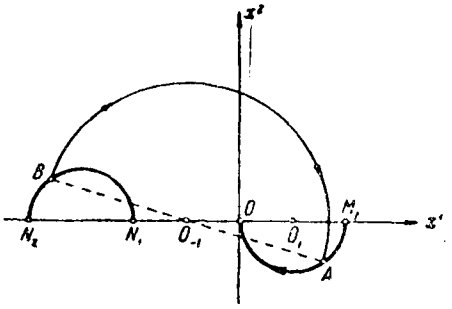


Fig. 15

Y así se sigue hacia atrás construyendo la trayectoria;el último tramo será un arco menor que media vuelta si $\alpha_o < \pi$.

Si el último tramo de la trayectoria,en lugar de corresponder a u = +1 como supusimos antes,corresponde a u+= -1,la trayectoria será la de la fig. 17.

Juntando los dos últimos dibujos (figs. 16 y 17),obtenemos el cuadro completo del comportamiento de las trayectorias en la fig 18

Vemos entonces que para cada condición inicial x_o ,hay solo una trayectoria óptima que lo transfiere al (0,0).

Construiremos ahora la función de síntesis:

$$v(x) = \begin{cases} +1 & \text{bajo la curva } ------M_3M_2M_1ON_1N_2N_3--------- \\ & \text{y en el arco } -------M_3M_2M_1O \\ -1 & \text{arriba de la curva } ----M_2M_1ON_1N_2------- \\ & \text{y en el arco } ON_1N_2N_3--------- \end{cases}$$

Entonces el control óptimo se obtiene con u(t) = v(x(t)) con lo que se cierra el lazo de realimentación.

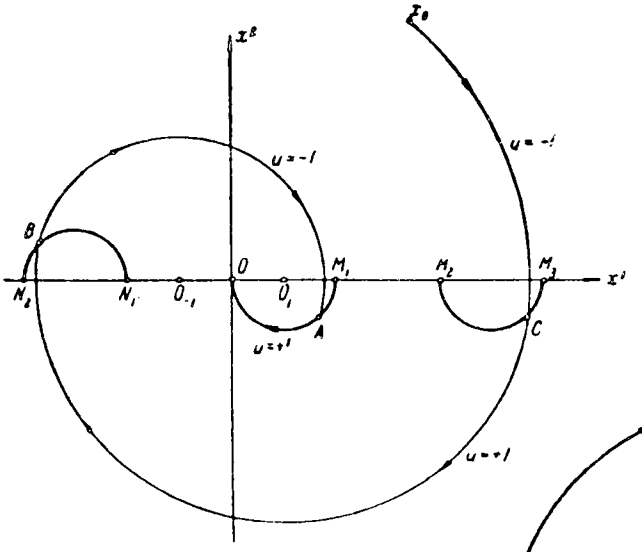


Fig 16

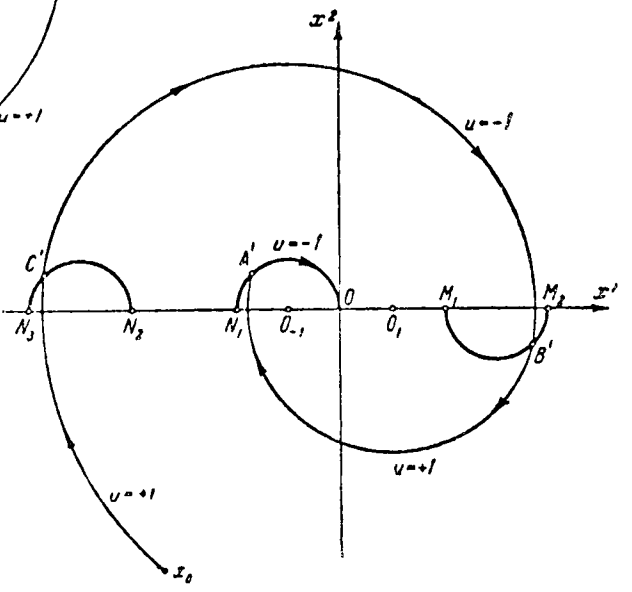


Fig. 17

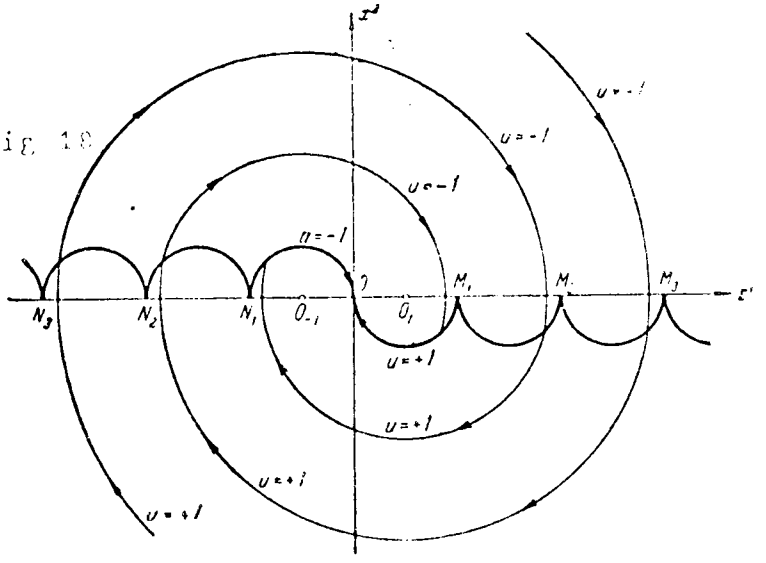


Fig 18

1.6 EJEMPLO 3

Analicemos el sistema siguiente con dos controles:

$$\dot{x}_1 = x_2 + u_1$$

$$\dot{x}_2 = -x_1 + u_2$$

con $|u_1| \leq 1$, $|u_2| \leq 1$.

El problema es trasladar un estado inicial al estado final $x_1 = 0$, $x_2 = 0$ en mínimo tiempo.

Planteemos el Hamiltoniano:

$$H = \psi_1(x_2 + u_1) + \psi_2(-x_1 + u_2)$$

$$= \psi_1 x_2 - \psi_2 x_1 + \psi_1 u_1 + \psi_2 u_2$$

el cual debe ser máximo como función de $u = (u_1, u_2)$, o sea, hay que maximizar ambos productos: $\psi_1 u_1$ y $\psi_2 u_2$

$$\Rightarrow \qquad u_1 = sg\ \psi_1$$

$$u_2 = sg\ \psi_2$$

El sistema auxiliar será:

$$\dot{\psi}_1 = \psi_2$$

$$\dot{\psi}_2 = -\psi_1$$

que es el mismo sistema que en el ejemplo 2. Por lo tanto su solución es:

$$\psi_2 = A\ sen(t + \alpha)$$

$$\psi_1 = -A\ \cos(t + \alpha) \qquad (A>0)$$

o también $\psi_1 = A \operatorname{sen}(t+\alpha)$

$\psi_2 = A \cos(t+\alpha)$

que también satisfacen el sistema y son las que tomamos.

Entonces

$$u_1 = sg\ \psi_1 = sg[\operatorname{sen}(t+\alpha)]$$

$$u_2 = sg\ \psi_2 = sg[\cos(t+\alpha)]$$

Ø sea que u_1 y u_2 son funciones seccionalmente constantes que valen +1 ó -1 y cambian cada π.

De manera que las combinaciones posibles son:

$u_1 = 1 \qquad u_2 = 1$

$u_1 = 1 \qquad u_2 = -1$

$u_1 = -1 \qquad u_2 = -1$

$u_1 = -1 \qquad u_2 = 1$

Veamos que trayectorias le corresponden a cada par:

1º) $u_1 = 1 \qquad u_2 = 1$

De las ecuaciones del sistema:

$$\frac{dx_2}{dx_1} = \frac{-x_1 + 1}{x_2 + 1}$$

entonces

$$(x_2 + 1)dx_2 = (-x_1 + 1)dx_1$$

$$\frac{x_2^2}{2} + x_2 + k_1 = -\frac{x_1^2}{2} + x_1 + k_2$$

entonces $x_2^2 + x_1^2 + 2x_2 - 2x_1 = K$

o sea, circunferencias con centro en (1,-1)

2º) $u_1 = -1 \qquad u_2 = 1.$

Así $$\frac{dx_2}{dx_1}x = \frac{-x_1 + 1}{x_2 - 1}$$

ENTONCES $$(x_2 - 1)dx_2 = (-x_1 + 1)dx_1$$

$$\frac{x_2^2}{2} - x_2 + k_1 = -\frac{x_1^2}{2} + x_1 + k_2$$

$$x_2^2 + x_1^2 - 2x_2 - 2x_1 = K$$

circunferencias con centro en (1,1).

3º) $u_1 = -1 \qquad u_2 = -1$

$$\frac{dx_2}{dx_1} = \frac{-x_1 - 1}{x_2 - 1}$$

$$(x_2 - 1)dx_2 = (-x_1 - 1)dx_1$$

$$\frac{x_2^2}{2} - x_2 + k_1 = -\frac{x_1^2}{2} + x_1 + k_2$$

$$x_2^2 + x_1^2 - 2x_2 + 2x_1 = K$$

circunferencias con centro en (-1,1)

4º) $u_1 = 1 \qquad u_2 = -1$

$$\frac{dx_2}{dx_1} = \frac{-x_1 - 1}{x_2 + 1}$$

$$\Rightarrow \quad (x_2 + 1)dx_2 = (-x_1 - 1)dx_1$$

$$\Rightarrow \quad \frac{x_2^2}{2} + x_2 + k_1 = -\frac{x_1^2}{2} - x_1 + k_2$$

$$x_2^2 + x_1^2 + 2x_2 + 2x_1 = K$$

centro en $(-1,-1)$

En resumen:

VALORES DE u		CENTRO DE LAS TRAYECTORIAS (CIRCUNF.)
$u_1=1$	$u_2=1$	$O_1 = (1,-1)$
$u_1=-1$	$u_2=1$	$O_2 = (1, 1)$
$u_1=-1$	$u_2=-1$	$O_3 = (-1,1)$
$u_1=1$	$u_2=-1$	$O_4 = (-1,-1)$

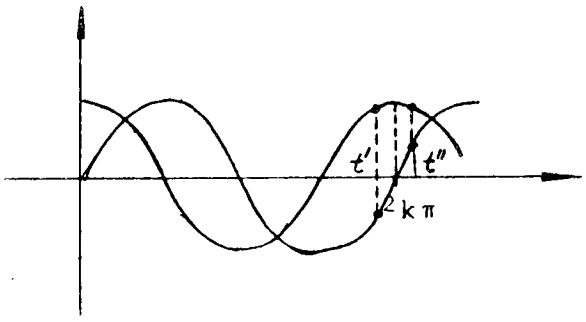
Por la expresión de u_1 y u_2 vemos que cada intervalo de longitud $\frac{\pi}{2}$ alguno de los dos cambia;

o sea cuando $t+\alpha = k\frac{\pi}{2}$ cambia u_1 ó u_2 y entonces cambia el centro O_i de las trayectorias.

Veamos en que orden cambia los O_i :

supongamos que $t+\alpha = 2k\pi$ (con algún k)

$$\Rightarrow \quad \operatorname{sen}(t+\alpha) = 0 \quad , \quad \cos(t+\alpha)=1$$



=> en un instante antes (t') vale

$$u_1=-1 \qquad u_2=1$$

o sea que en el intervalo de tiempo de longitud $\frac{\pi}{2}$ anterior a $2k\pi$, el movimiento tiene centro en $O_2=(1,1)$.

En un instante posterior a $2k\pi$, t", vemos que es

$$u_1=1 \qquad u_2=1$$

Entonces, en el intervalo de longitud $\frac{\pi}{2}$ posterior a $2k\pi$, el centro es $O_1=(1,-1)$.

Así, el sentido es el indicado en la figura 19.

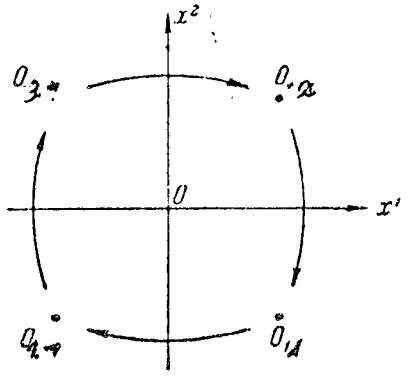


Fig 19

Veamos ahora cuanto es el recorrido hecho sobre una trayectoria

en un intervalo de tiempo de longitud $\frac{\pi}{2}$, o sea, antes de que el control y por consiguiente el centro, cambien; además necesitamos también el sentido en que se hace el movimiento.

Observemos que para ello basta estudiar un solo sistema de ecuaciones pues todos se reducen a él por traslaciones:

$$\dot{x}_1 = x_2 + 1 \qquad \dot{x}_1 = x_2 + 1$$
$$\dot{x}_2 = -x_1 + 1 = -(x_1 - 1) \qquad \dot{x}_2 = -x_1 - 1 = -(x_1 + 1)$$

$$\dot{x}_1 = x_2 - 1 \qquad \dot{x}_1 = x_2 - 1$$
$$\dot{x}_2 = -x_1 + 1 = -(x_1 - 1) \qquad \dot{x}_2 = -x_1 - 1 = -(x_1 - 1)$$

o sea que estudiaremos

$$\dot{x}_1 = x_2$$
$$\dot{x}_2 = -x_1$$

Como en el ejemplo 2, tenemos:

$$x_2 = R \operatorname{sen}(t+\gamma)$$
$$x_1 = -R \cos(t+\gamma)$$

Si $t+\gamma = 0 \Rightarrow x_1 = -R,\ x_2 = 0$

Si $t+\gamma = \frac{\pi}{2} \Rightarrow x_1 = 0,\ x_2 = R$

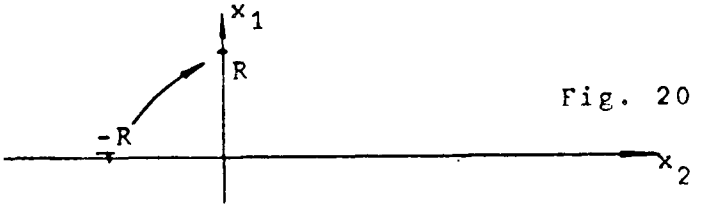


Fig. 20

(Ese es el sentido pues en $[0,\pi]$ el seno es creciente => x_2 lo es, y el cos es decreciente => x_1 lo es).

En resumen, la respuesta a la cuestión es:

en un intervalo de tiempo de longitud $\frac{\pi}{2}$, el movimiento es 1/4 de circunferencia en el sentido de las agujas del reloj.

De las familias de circunferencias con origen en O_1, O_2, O_3, O_4 sólo hay una de cada una que termina en (0,0).

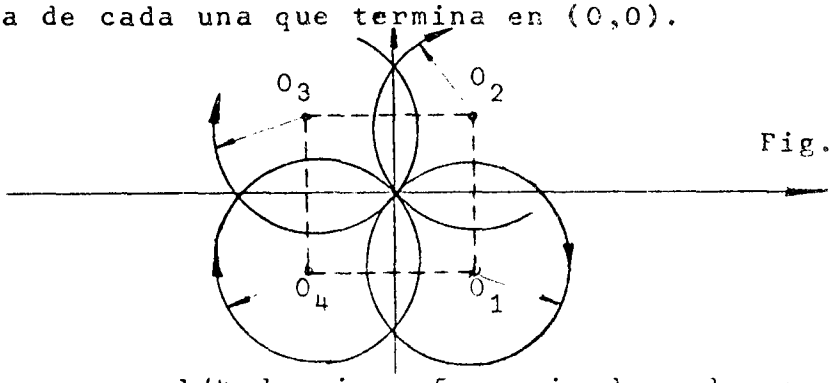


Fig. 21

Observemos que 1/4 de circunferencia de cada una que llegue al origen hace que quede lo indicado en la Fig. 22.

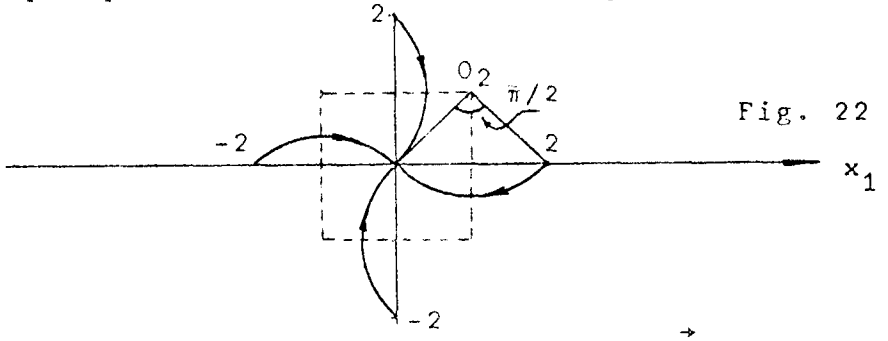


Fig. 22

Miremos la de centro en O_2: corta al eje $\vec{x}_1$ en 0 y en 2 => el ángulo marcado es $\frac{\pi}{2}$.

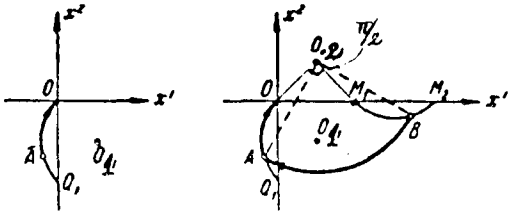
Lo mismo con las otras.

Supongamos que los valores $u_1=1$ son los últimos en ser tomados.

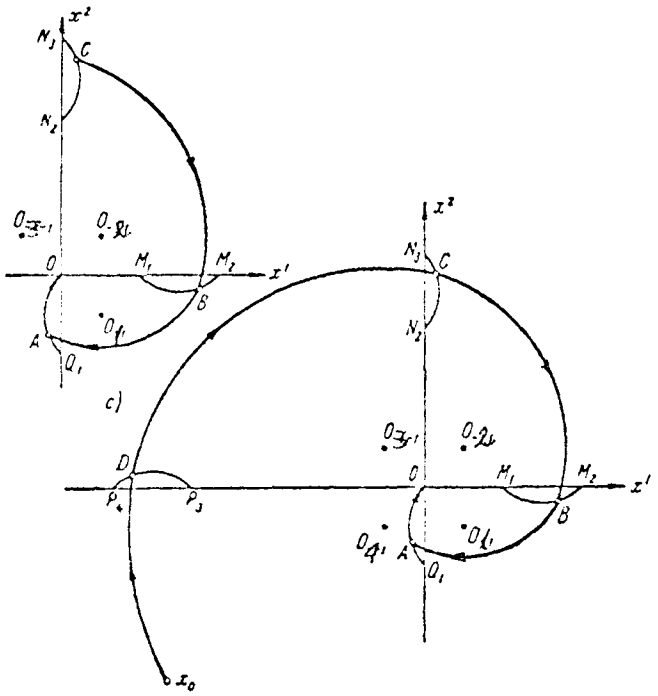
=> corresponderá un arco AO sobre la circunferencia de centro O_1 (ver Fig. 23).

Pero vimos que O_1 está precedido por O_2 => el tramo de trayectoria anterior al AO (llamémosle BA) tendrá centro en O_2 y en un

intervalo de tiempo de longitud $\frac{\pi}{2}$ recorrerá 1/4 de circunferencia => como A ε Q_1O => B estará sobre el arco obtenido por rotación en un ángulo $\frac{\pi}{2}$ (1/4 de circunferencia) con centro en O_2 (Ver fig. 24)



Ahora, el O_2 está precedido por O_3 y éste por O_4; por lo mismo que arriba tendremos:

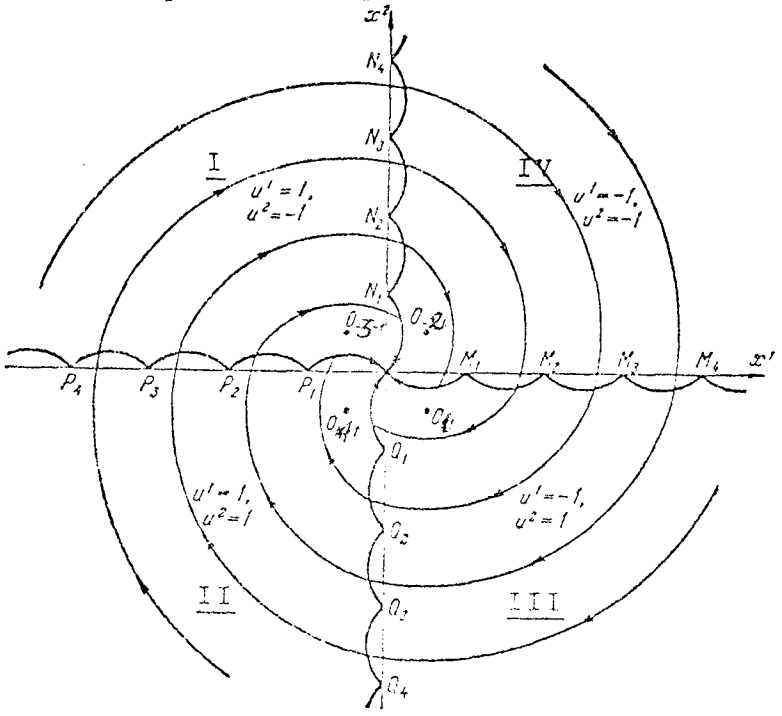


Analogamente si hubiera finalizado por cualquiera de los otros 3 tramos que quedan.

Cualquiera de ellas se puede obtener rotando en $\frac{\pi}{2}$ una de las halladas como las del dibujo. (Fig. 26).

Observemos que las curvas

OM_1M_2-----, OQ_1Q_2-----, OP_1P_2-----, ON_1N_2----- dividen al plano en 4 partes (Fig. 26).



ZONA I: Trayectorias con centro en O_3

o sea $u_1=1$ $u_2=-1$

ZONA II: Trayectoria con centro en O_4

=> $u_1=+1$ $u_2=1$

ZONA III: Trayectorias con centro en O_1

$\Rightarrow$ $u_1=-1$ $\quad u_2=+1$

ZONA IV : Trayectorias con centro en O_2

$\Rightarrow$ $u_1=-1$ $\quad u_2=-1$

Además, observemos:

sobre OQ_1Q_2,----- $\quad u_1=1$

sobre ON_1N_2,----- $\quad u_1=-1$

sobre OM_1M_2,----- $\quad u_2=1$

sobre OP_1P_2,----- $\quad u_2=-1$

$\Rightarrow$ definimos las siguientes funciones

$$v_1,\ v_2:\ R^2 \longrightarrow U$$

$$v_1(x_1,x_2) = \begin{cases} 1 & \text{en I U II U } (OO_1O_2\text{-----}) \\ -1 & \text{en III U IV U } (ON_1N_2\text{-----}) \end{cases}$$

$$v_2(x_1,x_2) = \begin{cases} 1 \text{ en II U III U } (OM_1M_2\text{-----}) \\ -1 \text{ en I U IV U } (OP_1P_2\text{-----}) \end{cases}$$

Con esas funciones el control óptimo $u(t)=(u_1(t),u_2(t))$ se pone en función del estado x_1 x_2:

$$u_1(t) = v_1[x_1(t),\ x_2(t)]$$

$$u_2(t) = v_2[x_1(t), x_2(t)]$$

=> las soluciones del sistema

$$\frac{dx_1}{dt} = x_2 + v_1(x_1 x_2)$$

$$\frac{dx_2}{dt} = -x_1 + v_2(x_1 x_2)$$

con cualquier condición inicial x^o, da la trayectoria óptima que conduce al origen.

1.7 EJEMPLO 4

Consideraremos un cohete en movimiento rectilíneo con constante fuerza propulsora P.

Supondremos que las fuerzas exteriores actuantes son nulas.

Llamaremos u a la aceleración debida al empuje, por definición, igual a $\frac{T}{m}$ donde T empuje y m masa.

Si asumimos que el empuje es una función lineal de la variación de masa $T = -c\dot{m}$

y llamamos $\dot{m} = -\beta$, resulta $T = \beta c$

$$\Rightarrow \quad u = \frac{\beta c}{m}$$

Las ecuaciones del movimiento son:

$$\dot{x}_1 = u \qquad (x_1 \text{ velocidad})$$
$$\dot{m} = -\beta$$

Si P es la fuerza propulsora, $P \triangleq \frac{1}{2} \beta c^2$; introducimos una nueva variable:

$$x_2 = \frac{2P}{m}$$

$$\Rightarrow \quad \dot{x}_2 = -\frac{2P}{m^2}\dot{m} = \frac{2P\beta}{m^2} = \frac{\beta c^2 \beta}{m^2} = \frac{\beta^2 c^2}{m^2} = u^2$$

con lo cual el sistema queda:

$$\dot{x}_1 = u$$
$$\dot{x}_2 = u^2$$

(La variable x_2 es inversamente proporcional a la masa).

Tomamos como control a la aceleración u con la acotación $|u| \leq 1$.

Nuestro problema será el siguiente:

> Dado un estado inicial $(x_1^o\ x_2^o)$ llegar a un estado preestablecido (x_1^1, x_2^1) en mínimo tiempo. O sea, dadas una velocidad y una masa iniciales, buscamos alcanzar una dada velocidad con un gasto de consumo establecido, en mínimo tiempo.

Como el problema es de tiempo mínimo el Hamiltoniano es:

$$H = \psi_1 u + \psi_2 u^2$$

y de allí,

$$\frac{d\psi_1}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial x_1} = 0 \qquad \Rightarrow \qquad \psi_1 = cte.$$

$$\frac{d\psi_2}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial x_2} = 0 \qquad \Rightarrow \qquad \psi_2 = cte.$$

Buscamos el máximo de H como función de u sabiendo que ψ_1 y ψ_2 son ctes. y que $|u| \leq 1$.

Tomando H como función de u:

a) Investiguemos la existencia de máximo en (-1,1)

$$H' = \psi_1 + 2\psi_2 u = 0$$

$$\Rightarrow \quad u = -\frac{\psi_1}{2\psi_2}$$

$$H'' = 2\psi_2 < 0$$

Luego tendremos máximo si

$$\left| -\frac{\psi_1}{2\psi_2} \right| < 1 \qquad y \qquad \psi_2 < 0$$

b) Si lo anterior no se verifica tendremos que buscar el máximo en los extremos de $[-1,1]$.

Analicemos $H = \psi_1 u + \psi_2 u^2$ en todas sus posibilidades

i) Si $\psi_1 > 0, \psi_2 > 0$ $\Rightarrow$ $u = 1$

ii) Si $\psi_1 = 0, \psi_2 > 0$ $\Rightarrow$ $u = 1$ ó $u = -1$

iii) Si $\psi_1<0$, $\psi_2>0$ => u=-1

iv) Si $\psi_1>0$, $\psi_2=0$ => u=1

v) Si $\psi_1=0$, $\psi_2=0$ => No se aplica el Teorema de Pontryagin

vi) Si $\psi_1<0$, $\psi_2=0$ => u=-1

vii) Si $\psi_1>0$, $\psi_2<0$ => u=1

viii) Si $\psi_1=0$, $\psi_2<0$ => u=0

ix) Si $\psi_1<0$, $\psi_2<0$ => u=-1

Los tres últimos son válidos en el caso en que no se cumpla la parte a). O sea que suponemos que no se alcanza el máximo en (-1,1). Veamos a los tres más detalladamente.

vii) si u=-1 , $H=-\psi_1+\psi_2$

si u=1 , $H=\psi_1+\psi_2$

Como $\psi_1>0$ y $\psi_2<0$ => $\psi_1+\psi_2>-\psi_1+\psi_2$

=> u=1

viii) Como ahora $H=\psi_2 u^2$ y $\psi_2<0$, => $H\leq 0$ para todo u

=> el máximo es H=0 con u=0

ix) Si $\psi_1<0$, $\psi_2<0$ $\Rightarrow$ $\underbrace{\psi_1 + \psi_2}_{\text{con } u=1} < \underbrace{-\psi_1 + \psi_2}_{\text{con } u=-1}$

$\Rightarrow$ $u=-1$

Resumiendo todo lo anterior tenemos:

1) $\psi_1>0$, $\psi_2 \geq 0$: $u=1$

2) $\psi_1=0$, $\psi_2>0$: $u=1$ ó $u=-1$ indistintamente ó alternativamente

3) $\psi_1<0$, $\psi_2 \geq 0$: $u=-1$

4) $\psi_1>0$, $\psi_2 \leq 0$: $\begin{cases} u=-\frac{\psi_1}{2\psi_2} & \text{si } \left|-\frac{\psi_1}{2\psi_2}\right|<1 \text{ y } \psi_2 \neq 0 \\ u=1 & \text{en otro caso} \end{cases}$

5) $\psi_1=0$, $\psi_2<0$: $u=0$

6) $\psi_1<0$, $\psi_2 \leq 0$: $\begin{cases} u=-\frac{\psi_1}{2\psi_2} & \text{si } \left|-\frac{\psi_1}{2\psi_2}\right|<1 \text{ y } \psi_2 \neq 0 \\ u=-1 & \text{en otro caso} \end{cases}$

El caso 5) lo excluímos ya que si $u=0$, el estado inicial es igual al final.

Las condiciones anteriores son excluyentes, sólo puede valer una. Así podemos agrupar los controles en 2 clases:

I) $|u(t)|=+1$ (saltando de +1 a -1 y viceversa)

II) $u(t) \equiv$ cte.(donde se incluye $u\equiv 1, u\equiv -1, u\equiv -\frac{\psi_1}{2\psi_2}$)

Veamos ahora cuales son las trayectorias correspondientes en el espacio de estados (x_1, x_2)

I) $u=1$

$$\dot{x}_1=1 \quad \Rightarrow \quad x_1=t+k_1$$

$$\dot{x}_2=1 \quad \Rightarrow \quad x_2=t+k_2$$

$$\Rightarrow \quad x_2=x_1+k \qquad \text{(rectas de pendiente 1)}$$

II) $u=-1$ $\quad \dot{x}_1=-1 \quad \Rightarrow \quad x_1=-t+k_1$

$$\dot{x}_2=1 \quad \Rightarrow \quad x_2=t+k_2$$

$$\Rightarrow \quad x_2=-x_1+k \qquad \text{(rectas de pendiente -1)}$$

III) $u = \text{cte} = -\frac{1}{2}\frac{\psi_1}{\psi_2} \triangleq \lambda \quad \text{con } |\lambda|<1$

i) Si $\psi_1<0$, $\psi_2<0 \quad \Rightarrow \quad \lambda<0$

$$\Rightarrow \quad \dot{x}_1=\lambda \quad x_1=\lambda t+k_1 \quad \Rightarrow \quad t=\frac{x_1-k_1}{\lambda}$$

$$\dot{x}_2=\lambda^2 \quad x_2=\lambda^2 t+k_2$$

$$\Rightarrow x_2 = \lambda^2 \frac{x_1 - k_1}{\lambda} + k$$

$$\Rightarrow \quad x_2 = \lambda x_1 + k \qquad \text{(rectas de pendiente } -1<\lambda<0\text{)}$$

ii) Si $\psi_1>0$, $\psi_2<0 \Rightarrow \lambda>0$

$$\Rightarrow \quad x_2 = \lambda x_1 + k \qquad \text{(rectas de pendiente } 0<\lambda<1\text{)}$$

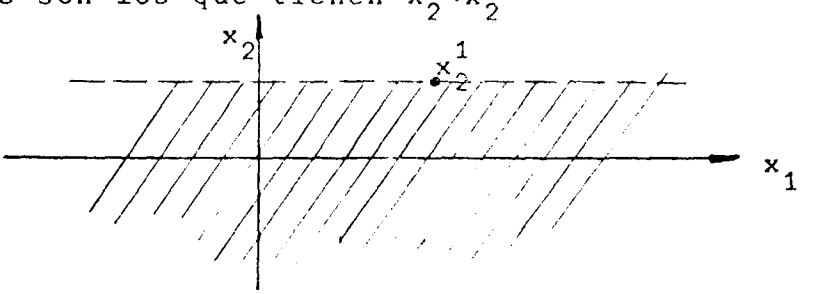
Veamos ahora como el mismo problema interviene sobre las trayectorias:

El sistema era: $\begin{cases} \dot{x}_1 = u \\ \dot{x}_2 = u^2 \end{cases}$

De la 2^a, como ya excluímos u=0, tenemos:

$$\frac{dx_2}{dt} > 0$$

o sea que x_2 es función creciente de t. Así, dado un estado final x_2^1 (con cualquier x_1^1) los puntos iniciales desde donde se puede alcanzarlos son los que tienen $x_2 < x_2^1$



o sea, el semiplano dibujado

Además tenemos:

$$\frac{dx_2}{dx_1} = \frac{\dot{x}_2}{\dot{x}_1} = \frac{u^2}{u} = u \qquad \underline{u \neq 0}$$

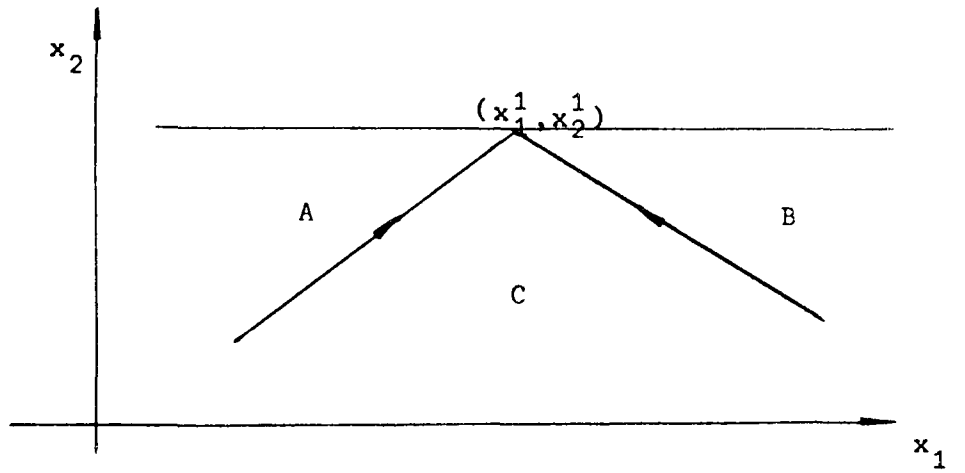
$$\Rightarrow \quad \text{como } |u| \leq 1 \quad y \quad u \neq 0,$$

$$0 < \frac{dx_2}{dx_1} \leq 1$$

$$-1 \leq \frac{dx_2}{dx_1} < 0$$

es decir, que las trayectorias del sistema tienen las derivadas acotadas como arriba, en todo punto. (Locual está de acuerdo con lo anterior).

Las dos conclusiones anteriores nos dicen que dado cualquier estado final (x_1^1, x_2^1) debemos sólo considerar el semiplano inferior $x_2 < x_2^1$ ya que desde allí solamente se lo puede alcanzar, y además que éste plano queda dividido en 3 sectores:



En A : $0 < \frac{dx_2}{dx_1} \leq 1$

En B : $-1 \leq \frac{dx_2}{dx_1} < 0$

(El sentido está dado por el hecho de ser $\dot{x}_2 > 0$)

1°) Supongamos que nuestro estado inicial está en A. De las trayectorias extremales halladas, las <u>únicas</u> que sirven ahora son las del tipo IIIii), o sea, de pendiente λ entre 0 y 1. Es decir, el control que hay que aplicar es:

$$u = \lambda$$

Pero la pendiente de la recta queda ahora bien determinada:

$$\lambda = \frac{x_2^1 - x_2^o}{x_1^1 - x_1^o}$$

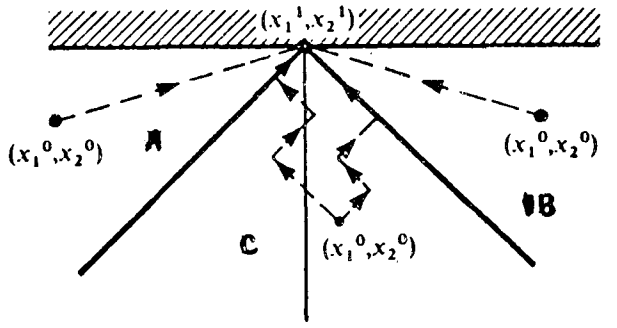
$\Rightarrow$ para llegar al estado final con mínimo tiempo hay que usar:

$$u = \frac{x_2^1 - x_2^o}{x_1^1 - x_1^o}$$

2°) Lo mismo desde B:
usamos extremales del tipo III i) con $-1 < \lambda < 0$
y resulta:

$$u = \frac{x_2^1 - x_2^o}{x_1^1 - x_1^o}$$

3°) Desde C también se puede alcanzar el estado final, ya que está en el semiplano inferior.
En la clasificación que teníamos de controles extremales teníamos: u=cte ó u=+1 y -1 alternativamente.
Lo 1° ya no sirve pues no se puede ir por una recta de pendiente λ, $|\lambda|>1$; => para ir desde C al estado final, habrá que utilizar u=+1 ó -1 en tramos.



Pero vemos que ahora no está univocamente determinado el control a usar :

El tiempo en que se hace la transferencia es:

$$t_1 - t_o = \int_{t_o}^{t_1} dt$$

Como $\frac{dx2}{dt} = u^2$ => $dt = \frac{dx2}{u^2}$

Cuando $t=t_o$ $x_2=x_2^o$

$t=t_1$ $x_2=x_2^1$

$$\Rightarrow \int_{t_o}^{t_1} dt = \int_{x_2^o}^{x_2^1} \frac{dx_2}{u^2} = x_2^1 - x_2^o$$

ya que $u^2 = 1$

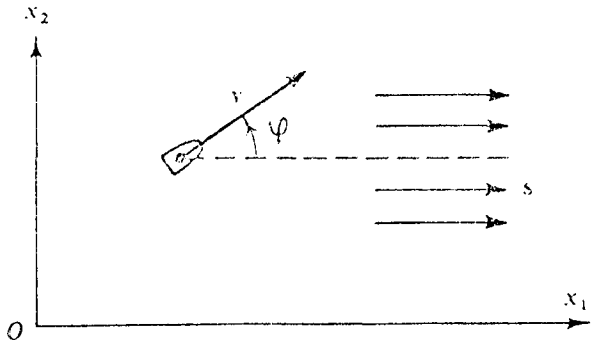
Entonces cualquiera sea el camino por el que vayamos a (x_1^1, x_2^1) el tiempo será el mismo. Osea que cualquiera sea la sucesión u=+1 u=-1 que tomemos, se tarda lo mismo.

De manera que desde puntos iniciales en C, no hay unicidad de control óptimo.

1.8 EJEMPLO 5

Problema de tiempo óptimo en navegación.
Consideraremos un barco que se mueve con velocidad v de magnitud constantemente igual a 1 en una corriente con vector velocidad constantemente igual a S.

Los ejes x_1, x_2 nos dan la posición del barco en cada momento y los tomamos paralelo y normal respectivamente a la corriente S.



Sean v_1, v_2 los componentes del vector v en las direcciones x_1, x_2 ; haciendo $v=(v_1, v_2) = (\dot{x}_1, \dot{x}_2)$, resulta

$$\dot{x}_1 = S + v\cos\phi$$
$$\dot{x}_2 = v \operatorname{sen}\phi$$

y como v=1,

$$\dot{x}_1 = S + \cos\phi$$
$$\dot{x}_2 = \operatorname{sen}\phi$$

Nuestro problema es: dada una posición inicial y una posición final, pasar de una a otra en mínimo tiempo.

Debemos, para eso, manejar la posición del vector v en cada momento, por lo cual tomaremos como control las siguientes funciones:

$$u_1 = \cos\phi$$
$$u_2 = \operatorname{sen}\phi$$

con la restricción evidente: $u_1^2 + u_2^2 = 1$

La razón para tomar dos controles en vez de tomar $u_1 = u$ $u_2 = \sqrt{1-u^2}$ para que quede uno solo radica en que teniendo dos, el Hamiltoniano es más fácil de maximizar como se verá; nuestro sistema es ahora:

$$\dot{x}_1 = S + u_1$$

$$\dot{x}_2 = u_2$$

$$\Rightarrow H = \psi_1(s+u_1) + \psi_2 u_2 = \psi_1 s + \psi_1 u_1 + \psi_2 u_2$$

por lo que basta tener en cuenta $\psi_1 u_1 + \psi_2 u_2$

Pero si llamamos $\psi = (\psi_1, \psi_2)$

$u = (u_1, u_2)$

resulta que $\psi_1 u_1 + \psi_2 u_2 = \langle \psi, u \rangle$

que será máximo cuando ψ y u son colineales, o sea,

$$\frac{u}{|u|} = \frac{\psi}{|\psi|}$$

Como $|u| = 1$

$$u_1 = \frac{\psi_1}{\sqrt{\psi_1^2 + \psi_2^2}}$$

$$u_2 = \frac{\psi_2}{\sqrt{\psi_1^2 + \psi_1^2}}$$

Veamos que son ψ_1, ψ_2:

$$\frac{d\psi_1}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial x_1} = 0 \qquad \Rightarrow \psi_1 = cte$$

$$\frac{d\psi_2}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial x_2} = 0 \qquad \Rightarrow \psi_2 = cte$$

$\Rightarrow$ u_1 y u_2 son ctes.

o sea que el ángulo ϕ es constante.

=> el vector v es constante (como vector ahora, no sólo en magnitud); como s también es constante resulta que en todo punto la suma s+v es cte.

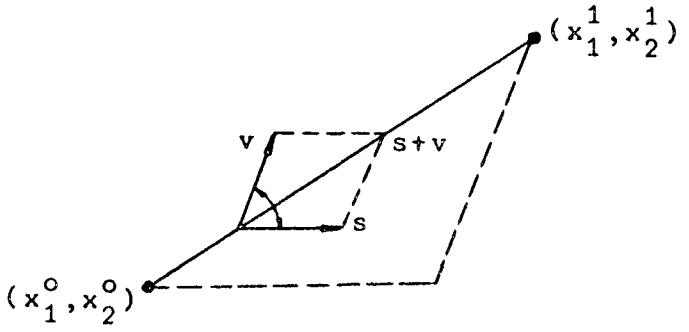
Y de allí vemos que las trayectorias extremales son rectilíneas:

En efecto

$$\dot{x}_1 = cte$$

$$\dot{x}_2 = cte$$

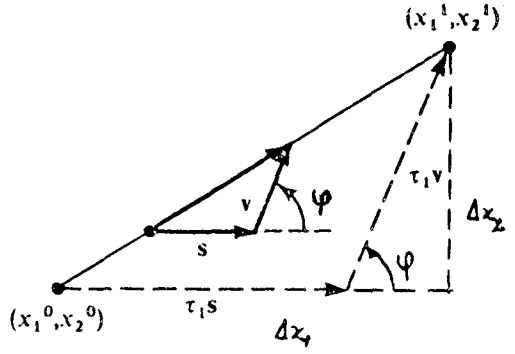
Tomando u_1 y u_2 ctes.



Observemos ahora, que como la velocidad de nuestro barco es v=1, si la velocidad de la corriente, s, supera a 1, no podemos alcanzar puntos que están atrás de nuestro estado inicial. Es decir, que de la velocidad s depende el conjunto de puntos desde los cuales se puede alcanzar un estado final dado.

A continuación determinaremos rigurosamente que región de puntos iniciales es admisible en cada caso, y determinaremos el control óptimo en cada una de esas regiones.

Como tenemos visto que las trayectorias extremales son rectilíneas, averiguaremos ahora, cual es el tiempo de transición sobre ellas.



Es decir, si τ_1 es el tiempo de transición entre los dos estados, resulta que $\tau_1.s$ es el espacio recorrido según la componente s en el tiempo τ_1, y $\tau_1.$ v el recorrido según v en τ_1; (s y v eran constantes).

Ahora,
$$u_1 = \cos \phi = \frac{\Delta x_1 - \tau_1 s}{\tau_1 v}$$

$$u_2 = \text{sen } \phi = \frac{\Delta x_2}{\tau_1 v}$$

Como v=1,
$$u_1 = \frac{\Delta x_1 - \tau_1 s}{\tau_1} \qquad (1)$$

$$u_2 = \frac{\Delta x_2}{\tau_1}$$

Como $u_1^2 + u_2^2 = 1$, resulta

$$\left(\frac{\Delta x_2}{\tau_1}\right)^2 + \left(\frac{\Delta x_1 - \tau_1 s}{\tau_1}\right)^2 = 1$$

$$\Rightarrow \quad (1-s^2)\tau_1^2 + 2\Delta x_1 s \tau_1 - [\Delta^2 x_1 + \Delta^2 x_2] = 0 \qquad (2)$$

Distinguimos ahora 3 casos:

1°) $S<1$

Resolviendo (2) nos queda:

$$\tau_1 = \frac{-2\Delta x_1 s \pm \sqrt{4\Delta x_1^2 s^2 + 4(1-s^2)[\Delta^2 x_1 + \Delta^2 x_2]}}{2(1-s^2)}$$

Vamos a demostrar que no podemos tomar el signo menos de la raiz.

Observemos antes que:

i) Consideramos $0<s$: basta eso ya que si no fuera así, el problema sería el mismo, pero con la corriente s al revés.

ii) Δx_1 puede ser >0 ó <0.

Tenemos:

$$\tau_1 = \frac{-\Delta x_1 s \pm \sqrt{\Delta^2 x_1 + \Delta^2 x_2 - s^2 \Delta^2 x_2}}{1-s^2}$$

Si $\Delta x_1 > 0 \Rightarrow -\Delta x_1 . s < 0$ y como el denominador $1-s^2 > o$, vemos que no se puede tomar la raiz con signo menos, pues quedaría el numerador negativo lo cual daría $\tau_1 < 0$, absurdo.

Si $\Delta x_1 < 0$, resulta $-\Delta x_1 . s > o$. Ahora para ver que el signo menos no sirve hay que probar que $-\sqrt{\Delta^2 x_1 + \Delta^2 x_2 - s^2 \Delta^2 x_2}$ es suficiente para que, al ser sumado a $-\Delta x_1 . s$ (que es $>o$) dé un resultado negativo, lo cual es absurdo.

O sea que hay que ver que:

$$\Delta x_1 . s < \sqrt{\Delta^2 x_1 + \Delta^2 x_2 [1-s^2]}$$

En efecto, como $1-s^2>0$,

$$\sqrt{\Delta^2 x_1 + \Delta^2 x_2 [1-s^2]} > \sqrt{\Delta^2 x_1} = \Delta x_1$$

y como $s<1$, $\Delta x_1 > \Delta x_1 . s$ de donde sale lo que queremos.

Con esto tenemos demostrado que el signo menos delante de la raíz no nos sirve porque con él llegamos al absurdo $\tau_1 < 0$.

$$\Rightarrow \tau_1 = \frac{-\Delta x_1 s + \sqrt{\Delta^2 x_1 + \Delta^2 x_2 - s^2 \Delta^2 x_2}}{1-s^2}$$

O sea que dados dos estados cualesquiera, siempre se puede calcular y da un resultado único.

Con esto sabemos que dados dos puntos cualesquiera hay un control que produce una trayectoria rectilínea que va de uno a otro: por (1) tenemos los controles puestos en función de $\underline{\Delta x_1}$, $\underline{\Delta x_2}$, y τ_1 y con lo anterior, τ_1 en función de $\underline{\Delta x_1}$, $\underline{\Delta x_2}$, y $\underline{s}$, pero de tal manera que sabemos que existe τ_1 real para todo x_1, x_2, y que es único.

Con eso quedan bien determinados u_1 y u_2; o sea en forma única. Así, por ser maximales resultan óptimos.

2°) $s=1$

$\Rightarrow$ (2) se reduce a

$$2\Delta x_1 \tau_1 - \Delta^2 x_1 - \Delta^2 x_2 = 0$$

$$\Rightarrow \quad \tau_1 = \frac{\Delta^2 x_1 + \Delta^2 x_2}{2\Delta x_1}$$

Como debe ser $0 \leq \tau_1 < \infty$, $\Rightarrow \Delta x_1 > 0$.

O sea, que, dado el estado final (x_1^1, x_2^1) sólo se lo puede alcanzar desde el semiplano abierto determinado por:

$$x_1 < x_1^1$$

Como antes, para cada posición inicial y final fijas, queda determinado τ_1 y con eso, de (1), u_1 y u_2 en forma única.

Como eran extremales, resultan óptimos.

El tiempo en que se hace la transición óptima es τ_1.

3°) $s>1$

Volviendo a (2) tenemos que su solución es:

$$\tau_1 = \frac{-\Delta x_1 s \pm \sqrt{\Delta^2 x_1 + \Delta^2 x_2 - s^2 \Delta x_2^2}}{1-s^2}$$

$$= \frac{\Delta x_1 s \pm \sqrt{\Delta^2 x_1 + \Delta^2 x_2 - s^2 \Delta^2 x_2}}{s^2 - 1}$$

así el denominador es >0

Vamos a demostrar que los dos signos de la raiz son útiles.

Observemos que en éste caso $\Delta x_1 > 0$; no puede ser menor porque cono $s>1$ y $v=1$ no se puede avanzar contra la corriente.

$\Rightarrow \Delta x_1 . s > 0$, con lo cual el signo de τ_1 dependerá sólo de si $\sqrt{\Delta^2 x_1 + \Delta^2 x_2 - s^2 \Delta^2 x_2}$ es más grande o no que $\Delta x_1 . s$ (por supuesto siempre que $\Delta^2 x_1 + \Delta^2 x_2 - s^2 \Delta^2 x_2 \geq 0$).

Veamos que:

$$\Delta x_1 \; s > \sqrt{\Delta^2 x_1 + \Delta^2 x_2 (1-s^2)}$$

En efecto:

$$\sqrt{\Delta^2 x_1 + \Delta^2 x_2 (1-s^2)} \quad < \quad \sqrt{\Delta^2 x_1} = \Delta x_1 \quad < \Delta x_1 . s$$

pues $s>1$

tal como queríamos ver para que sirva el signo menos. Por supuesto con el + no hay problema ya que da todo positivo.

Entonces con ambos signos $\tau_1 \geq 0$; o sea, los dos tienen sentido.

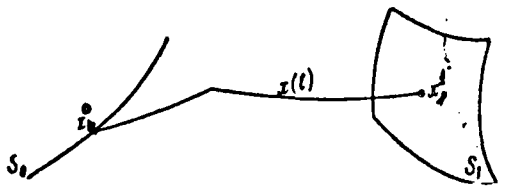
Pero es claro que el tiempo mínimo se obtendrá con el signo - antes de la raiz.

1.9 CONDICIONES DE TRANSVERSALIDAD

Hasta ahora planteamos el problema de optimización teniendo dos puntos fijos en el espacio de estados y nuestro objetivo era llevar al sistema de uno a otro minimizando a la vez cierto funcional.

Pero ahora, si en lugar de dos puntos fijos, tomamos como puntos iniciales y finales aquellos que pertenecen a dos superficies dadas, habrá que agregar más condiciones que las enunciadas en los teoremas precedentes, ya que existe más libertad en las variables del problema.

Formularemos entonces el problema de control óptimo con puntos finales en sendas superficies contenidas en el espacio de estados de la siguiente manera:



Sean S_o y S_1 dos superficies de dimensiones r_1 y r_2 en el espacio de estados; hallar un control admisible u(t) que transfiera al sistema desde algún punto de $x^o \in S_o$ minimizando el funcional J dado por (1.1) hasta algún punto $x^1 \in S_1$

Decíamos que para resolver esto necesitamos más relaciones que las obtenidas para el problema de extremos fijos resuelto previamente; en efecto, de todos los puntos de las superficies S_o y S_1 tendremos que determinar dos (uno en cada una de ellas) que sean los extremos de la trayectoria óptima, es decir, que el número de parámetros desconocidos aumenta r_0+r_1 ya que la posición de x^o sobre la superficie S_o queda determinada por r_o parámetros y la de x^1 sobre S_1, por r_1. De aquí vemos que necesitamos r_0+r_1 nuevas relaciones que contengan a las coordenadas de los puntos x^o y x^1. Estas serán las condiciones de transversalidad.

Sean x_o y x_1 puntos de S_o y S_1 y sean T_o y T_1 los planos tangentes por estos puntos a S_o y S_1. La dimensión de T_o es r_o y la de T_1, r_1.

Sean u(t), $\bar{x}(t)$, $t\in[t_o,t_1]$ la solución al problema de óptimo con los puntos finales fijos x_o, x_1; y sea $\bar{\psi}(t)$ el vector cuya existencia afirma el teorema 1.

Definición: el vector $\bar{\psi}(t)$ satisface la condición de

transversalidad en el punto $\bar{x}(t_1)$ si y sólo si el vector $\psi(t_1) = (\psi_1(t_1), \psi_2(t_1), \text{———}, \psi_n(t_1))$ (o sea sin aumentar) es ortogonal a T_1

De otra forma: $\langle \psi(t_1), \theta_k \rangle = 0$

con $\theta_1, \theta_2, \text{------}, \theta_{r1}$ vectores linealmente independientes de T_1.

Analogamente para el punto $\bar{x}(t_o)$.

Es claro que el que satisface la condición de transversalidad es el vector $\psi(t_1)$ sin aumentar ya que θ_k es un vector del espacio de estados (dim. h)

Es claro que allí están las r_1+r_o relaciones que nos hacían falta.

Ahora podemos enunciar:

TEOREMA 3:

Sea $u(t)$, $t\varepsilon[t_o,t_1]$ un control admisible tal que la trayectoria correspondiente $\bar{x}(t)$ comienza en algún punto $x^o \varepsilon S_o$ y termina en algún $x^1 \varepsilon S_1$.
Si $u(t)$ y $\bar{x}(t)$ son óptimos
entonces,
existe $\bar{\psi}(t) \not\equiv 0$ que satisface las condiciones del Teorema 1 y la condición de transversalidad.

1.10 EJEMPLO 6

Cambiemos el planteo del ejemplo 1.

Supongamos ahora que queremos alcanzar el punto x=o de la trayectoria sobre la que se mueve la masa m pero sin fijar condiciones sobre la velocidad en el momento en que lo alcanza.

Es decir, nuestro problema ahora es: desde algún estado

inicial x^o, alcanzar el punto x=o en mínimo tiempo.

Trasladémoslo al espacio de estados (x_1, x_2):

Dado un estado inicial (x_1^o, x_2^o) alcanzar el eje x_1=o en mínimo tiempo.

Estamos ahora en el problema de punto fijo como extremo inicial, y la variedad S_1, que es la recta x_1=o como final.

El vector $\theta=(\theta_1,\theta_2)$ tangente a todos los puntos de S_1 es de la forma $\theta=(0,\theta_2)$ con $\theta_2 \neq 0$.

La condición de transversalidad es:

$$<\psi(t_1),\theta>=0$$

$$\Rightarrow \quad \psi_1(t_1).0 + \psi_2(t_1)\theta_2=0 \quad \Rightarrow \quad \psi_2(t_1)\theta_2=0$$

$$\Rightarrow \psi_2(t_1)=0$$

donde t_1 es el tiempo final.

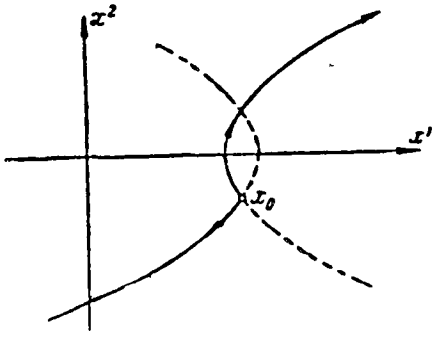
En el ejemplo 1 hemos hallado que

$$\psi_2 = -c_1 t + c_2 \ ;$$

siendo lineal cambia a lo sumo una vez de signo.

Como en t_1 se hace cero, quiere decir que en $[t_o,t_1]$ tiene signo constante.

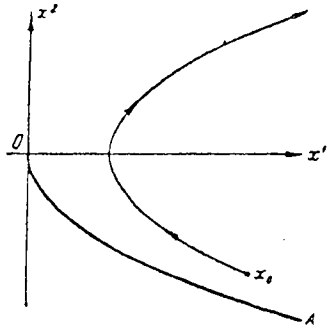
Como teníamos que $u=sg\psi_2$,
ahora resulta que cada control óptimo es constante, => sólo movimientos que tienen lugar en alguna de las dos familias de parábolas halladas podrán ser óptimos (sin cambiar de unas a otras).



Es decir que de x^0 sólo se puede salir con una de las dos trayectorias señaladas.

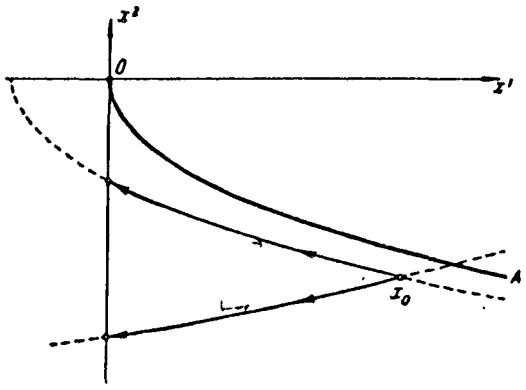
Supongamos que x^0 está por arriba de la curva A0 del ejemplo 1, y a la derecha de $x_1=o$.

=> con las parábolas que van hacia arriba, nunca se alcanza el eje $x_1=o$.



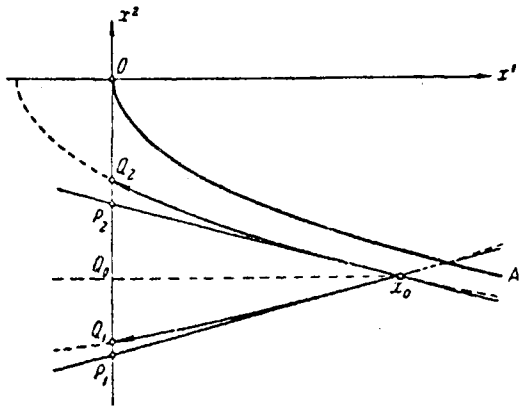
Luego desde esa posición solo pueden ser óptimas las trayectorias de la otra familia. O sea que los x^0 que están sobre el lado positivo de las x_1 y arriba de la curva 0A, son llevados en forma óptima a la recta $x_1=o$ con controles $u=-1$.

Sigamos analizando el lado positivo de las x_1 pero ahora con x^0 situado abajo de la curva 0A



Vemos que con una parábola de cada flia. se alcanza $x_1=o$. Tenemos dos que satisfacen el Principio de Máximo.

Calcularemos, para ver cual de esas dos extremales es óptima, el tiempo empleado para ir desde x^o hasta $x_1=o$ sobre cada una de ellas.



La segunda de las ecuaciones que gobernaban el sistema era:

$$\frac{dx2}{dt} = u$$

=> como usamos sobre esas parábolas $u=\pm 1$,

$$dx_2 = \pm dt$$

=> la duración del movimiento es igual a la diferencia de ordenadas.

Así para ver si se tarda más desde x^o hasta Q_2, ó desde x^o hasta Q_1, tendremos que ver si Q_2-Q_o es mayor ó menor que Q_o-Q_1.

Si trazamos como en la figura las tangentes a ambas parábolas por x^o, obtenemos los puntos P_1 y P_2.

Vamos a determinarlos:

Las ecuaciones de las parábolas eran:

$$x^oQ_2 \quad : \quad x_1 = \frac{1}{2}x_2^2+k \qquad (1)$$

$$x^oQ_1 \quad : \quad x_1 = -\frac{1}{2}x_2^2+k \qquad (2)$$

De (1): $$\left.\frac{dx_1}{dx_2}\right|_o = x_2|_o = x_2^o$$

De (2): $$\left.\frac{dx_1}{dx_2}\right|_o = -x_2|_o = -x_2^o$$

=> la ecuación de las tangentes por x^o es:

A(1): $$x_1-x_1^o = x_2^o\,(x_2-x_2^o)$$

A(2): $$x_1-x_1^o = -x_2^o\,(x_2-x_2^o)$$

Como P_1 y P_2 son las intersecciones de ellas con $x_1=o$,

$$-\frac{x_1^0}{x_2^0} = x_2 - x_2^0 \qquad \Rightarrow \qquad x_2 = -\frac{x_1^0}{x_2^0} + x_2^0 \qquad (P_2)$$

$$\frac{-x_1^0}{-x_2^0} = x_2 - x_2^0 \qquad \Rightarrow \qquad x_2 = \frac{x_1^0}{x_2^0} + x_2^0 \qquad (P_1)$$

Ahora $Q_o = (0, x_2^0)$, con lo cual resulta

$$Q_o P_2 = Q_o P_1 \qquad (3)$$

De esto podemos pasar a la desigualdad buscada.En efecto, como la tangente deja por arriba a la curva $x^o Q_2$ y lo mismo para la otra,tenemos:

$$Q_2 Q_o > P_2 Q_o$$

$$P_1 Q_o > Q_1 Q_o$$

y juntando esto con (3):

$$Q_2 Q_o > Q_o P_2 = Q_o P_1 > Q_1 Q_o$$

de donde se ve que se tarda mas en ir por la curva $x^o Q_2$ que por $x^o Q_1$.

Como la última se obtiene con $u = -1$,tenemos que también los x^o que están en $x_1 > 0$ y debajo de OA se llevan en forma óptima a $x_1 = 0$ con el control $u = -1$.

En resumen: para todo estado inicial en el semiplano $x_1 > 0$, el control óptimo es $u = -1$.

Analogamente todo estado inicial en el semiplano $x_1 < 0$ se lleva en forma óptima al $x_1 = 0$ con el control $u = 1$.

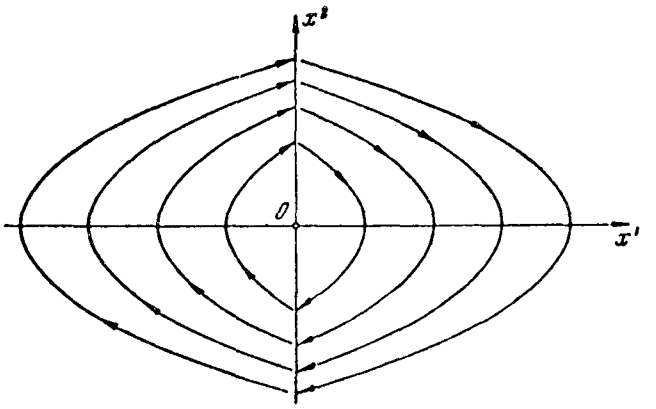
Así podemos definir la función de síntesis:

$$v(x_1,x_2) = \begin{cases} +1 & \text{si } x_1<0 \\ -1 & \text{si } x_1>0 \end{cases}$$

Asi queda resuelto el problema;las trayectorias óptimas son obtenidas del sistema

$$\dot{x}_1 = x_2$$
$$\dot{x}_2 = v(x_1,x_2)$$

y son las mostradas en la figura siguiente:



1.11 EJEMPLO 7

Modifiquemos el ejemplo 2:tomaremos como estados finales a los puntos pertenecientes a la cincunferencia $S_1 : x_1^2 + x_2^2 = R^2$ en lugar del origen.

Se trata entonces de alcanzar desde un estado inicial x^o (al que tomaremos fuera del círculo de radio R),la circunferencia S_1 en mínimo tiempo.

Sea $x^1 = (R\cos\alpha, R\operatorname{sen}\alpha)$ un punto arbitrario de S_1;hallaremos la trayectoria óptima que termina en x^1.

La condición de transversalidad establece que

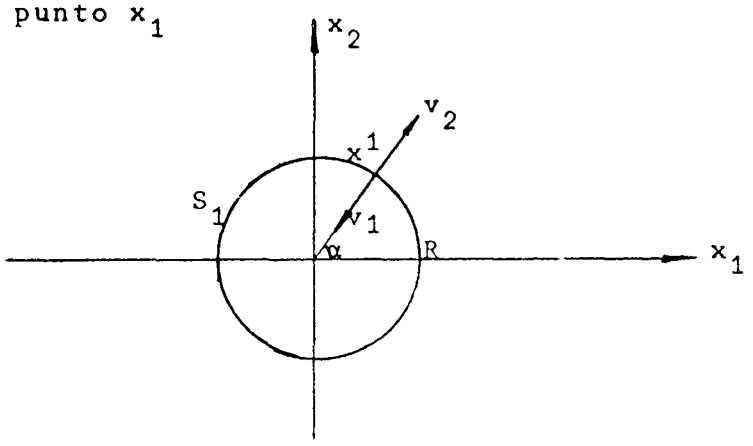
$$\langle \psi(t_1) \ , \ \theta \rangle = 0$$

donde θ es un vector de T_1, plano tangente a S_1 en x^1; entonces elegiremos uno de los dos vectores siguientes como $\psi(t_1)$:

$$v_1 = (\cos\alpha \ , \ \operatorname{sen}\alpha)$$

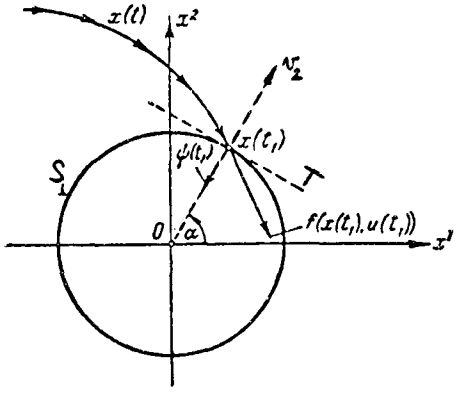
$$v_2 = (-\cos\alpha \ , \ -\operatorname{sen}\alpha)$$

aplicados en el punto x_1



¿Cuál de los dos tomamos?

La trayectoria óptima deseada llega a x^1 desde fuera del círculo; luego, el vector velocidad $\dot{x}|_{t_1} = f(x(t_1),u(t_1))$ está dirigido hacia dentro del círculo o a lo largo de la tangente al mismo



Ahora utilizamos la segunda condición establecida en el principio de Máximo (ver (1.20) del Teorema2) :

$$< \psi(t_1) \ , \ f(x(t_1),u(t_1) > = H(\psi(t_1),x(t_1),u(t_1)) \geq 0$$

Entonces para resolver nuestra cuestión debemos considerar lo siguiente:

$$¿< v_1 \ , \ f(x(t_1),u(t_1)) > \geq 0 \ ó \ < v_2 \ , \ f(x(t_1),u(t_1)) > \geq 0 \ ?$$

Evidentemente lo primero,ya que el ángulo es menor o igual a $\pi/2$. De esta manera,tomaremos

$$\psi(t_1) = (- \cos \alpha \ , \ - \text{sen } \alpha)$$

Es claro que si el vector velocidad en lugar de dirigirse hacia adentro del círculo hubiera estado contenido en la tangente T, cualquiera de los dos vectores mencionados sirve,ya que ambos satisfacen lo pedido porque son ortogonales;entonces también en este caso podemos tomar (- cosα ,-senα).

Teníamos en el Ejemplo 2

$$\dot{\psi}_1 = \psi_2$$
$$\dot{\psi}_2 = -\psi_1$$

y habíamos obtenido como solución

$$\psi_2 = A \text{ sen}(t + \alpha_o)$$
$$\psi_1 = -A \text{ eos}(t + \alpha_o)$$

Si ahora agregamos la condición de transversalidad,resulta

$$\psi(t_1) = -A \cos(t_1+\alpha_o) = -A \cos(-t_1-\alpha_o) = -\cos \alpha$$

$$\psi_2(t_1) = A\ \mathrm{sen}(t_1 + \alpha_o) = -\ \mathrm{sen}\ \alpha = \mathrm{sen}(-\alpha)$$

de donde obtenemos: $A = 1$

$$\alpha_o = -t_1 - \alpha$$

Reemplazando esto en lo anterior

$$\psi_1(t) = -\cos(t - t_1 - \alpha)$$

$$\psi_2(t) = \mathrm{sen}(t - t_1 - \alpha)$$

DEl principio de Máximo teníamos $u = sg\ \psi_2$,de donde

$$u(t) = sg(\mathrm{sen}(t - t_1 - \alpha))$$

Vemos que el control depende también de α,o sea de la zona en que la trayectoria llega a S_1.Supongamos $0 \leq \alpha < \pi$ y veamos cual es u en este caso:

si $t = t_1 - (\pi - \alpha)$

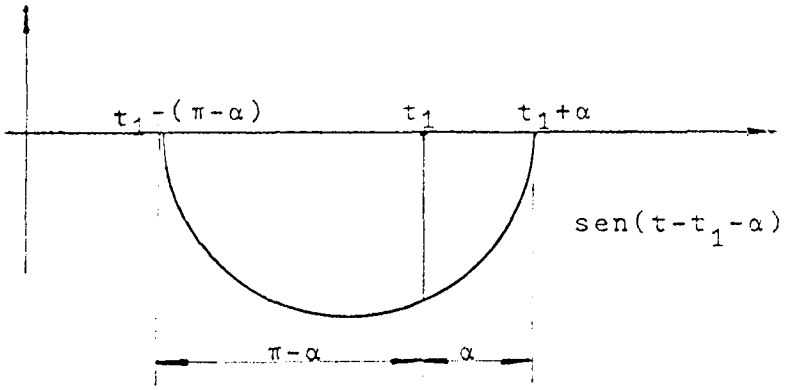
$\Rightarrow$ $\mathrm{sen}(t - t_1 - \alpha) = \mathrm{sen}(-\pi) = 0$

si $t = t_1 + \alpha$

$\Rightarrow$ $\mathrm{sen}(t - t_1 - \alpha) = \mathrm{sen}\ 0 = 0$

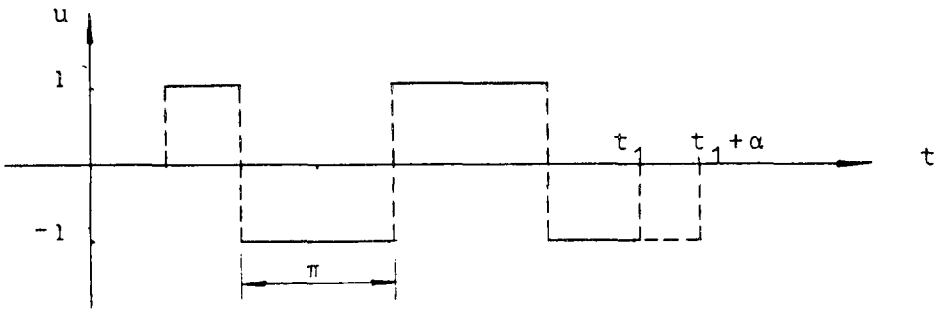
si $t = t_1$

$\Rightarrow$ $\mathrm{sen}(t - t_1 - \alpha) = \mathrm{sen}(-\alpha) < 0$ $\quad (\ 0 \leq \alpha < \pi\ )$

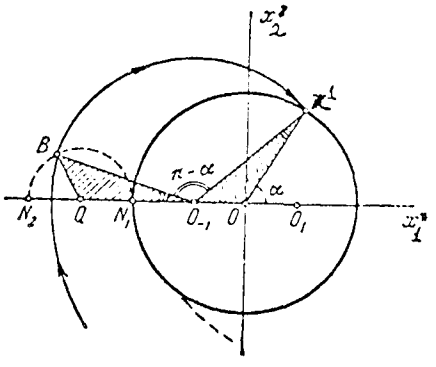


$$\Rightarrow \quad u = -1 \qquad \text{en } |t_1-(\pi-\alpha), t_1|$$

y en los intervalos precedentes de longitud π ,será alternativamente +1 y -1.

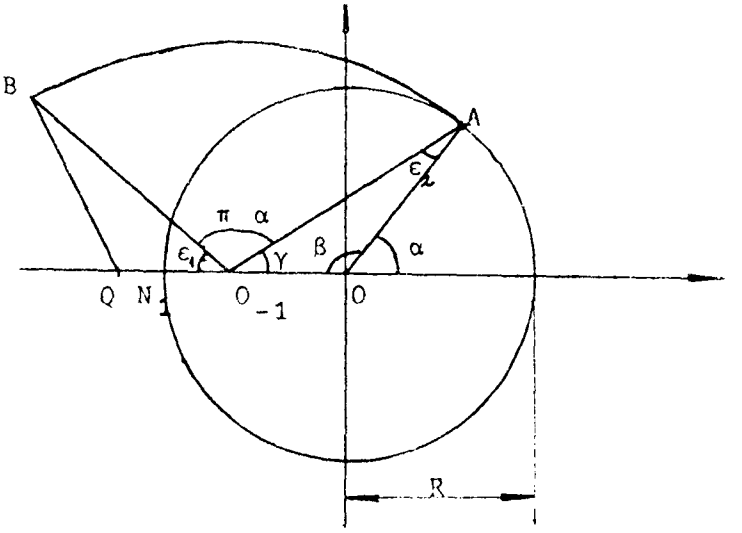


De esta manera,por lo visto antes,el último segmento de la trayectoria es un arco de círculo con centro en(-1,0),arco que corresponde a un ángulo central de $\pi - \alpha$ .Los segmentos precedentes son semicircunferencias centradas alternativamente en (1,0) y (-1,0).



Si tomamos $\pi \leq \alpha < 2\pi$,se reemplaza la trayectoria anterior por una simétrica respecto del origen.

Veamos ahora que sucede si hacemos variar el ángulo α entre 0 y π , es decir,veamos como se mueve con eso el punto B.



Tomamos Q que diste 1 de N_1.

i) $QO_{-1} = NO = R = OA$

ii) $BO_{-1} = AO_{-1}$

iii) $\widehat{BO_{-1}Q} = \widehat{O_{-1}AO}$,esdecir , $\varepsilon_1 = \varepsilon_2$

porque $\beta = \pi - \alpha$ como se ve en la figura;

como $\beta + \gamma + \varepsilon_2 = \pi$ => $\pi - \alpha + \gamma + \varepsilon_2 = \pi$

y $\varepsilon_1 + \pi - \alpha + \gamma = \pi$

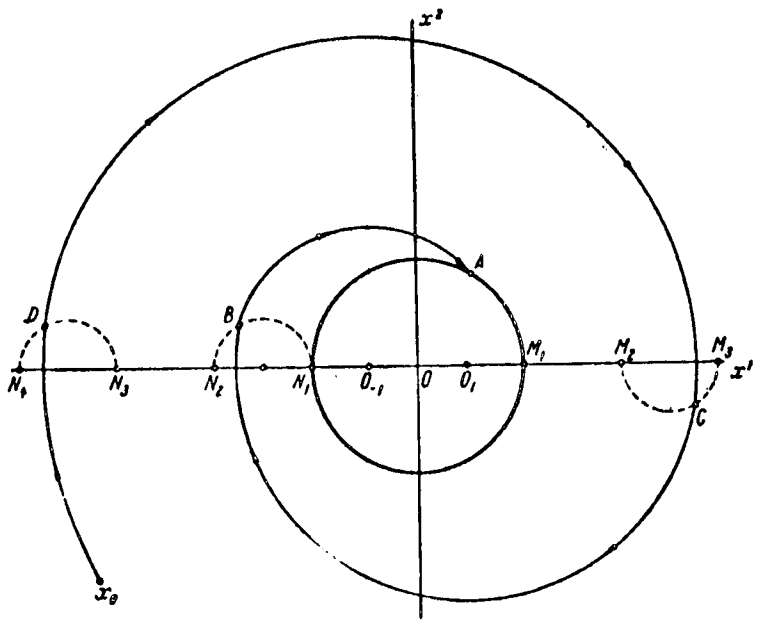
de donde $\varepsilon_1 = \varepsilon_2$

Entonces tenemos dos triángulos con dos lados iguales y el ángulo comprendido también,por lo que los lados opuestos son iguales:

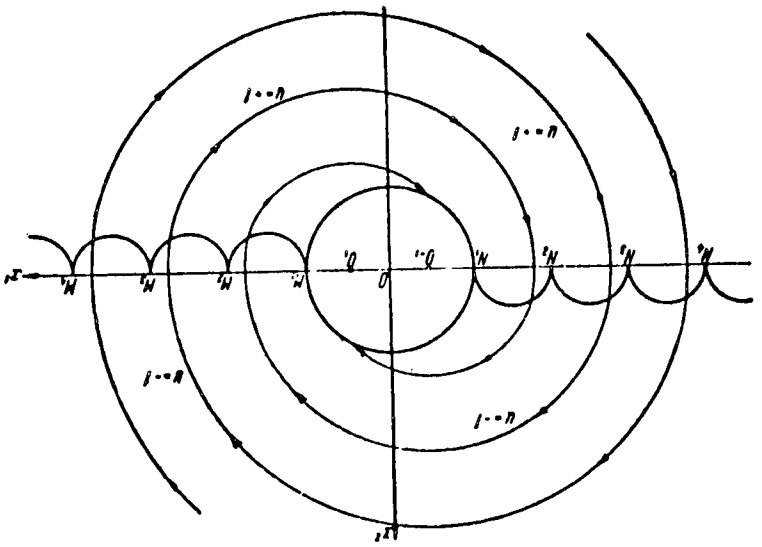
$$BO = O_{-1}O = 1$$

y resulta así que B está sobre una circunferencia de radio 1,con centro en (-R-1,0).De allí,B describe N_1N_2.

El segmento precedente es una semicircunferencia con centro (1,0) por lo que C estará sobre M_2M_3 que simétrica a N_1N_2 con respecto a (1,0).Si continuamos así obtenemos:



Las simétricas aparecen de igual manera:



1.12 EL PRINCIPIO DE MAXIMO PARA SISTEMAS NO AUTONOMOS

Hasta ahora,en todo lo precedente hemos tratado sistemas de ecuaciones autónomas.Daremos ahora teoremas análogos para el caso en que el miembro de la derecha de las ecuaciones dependa explícitamente de la variable t,pero,para no extendernos mucho,trataremos solo el problema de extremos fijos,esto es,suponiendo dos puntos fijos como estados inicial y final.Para los casos de extemos móviles como los de tiempo fijo,puede verse Pontryagin [1].

Problema de extremos fijos.

Ahora el sistema de ecuaciones es:

$$\dot{x}_i = f_i(x,u,t) \qquad i:1,2,---n. \qquad (1.37)$$

y el funcional

$$J = \int_{t_o}^{t_1} f_o(x(t),u(t),t)\, dt \qquad (1.38)$$

En este caso el t_o es dado,ya que ahora no da lo mismo comenzar en cualquier tiempo como pasaba antes; t_1 es el tiempo en el que la trayectiria pasa por x^1 , o sea,que depende del control u tomado.

Como antes, introducimos una nueva coordenada

$$x_o(t) = \int_{t_o}^{t} f_o(x(s),u(s),s)\, ds \qquad (1.39)$$

y formulamos el problema:

> En el espacio aumentado $\bar{X}$ de dimensión n+1,el punto $\bar{x}^o = (0,x^o)$ y la recta π paralela al eje x_o que pasa por $(0,x^1)$,son dados.
> Entre todos los controles admisibles u(t) tales que las trayectorias correspondientes que comienzan en $\bar{x}^o$ en el tiempo t_o ($\bar{x}(t_o) = \bar{x}^o$) hallar uno cuyo punto de intersección con π sea de mínima coordenada.

Para resolver este problema,introduciremos otra variable x_{n+1} definida así:

$$\dot{x}_{n+1} = 1 \quad , \; x_{n+1}(t_o) = t_o \quad (\text{o sea } x_{n+1}=t)$$

Al espacio de las variables $(x_1,----,x_n,x_{n+1})$ lo llamaremos X*, y al de $(x_o,x_1,----,x_n,x_{n+1})$, $\bar{X}^*$.

Con las dos variables nuevas (x_o yx_{n+1}) el sistema se escribe

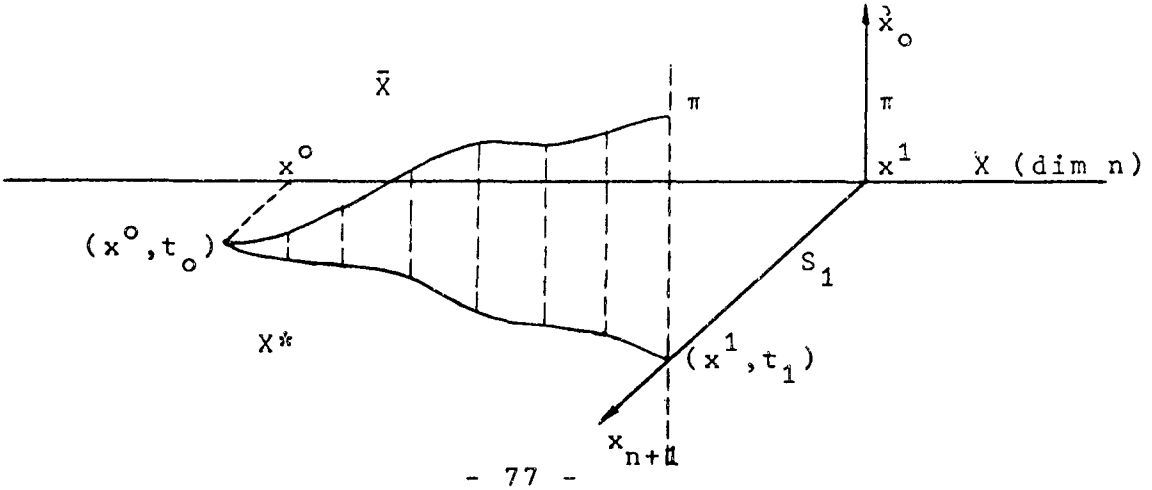
$$\dot{x}_i = f_i(x,u,x_{n+1}) \quad i:0,1,---,n$$

$$\dot{x}_{n+1} = 1 \qquad (1.40)$$

Tomemos además la recta S_1 en X*que pase por $(x^1,0)$ y sea paralela al eje x_{n+1}.Ahora buscamos trayectorias óptimas en X* que unan el punto (x^o,t_o) ε X* con la recta S_1,ya que el tiempo t_1 no está fijo sino que depende del control u(t).En este nuevo espacio la recta π no está fija,porque ahora el estado final es (x^1,t_1) con x^1 fijo en X,pero con t_1 dependiendo de la elección de u(t).

De esta manera,el problema ahora es:entre todos los controles u(t) cuya correspondiente trayectoria parte de $(0,x^o,t_0)$ y corta a la correspondiente recta π ,hallar el que produce la mínima coordenada sobre el eje x_o.

Si representamos para visualizar,X como una recta,es:



Con esta formulación,del problema para sistemas no autónomos con terminales fijos,pasamos al problema de sistemas autónomos con extremo inicial fijo y extremo final móvil.

Daremos ahora el Principio de Máximo para este problema y la condición de transversalidad.

El sistema de ecuaciones auxiliares es

$$\dot{\psi}_i = - \sum_{k=0}^{n} \psi_k(t) \frac{\partial f_k}{\partial x_i} \qquad i:0,1,---,n \qquad (1.41)$$

$$\dot{\psi}_{n+1} = - \sum_{k=0}^{n} \psi_k(t) \frac{\partial f_k}{\partial t} \qquad (1.42)$$

y si como antes llamamos

$$H(x,\bar{\psi},u,t) = \sum_{k=0}^{n} \psi_k(t)\, f_k(x,u,t)$$

pondremos

$$H^*(x,\bar{\psi}^*,u,t) = \sum_{k=0}^{n} \psi_k(t)\, f_k(x,u,t) + \psi_{n+1}.1$$

donde $\bar{\psi}^* = (\psi_o,\psi_1,----,\psi_n,\psi_{n+1})$

o sea $$H(x,\bar{\psi},u,t) = H^*(x,\bar{\psi}^*,u,t) - \psi_{n+1}$$

Llamemos $$M^*(x,\bar{\psi}^*,t) = \sup_{u\in U} H^*(x,\bar{\psi}^*,u,t)$$

manteniendo el mismo significado de antes para $M(x,\bar{\psi},t)$.

Por la relación anterior entre H yH* tenemos

$$M^* = M + \psi_{n+1} \qquad (1.43)$$

Pero la condición segunda del Teorema 1 era (en nuestra nomenclatura actual):

$$M^*(x,\bar{\psi}^*,t) = 0 \quad \text{para todo } t \tag{1.44}$$

la cual quedará escrita en nuestro caso,por (1.43),

$$M(x,\bar{\psi},t) \equiv -\psi_{n+1}(t) \text{ , para todo } t \tag{1.45}$$

Ahora veamos las condiciones de transversalidad para el punto final de la trayectoria en X^*.

Como el lugar de llegada es la recta S_1 paralela al eje x_{n+1}, la tangente es ella misma y la condición de transversalidad es

$$< (\psi_1(t_1),\psi_2(t_1),-----,\psi_n(t_1),\psi_{n+1}(t_1)) \text{ , } S_1 > = 0$$

de donde

$$\psi_{n+1}(t_1) = 0 \tag{1.46}$$

porque un vector de X^* será ortogonal al eje x_{n+1} solo si su componente n+1 es nula,o sea,si está en el subespacio generado por los otros ejes.

Ahora de (1.43) y (1.45) teniendo en cuenta (1.46) para los límites de la integral,tenemos por (1.42):

$$M(x(t),\bar{\psi}(t),t) = \int_{t_1}^{t} \sum_{k=0}^{n} \frac{\partial f_k}{\partial t}(x(s),u(s),s)\, \psi_k(s)\, ds \tag{1.47}$$

$$\text{para todo } t_o \leq t \leq t_1$$

En definitiva,la condición (1.44) que aparecía en el Teorema 1 queda reemplazada en este caso por (1.47).

Podemos enunciar ahora el siguiente teorema con las modificaciones hechas sobre el Teorema 1,y tendremos el Principio de

Máximo para sistemas no autónomos.(Observar que con lo que hicimos se independizan los resultados de la componente ψ_{n+1})

TEOREMA 4

Sea $u(t), t\varepsilon[t_0,t_1]$ un control admisible tal que la correspondiente trayectoria $\bar{x}(t)$ en el espacio $\bar{X}$ comienza en x^o en el tiempo t_o y corta a la recta π correspondiente a algún tiempo t_1;
Si $u(t)$ y $\bar{x}(t)$ son óptimas
entonces
existe $\bar{\psi}(t) = (\psi_0(t),\psi_1(t),-----,\psi_n(t)) \neq 0$
correspondiente a $u(t)$ y $\bar{x}(t)$,tal que:
1º)Para todo $t\varepsilon[t_0,t_1]$ la función $H(x(t),\bar{\psi}(t),u,t)$ como función de $u \varepsilon U$,alcanza su máximo en el punto $u = u(t)$

$$H(x(t),\bar{\psi}(t),u(t),t) = M(x(t),\bar{\psi}(t),t)$$

2º) Se satisfacen:

$$\psi_o(t) = cte \leq 0$$

$$M(x,\bar{\psi},t) = \int_{t_1}^{t} \sum_{k=0}^{n} \psi_k(t) \frac{\partial f_k(x(s),u(s),s)}{\partial t} ds \qquad (1.48)$$

siempre que $\bar{\psi}(t),\bar{x}(t),u(t)$ satisfagan el sistema

$$\dot{x}_i = f_i(x,u,t) \qquad \dot{\psi}_i = -\sum_k \psi_k \frac{\partial f_k}{\partial x_i} \qquad i=0,1,----,n.$$

y la condición 1º.

Observamos que la diferencia entre los Teoremas 1 y 4 es la conducta del Hamiltoniano a lo largo de la trayectoria óptima. En el problema autónomo se anulaba a lo largo de ella,en cambio ahora varía de acuerdo a (1.48).Lo importante es que 1°) no cambia es decir,seguimos usando el mismo H de antes sin que intervenga ψ_{n+1}. V. Gr.,tomemos el siguiente problema:

$$\dot{x} = x + u.t \qquad x \in R^n \ , \ u \in R^n$$

$$\text{con} \quad t_o = 0 \ , \quad x(0) = a \ , \quad x^1 = b$$

$$\text{y} \qquad J(u) = \int_0^{t_1} (x^2 + t^2)\, dt$$

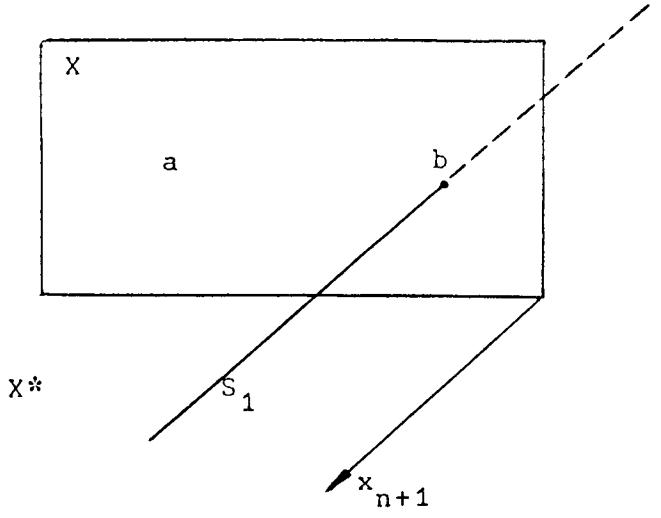
Hacemos

$$\begin{cases} \dot{x} = x + ut & x(0) = a \\ \dot{x}_{n+1} = 1 & x_{n+1}(0) = 0 \end{cases}$$

En X*,los estados finales son la recta x = b

$$H^*(x, \bar{\psi}^*, u, t) = \psi_o.(x^2 + x_{n+1}^2) + \langle \psi ; x + ux_{n+1} \rangle + \psi_{n+1}$$

Para maximizar esto no se usa el ψ_{n+1}.Eso es lo que vimos en el teorema.



2.1 CASO DISCRETO

Comenzaremos con el caso discreto ya que clarifican mucho el significado de los elementos definidos.

Tomemos un sistema discreto;su conducta está descripta por

$$x(k+1) = f_k(x(k),u(k)) \quad k = 0,1,2,---$$

El subíndice de las f indica una dependencia de éstas con respecto al tiempo.

Damos un estado inicial x_o y un conjunto $B \subset X$ como estados finales(Xes el espacio de estados)

El costo o funcional a minimizar es

$$J(u) = \sum_{i=1}^{N} L_i(x(i),u(i))$$

donde N es el menor entero tal que $x(N) \in B$.

Observemos que se minimiza J:si la elección de una sucesión de control conduce a B en N' pasos,y otra sucesión lo hace en N,con N menor que N',pero J toma un valor menor con la primera,ésa será la óptima.

Ecuación funcional de Bellman

Llamaremos función de retorno a

$$V(x,k) = \min_u J(x,k) \qquad (2.1)$$

es decir la que nos da el mínimo del funcional J cuando tomamos como estado inicial a x en el instante k.

Supongamos que exista V(x,k) para todo x y para k+1,----,N. Adoptemos la siguiente estrategia:

tomando como inicial a x en k,aplicamos,en ese instante,o sea en k,un control arbitrario u(k),y en los instantes siguientes desde k+1 hasta N el control óptimo u*.

Así el costo será :

$$J = L_k(x(k),u(k))+V(f_k(x,u(k)),k+1)$$

CAPITULO 2

CONDICIONES SUFICIENTES

TEORIA DE HAMILTON-JACOBI-BELLMAN

PROGRAMACION DINAMICA

ya que $V(f_k(x,u(k)),k+1)$ nos da el mínimo del funcional desde $f(x,u(k))$ hasta $x(N)$.

De allí,el menor costo posible será:

$$V(x,k)= \min_u \{L_k(x(k),u(k))+V(f_k(x,u),k+1)\} \qquad (2.2)$$

Esta ecuación puede permitir calcular V y u paso por paso, comenzando de B y corriendo hacia atrás en el tiempo.

El valor de V para cada N,es conocido en puntos de B;en efecto:

$$V(x,N)\Big|_B = L_N(x) \qquad (2.3)$$

Esto es así porque en el instante N no se aplica ningún control debido a que ya se llegó al conjunto final B.

La ecuación (2.2) con las condiciones (2.3) constituyen una condición suficiente para que la solución V sea el costo óptimo y los u los controles óptimos.

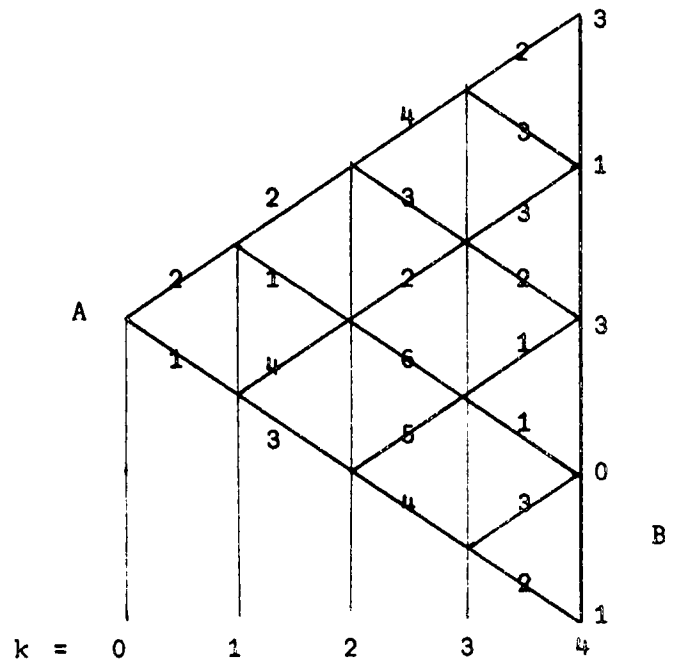
Observemos que supusimos que V existía para todo x,hipótesis importante sin la cual no se puede plantear el problema en la forma hecha.

Este procedimiento es interesante en casos finitos como veremos a continuación.

2.2 EJEMPLO

El problema consiste en salir de A y llegar a la recta B avanzando solo de izquierda a derecha;el costo al ir por cada tramo es el número indicado.Buscamos el camino que nos lleve a B con mínimo costo.

Los números finales indican la cantidad que hay que sumar al llegar a ese punto,o sea son las funciones $L_N(x)$(no dependen de u);en los otros puntos el costo depende del camino que tomemos y del punto en que estemos.El control es la elección del camino.

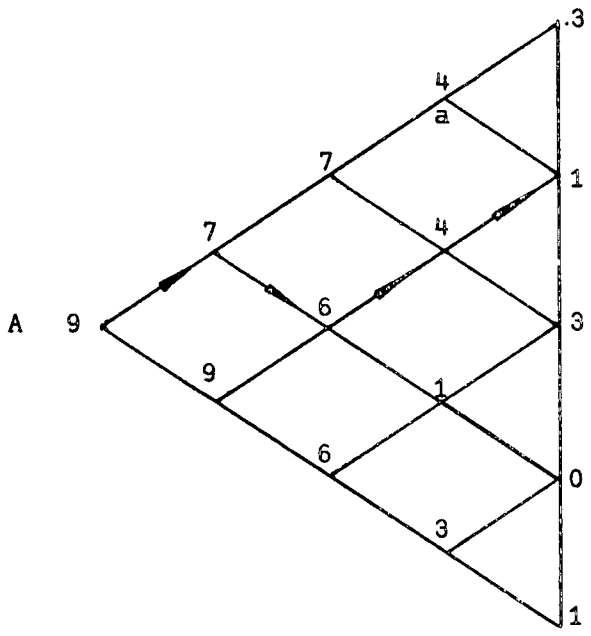


Calculemos la función de retorno V:es el mínimo costo desde cada punto hasta el siguiente y la buscamos retrocediendo en el tiempo.

En el siguiente dibujo están los valores de la función V en cada punto;v.gr.: V(a,3) = 4,que es el mínimo entre 3+2 y 1+3, y así los demás.

Llegamos a A con el valor 9;éste es entonces el costo menor. La trayectoria óptima correspondiente se obtiene comenzando desde A y avanzando hacia el punto cuyo valor de V,sumado al del camino dieron lugar al valor de V del punto en que nos encontramos: desde A,donde hay un 9,vamos por el camino de costo 2 hacia 7 que son los que lo originaron.

Observemos que si partimos de A tomando directamente por los tramos de menor costo,no obtenemos la trayectoria óptima.



2.3 CASO CONTINUO

Planteamos el mismo problema que en §2.1 pero con los siguientes elementos:

el sistema es diferencial

$$\dot{x} = f(x,u,t) \tag{2.4}$$

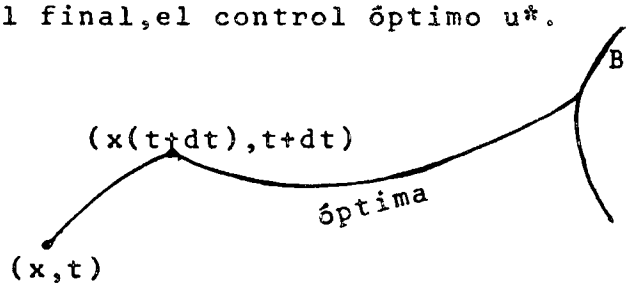
el funcional

$$J(x_o,t_o,u) = \phi(x_f,t_f) + \int_{t_o}^{t_f} L(x,u,t)\, dt \tag{2.5}$$

tomando como estado inicial x_o, como conjunto de estados finales B, y como t_f al menor t tal que $(x(t_f)) \in B$.

Suponemos ϕ y L diferenciables en todas sus variables y además (y esto es fundamental) suponemos que el problema es resoluble cualesquiera sean $\underline{x}$ y $\underline{t}$ tomados como iniciales, y que la función V(x,t) (que es el costo óptimo desde x en el instante t hasta el final) tiene derivadas parciales continuas.

Tomemos la siguiente estrategia:
desde t hasta t+dt,utilizamos un control u cualquiera;desde t+dt hasta el final,el control óptimo u*.



El costo asociado es:

$$J = \int_t^{t+dt} L(x,u,s)ds + V(x(t+dt),t+dt) \qquad (2.6)$$

Es claro que $J \geq V(x,t)$ y que el igual vale cuando el u empleado en $[t,t+dt]$ es el óptimo.

Desarrollemos (2.6) considerando cada término por separado.

1) Sea $$F(r) = \int_t^r L(x,u,s)ds$$

$$F(t+dt) = F(t) + F'(t)\,dt + o(dt)$$

pero $$F(t) = 0$$

$$F'(r)\Big|_{r=t} = L(x,u,r)\Big|_{r=t} = L(x,u,t)$$

entonces $$F(t+dt) = \int_t^{t+dt} L(x,u,s)ds = L(x,u,t)dt + o(dt)$$

2) $$V(x+dx,t+dt) = V(x,t) + \frac{\partial V}{\partial x}\frac{dx}{dt}dt + \frac{\partial V}{\partial t}dt + o(dt)$$

$$= V(x,t) + \frac{\partial V}{\partial x} f(x,u,t)dt + \frac{\partial V}{\partial t}dt + o(dt)$$

Entonces el desarrollo de (2.6) es:

$$J = L(x,u,t)dt + V(x,t) + \frac{\partial V}{\partial x} f(x,u,t)dt + \frac{\partial V}{\partial t} dt + o(dt) \geq$$

$$\geq V(x,t)$$

$$\Rightarrow \quad L(x,u,t)dt + \frac{\partial V}{\partial x} f(x,u,t)dt + \frac{\partial V}{\partial t} dt \geq 0$$

y como el incremento dt es mayor que cero,

$$L(x,u,t) + \frac{\partial V}{\partial x} f(x,u,t) + \frac{\partial V}{\partial t} \geq 0$$

Como buscamos el mínimo de J ,o sea,el u óptimo y vimos que en este caso valía la igualdad,tenemos:

$$\min_{u} \{L(x,u,t) + \frac{\partial V}{\partial x} f(x,u,t) + \frac{\partial V}{\partial t} \} = 0$$

o sea

$$\frac{\partial V}{\partial t} + \{\min \quad L(x,u,t) + \frac{\partial V}{\partial x} f(x,u,t) \} = 0 \qquad (2.7)$$

que es la ecuación en derivadas parciales que satisface V(x,t), llamada ecuación de Hamilton-Jacobi-Bellman.

Observemos que

$$\frac{\partial V}{\partial x} \cdot f(x,u,t)$$

es producto escalar:

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial V}{\partial x_1} \\ \vdots \\ \frac{\partial V}{\partial x_n} \end{pmatrix} (f_1(x,u,t),.....,f_n(x,u,t))$$

Teníamos definido al Hamiltoniano como

$$H(x,\psi,u,t) = \langle \psi(t) , f(x,u,t) \rangle$$

entonces $\frac{\partial V}{\partial x} \cdot f(x,u,t) = H(x,\frac{\partial V}{\partial x},u,t)$

Sitomamos como antes $f_o = L(x,u,t)$ (Ver §1.1)

y llamamos

$$H(x,\frac{\partial V}{\partial x},u,t) = L(x,u,t) + \frac{\partial V}{\partial x} f(x,u,t)$$

la ecuación (2.7) queda

$$\frac{\partial V}{\partial t} + \min_u \left\{ H(x,\frac{\partial V}{\partial x},u,t) \right\} = 0 \qquad (2.8)$$

con la condición de contorno $V(x,t_f)\Big|_B = \phi(x,t_f)$ (2.9)

Esto nos da una condición suficiente de optimalidad,como se demostrará rigurosamente después.

De acuerdo a esto,las etapas para la resolución de un problema son:

1º) Formar

$$H(x,\psi,u,t) = L(x,u,t) + <\psi(t),f(x,u,t)>$$

2º) Minimizar H como función de u y obtener el $u^*(x,\psi,t)$ que lo lo haga;o sea que si llamamos a ese mínimo $H^*(x,\psi,t)$:

$$H(x,\psi,u^*(x,\psi,t),t) = H^*(x,\psi,t)$$

3º) Resolver

$$\frac{\partial V}{\partial t} + H^*(x,\frac{\partial V}{\partial x},t) = 0$$

$$\text{con} \quad V(x,t)\Big|_B = \phi(x,t)$$

Si se puede resolver esta ecuación y conocer V(x,t) para todo x y todo t,el punto siguiente resuelve el problema.

4º) Poner $\frac{\partial V}{\partial x}$ hallado,en la expresión de u^* conseguida en 2º):

$$u^* = u^*(x, \frac{\partial V}{\partial x}, t)$$

5°) Para tener las trayectorias óptimas, integramos

$$\dot{x} = f(x, u^*, t)$$

Demostraremos a continuación que lo hallado precedentemente es, en efecto, una condición suficiente de optimalidad.

TEOREMA

Si existe una solución $V(x,t)$ de (2.8)-(2.9), que esté definida, sea continua, y sus derivadas parciales sean continuas para todo x y todo t, y si el correspondiente control es una función continua (presque partout) y lleva el estado inicial x_o en el instante t_o hasta B,

entonces

el control es óptimo y el costo óptimo es $V(x_o, t_o)$.

Demostración:

La haremos en dos etapas.

1) Lema de Carathéodory

Sea un problema como el planteado al comienzo con $\phi = 0$ y con $L(x,u,t)$ tal que para cada (x,t) fijo, vista como función de u tiene un único mínimo alcanzado con cierto u^* y ese mínimo es cero; o sea:

$$0 = L(x, u^*(x,t), t) < L(x,u,t)$$

para todo $u \neq u^*(x,t)$

Si el control u^* transfiere (x_o, t_o) a B,

entonces

u^* es óptimo y $J^* = 0$.

Demostración:

Si tomamos $u^1 \neq u^*$ y si t_1 es el tiempo de llegada a B con u^1,

$$\int_{t_o}^{t_1} L(x, u^1, t)dt > \int_{t_o}^{t_f} L(x, u^*, t)dt = 0$$

entonces $J(x_o,t_o,u^1) > J(x_o,t_o,u^*) = 0$

para todo $u^1 \neq u^*$, como queríamos demostrar.

2)Para aplicar el lema a la demostración, definamos

$$\bar{L} = L + \frac{\partial V}{\partial t} + \frac{\partial V}{\partial x} \cdot f(x,u,t) \qquad (2.10)$$

donde V(x,t) es una función que cumple con las hipótesis mencionadas en el teorema.

Ahora, si definimos un nuevo funcional

$$\bar{J} = \int_{t_o}^{t_f} \bar{L}(x,u,t)\, dt \qquad (2.11)$$

tenemos:

$$\bar{J} = \int_{t_o}^{t_f} \left(L + \frac{\partial V}{\partial t} + \frac{\partial V}{\partial x} \cdot f(x,u,t) \right) dt$$

$$= \int_{t_o}^{t_f} L(x,u,t)dt + \int_{t_o}^{t_f} \left(\frac{\partial V}{\partial t} + \frac{\partial V}{\partial x} \cdot f(x,u,t) \right) dt$$

pero $$\frac{dV}{dt} = \frac{\partial V}{\partial t} + \frac{\partial V}{\partial x}\cdot\frac{dx}{dt} = \frac{\partial V}{\partial t} + \frac{\partial V}{\partial x} \cdot f(x,u,t)$$

entonces $$\bar{J} = \int_{t_o}^{t_f} L(x,u,t)dt + \int_{t_o}^{t_f} \frac{dV}{dt}\, dt$$

$$= V(x_f,t_f) - V(x_o,t_o) + \int_{t_o}^{t_f} L(x,u,t)dt \qquad (2.12)$$

Por hipótesis del teorema, existe V(x,t) solución de (2.8)-(2.9) y que cumple las condiciones enumeradas. Supongamos que sea

ésa la función utilizada en todo lo de arriba.Entonces

$$\min_u \bar{L} = \min_u \{\frac{\partial V}{\partial t} + L + \frac{\partial V}{\partial x} \cdot f(x,u,t)\} =$$

$$= \frac{\partial V}{\partial t} + \min_u \{ L + \frac{\partial V}{\partial x} \cdot f(x,u,t)\} = 0$$

ya que V(x,t) satisface la ecuación de Hamilton-Jacobi-Bellman.

En definitiva nos queda

$$\min_u \bar{L} = 0$$

Además,en el $\bar{J}$ definido en (2.11), $\phi = 0$.Si ahora suponemos que el u* (el que hace $\bar{L} = 0$) lleva (x_o,t_o) a B,tenemos todas las hipótesis del lema demostrado.
Pero entonces,por dicho lema

$$u^* \text{ es óptimo y } \bar{J}^* = 0 \qquad (2.13)$$

Veamos que son equivalentes los problemas de minimizar $\bar{J}$ y minimizar J.

Tenemos: $\bar{J}(u) > \bar{J}(u^*)=0$,para todo $u \neq u^*$

$$<=> \quad V(x_f,t_f) - V(x_o,t_o) + \int_{t_o}^{t_f} L(x,u,t)\, dt >$$

$$> V(x_f,t_f) - V(x_o,t_o) + \int_{t_o}^{t_f} L(x,u^*,t)dt = 0$$

po la definición de $\bar{J}$.

$$<=> \quad - V(x_o,t_o) + J(u) > - V(x_o,t_o) + J(u^*) = 0$$

ya que

$$J(u) = \phi(x_f,t_f) + \int_{t_o}^{t_f} L(x,u,t)\, dt$$

$$y \quad V(x,t)\Big|_B = \phi(x_f,t_f)$$

De manera que lo anterior es equivalente a

$$J(u) > J(u^*) = V(x_o,t_o) \qquad (2.14)$$

De esto se ve que u* minimiza a $\bar{J}$ si y sólo si minimiza a J. Como habíamos demostrado en (2.13) que u* era óptimo para el problema de $\bar{J}$, en virtud de la equivalencia mostrada, u* es óptimo para el problema de J.

Además, por (2.14), el costo óptimo es $V(x_o,t_o)$. Esto termina la demostración.

2.4 EJEMPLO

Control de una reacción química.

Consideremos una mezcla química A que es echada dentro de un tanque en forma constante durante un tiempo fijo $[0,T]$. Supongamos que el valor del ph, x, al cual la reacción se produce, determina la calidad del producto final; ese ph puede ser controlado mediante la propiedad u de alguna componente de A.

Supongamos también que la derivada del ph, o sea la de x, es proporcional a la suma del ph en ese instante y del u que es control:

$$\dot{x} = ax + bu \qquad \text{con } a,b \text{ constantes} > 0$$

Además el decrecimiento del rendimiento debido a las variaciones del ph es:

$$\int_0^T x^2(t)\,dt$$

y el gasto en el componente u de la mezcla A es proporcional a u^2:

$$\int_0^T u^2(t)\,dt$$

De esta manera,el costo a minimizar es:

$$J(u) = \int_0^T (cx^2 + u^2)dt$$

donde $c > 0$ hace la conversión a unidades comunes.

El problema es:teniendo el valor inicial dado $x(0)$,buscamos un control $u^*(t)$ de tal manera que el costo $J(u)$ sea mínimo. No se impone ninguna cota sobre el control.

Sigamos,para su resolución,los pasos establecidos previamente.

1º)

$$H = cx^2 + u^2 + \psi_1 (ax + bu)$$

$$= cx^2 + \psi_1 ax + u^2 + bu\psi_1$$

2º) Minimizar H como función de u,y obtener el u^* que lo haga.

$$\frac{\partial H}{\partial u} = 2u + b\psi_1 = 0 \quad \Rightarrow \quad u = -\frac{b\psi_1}{2}$$

El valor del mínimo será:

$$H^*(x,\psi,t) = cx^2 + \psi_1 ax + \frac{b^2\psi_1^2}{4} - \frac{b^2\psi_1^2}{2}$$

$$= cx^2 + \psi_1 ax - \frac{b^2\psi_1^2}{4}$$

3º) Resolver

$$\begin{cases} \dfrac{\partial V}{\partial t} + H^*(x, \dfrac{\partial V}{\partial x}, t) = 0 \\ V(x,t)\Big|_B = V(x,T) = 0 \end{cases}$$

O sea,teniendo en cuenta lo establecido en 2º) :

$$-\frac{\partial V}{\partial t} = cx^2 - \frac{b^2}{4}\left(\frac{\partial V}{\partial x}\right)^2 + ax\frac{\partial V}{\partial x}$$

$$V(x,T) = 0$$

Busquemos soluciones dela forma $V(x,t) = k(t)\, x^2$

Reemplazando en la ecuación:

$$-\dot{k}\, x^2 = cx^2 - \frac{b^2}{4}(2k(t)\, x)^2 + 2ax^2k(t)$$

$$= cx^2 - b^2k(t)^2x^2 + 2ak(t)x^2$$

Entonces

$$\begin{cases} \dot{k} = b^2k^2(t) - 2ak(t) - a \\ k(T) = 0 \end{cases} \tag{2.15}$$

Pasamos con esto a una ecuación ordinaria.Para no perder continuidad en el desarrollo,supongamos que está resuelta(la resolución la haremos después).

Tenemos $$V(x,t) = k(t)\, x^2$$

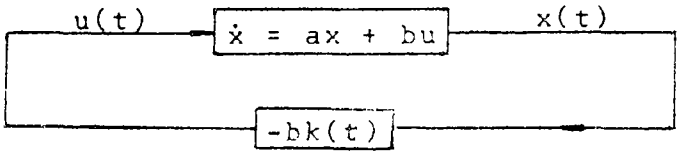
donde k(t) es conocido.(solución de (2.15).

$$\frac{\partial V(x,t)}{\partial x} = 2\, k(t)\, x$$

4°) Reemplazar el $\frac{\partial V}{\partial x}$ hallado arriba,en la expresión u* del punto 2°):

$$u^* = -\frac{b}{2}\, 2k(t)x$$

que es el control óptimo buscado.Así tenemos



Nos falta buscar la solución de (2.15).

Para convertirla en lineal,sustituímos

$$\xi(t) = e^{-b^2 \int_0^t k(s)ds}$$

entonces $$\dot{\xi}(t) = -b^2k(t)\, e^{-b^2 \int_0^t k(s)ds}$$

y $$\frac{\dot{\xi}(t)}{\xi(t)} = -b^2 k(t) \quad , \quad \dot{\xi}(T) = 0$$

Con eso se ve que :

$$\ddot{\xi} + 2a\dot{\xi} - cb^2\xi = 0 \qquad (2.16)$$

en efecto: $$k(t) = -\frac{1}{b^2}\frac{\dot{\xi}(t)}{\xi(t)} \Rightarrow \dot{k}(t) = -\frac{1}{b^2}\left(\frac{\ddot{\xi}\xi - \dot{\xi}^2}{\xi^2}\right)$$

y reemplazando en (2.15) da (2.16).

Ahora el problema es resolver (2.16) y con el $\xi(t)$ obtenido, calcular $k(t)$.

La solución de (2.16) es:

$$\xi(t) = e^{-a(t-T)}\left(\operatorname{ch}\sqrt{a^2+cb^2}(t-T) + \frac{a}{\sqrt{a^2+cb^2}}\operatorname{sh}\sqrt{a^2+cb^2}(t-T)\right)$$

2.5 SISTEMA LINEAL CON FUNCIONAL CUADRATICO

Consideremos el siguiente problema:

$$\dot{x} = F(t)\,x + G(t)\,u \qquad (2.18)$$

$$J = x_f^2\, A\, x_f + \int_{t_o}^{T} (x^t Q(t) x + u^t R(t) u)\, dt \qquad (2,19)$$

,

donde

x_f es el estado final $x(T)$

$A, Q(t), R(t)$ matrices simétricas(Ver §3.01)

$R(t)$ es definida positiva.(Ver §3.01)

Damos el tiempo final T, fijo, pero el estado final x_f es libre.

Aplicamos la técnica desaprollada antes para resolverlo, es decir, para lograr la síntesis del control óptimo.

1º)

$$H(x,\psi,u,t) = x^t Q(t) x + u^t R(t) u + \psi^t(t)(F(t)x + G(t)u)$$

2°) Minimizar H como función de u:

Tomemos, en lugar de ψ, $\psi = 2\mu$ (2.20)

Teníamos $H = x^tQx + u^tRu + \psi^tFx + \psi^tGu$

Ahora:

. $\psi^tFx = \mu^tFx + x^tF^t\mu$ porque (2.21)

$\psi^tFx = 2\mu^tFx = \mu^tFx + \mu^tFx$

y como μ^tFx es un escalar, $(\mu^tFx)^t = \mu^tFx$

y $(\mu^tFx)^t = x^tF^t\mu$

de donde sale (2.21).

. Analogamente, $\psi^tGu = \mu^tGu + u^tG^t\mu$ (2.22)

Reemplazando (2.21) y (2.22) en (2.20):

$$H = x^tQx + u^tRu + \mu^tFx + x^tF^t\mu + \mu^tGu + u^tG^t\mu$$

$$= (u^tRu + \mu^tGu + u^tG^t\mu) + x^tQx + \mu^tFx + x^tF^t\mu$$

y "completando cuadrados" para u,

$$H = (u + R^{-1}G^t\mu)^tR(u + R^{-1}G^t\mu) - \mu^tGR^{-1}G^t\mu + x^tQx+\mu^tFx+x^tF^t\mu \quad (2.23)$$

En efecto:

$$(u + R^{-1}G^t\mu)^tR(u + R^{-1}G^t\mu) - \mu^tGR^{-1}G^t\mu =$$

$$= (u^t+\mu^tGR^{-1^t})R(u+R^{-1}G^t\mu) - \mu^tGR^{-1}G^t\mu =$$

$$= (u^t+\mu^tGR^{-1})(Ru+RR^{-1}G^t\mu) - \mu^tGR^{-1}G^t\mu =$$

$$= u^tRu+\mu^tGR^{-1}Ru+u^tG^t\mu+\mu^tGR^{-1}G^t\mu-\mu^tGR^{-1}G^t\mu =$$

$$= u^tRu + \mu^tGu + u^tG^t\mu$$

lo cual demuestra la igualdad de (2.23) con la anterior.

Esto lo hacemos para poder minimizar H; ahora en (2.23) la u figura solo en la primera parte. Como R es positiva definida, el mínimo se alcanzará cuando:

$$(u + R^{-1}G^t\mu)R(u + R^{-1}G^t\mu) = 0$$

y ésto si y solo si

$$u + R^{-1}G^t\mu = 0$$

Entoces:

$$u^* = -R^{-1}G^t\mu$$

Con esto,el valor del Hamiltoniano es

$$H^* = -\mu^t GR^{-1}G^t\mu + x^tQx + \mu^tFx + x^tF^t\mu$$

3º)

$$\begin{cases} \dfrac{\partial V}{\partial t} + H^*(x,\dfrac{\partial V}{\partial x},t) = 0 \\ V(x_f,T) = x_f^t A x_f \end{cases} \qquad (2.24)$$

Intentemos soluciones de la forma:

$$V(x,t) = x^tP(t)x$$

donde P(t) es alguna matriz simétrica.

De allí:

- $\dfrac{\partial V}{\partial t} = x^t\dot{P}(t)x$
- $\dfrac{\partial V}{\partial x} = (\dfrac{\partial V}{\partial x_1},-----,\dfrac{\partial V}{\partial x_n}) = 2x^tP$

porque $\dfrac{\partial}{\partial x_k}(x^tPx) = \dfrac{\partial}{\partial x_k}(\sum_i(\sum_j p_{ij}x_j)\,x_i) =$

$$= \sum_i (\frac{\partial}{\partial x_k}(\sum_j p_{ij}x_j).x_i + \sum_j p_{ij}x_j \cdot\frac{\partial x_i}{\partial x_j}) =$$

$$= \sum_i (p_{ik}\cdot x_i + \sum_j p_{kj}\cdot x_j) = \sum_i p_{ik}x_i + \sum_j p_{kj}x_j$$

y como P es simétrica, $= 2\sum_i p_{ik}x_i$

Entonces

$$\left(\frac{\partial V}{\partial x_1}, \text{-----}, \frac{\partial V}{\partial x_n}\right) = \left(2\sum_i p_{i1}x_i, \text{----}, 2\sum_i p_{in}xi\right)$$

$$= 2\,(x_1, \text{-----}, x_2)\begin{pmatrix} p_{11} & \cdots & p_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ p_{n1} & & p_{nn} \end{pmatrix} = 2\,x^t\,P$$

Reemplazando en (2.24),pero teniendo en cuenta que allí se cambia ψ por $\frac{\partial V}{\partial x}$,que teníamos $\psi = 2\mu$ y por consiguiente $2\mu^t = \frac{\partial V}{\partial x}$

o sea $\mu^t = x^t P(t)$,resulta

$$\frac{\partial V}{\partial t} + H^*\left(x, \frac{\partial V}{\partial x}, t\right) =$$

$$= x^t\dot{P}\,x - x^t PGR^{-1}G^t P^t x + x^t Qx + x^t PFx + x^t F^t P^t x =$$

y como P(t) es simétrica

$$= x^t\dot{P}\,x + x^t PFx + x^t F^t Px - x^t PGR^{-1}G^t Px + x^t Qx =$$

$$= x^t\,(\dot{P} + PF + F^t P - PGR^{-1}G^t P + Q)\,x = 0 \quad \text{para todo } x$$

Entonces

$$\begin{cases} \dot{P} + PF + F^t P - PGR^{-1}G^t P + Q = 0 \\ P(T) = A \end{cases} \qquad (2.25)$$

llamada ecuación matricial de Ricatti.

O sea,que la matriz P(t) que buscamos debe ser solución de (2.25).Supongamos que ésta existe para todo $t \leq T$.

4º) La expresión encontrada en 2º) para u^* era:

$$u^* = -R^{-1}G^t\mu$$

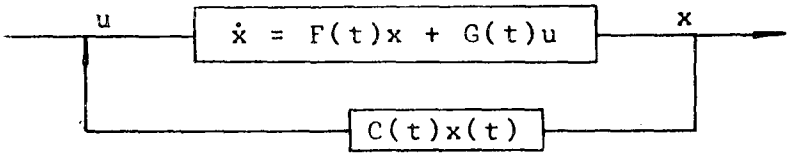
Ahora con $\mu^t = x^t P$ o sea $\mu = P\,x$, resulta

$$u^* = -R^{-1}(t)G^t(t)P(t)x$$

Si llamamos $C(t) = -R^{-1}(t)G^{t}(t)P(t)$,

$$u^{*} = C(t)x(t)$$

es decir,la ecuación de Ricatti nos da la síntesis del control óptimo.



2.6 EJEMPLO

Tomemos la ecuación del rotor

$$\ddot{x} = u$$

y el funcional

$$J = ax_f^2 + \int_{t_o}^{T} r\,u^2(t)\,dt$$

En la ecuación, x es el momento angular

u es el par alrededor del eje de rotación.

Si u(t) es proporcional a una corriente eléctrica,la energía total es la integral.(a,r > 0)

Hagamos $x_1 = x$, $x_2 = \dot{x}_1$; con esto obtenemos el sistema

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 \\ \dot{x}_2 = u \end{cases}$$

$$\begin{pmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} u$$

Teníamos $$J = x_f^t\, Ax_f + \int_{t_o}^{T} (x^t Q(t) x + u^t R(t) u)\, dt$$

En este caso:

- $x_f^t\, Ax_f = ax_f^2 = ax_{1_f}^2$ entonces $A = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$
- $Q(t) = 0$
- $R(t) = r$

y llamemos $P = \begin{pmatrix} p_1 & p_2 \\ p_2 & p_3 \end{pmatrix}$

Planteemos la ecuación de Ricatti (2.25):

$$\begin{pmatrix} \dot{p}_1 & \dot{p}_2 \\ \dot{p}_2 & \dot{p}_3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} p_1 & p_2 \\ p_2 & p_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p_1 & p_2 \\ p_2 & p_3 \end{pmatrix} -$$

$$- \begin{pmatrix} p1 & p_2 \\ p_2 & p_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} 1/r \quad (0,1) \begin{pmatrix} p_1 & p_2 \\ p_2 & p_3 \end{pmatrix} + 0 = 0$$

con $\begin{pmatrix} p_1(T) & p_2(T) \\ p_2(T) & p_3(T) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

Entonces

$$\begin{pmatrix} \dot{p}_1 & \dot{p}_2 \\ \dot{p}_2 & \dot{p}_3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & p_1 \\ 0 & p_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ p_1 & p_2 \end{pmatrix} - \frac{1}{r} \begin{pmatrix} p_2^2 & p_2 p_3 \\ p_2 p_3 & p_3^2 \end{pmatrix} = 0$$

o sea

$$\dot{p}_1 = \frac{1}{r} p_2^2 \qquad p_1(T) = a$$

$$\dot{p}_2 = -p_1 + \frac{p_2 p_3}{r} \qquad p_2(T) = 0$$

$$\dot{p}_3 = -p_2 + \frac{p_3^2}{r} \qquad p_3(T) = 0$$

La solución de la ecuación anterior,nos provee de la matriz necesaria para cerrar el lazo según la figura anterior.

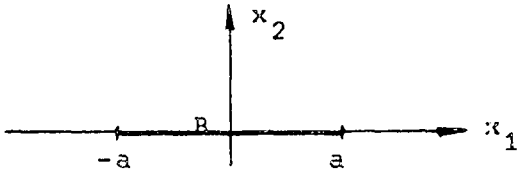
2.7 EJEMPLO DONDE NO VALE LA CONDICION SUFICIENTE

Retomemos el ejemplo dado en §1.4

$$\dot{x}_1 = x_2$$
$$\dot{x}_2 = u \qquad |u| \leq 1$$

pero ahora con el siguiente conjunto terminal:

$$B = \{ (x_1, x_2) \ / \ -a \leq x_1 \leq a \ , \ x_2 = 0 \}$$



El problema es llegar a B en mínimo tiempo.

Separaremos en dos partes:

1º) Resolveremos el problema con el Principio de Máximo de Pontryagin.

2º) Mostraremos que las condiciones suficientes no se pueden aplicar.

1º)

$$H = \psi_1 x_2 + \psi_2 u$$

y entonces,como antes, $u = sg\ \psi_2$

$$\frac{d\psi_1}{dt} = 0 \qquad \Rightarrow \qquad \psi_1 = \text{constante}$$

$$\frac{d\psi_2}{dt} = -\psi_1 \qquad \Rightarrow \qquad \psi_2 = -\psi_1 t + C$$

Como tenemos un conjunto de puntos como posibles para llegar a ellos,debemos aplicar la condición de transversalidad.

Así: $\langle \psi, T \rangle = 0$

donde T es tangente a B en el espacio $x_1 x_2$.

Entonces $T = (\theta, 0)$ con $\theta > 0$

y $\langle \psi, T \rangle = \theta \psi_1 + 0 = 0 \Rightarrow \psi_1 = 0$

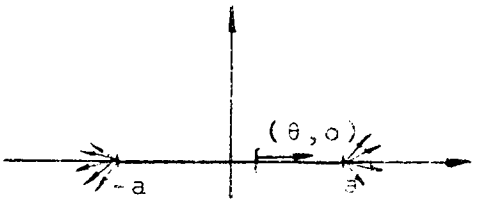
con lo que resulta $\psi_2 = C$ constante

Como $u = sg\, \psi_2$, resulta constantemente igual a +1 ó -1, sinpoder cambiar de uno a otro.

Como habíamos visto en §1.4, las trayectorias correspondientes son:

$$\begin{aligned} u &= 1 \qquad & x_1 &= \frac{1}{2} x_2^2 + k \\ u &= -1 \qquad & x_1 &= -\frac{1}{2} x_2^2 + k' \end{aligned} \tag{2.26}$$

Observemos que la condición de transversalidad no vale en los extremos del intervalo; en los puntos a y -a no está definido en vector tangente

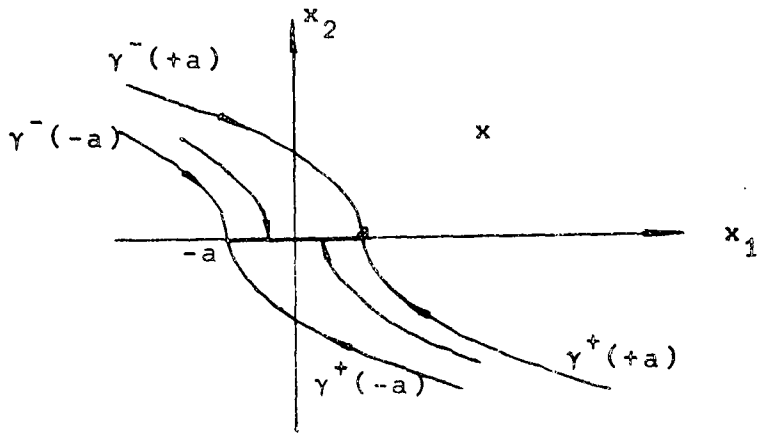


Como todo lo anterior se hizo con la condición de transversalidad, esos resultados son válidos sólo donde ella vale.

Si dibujamos las parábolas correspondientes a (2.26) que pasan por a y -a, lo anterior vale, (es decir, u = +1 ó -1 sin cambios) en la franja interior determinada por esas parábolas y no en el borde.

Llamemos $\gamma^+(+a)$ a la parábola que pasa por +a de la familia correspondiente a u = +1. Analogamente $\gamma^+(-a), \gamma^-(+a), \gamma^-(-a)$.

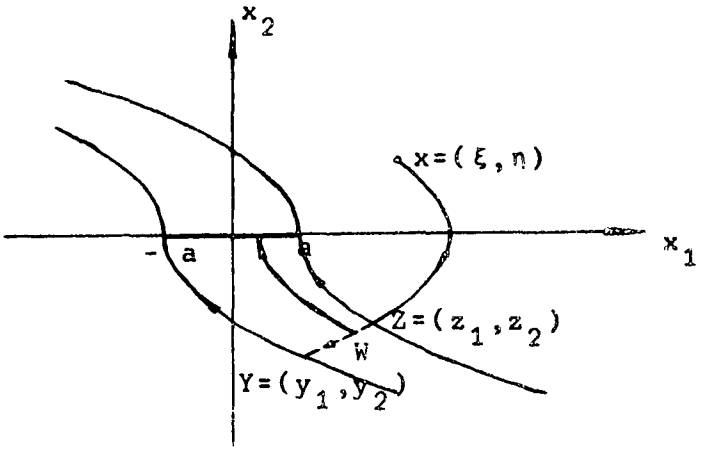
Con esto tenemos resuelto el problema para el interior de la franja(ver fig.). Si el estado inicial está en la parte superior ($x_2 > 0$) de la franja (sin el borde), se aplica u = -1 hasta llegar a B; si está en la parte inferior, u = +1.



Falta ver que pasa si el estado inicial está en el borde o fuera;por supuesto,seguirá valiendo que los controles son +1 ó -1 y las trayectorias son las parábolas (2.26).

Observemos que si el punto final de la trayectoria está en el interior de B,esto es, en (-a,a),se aplica la condición de transversalidad y eso conduce a la utilización de alguno de los controles solamente (u=+1 ó u=-1).

Esto nos dice que si estamos en un punto exterior a la franja,v.gr. en x,no podemos desde allí formar una trayectoria que nos conduzca al interior de B;en efecto:no es posible desde x ir a B sin cambiar de control(ver fig.),luego no se puede terminar en el interior de B ya que eso exigía usar un solo control. Las únicas posibilidades son pues,desde x llegar a (a,0) ó (-a,0) empalmando con las parábolas $\gamma^+(+a)$ ó $\gamma^+(-a)$ de la siguiente manera:



Las dos formas posibles son xza y xzy(-a).
Nuestro problema es ahora elegir entre las dos.Se puede concluír directamente:la trayectoria xzy(-a) no puede ser óptima;en efecto toda sección de trayectoria óptima es óptima;supongamos que xzy(-a) lo sea.Como lo es desde x,también lo será tomando como estado inicial w ,en virtud de lo dicho.O sea, wy(-a) es óptima. Absurdo,puesto que vimos que la óptima desde w es la que termina en el interior de B.De ésta manera,la óptima entre las dos propuestas es xza .

De idéntica manera se puede analizar cuando el estado inicial está debajo de la franja.

En resumen,la síntesis del control óptimo está dada por:
(ver fig.a)

$$v(x) = \begin{cases} +1 & \text{si } x \in A \cup \gamma^{+}(+a) \\ -1 & \text{si } x \in B \cup \gamma^{-}(-a) \end{cases}$$

2º) En esta sencillo problema no se puede aplicar la teoría de Hamilton-Jacobi-Bellman.

Supongamos el estado inicial (ξ,η)

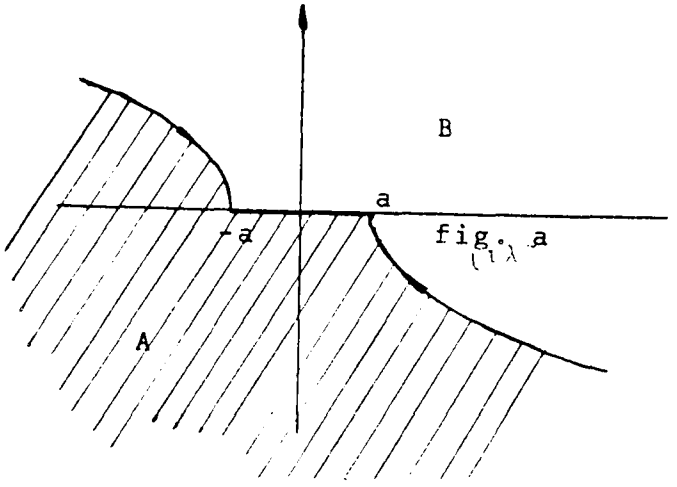
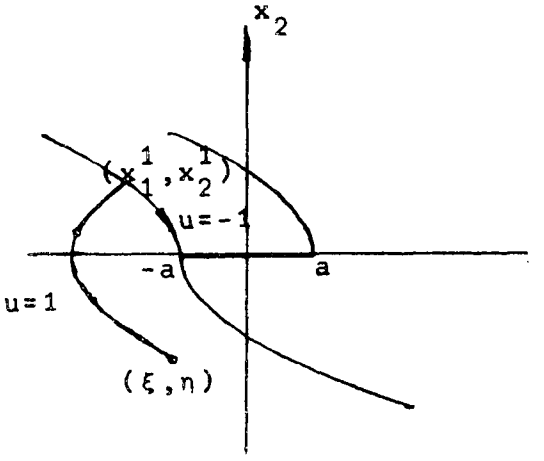


fig. a



Como
$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 \\ \dot{x}_2 = u \end{cases}$$

i) sobre la curva u = 1

$$\dot{x}_2 = 1 \quad \Rightarrow \quad x_2 = t + C_1$$

y
$$x_2\Big|_{t_o} = t_o + C_1 = \eta$$

$$\Rightarrow \quad C_1 = \eta - t_o$$

$$\Rightarrow \quad x_2 = \eta + (t - t_o)$$

$$\dot{x}_1 = x_2 \quad \Rightarrow \quad x_1 = t + \frac{(t - t_o)^2}{2} + C_2$$

$$x_1\Big|_{t_o} = \eta t_o + C_2 = \xi$$

$$\Rightarrow \quad x_1 = \xi + \eta(t - t_o) + \frac{1}{2}(t - t_o)^2$$

En definitiva, la variación de x_1 y x_2 sobre la curva u = 1

está dada por

$$x_2 = \eta + (t - t_o)$$
$$x_1 = \xi + \eta(t - t_o) + \frac{1}{2}(t - t_o)^2 \qquad (2.27)$$

ii) La ecuación de $\gamma^-(-a)$ es del tipo $x_1 = -1/2\ x_2^2 + k$.
Según vimos antes, aquí $k = -a$, entonces

$$x_1 = \frac{-1}{2} x_2^2 - a \qquad (2.28)$$

Por otra parte, el tiempo tardado en ir de (ξ,η) hasta $(-a,0)$ está dado por:

$$\tau_f = x_2^1 - \eta + x_2^1 = 2x_2^1 - \eta \qquad (2.29)$$

(como $\dot{x}_2 = \pm 1$ el tiempo que tarda está dado por la segunda coordenada en módulo)

Como aquí interviene x_2^1 , busquemos entre (2.27) y (2.28) su valor (que es la intersección de las dos curvas)
Lamando $\tau = t - t_o$ tenemos :

$$x_1 = \xi + \eta\tau + 1/2\tau^2 = -1/2\ x_2^2 - a$$

pero en el punto de intersección $x_2^1 = x_2 = \eta + \tau$ por (2.27)

$$\xi + \eta\tau + 1/2\ \tau^2 = -a - 1/2(\eta + \tau)^2$$
$$= -a - 1/2\eta^2 - \eta\tau - 1/2\tau^2$$
$$\tau^2 + 2\ \eta\tau + 1/2\ \eta^2 = -a - \xi$$
$$(\tau + \eta)^2 - 1/2\ \eta^2 = -a - \xi$$
$$(\tau + \eta)^2 = 1/2\ \eta^2 - a - \xi$$
$$\tau = \sqrt{1/2\ \eta^2 - a - \xi} - \eta$$

y ahora, como tenemos $x_2^1 = \eta + \tau$
con lo anterior resulta:

CAPITULO 3

TEORIA CUALITATIVA

CONTROLABILIDAD Y OBSERVABILIDAD

$$x_2^1 = \sqrt{-1/2\,\eta^2 - a - \xi}$$

Reemplazando en (2.29)

$$\tau_f = 2\sqrt{-1/2\,\eta^2 - a - \xi} - \eta$$

Como éste es un problema de tiempo óptimo, la función de retorno $V(x,t)$ es el τ_f.

El teorema demostrado en §2.3 tenía como hipótesis que las derivadas parciales de $V(x,t)$ eran continuas. Veremos que ésta suposición falla en nuestro caso:

$$\frac{\partial}{\partial \xi}(\tau_f) = \frac{-1}{\sqrt{-1/2\eta^2 - a - \xi}}$$

$$\frac{\partial}{\partial \eta}(\tau_f) = -1 + \frac{\eta}{\sqrt{-1/2\eta^2 - a - \xi}}$$

Cuando nos acercamos a $\gamma^+(-a)$, la ecuación de ella es, según vimos en el comienzo: $x_1 = 1/2\, x_2^2 + k$ y en nuestro caso $x_1 = 1/2\, x_2^2 + a$.

Si tomamos (ξ,η) muy próximo a $\gamma^+(-a)$ entonces

$$\xi = 1/2\eta^2 - a$$

o sea $$1/2\eta^2 - a - \xi = 0$$

Es decir que $\frac{\partial}{\partial \xi}$ y $\frac{\partial}{\partial \eta}$ tienden a infinito.

3.0 INTRODUCCION

Antes de tratar los problemas específicos correspondientes a este capítulo, es decir controlabilidad y observabilidad, haremos una breve introducción a otros temas que intervienen en el estudio, tales como formas cuadráticas y sistemas lineales de ecuaciones diferenciales.

3.01 FORMAS CUADRATICAS

Definición: una forma cuadrática es un polinomio de segundo grado homogéneo de n variables $x_1, x_2, ----, x_n$.

Veremos que una forma cuadrática se puede representar siempre como

$$\sum_{i,k=1}^{n} a_{ik} x_i x_k \qquad (3.1)$$

con $a_{ik} = a_{ki}$, o sea la matriz A de coeficientes, simétrica.
En efecto, el polinomio homogéneo tendrá el término

$$c_{ik} x_i x_k + c_{ki} x_k x_i$$

y entonces tomando nuevos coeficientes

$$a_{ik} = 1/2 \, (c_{ik} + c_{ki}) = a_{ki}$$

resulta

$$(a_{ik} + a_{ki}) x_i x_k = (c_{ik} + c_{ki}) x_k x_i$$

y se tiene así la representación dicha.
Observemos que (3.1) se puede escribir $A(x,x) = x^t A x$,
con x vector columna de dimensión n. (El sobreíndice t indica transpuesta).

Definición: A(x,x) es positiva semidefinida si y solo si

$$A(x,x) \geq 0 \quad \text{para todo } x$$

(negativa semidefinida: $A(x,x) \leq 0$ para todo x).

Definición: $A(x,x)$ es positiva definida si y solo si

$$A(x,x) \geq 0 \quad \text{para todo } x \neq 0$$

(negativa definida: $A(x,x) \leq 0$ para todo $x \neq 0$).

Lema 1

Si $B = AA^t$, entonces $B(x,x)$ es positiva semidefinida.

Demostración:

$$B(x,x) = x^t AA^t x = (x_1,---,x_n) \begin{pmatrix} a_{11} & a_{1n} \\ a_{n1} & a_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{11} & a_{n1} \\ a_{1n} & a_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_n \end{pmatrix} =$$

$$= x_1^2 \Sigma a_{1i}^2 + x_1x_2 \Sigma a_{1i}a_{2i} + ------- + x_1x_n \Sigma a_{1i}a_{ni} +$$
$$+ x_2x_1 \Sigma a_{2i}a_{1i} + x_2^2 \Sigma a_{2i}^2 + --------+ x_2x_n \Sigma a_{2i}a_{ni} +$$
$$+----------+$$
$$+ x_nx_1 \Sigma a_{ni}a_{1i} + ---------- + x_n^2 \Sigma a_{ni}^2 =$$

$$= \sum_i (x_1^2a_{1i}^2 + x_2^2a_{2i}^2 + ------ + x_n^2a_{ni}^2 + 2x_1x_2a_{1i}a_{2i} + 2x_1x_3a_{1i}a_{3i} +$$
$$+ ---------- + 2x_{n-1}x_na_{n-1\ i}\ a_{ni}) =$$

$$= \sum_i (x_1a_{1i} + x_2a_{2i} + ---------- + x_na_{ni})^2 \geq 0 \quad \text{para todo } x$$

lo que demuestra el lema.

TEOREMA 1

A matriz simétrica real,

entonces existe una matriz T ortogonal tal que

$$T^tAT = diag(\lambda_1,\lambda_2,----,\lambda_n)$$

donde los λ_i son los autovalores de A, no necesariamente distintos.

Demostración: no es dificultosa pero si larga; se hace por inducción y puede verse en Bellman[2].

Lema 2

A es positiva definida independiente del sistema de coordenadas.

Demostración:

Si $x^tAx > 0$ para todo $x \neq 0$ y cambiamos de coord. haciendo $x = T\xi$, T no singular ,resulta:

$$(T\xi)^tA(T\xi) = \xi^tT^tAT\xi$$

de manera que al cambiar de coordenadas la matriz de la forma cuadrática es T^tAT.

Además, $\xi^tT^tAT\xi > 0$ para todo$\xi \neq 0$

pues si fuera ≤ 0 con $\xi \neq 0$, tomando $x = T\xi$ resulta $x \neq 0$ dado que T admite inversa,y con ese x, $x^tAx \leq 0$,que es absurdo.

Luego, T^tAT es positiva definida.

Corolario 1

A es positiva definida si y solo si todos sus autovalores son positivos.

Demostración:

Por el teorema 1 $x^t(T^tAT)x = \sum \lambda_i x_i^2 > 0 \iff \lambda_i > 0$

y entonces $A > 0 \iff \lambda_i > 0$ para todo i.

Corolario 2

Si A es positiva definida,entonces existe A^{-1}.-

Demostración:

Con la T ortogonal del teorema 1, $detA = det(T^tAT)$; pero $T^tAT = diag(\lambda_1,\lambda_2,---,\lambda_n)$ y entonces el determinante (que es el producto de los autovalores) es un número positivo,por el corolario 1.Como $detA \neq 0$,existe la inversa de A.

3.02 SISTEMAS LINEALES HOMOGENEOS DE ECUACIONES DIFERENCIALES

TEOREMA 2

A(t) es una matriz de nxn cuyos elementos son funciones continuas en un intervalo I; $\Phi(t)$ una matriz (de nxn) de funciones, que satisface

$$\dot{\Phi}(t) = A(t)\Phi(t)$$

entonces, $\det\Phi(t)$ satisface la ecuación de 1er. orden

i) $(\det\Phi)' = Tz\ A \cdot \det\Phi$ (3.2)

donde ' = . y Tz A (Traza de A) es la suma de los elementos de la diagonal.

y para $\tau, t \in I$,

ii) $$\det \Phi(t) = \det \Phi(\tau) \cdot \exp\left(\int_{\tau}^{t} Tz\ A(s)\, ds \right)$$ (3.3)

Demostración:

$$\Phi(t) = (\phi_{ij}(t)) \qquad A(t) = (a_{ij}(t))$$

Como $\dot{\Phi}(t) = A(t)\,\Phi(t)$, resulta

$$\dot{\phi}_{ij}(t) = \sum_{k=1}^{n} a_{ik}(t)\, \phi_{kj}(t) \qquad i,j:1,2,\text{----},n. \qquad (3.4)$$

La derivada de $\det\Phi$ es:

$$(\det \Phi)' = \begin{vmatrix} \phi'_{11} & \phi'_{12} & \text{----} & \phi'_{1n} \\ \phi_{21} & \phi_{22} & \text{----} & \phi_{2n} \\ & & & \\ \phi_{n1} & \phi_{n2} & \text{----} & \phi_{nn} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \phi_{11} & \phi_{12} & \text{-----} & \phi_{1n} \\ \phi'_{21} & \phi'_{22} & \text{-----} & \phi'_{2n} \\ & & & \\ \phi_{n1} & \phi_{n2} & \text{----} & \phi_{nn} \end{vmatrix} + \text{——}$$

$$+ \text{----------} + \begin{vmatrix} \phi_{11} & \phi_{12} & & \phi_{1n} \\ \phi_{21} & \phi_{22} & & \phi_{2n} \\ & & & \\ \phi'_{n1} & \phi'_{n2} & & \phi'_{nn} \end{vmatrix}$$

Reemplazando por (3.4),el primer determinante da:

$$\begin{vmatrix} \Sigma\, a_{1k}\phi_{k1} & \Sigma\, a_{1k}\phi_{k2} & \cdots & \Sigma\, a_{1k}\phi_{kn} \\ \phi_{21} & \phi_{22} & & \phi_{2n} \\ \cdot & & & \\ \cdot & & & \\ \cdot & & & \\ \phi_{n1} & \phi_{n2} & \cdots & \phi_{nn} \end{vmatrix}$$

Este determinante no cambia si restamos a la primera fila la 2a. x a_{12} + 3a. x a_{13} + ------- + na. x a_{1n}; así queda

$$\begin{vmatrix} a_{11}\phi_{11} & a_{11}\phi_{12} & \cdots & a_{11}\phi_{1n} \\ \phi_{21} & \phi_{22} & & \phi_{2n} \\ \cdot & & & \\ \cdot & & & \\ \cdot & & & \\ \phi_{n1} & \phi_{n2} & \cdots & \phi_{nn} \end{vmatrix}$$

$$= a_{11} \cdot \det\Phi$$

Haciendo lo mismo con los demás,tenemos:

$$(\det \Phi)' = a_{11}\det\Phi + a_{22}\det\Phi + \cdots\cdots + a_{nn}\det\Phi =$$

$$= Tz\ A \cdot \det\Phi$$

con lo cual queda demostrado i).
Esta última ecuación es del tipo $x' = a(t)\,x$ que tiene por solución una expresión de la forma $x(t) = K \exp\left(\int_{\tau}^{t} a(s)\,ds\right)$.
En nuestro caso,es:

$$\det\Phi(t) = K \exp\left(\int_{\tau}^{t} Tz\ A(s)\,ds\right)$$

de donde $\det \Phi(\tau) = K$

y entonces

$$\det \Phi(t) = \det\Phi(\tau) \exp \left(\int_{\tau}^{t} Tz\ A(s)\ ds \right)$$

lo que termina la demostración.

MATRIZ DE TRANSICION.

Estudiemos ahora el sistema

$$\dot{X} = P(t)\ X(t) \qquad (3.5)$$

donde X(t) es una matriz de nxn.

A la matriz solución de (3.6) que satisfaga la condición de ser la identidad en t_o ,la llamamos matriz de transición y escribiremos

$$\Phi\ (t,t_o)$$

Por lo dicho, $\Phi(t_o,t_o) = I$.

Del teorema anterior sale que si $\det\Phi(\tau) \neq 0$ para algún t,entonces es distinto de cero para todo t.

En el caso de matriz de transición,como $\Phi(t_o,t_o) = I$,resulta que $\det \Phi(t,t_o) \neq 0$ para todo t,por lo que :la matriz de transición es no singular para todo t.

Lema

Si $\overline{X}$ es una solución particular no singular ($\det \overline{X} \neq 0$) del sistema (3.5)

entonces la solución general está dada por

$$X = \overline{X}\ .\ C \qquad (3.6)$$

donde C es una matriz constante arbitraria.

Demostración:

$$\overline{X}' = P\ \overline{X} \quad \text{entonces} \quad \overline{X}'\ C = P\ \overline{X}\ C \quad \text{y} \quad (\overline{X}\ C)' = P(\overline{X}\ C)$$

con lo cual vemos que $\overline{X}\ C$ es solución.

Tenemos que ver además que cualquier solución se puede poner en la

forma $\overline{X}C$, o sea, que esa es, efectivamente la solución general.

Sea X una solución arbitraria; entonces $\dot{X} = PX$

y de allí: $(\overline{X}.\overline{X}^{-1}.X)' = (\overline{X})'.\overline{X}^{-1}X + \overline{X}.(\overline{X}^{-1}X)'$

$$= P\overline{X}.\overline{X}^{-1}X + \overline{X}.(\overline{X}^{-1}X)'$$

$$= PX + \overline{X}.(\overline{X}^{-1}X)'$$

o sea, $X' = PX + \overline{X}.(\overline{X}^{-1}X)'$

y comparando con la de arriba

$$\overline{X}.(\overline{X}^{-1}X)' = 0 \quad \Rightarrow \quad (\overline{X}^{-1}X)' = 0$$

de donde $\overline{X}^{-1}.X = C = cte.$

o $X = \overline{X}.C$ como queríamos demostrar.

PROPIEDADES:

Las siguientes propiedades de la matriz de transición son importantes.

1) Dado el sistema de nxn

$$\dot{x} = P(t)\, x(t) \tag{3.7}$$

y una condición inicial $x(t_o) = x_o$, la solución será:

$$x(t) = \Phi(t,t_o)x_o$$

En efecto:

$$\dot{x} = \dot{\Phi}(t,t_o)\, x_o = P(t)\, \Phi(t,t_o)\, x_o$$

pero $\dot{x} = P(t)\, x(t)$, y comparando resulta $x(t)=\Phi(t,t_o)x_o$.

2) Cualesquiera sean t_o, t_1, t , vale

$$\Phi(t,t_o) = \Phi(t,t_1)\Phi(t_1,t_o)$$

Veamos: tanto $\Phi(t,t_o)$ como $\Phi(t,t_1)$ sonsoluciones del sistema. De allí que por el lema, $\Phi(t,t_o) = \Phi(t,t_1).C$,con C = cte. Haciendo $t = t_1$, queda $\Phi(t_1,t_o) = C$ (puesto que $\Phi(t_1,t_1) = I$) Entonces,reemplazando esto en el renglón anterior,resulta la expresión buscada.

3) Se verifica que $\Phi(t_1,t_o) = \Phi^{-1}(t_o,t_1)$.

Probémoslo:por la propiedad 2,tenemos

$$\Phi(t,t_o) = \Phi(t,t_1)\Phi(t_1,t_o)$$

y si hacemos $t = t_o$, $\quad I = \Phi(t_o,t_1)\Phi(t_1,t_o)$

Pero también podemos escribir

$$\Phi(t,t_1) = \Phi(t,t_o)\Phi(t_o,t_1)$$

y si $t = t_1$, $\quad I = \Phi(t_1,t_o)\Phi(t_o,t_1)$

y de ambas resulta la igualdad mencionada.

3.03 SISTEMAS LINEALES NO HOMOGENEOS

Buscaremos la solución del sistema

$$\dot{x} = P(t)\, x(t) + Q(t)\, u(t) \qquad (3.8)$$

Sea $\Phi(t,t_o)$ la matriz de transición del homogéneo $\dot{x} = P\,x$. Usaremos el método de variación de parámetros:ya sabemos que $\Phi(t,t_o).C$ es la solución general del homogéneo(Ces un vector); para buscar la del no homogéneo,consideraremos C como función de t,y buscaremos C(t) de tal manera que $x(t) = \Phi(t,t_o)C(t)$ sea una solución de (3.8)

Supongamos que $x(t) = \Phi(t,t_o)\, C(t)$ es solución de (3.8). Entonces,

$$\dot{x} = \dot{\Phi}(t,t_o)\, C(t) + \Phi(t,t_o)\, \dot{C}(t)$$

$$= P(t)\, \Phi(t,t_o)\, C(t) + \Phi(t,t_o)\, \dot{C}(t)$$

$$= P(t)\, x(t) + \Phi(t,t_o)\, \dot{C}(t) \qquad (3.9)$$

Comparando con (3.8) resulta

$$\Phi(t,t_o)\, \dot{C}(t) = Q(t)\, u(t)$$

$$\dot{C}(t) = \Phi^{-1}(t,t_o)\, Q(t)\, u(t)$$

y de allí,

$$C(t) = \int_{t_o}^{t} \Phi^{-1}(s,t_o)\, Q(s)\, u(s)\, ds$$

con $C(t_o) = 0$

Ahora

$$x(t) = \Phi(t,t_o)\, C(t) =$$

$$= \Phi(t,t_o) \int_{t_o}^{t} \Phi^{-1}(s,t_o)\, Q(s)\, u(s)\, ds$$

Si la condición inicial es $x(t_o) = x_o$,tiene que ser
$x(t) = \Phi(t,t_o)\,(x_o + C(t))$ ya que $C(t_o) = 0$
de donde obtenemos la fórmula que nos da la solución de(3.8)

$$x(t) = \Phi(t,t_o)\, x_o + \Phi(t,t_o) \int_{t_o}^{t} \Phi^{-1}(s,t_o) Q(s) u(s) ds \qquad (3.10)$$

o lo que es lo mismo

$$x(t) = \Phi(t,t_o)\, x_o + \int_{t_o}^{t} \Phi(t,s)\, Q(s)\, u(s)\, ds$$

3.04 CALCULO DE LA MATRIZ DE TRANSICION

1) En el caso de ser P(t) no constante, el método es integrar el sistema

$$\dot{\Phi}(t,t_o) = P(t)\Phi(t,t_o)$$

con $$\Phi(t_o,t_o) = I$$

Se hace con métodos numéricos como Runge y Kutta, el predictor de Adams-Bashforth, o el predictor-corrector de Adams-Moulton.

2) En el caso de coeficientes constantes, se puede ver que

$$\Phi(t,t_o) = e^{(t - t_o)P}$$

Se facilitan los cálculos si los autovalores de P son distintos ya que así P es equivalente a la diagonal D de autovalores

$$P = T^{-1}DT$$

De allí $$e^{Pt} = T^{-1}\, e^{Dt}\, T \qquad y \qquad e^{Dt} = diag(e^{\lambda_1 t},----,e^{\lambda_n t})$$

También se puede calcular usando el polinomio de Lagrange-Sylvester que se simplifica mucho en este caso.

3) También en el caso P = cte. se puede usar la transformada de Laplace:

$$L(e^{Pt}) = (sI - P)^{-1}$$

siendo posible calcular el término de la derecha por el método de Faddeeva:

$$(sI - P)^{-1} = (det(sI - P))^{-1}(P_o s^{n-1} + ----- + P_{n-1})$$

donde, $det(sI-P) == s^n - d_1 s^{n-1} - ..... - d_n$ y

$P_o = I$

$P_1 = P - d_1 I \qquad d_1 = Tz\ P$

$P_2 = PP_1 - d_2 I \qquad d_2 = 1/2\ Tz\ PP_1$

$P_k = PP_{k-1} - d_k I \qquad d_k = 1/k\ Tz\ PP_{k-1}$

3.1 SISTEMAS DINAMICOS

Antes de dar su definición,daremos algunas breves ideas intuitivas sobre el tema.

Podemos visualizar un sistema como un circuito eléctrico que se excita con un voltaje y cuya respuesta es una corriente.Vemos que el concepto de sistema tiene asociado un intervalo de tiempo T. En cada momento $t \in T$,nuestro sistema Σ recibe alguna excitación u(t) y emite alguna respuesta y(t).Supondremos que los valores de las excitaciones son tomados de algún conjunto U fijo;esto es,en cada t, $u(t) \in U$.En general tampoco se toma como excitación cualquier función $u:T \longrightarrow U$ sino que se utilizan las pertenecientes a una cierta clase Ω.Asimismo cada valor de las respuestas y(t) pertenecerá a un conjunto fijo Y.

Observemos que la respuesta no solo depende de la excitación sino también de la"historia" del sistema;en nuestro caso,por ejemplo,de la energía almacenada.Diremos entonces que la respuesta actual del sistema Σ depende del "estado"de Σ ,y definimos intuitivamente <u>estado</u> como los datos del presente y de la historia de Σ que son más importantes en la determinación de las presentes y de las futuras respuestas.O sea que vemos al estado como un atributo interno del sistema en el momento presente que determina la respuesta presente y afecta a las futuras.

Necesitamos,por supuesto,que el conjunto de estados sea suficientemente amplio como para contener toda la información sobre la historia de Σ necesaria para conocer el efecto del pasado sobre el futuro,y al mismo tiempo,para simplificar,el menor de los que cumplen con eso.

<u>Definición 1</u>: Se llama sistema dinámico Σ al objeto

$$(T, X, U, \Omega, Y, \Gamma, \phi, \eta)$$

donde:

$T \subset R$

X es el conjunto de estados

U es el conjunto de valores que toman las excitaciones

$\Omega = \{u:T \longrightarrow U\}$ conjunto de excitaciones admisibles

Y conjunto de valores para la respuestas

$\Gamma = \{y:T \longrightarrow Y\}$ oonjunto de funciones respuestas

que deben satisfacer:

a) a_1) $\Omega \neq \emptyset$

a_2) (concatenación)

si u_1 definido en $[t_1,t_2]$ pertenece a Ω

si u_2 definido en $[t_2,t_3]$ pertenece a Ω

entonces

$$u(t) = \begin{cases} u_1 & \text{si } t \in [t_1,t_2] \\ u_2 & \text{si } t \in [t_2,t_3] \end{cases}$$

también pertenece a Ω.

b) ϕ es la trayectoria

$$\phi : T \times T \times X \times \Omega \longrightarrow X$$

$$\phi(t;\tau,x,u) = x(t) \in X$$

Es decir: x(t) es el estado en el tiempo t qme de consigue comenzando en el estado incial $x = x(\tau)$,en el tiempo inicial τ y bajo la acción de la excitación u.

Tiene las siguientes propiedades:

b_1) ϕ definida para todo $t \geq \tau$ (pero no necesariamente para los $t < \tau$.

b_2) $\phi(t;t,x,u) = x$ cualesquiera sean $t \in T, x \in X, u \in \Omega$.

b_3) (composición) Para todos $t_1 < t_2 < t_3$

$$\phi(t_3;t_1,x,u) = \phi(t_3;t_2,\phi(t_2;t_1,x,u),u)$$

b_4) (causalidad) Si $u_1 = u_2$ en $[t_o,t_1]$,

entonces

$$\phi(t;t_o,x,u_1) = \phi(t;t_o,x,u_2)$$

c) η es la función que da la respuesta en cada t,para el estado en ese instante:

$$\eta : T \times X \longrightarrow Y$$

El origen de la teoría de sistemas dinámicos,está en el estudio de las propiedades geométricas de las soluciones de sistemas de ecuaciones diferenciales.La definición axiomática dada; es una abstracción de dichas propiedades(excepto la parte que se refiere a la salida del sistema).

Los sistemas dinámicos que utilizamos en los ejemplos dados anteriormente son descriptos por ecuaciones diferenciales, ya que así aparecen cuando estudiamos procesos físicos.

3.2 CONTROLABILIDAD (I)

Sea el sistema lineal

$$\dot{x} = F(t)\, x(t) + G(t)\, u(t)$$

Definición(Kalman 1960)

Diremos que el sistema es controlable en el instante t, si cualesquiera sean ξ, η en el espacio de estados, existe un control definido en un intervalo $[t,\tau]$ que transfiere al sistema desde el estadoξ al η: (Ver § 3.03)

$$\eta = \Phi(\tau,t)\xi + \int_t^\tau \Phi(t,s)\, G(s)\, u(s)\, ds$$

Si el sistema es controlable en todo instante, diremos que es completamente controlable.

En los teoremas siguientes estudiaremos criterios de controlabilidad de sistemas lineales(autónomos y no autónomos).

TEOREMA 3

El sistema es controlable en t si y solo si existe τ tal que la matriz

$$C(t,\tau) = \int_t^\tau \Phi(t,s)G(s)G^t(s)\Phi^t(t,s)\, ds$$

es positiva definida.

Demostración:

1)(<=) Sean ξ, η dos estados arbitrarios.

Definimos

$$u(s) = G^t(s)\Phi^t(t,s)C^{-1}(t,\tau)(-\xi+\Phi(t,\tau)\eta)$$

Se verifica facilmente que está bien definido;en efecto $u(s) \in R^m$, y existe $C^{-1}(t,\tau)$ ya que por hipótesis es definida positiva.(Ver § 3.01)

Sabemos que:

$$x(\tau) = \Phi(\tau,t)\,\xi + \int_t^\tau \Phi(\tau,s)\,G(s)\,u(s)\,ds$$

$$= \Phi(\tau,t)\xi + \int_t^\tau \Phi(\tau,s)G(s)G^t(s)\Phi^t(t,s)C^{-1}(t,\tau)(-\xi+\Phi(t,\tau)\eta)ds$$

$$= \Phi(\tau,t)\xi+(\int_t^\tau \Phi(\tau,s)G(s)G^t(s)\Phi^t(t,s)ds)C^{-1}(t,\tau)(-\xi+\Phi(t,\tau)\eta)$$

$$= \Phi(\tau,t)\xi+\Phi(\tau,t)\int_t^\tau \Phi(t,s)G(s)G^t(s)\Phi^t(t,s)dsC^{-1}(t\tau)(-\xi+\Phi(t,\tau)\eta)$$

$$= \Phi(\tau,t)\xi+\Phi(\tau,t)C(t,\tau)C^{-1}(t,\tau)(-\xi+\Phi(t,\tau)\eta)$$

$$= \Phi(\tau,t)\xi - \Phi(\tau,t)\xi + \Phi(\tau,t)\Phi(t,\tau)\eta$$

$$= \eta$$

2) (=>)

Demostraremos esta implicación por absurdo.

La tesis es

existe $\tau > t$ tal que $x^tC(t,\tau)\,x > 0$ para todo $x \neq 0$

su negación

existe $x \neq 0$ tal que $x^tC(t,\tau)\,x \leq 0$ para todo $\tau > t$

Pero por el lema 1, la matriz $C(t,\tau)$ es positiva semidefinida.

Así queda:

existe $x \neq 0$ tal que $x^tC(t,\tau)\,x = 0$ para todo $\tau > t$

o sea $$x^t \left(\int_t^\tau \Phi(t,s)G(s)G^t(s)\Phi^t(t,s)ds \right) x = 0 \quad " \quad " .$$

y entonces $$\int_t^\tau x^t\Phi(t,s)G(s)G^t(s)\Phi^t(t,s)\,x\;ds = 0$$

Si hacemos $x^t\Phi(t,s)G(s) = p$ es $p^t = G^t(s)\Phi^t(t,s)x$

Lo anterior queda

$$\int_t^\tau pp^t \, ds = 0 \quad \Rightarrow \quad \int_t^\tau |p|^2 \, ds = 0$$

y de allí se concluye $p = 0$, es decir

$$x^t \Phi(t,s)G(s) = 0 \quad \text{para todo} \quad t \leq s \leq \tau \text{ , y todo } \tau \text{ .} \quad (3.11)$$

Ahora usaremos la hipótesis: el sistema es controlable en t; entonces para cada par de estados hay un control que hace la transferencia de uno a otro en tiempo finito.

Supongamos que transferimos x al 0.

Entonces

$$\Phi(t_1,t)x + \int_t^{t_1} \Phi(t_1,s)G(s)u(s)ds = 0$$

$$x = -\Phi^{-1}(t_1,t) \int_t^{t_1} \Phi(t_1,s)G(s)u(s)ds$$

$$x = -\int_t^{t_1} \Phi(t,s)G(s)u(s)ds$$

entonces

$$x^t x = -\int_t^{t_1} x^t \Phi(t,s)G(s)u(s)ds$$

Como por (3.11) el integrando es cero para todo s, resulta

$$x^t x = |x|^2 = 0$$

o sea $x = 0$. Absurdo, luego existe τ tal que $C(t,\tau)$ es positiva definida.

Con esto queda demostrado el teorema.

3.3 CONTROLABILIDAD EN SISTEMAS AUTONOMOS Y LINEALES

TEOREMA 4

Un sistema dinámico lineal y autónomo

$$\dot{x} = F\,x + G\,u$$

$$y = Hx$$

es controlable si y solo si

$$rg\,(G,FG,F^2G,----,F^{n-1}G) = n \qquad (3.12)$$

(el paréntesis es una matriz de n filas por m.n columnas obtenida juntando las matrices indicadas allí una al lado de la otra.)

Demostración:

(<=)

Supongamos por el absurdo que el sistema no sea controlable. Entonces por el Teorema 3, la matriz $C(t,\tau)$ no es positiva definida para todo τ. Estamos así en el mismo caso que en la demostración de (=>) de dicho teorema; como allí podemos llegar a

$$\eta^t\Phi(t,s)\,G = 0 \quad \text{para todo} \quad t \le s \le \tau \quad \text{con } \eta \neq 0 \qquad (3.13)$$

En particular para $s = t$; como $\Phi(t,t) = I$, $\eta^tG = 0$.

Como $\Phi(t,s)$ es la matriz de transición satisfacee

$$\dot{\Phi} = F\,\Phi(t,s)$$

entonces, derivando (3.13), $\eta^tF\Phi(t,s)G = 0$ (3.14)

y en $t = s$, $\eta^tFG = 0$

Derivando (3,14) respecto de t:

$$\eta^tF^2\Phi(t,s)G = 0$$

y en $t = s$, $\eta^tF^2G = 0$

y siguiendo con ese procedimiento llegaremos a $\eta^tF^{n-1}G = 0$

O sea que probamos que con algún $\eta \neq 0$,

$$\begin{aligned} \eta^t G &= 0 \\ \eta^t F\, G &= 0 \\ &\text{----------} \\ \eta^t F^{n-1} G &= 0 \end{aligned} \qquad (3.15)$$

o lo que es lo mismo

$$\eta^t (G, FG, F^2G, \text{-----}, F^{n-1}G) = 0$$

Llamemos $f_1, \text{-----}, f_n$ a los vectores filas de la matriz$(G, FG, \text{---}, \text{--}, F^{n-1}G)$

Lo anterior nos dice

$$\sum_{i=1}^{n} \eta_i f_i = 0 \quad \text{con algún } \eta_i \neq 0 \quad (\text{ya que } \eta \neq 0)$$

Entonces los vectores f_i son linealmente dependientes,o sea que el rango de la matriz $(G, FG, \text{----}, F^{n-1}G)$ es menor que n.Este absurdo termina la demostración.

(=>)

Demostraremos también por el absurdo.

Supongamos que $rg(g, FG, \text{----}, F^{n-1}G) < n$.

Entonces las filas de la matriz son linealmente dependientes,o sea

$$\sum_{i=1}^{n} \eta_i f_i = 0 \quad \text{con algún } \eta_i \neq 0$$

esto se puede escribir

$$(\eta_1, \eta_2, \text{----} \eta_n) \begin{pmatrix} f_1 \\ - \\ - \\ f_n \end{pmatrix} = 0$$

o sea $\eta^t (g, FG, \text{-----}, F^{n-1}G) = 0$ con $\eta \neq 0$.

Al igual que en la parte anterior,es lo mismo que

$$\eta^t G = \eta^t FG = \text{-----} = \eta^t F^{n-1} G = 0 \qquad (3.16)$$

Recordemos el Teorema de Cayley-Hamilton: F matriz de nxn;
el det($\lambda I - F$) es un polinomio de grado n, digamos

$$a_o\lambda^n + a_1\lambda^{n-1} + \text{----} + a_n$$

El teorema dice que F satisface

$$a_oF^n + a_1F^{n-1} + \text{----} + a_n = 0$$

Entonces podemos escribir

$$F^n = -a_1/a_o\ F^{n-1} - \text{....} - a_n/a_o\ I$$

$$= c_1F^{n-1} + c_2F^{n-2} + \text{----} + c_nI \qquad (3.17)$$

De allí $\eta^tF^nG = c_1\eta^tF^{n-1}G + c_2\eta^tF^{n-2}G + \text{----} + c_n\eta^tG$

Como cada sumando es igual a cero por (3.16), resulta que

$$\eta^tF^nG = 0$$

O sea que hemos podido ampliar (3.16) hasta n.
De allí por inducción podemos escribir

$$\eta^tF^{n+k}G = 0 \qquad k = 0,1,2,\text{-----}$$

o sea tenemos probado que

$$\eta^tF^kG = 0 \qquad \text{para todo k} \qquad (3.18)$$

Tomemos ahora el sistema $\dot{x} = Fx + Gu$ con la condición inicial $x_o = 0$. Como el sistema es autónomo, la matriz de transición es

$$\Phi(\tau,s) = \Phi(\tau-s) = e^{F(\tau-s)}$$

entonces

$$x(t) = \int_0^\tau e^{F(\tau-s)}Gu(s)ds \qquad (3.19)$$

pero $e^{F(\tau-s)} = I + F(\tau-s) + 1/2F^2(\tau-s)^2 + \text{----------}$

entonces $\eta^t e^{F(\tau-s)}G = \eta^t(I + F(\tau-s) + ------)G = 0$

por lo obtenido en (3.18).

De esto y (3.19) resulta:

$$\eta^t x(t) = 0 \quad \text{para todo control } u(t).$$

Esto dice que η es ortogonal a la trayectoria cualquiera sea el control usado. Si llamamos H al hiperplano ortogonal al vector η, lo anterior indica que la trayectoria, en todo instante, está en H; de manera que dado como estado final un punto fuera de H, no hay ningún control que lleve el origen hasta allí. Esto contradice la hipótesis de controlabilidad y termina la demostración.

Como se ve este teorema provee de un método computable para determinar la controlabilidad en el caso de los sistemas lineales y autónomos.

Se puede demostrar un corolario al teorema anterior que simplifica el criterio ya que acorta la matriz a la que se le busca el rango:

Corolario:

Si rg G = k, el sistema (lineal y autónomo) es controlable si y solo si

$$rg(G, FG, ------, F^{n-k}G) = n$$

3.4 CONTROLABILIDAD (II) Y OBSERVABILIDAD

Daremos ahora otra visión de los puntos tratados en elos parágrafo anteriores; comenzaremos con la siguiente d

Definición: Dados dos sistemas dinámicos

$$\begin{cases} \dot{x} = F(t)x(t) + G(t)u(t) \\ y = H(t)x(t) \end{cases} \tag{3.20}$$

$$\begin{cases} \dot{\bar{x}} = \bar{F}(t)\bar{x}(t) + \bar{G}(t)u(t) \\ y = \bar{H}(t)\bar{x}(t) \end{cases} \tag{3.21}$$

se dirán algebraicamente equivalentes si existe una transformación lineal biyectiva (es decir,tiene inversa)

$$T : [t_o, t_1] \times X \longrightarrow [t_o, t_1] \times \bar{X}$$

tal que para cada $t \in [t_o, t_1]$

$$(t, \bar{x}) = (t, T(t)x)$$

LEMA: Si un sistema es completamente controlable,todos los que son algebraicamente equivalentes a él también lo son.

Demostración:

Que sea completamente controlable quiere decir que cualquier estado puede ir a otro con algún control u.

Indiquemos eso así (llamando S al sistema):

$$\xi \xrightarrow{S} \eta$$

Ahora,si otro sistema $\bar{S}$ es algebraicamente equivalente a S,por definición existe $T(t) : X \longrightarrow \bar{X}$ biyectiva.

y podemos escribir el siguiente esquema:

$$\begin{array}{ccc} \bar{\xi} & \xrightarrow{\bar{S}} & \eta \\ & {\scriptstyle T}\searrow \quad \nearrow{\scriptstyle S} & \\ & \xi & \end{array}$$

en vista del cual queda probado el lema.

La equivalencia algebraica da las siguientes relaciones entre las matrices de los dos sistemas;

$$\dot{\bar{x}} = \bar{F}\,\bar{x} + \bar{G}\,u$$

como $\bar{x} = T(t)\,x(t)$

$$(T(t)x(t))' = \bar{F}\,\bar{x} + \bar{G}\,u$$

$$\dot{T}(t)x(t) + T(t)\dot{x}(t) = \bar{F}\,T\,x + \bar{G}\,u$$

$$\dot{x} = T^{-1}(t)\bar{F}(t)T(t)x(t) + T^{-1}(t)\bar{G}(t)u(t) - T^{-1}(t)\dot{T}(t)x(t)$$

$$= (T^{-1}(t)\bar{F}(t)T(t) - T^{-1}(t)\dot{T}(t))x(t) + T^{-1}(t)\bar{G}(t)u(t)$$

de donde se concluye

$$F(t) = T^{-1}(t)\bar{F}(t)T(t) - T^{-1}(t)\dot{T}(t)$$

$$G(t) = T^{-1}(t)\bar{G}(t)$$

y también,de estas últimas

$$\bar{F}(t) = \dot{T}(t)T^{-1}(t) + T(t)F(t)T^{-1}(t) \qquad (3.22)$$

$$\bar{G}(t) = T(t)G(t) \qquad (3.23)$$

Además,como $y(t) = \bar{H}(t)\bar{x}(t)$
(y no está en el espacio de estados,que es lo que cambia)
resulta $y(t) = \bar{H}(t)T(t)x(t)$
de donde

$$H(t) = \bar{H}(t)T(t)$$

y

$$\bar{H}(t) = H(t)T^{-1}(t) \qquad (3.24)$$

Las tres fórmulas numeradas nos dan la forma de pasar de un sistema a otro algebraicamente equivalente por la transformación T(t);por supuesto,si T es constante en (3,22) no aparece el primer sumando)

Veamos también como cambia la matriz de transición:

$$\bar{x}(t) = \bar{\Phi}(t,t_o)\bar{x}_o + \int_{t_o}^{t} \bar{\Phi}(t,s)\bar{G}(s)u(s)ds$$

$$T(t)(t) = \bar{\Phi}(t,t_o)T(t)x_o + \int_{t_o}^{t} \bar{\Phi}(t,s)T(s)G(s)ds$$

$$x(t) = T^{-1}(t)\bar{\Phi}(t,t_o)T(t)x_o + \int_{t_o}^{t} T^{-1}(t)\bar{\Phi}(t,s)T(s)G(s)ds$$

de donde $\Phi(t,t_o) = T^{-1}(t)\bar{\Phi}(t,t_o)T(t)$

y $\bar{\Phi}(t,s) = T(t)\Phi(t,s)\,T^{-1}(s)$ (3.25)

Podemos dar ahora una nueva definición de controlabilidad,que como veremos en algunos casos,será de utilidad.

Definición:(Gilbert,1963)

El sistema (3.20) es controlable en t_o si no es algebraicamente equivalente,para todo $t \geq t_o$,a un sistema del tipo

a) $\dot{x}^1 = F^{11}(t)x^1 + F^{12}(t)x^2 + G^1(t)u$

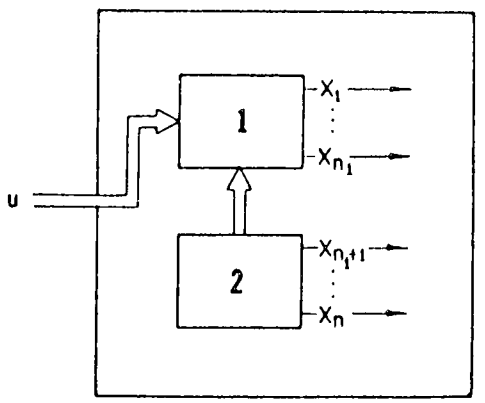
b) $\dot{x}^2 = F^{22}(t)x^2$

c) $y(t) = H^1(t)x^1(t) + H^2(t)x^2(t)$

donde $x = (x^1,x^2)$.

En otras palabras,si no es posible hallar un sistema de coordenadas en el cual el vector de estados quede separado en dos grupos x^1 y x^2 tal que el segundo grupo no esté afectado ni por los controles ni por el primer grupo(ecuación b)

De encontrar tal sistema,se podría representar de la siguiente manera



Las excitaciones actúan solo sobre los estados 1;los de 2 influencian a los de 1 (ecuación a) pero al revés no (ec.b).

La definición de controlabilidad depende solo de las excitaciones y los estados.Daremos ahora otra noción que depende de las respuestas.

Definición:

Un sistema dinámico lineal es completamente observable en el instante t_o si no es algebraicamente equivalente,para todo $t \leq t_o$,a un sistema del tipo:

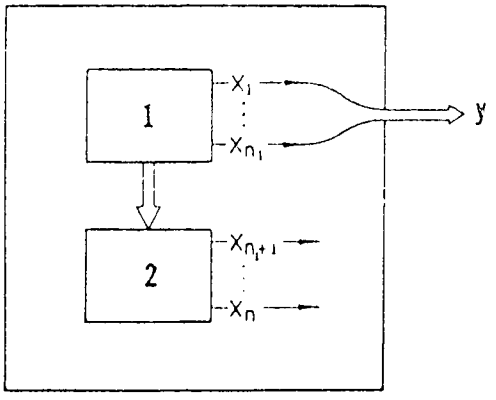
$$(a) \qquad \dot{x}^1 = F^{11}(t)x^1(t) + G^1(t)u(t)$$

$$(b) \qquad \dot{x}^2 = F^{21}(t)x^1(t) + F^{22}(t)x^2(t) + G^2(t)u(t)$$

$$(c) \qquad y(t) = H^1(t)x^1(t)$$

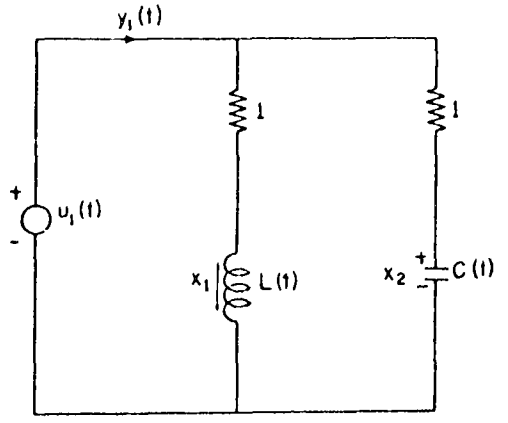
Esto significa que no es posible hallar un sistema de coordenadas tal que las variables de estado sean separadas en dos grupos de tal manera que el segundo no afecte al primero ni a la respuesta.

Si tal sistema de coordenadas pudde hallarse,tendríamos:



EJEMPLO

Un caso interesante y simple de un sistema físico que no es controlable ni observable es el circuito de resistencia constante que muestra la figura



Sea x_1 el flujo magnético en la inductancia

x_2 la carga eléctrica en el capacitor

y es la corriente

La inductancia y la capacidad son variables con t,pero supondremos (condición de resistencia constante) que

$$\frac{L(t)}{C(t)} = R^2 = 1$$

Las ecuaciones del circuito son:

$$\dot{x}_1 = -\frac{1}{L(t)} x_1 + u_1(t)$$

$$\dot{x}_2 = -\frac{1}{C(t)} x_2 + u_1(t)$$

$$y(t) = \frac{1}{L(t)} x_1 - \frac{1}{C(t)} x_2 + u_1(t)$$

Tomemos $$T = 1/2 \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$$

Para hallar el sistema algebraicamente equivalente,usamos las expresiones dadas antes,y resulta

$$\dot{\bar{x}}_1 = -\frac{1}{L(t)}\ \bar{x}_1 + u_1$$

$$\dot{\bar{x}}_2 = -\frac{1}{L(t)}\ \bar{x}_2$$

$$y(t) = \frac{2}{L(t)}\ \bar{x}_2 + u_1$$

Aquí,la variable $\bar{x}_1$ es controlable pero no observable y $\bar{x}_2$ es observable pero no controlable.

En efecto,partimos los estados en dos grupos:

. el 2º grupo no está afectado por el 1º ni por u,luego no es controlable.

. el 1º no afecta al 2º ni a la respuesta,de manera que no es observable.

3.5 CONTROLABILIDAD Y OPTIMIZACION

Como hemos visto,la controlabilidad es una noción cualitativa; consiste en ver si dados dos estados es posible pasar de uno a otro.Esta cuestión es previa a la optimización,donde se trata de minimizar un funcional mientras se realiza la transferencia entre los dos estados (o conjuntos de estados) extremos,que se supone posible.

Para remarcar la independencia entre los dos conceptos daremos el siguiente ejemplo.

Tomemos el sistema

$$\dot{x} = \text{sen } 2\pi u$$
$$\dot{y} = \cos 2\pi u$$
$$\dot{z} = -1$$

y el funcional

$$J(u) = \int_0^{t_1} (x^2(t) + y^2(t) + 1) \, dt$$

Si fijamos comoestado inicial el punto (0,0,1) y como final el origen (0,0,0),veremos que podemos controlar el sistema pero no existe control óptimo.

Primero observemos que como $\dot{z} = -1$, $dz = -dt$ y así $z = -t + c$.Como,teniendo en cuenta los estados inicial y final, $z(0) = 1$ y $z(t_1) = 0$, tenemos que $c = 1$ con lo que $z(t_1) = -t_1 + 1 = 0$,y entonces $t_1 = 1$.
Es decir que el t_1 que interviene en J está determinado por el mismo problema.

Definamos la siguiente sucesión de controles:

$$u_k(t) = kt \quad , \quad 0 \leq t \leq 1 \ , \ k \text{ natural.}$$

Las trayectorias correspondientes son:(las llamamos también con índice k)

$$\dot{x}_k = \text{sen } 2\pi kt$$

$$\dot{y}_k = \cos 2\pi kt$$

$$\dot{z}_k = -1$$

de allí,

i) $x_k(t) = -\frac{1}{2\pi k}\cos 2\pi kt + c$

como $x_k(0) = 0 = \frac{-1}{2\pi k} + c$, resulta $c = \frac{1}{2\pi k}$

y así $x_k(t) = \frac{1 - \cos 2\pi kt}{2\pi k}$

que cumple $x_k(0) = 0$ y $x_k(1) = 0$

ii) $y_k(t) = \frac{1}{2\pi k}\text{sen}2\pi kt + c$

$y_k(0) = 0 = c$

$y_k(t) = \frac{1}{2\pi k}\text{sen } 2\pi kt$

que cumple $y_k(0) = 0$ y $y_k(1) = 0$

iii)0 $z_k(t) = -t + c$ $z_k(0) = 1 = c$

$z_k(t) = -t + 1$

que cumple $z_k(0) = 1$ y $z_k(1) = 0$.

Con lo anterior vemos que para todo k,las tryectorias correspondientes a los controles tomados trasladan el estado (0,0,1) al (0,0,0).

Veremos ahora que no existe control óptimo;

Calculemos el funcional

$$J(u_k) = \int_0^1 \left(\frac{(1 - \cos 2\pi kt)^2}{4k^2\pi^2} + \frac{\operatorname{sen}^2 2\pi kt}{4k^2\pi^2} + 1\right)dt$$

$$= \int_0^1 \left(\frac{2 - 2\cos 2\pi kt}{4k^2\pi^2} + 1\right)dt$$

$$= \frac{2}{4k^2\pi^2}\int_0^1 dt - \frac{2}{4k^2\pi^2}\int_0^1 \cos 2\pi kt + \int_0^1 dt$$

$$= \frac{1}{2k^2\pi^2} - \frac{1}{2k^2\pi^2}\left|\frac{\operatorname{sen} 2\pi kt}{2\pi k}\right|_0^1 + 1$$

$$= \frac{1}{2k^2\pi^2} + 1$$

Vemos que si k tiende a infinito, $J(u_k)$ tiende a 1. De manera que hay controles que transfieren (0,0,1) a (0,0,0) y le dan al funcional un valor tan próximo a 1 como se quiera.

Si existe control óptimo, tendrá que darle a J un valor menor o igual a 1.

Pero

$$J(u) = \int_0^1 (x^2 + y^2 + 1)dt = \int_0^1 (x^2 + y^2)dt + 1$$

entonces, para que $J(u) \leq 1$ debe ser $\int_0^1 (x^2 + y^2)dt \leq 0$, pero eso no puede pasar a menos que $x \equiv 0$, $y \equiv 0$. Del sistema inicial tenemos $\dot{x}^2 + \dot{y}^2 = 1$, que no se satisface con x e y nulos.
Luego no existe control óptimo.

BIBLIOGRAFIA BASICA

CAPITULO 1

En la exposición hecha,hemos seguido

1. *L.S.Pontryaguin,V.G.Boltyanskii,R.V.Gamkrelidze,E.F.Mishchenko:*
   *The mathematical theory of optimal processes.*J.Wiley,1962.

Una demostración accesible del principio de máximo (dado que se realiza para un caso particular) y donde queda claro el significado de los elementos que intervienen en el teorema,puede verse en:

2. *L.I.Rozonoer:*
   Principle of Pontryaguin's maximun in the theory of optimun systems. Automation and Remote Control,20,1959.

Una obra completa,donde se fundamenta rigurosamente y de contenido matemático profundo,es

3. *E.B.Lee y L.Markus:*
   *Foundations of optimal control theory.*J.Wiley,1967.

De matemática más simple y con muchos ejemplos,

4. *M.Athans y P.L.Falb:*
   *Optimal Control,an introduction to the theory and its applications.*Mc Graw-Hill,1965.

Una visión geométrica del principio de máximo,con muchas ejemplificaciones,

5. *G.Leitmann:*
   *Introduction to Optimal Control.*Mc Graw-Hill,1969.

CAPITULO 2

La primera obra sobre el tema es:

1. *R.Bellman:*
Dynamic Programming . Princeton University Press,1957.

Una fundamentación del método está dada en

2. *V.G.Boltyanskii:*
Sufficient conditions for optimality and the justification of the dynamic programming method. Journal SIAM Control,V.4,Nº2, 1966.

Para el caso particular de ecuaciones lineales y funcional cuadrático

3. *R.Bellman:*
Introduction to the theory of Control Processes,Vol 1, Academic Press,1967.

CAPITULO 3

Sobre la teoría de matrices y aplicaciones de ésta a las ecuaciones diferenciales,

1. *F.R.Gantmacher:*
Matrix Theory , Chelsea , 1957.

2. *R.Bellman:*
Introducción al análisis matricial , Reverté , 1965.

Los primeros trabajos donde aparecen los conceptos de controlabilidad y observabilidad son:

3. *R.E.Kalman:*
Contributions to the theory of optimal control , Boletín de la Soc. Matemática Mexicana , Vol.5,Nº1,1960.

4. *R.E.Kalman:*
On the general theory of control systems , Proceedings of the First Congress of IFAC,Moscú,1960.

5. *R.E.Kalman,C.Ho,K.Narendra:*
Controllability of linear dynamical systems , Contributions to differential equations,Vol1,Nº2,1961.

Una clara exposición de éstas nociones,obtenidas en forma más simple pero rigurosa,es la dada por

6. *E.Kreidler,P.Sarachik:*
On *the concepts of controllability and observability of linear systems* , IEEE Transactions,AC-9,1964.

La otra forma de encarar el problema que usamos en el texto, está detallada en

7. *E.G.Gilbert:*
Controllability and observability in multivariable control systems , Journal SIAM Control,Vol.2,Nº1,1963.
8. *R.E.Kalman:*
Mathematical description of linear dynamical systems , Journal SIAM Control,Vol.2,Nº1,1963.

Están tratados estos temas,así como también la teoría algebraica de sistemas,en el libro,de difícil lectura,de

9. *R.E.Kalman,M.A.Arbib,P.L.Falb:*
Topics in mathematical system theory ; McGraw-Hill , 1969.