

COMISION NACIONAL DE ENERGIA ATOMICA
DEPENDIENTE DE LA PRESIDENCIA DE LA NACION

PROGRAMA MULTINACIONAL DE METALURGIA
(Programa Regional de Desarrollo Científico y Tecnológico - OEA)

DETERMINACION DE PARAMETROS ELASTICOS DE CHAPAS

J. Coremberg, M. Kohen y O. Salomón

Departamento de Metalurgia
Buenos Aires - Argentina
1972

COMISION NACIONAL DE ENERGIA ATOMICA
DEPENDIENTE DE LA PRESIDENCIA DE LA NACION

PROGRAMA MULTINACIONAL DE METALURGIA
(Programa Regional de Desarrollo Científico y Tecnológico - OEA)

DETERMINACION DE PARAMETROS ELASTICOS DE CHAPAS

J. Coremberg, M. Kohen y O. Salomón

Departamento de Metalurgia
Buenos Aires - Argentina
1972

DETERMINACION DE PARAMETROS ELASTICOS EN CHAPAS

J. Coremberg, M. Kohen y O. Salomón *

RESUMEN

Se presenta un estudio completo de las propiedades elásticas de chapas con vistas a su empleo en predicciones de formabilidad. Las determinaciones se efectuaron con métodos resonantes aconsejables por su sencillez, economía, precisión y repetibilidad para un eventual empleo en laboratorios de control de calidad de fábricas.

Se caracteriza el estado elástico de las chapas por un modelo ortotrópico con nueve constantes elásticas independientes E_x , E_y , E_z , G_{xy} , G_{yz} , G_{zx} , μ_{xy} , μ_{yz} , μ_{zx} .

Se explica como se determinan E_x , E_y , G_{xy} , μ_{xy} con mediciones en tres muestras a 0° , 45° y 90° respecto a la dirección de laminación x . La precisión de la medida es mejor que 0,5%.

Se desarrolla un método de resonador compuesto que permite determinar E_z , G_{yz} , G_{zx} con mediciones en dos muestras a 0° y 90° . La precisión de la medida es del orden de 5% aunque se espera mejorarla con el perfeccionamiento tecnológico del método.

Se explica cómo pueden determinarse las constantes restantes μ_{yz} , μ_{zx} midiendo dos muestras cortadas a bisel, a 45° con el eje Z .

* Laboratorio de Vibraciones y Ultrasonidos, Departamento de Física, Facultad de Ingeniería, Universidad de Buenos Aires

INTRODUCCION

La posibilidad de predecir el comportamiento de chapas metálicas en distintas operaciones mecánicas, es un problema cuya solución resulta de considerable interés tecnológico.

Desde hace unas décadas se trabaja intensamente en la elaboración y desarrollo de métodos físico-mecánicos y ensayos simulativos que someten a las chapas a estados de tensión que producen deformaciones plásticas, y de los que se trata de extraer información sobre sus propiedades de formabilidad [1].

Los métodos desarrollados hasta ahora no son suficientemente sencillos y satisfactorios para su utilización en control de calidad [2] por lo que se ha ensayado la posibilidad de un nuevo enfoque del problema, consistente en determinar los parámetros elásticos de la chapa y emplearlos para predecir propiedades de formabilidad [3, 4]. La base física para esta tentativa reside en que tanto la anisotropía de las propiedades elásticas como del comportamiento plástico están vinculadas de algún modo con la textura [5], y esto hace esperar la existencia de correlaciones entre el comportamiento elástico y plástico.

Por otra parte la anisotropía elástica puede cambiar fuertemente el estado de tensiones e influir notablemente en su concentración, y por consiguiente, en el comportamiento más allá del límite elástico [6].

Es de notar que la influencia de la anisotropía elástica sobre el estado de tensiones, no queda caracterizada por los valores de un solo módulo elástico sino de todos [6], lo que requiere un completo estudio de las propiedades elásticas de la chapa. Para esto se empleó un equipo resonante descrito en otro trabajo [7]. En razón de que las medidas en el plano de la chapa y en espesor presentan características técnicas muy diferentes, en lo que sigue se analizan por separado.

DETERMINACION DE LAS CONSTANTES ELASTICAS

A. Medición de las propiedades elásticas en el plano de la chapa

Sobre una misma chapa se cortan muestras de igual tamaño con su dimensión principal orientada según distintos ángulos con la dirección de laminación (figura 1).

I) METODO DE CORTE (Figura 1)

Mediante una guillotina se cortan los rectángulos marcados con línea de puntos, previa identificación de los mismos y se colocan apilados sobre un soporte diseñado de modo de poder efectuar sobre la pila los cortes que se indican con línea llena, mediante una fresadora con un disco de corte abrasivo.

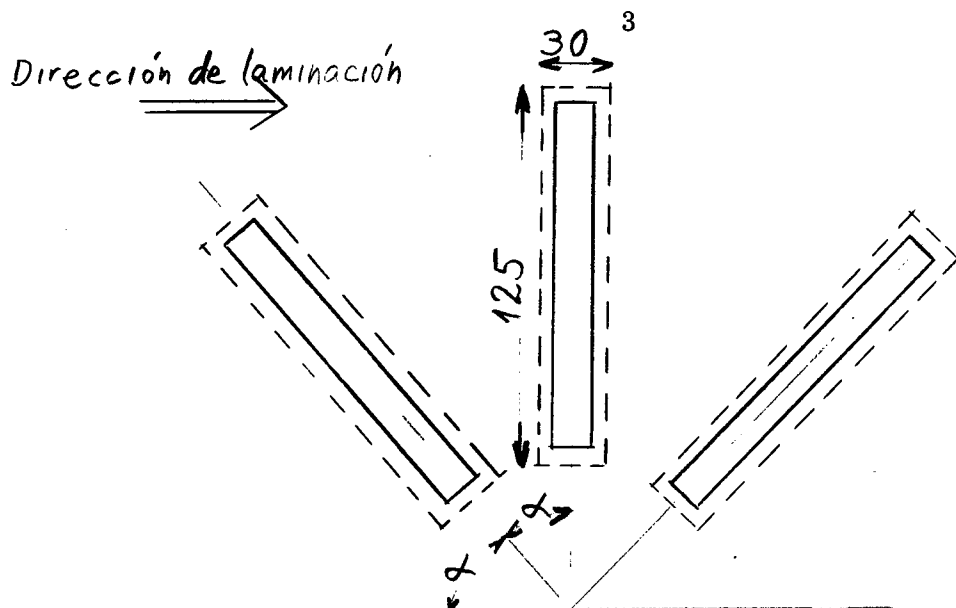


Figura 1

Este método fué usado para obtener las siguientes características :

- a) Muestras de lados bien paralelos.
- b) Gran uniformidad en las dimensiones del conjunto de las muestras.
- c) Reducción a un mínimo de las tensiones residuales y del endurecimiento por maquinado que provocarían otros métodos de corte.

II) METODO DE LAS MEDICIONES

Las mediciones fueron hechas con un equipo resonante [7]. Se miden las frecuencias resonantes para distintos modos de vibración, y con ellas (y las dimensiones de la muestra), se calculan los módulos elásticos.

El módulo de Young (E) se obtiene de vibraciones longitudinales o flexurales, y el módulo transversal (G), de vibraciones torsionales. El cálculo se puede hacer muy rápidamente mediante el uso de una computadora. Para ello se ha desarrollado el programa correspondiente.

Las mediciones fueron hechas en aire, a temperatura ambiente (aproximadamente 20°C). Las precisiones obtenidas en la determinación de los módulos son del orden del 0,5%.

En las figuras 2 y 3 se han graficado respectivamente $E_{x\alpha}$ y $G_{xy\alpha}$ en función de α

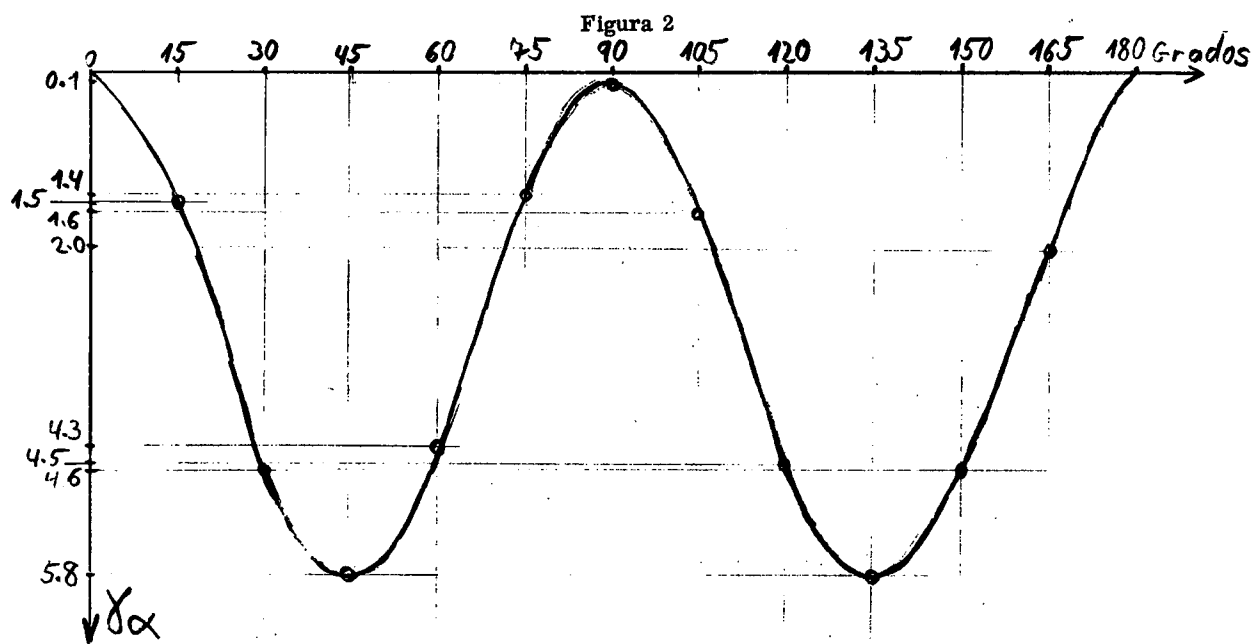
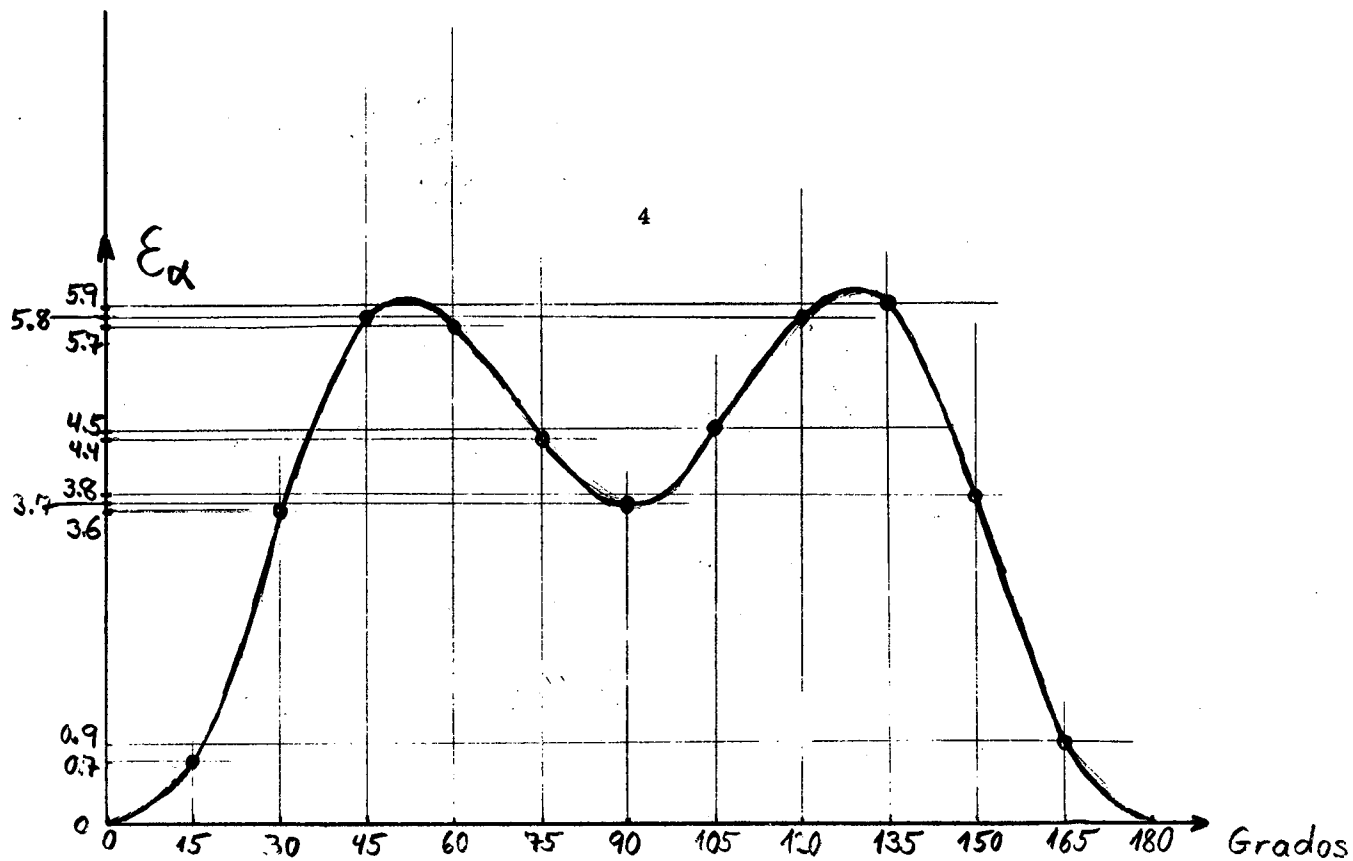


Figura 3

B. Medición de las propiedades elásticas en el espesor de la chapa

Para conocer el módulo de Young en la dirección del espesor de la chapa E_z se utilizó una barra compuesta por dos planchuelas entre las que se pega la muestra. (Figura 5).

Ambas planchuelas son iguales, y de las siguientes dimensiones aproximadas :

Longitud (dirección Z_p) ≈ 170 mm
 Dimensiones transversales ≈ 35 mm (x_p) x 6 mm (y_p)

Cortando una muestra de la chapa como la A de la figura 4 pero de dimensiones iguales a las transversales de la planchuela, y pegándola como indica la figura 6.a, se puede obtener E_z a partir de las frecuencias propias de tracción-compresión del resonador compuesto (Ver Anexo II).

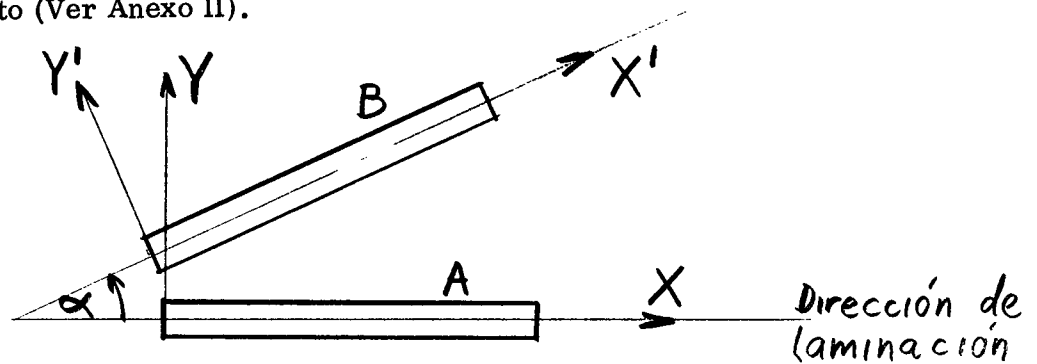


Figura 4

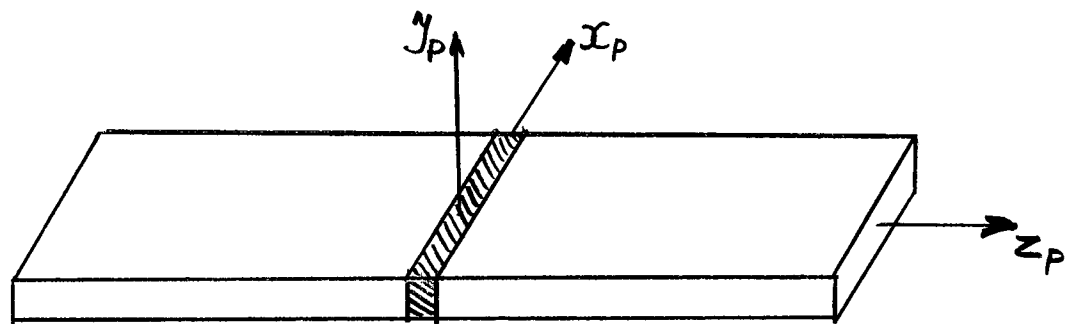


Figura 5

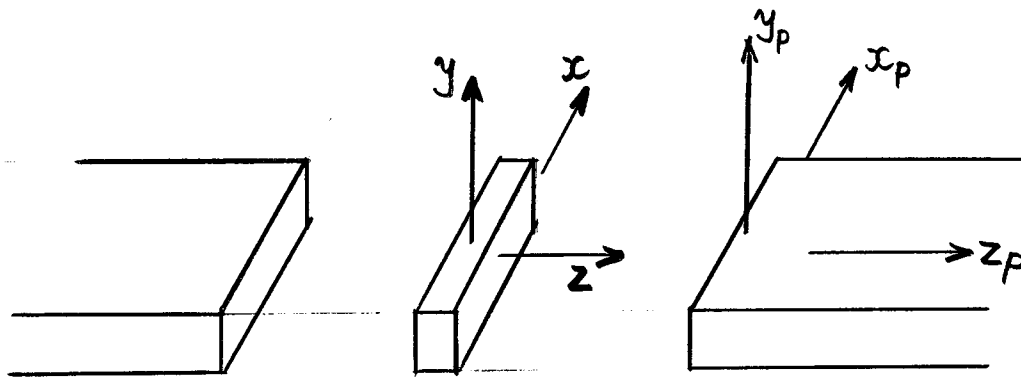


Figura 6.a

Haciendo resonar al conjunto en un modo torsional se puede obtener G_{zx} en forma muy similar. Cortando una muestra como la anterior, pero a 90° con la dirección de laminación, y pegándola como indica la figura 6.b, se puede obtener G_{yz} .

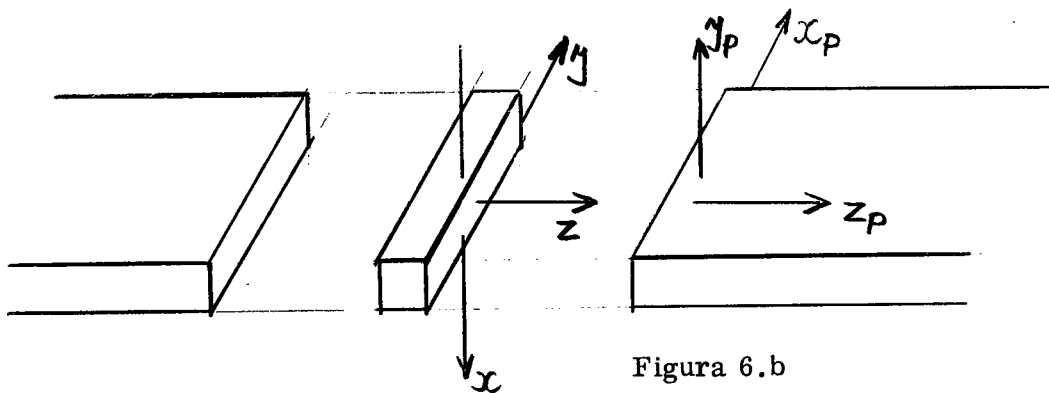


Figura 6.b

El método de corte a utilizar es el mismo que para preparar las muestras anteriores.

Resultados obtenidos :

Se han hecho ensayos sobre chapas de acero de uso industrial. A título de ejemplo veamos una chapa laminada en frío de espesor 1,3 mm - SAE 1008/1015.

$$E_x = 20.700 \text{ kgr/mm}^2$$

$$E_y = 21.500 \text{ kgr/mm}^2$$

$$E_z = 19.200 \text{ kgr/mm}^2$$

$$G_{xy} = 8.520 \text{ kgr/mm}^2$$

$$G_{yz} = 8.300 \text{ kgr/mm}^2$$

$$G_{zx} = 7.900 \text{ kgr/mm}^2$$

Los gráficos medidos de la variación de módulos en el plano de la chapa están en las figuras 2 y 3.

Discusión y conclusiones

En las chapas de acero laminado medidas existe simetría en el plano respecto a dos ejes ortogonales, uno de los cuales es la dirección de laminación.

Haciendo la hipótesis razonable de que los planos paralelos al de la chapa son planos de simetría, el material se comportaría como ortotrópico.

Desarrollando las fórmulas correspondientes a tal tipo de simetría (ver Anexo I), se llega a las siguientes conclusiones, para el plano de la chapa.

- 1) Conociendo $E_{x0^\circ}, E_y = E_{x90^\circ}, G_{xy0^\circ}, G_{xy90^\circ}$, magnitudes todas ellas directamente medibles, se puede calcular μ_{xy}, μ_{yx} cualquier $E_{x\alpha}$ y cualquier $G_{xy\alpha}$.
- 2) $E_{x\alpha}$ tiene valores mínimos relativos para 0° (E_x) y para 90° (E_y), y máximo para un ángulo β tal que

$$\tan^2 \beta = \frac{1 + \mu_{xy} - E_x/2G_{xy}}{E_y/E_x + \mu_{xy} - E_x/2G_{xy}}$$

Para las chapas medidas, se obtiene un valor de 53° , cosa que se verifica experimentalmente (figura 2).

- 3) $G_{xy\alpha}$ toma valores máximos para 0° y 90° , y mínimo para 45° .

Estas tres conclusiones a las que se arriba aceptando un modelo ortotrópico, se verifican experimentalmente en nuestro caso.

En la dirección del espesor, si bien la precisión de las medidas es hasta el presente mucho menor, se nota claramente la anisotropía existente.

El valor de E_z dió desde un 7% menor que el módulo en la dirección de laminación (en el ejemplo ya citado), hasta un 11% mayor (en una chapa de acero calmado).

Con las mediciones ya explicadas se pueden calcular siete de las nueve constantes elásticas independientes que caracterizan completamente a un material ortotrópico.

- a) Con mediciones en el plano de la chapa de tres muestras cortadas a 0° , 45° y 90° con la dirección de laminación, se pueden determinar E_x , E_y , G_{xy} , μ_{xy} (Ver Anexo I).
- b) Con mediciones en el espesor de dos muestras, empleando el resonador compuesto, se pueden determinar E_z , G_{yz} y G_{zx} .

- c) Las restantes 2 constantes ($\mu_{yz}; \mu_{zx}$) se pueden calcular midiendo dos muestras cortadas a bisel, a 45° con el eje Z. (Ver deducción en el Anexo I).

A partir de ensayos de tracción uniaxiales se determina un coeficiente de anisotropía R [1] que relaciona las deformaciones en ancho respecto a deformaciones en espesor en el período plástico. El estado de tensiones correspondiente es $\sigma = \sigma_{xx}$, $\sigma_{yy} = \sigma_{zz} = 0$; siendo x: longitud de la chapa, y: ancho, z: espesor. Se puede establecer una analogía elástica y definir $R_{elást} = e_{yy}/e_{zz}$ para $\sigma = \sigma_{xx}; \sigma_{yy} = \sigma_{zz} = 0$. De (1) resulta

$$R_{elást.} = \frac{-\mu_{xy}}{-\mu_{xz}} = \frac{\mu_{xy}}{\mu_{xz}} \left| \begin{array}{l} \sigma_{xx} \neq 0 \\ \sigma_{yy} = \sigma_{zz} = 0 \end{array} \right.$$

Por otra parte, la medida de las nueve constantes elásticas independientes permitiría establecer relaciones entre deformaciones elásticas para estados de tensión más complejos (y más próximos a los reales producidos en operaciones mecánicas de la chapa metálica), que el simple de tracción uniaxial; por ejemplo :

$$R_{elást. \text{ generalizado}} = \frac{e_{yy}}{e_{zz}} = \frac{-\mu_{xy} \frac{\sigma_{xx}}{E_x} + \frac{\sigma_{yy}}{E_y} - \mu_{zy} \frac{\sigma_{zz}}{E_z}}{-\mu_{xz} \frac{\sigma_{xx}}{E_x} - \mu_{yz} \frac{\sigma_{yy}}{E_y} + \frac{\sigma_{zz}}{E_z}} \left| \begin{array}{l} \sigma_{xx} \neq 0 \\ \sigma_{yy} \neq 0 \\ \sigma_{zz} \neq 0 \end{array} \right.$$

El método desarrollado puede ser útil para controlar uniformidad de propiedades mecánicas en un mismo tipo de chapa, contribuir al estudio de texturas e iniciar un programa para establecer la posibilidad de correlacionar las propiedades elásticas con el comportamiento de la chapa en distintas operaciones de trabajo mecánico.

Agradecimientos

El presente trabajo se efectuó con el apoyo de un subsidio de la Universidad de Buenos Aires. Durante su desarrollo resultaron de gran utilidad las discusiones con el Ing. Jorge Mazza de CITEFA.

La investigación contó con el apoyo y estímulo del Sr. Director del Departamento de Física de la Facultad de Ingeniería, Ing. Ernesto E. Galloni.

Los autores agradecen muy especialmente la colaboración de la Sra. Teresa de De Simone en las búsquedas bibliográficas y tipeado del texto.

ANEXO I

Dado un material ortotrópico, cuyos ejes principales son x, y, z, las relaciones entre tensiones y deformaciones son

$$(1) \quad \begin{cases} e_{xx} = \frac{\delta_{xx}}{E_x} - \mu_{xy} \frac{\delta_{yy}}{E_y} - \mu_{zx} \frac{\delta_{zz}}{E_z} \\ e_{yy} = -\mu_{xy} \frac{\delta_{xx}}{E_x} + \frac{\delta_{yy}}{E_y} - \mu_{zy} \frac{\delta_{zz}}{E_z} \\ e_{zz} = -\mu_{xz} \frac{\delta_{xx}}{E_x} - \mu_{yz} \frac{\delta_{yy}}{E_y} + \frac{\delta_{zz}}{E_z} \\ e_{xy} = \frac{\delta_{xy}}{2G_{xy}}; e_{yz} = \frac{\delta_{yz}}{2G_{yz}}; e_{zx} = \frac{\delta_{zx}}{2G_{zx}} \end{cases}$$

siendo además

$$(2) \quad \frac{\mu_{yx}}{E_y} = \frac{\mu_{xy}}{E_x}; \frac{\mu_{zy}}{E_z} = \frac{\mu_{yz}}{E_y}; \frac{\mu_{xz}}{E_x} = \frac{\mu_{zx}}{E_z}$$

En nuestro caso (figura 4), llamamos :

xy al plano de la chapa
x a la dirección de laminación
z al eje perpendicular al plano de la chapa (dirección del espesor)

Sobre una muestra cortada como la A (figura 4), podremos medir $E_x = E_{x0}$ y $G_{xy} = G_{xy0}$ (el primero con una experiencia de vibración por tracción-compresión o flexión; el segundo por torsión).

Sobre una muestra cortada como la B (figura 4), podremos medir

$$E_{x'} = E_{x\alpha}, \quad G_{x'y'} = G_{xy\alpha}$$

Rotando los ejes x, y, se pueden calcular los módulos $E_{x\alpha}, G_{xy\alpha}$ para cualquier rotación α en torno al eje Z (o sea sobre el plano de la chapa)

$$(3) \quad \frac{1}{E_{x\alpha}} = \frac{\cos^4 \alpha}{E_x} + \frac{\sin^4 \alpha}{E_y} + 2 \sin^2 \alpha \cdot \cos^2 \alpha \left(\frac{1}{2G_{xy}} - \frac{\mu_{xy}}{E_x} \right)$$

$$(4) \quad \frac{1}{G_{xy\alpha}} = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{E_x} + \frac{1}{E_y} + \frac{1}{G_{xy}} + \frac{2\mu_{xy}}{E_x} \right) - \frac{1}{2} \left(\frac{1}{E_x} + \frac{1}{E_y} - \frac{1}{G_{xy}} + \frac{2\mu_{xy}}{E_x} \right) \cos 4\alpha$$

$E_{x\alpha}$ alcanza valores extremos para $\alpha = 0^\circ (E_x); \alpha = 90^\circ (E_y); \alpha = \beta$ donde β es tal que

$$(5) \quad \tan^2 \beta = \frac{1 + \mu_{xy} - E_x / 2G_{xy}}{E_x / E_y + \mu_{xy} - E_x / 2G_{xy}}$$

G_{xy} alcanza valores extremos para $\alpha = 0^\circ (G_{xy})$; $\alpha = 90^\circ (G_{yx} = G_{xy})$
y, $\alpha = 45^\circ$, donde

$$(6) \frac{1}{G_{xy45^\circ}} = \frac{1}{E_x} + \frac{1}{E_y} + \frac{2\mu_{xy}}{E_x}, \text{ por lo que}$$

$$(7) \mu_{xy} = \frac{E_x}{2} \left(\frac{1}{G_{xy45^\circ}} - \frac{1}{E_x} - \frac{1}{E_y} \right)$$

Esto significa que si se hacen las siguientes mediciones :

- a) En una muestra a 0° : E_x ; G_{xy}
- b) En una muestra a 45° : G_{xy} 45°
- c) En una muestra a 90° : E_y

se pueden conocer

- 1) El módulo de Poisson μ_{xy} por la fórmula (7)
- 2) El módulo de Poisson μ_{yx} por la fórmula (2)
- 3) El módulo de Young en cualquier dirección en el plano por la fórmula (3)
- 4) El módulo transversal en cualquier dirección en el plano por la fórmula (4)

Sobre una muestra cortada como la A (figura 4) pero pegada como indica la figura 6.a entre dos barras prismáticas, se puede medir E_z (haciendo vibrar el conjunto a tracción-compresión) y G_{zx} (haciendo vibrar el conjunto a torsión).

Sobre una muestra cortada a 90° de la anterior sobre el plano de la chapa, y pegada al resonador compuesto como indica la figura 6.b, se puede medir G_{yz} .

Rotando los ejes z, x se puede calcular los módulos $E_z \varphi$ y $G_{zx} \varphi$ para cualquier rotación φ en torno al eje Y (figura 7). Haciendo lo mismo con los ejes y, z para cualquier rotación θ en torno al eje X , se llega a fórmulas análogas a las (3), (4), (5), (6) y (7) con la simple variación cíclica de los subíndices.

De aquí se puede obtener :

$$(8) \mu_{zx} = \frac{E_z}{2} \left(\frac{1}{G_{zx45^\circ}} - \frac{1}{E_z} - \frac{1}{E_x} \right)$$

$$(9) \mu_{yz} = \frac{E_y}{2} \left(\frac{1}{G_{yz45^\circ}} - \frac{1}{E_y} - \frac{1}{E_z} \right)$$

Esto significa que si hacemos las siguientes mediciones con el resonador compuesto :

-10 bis-

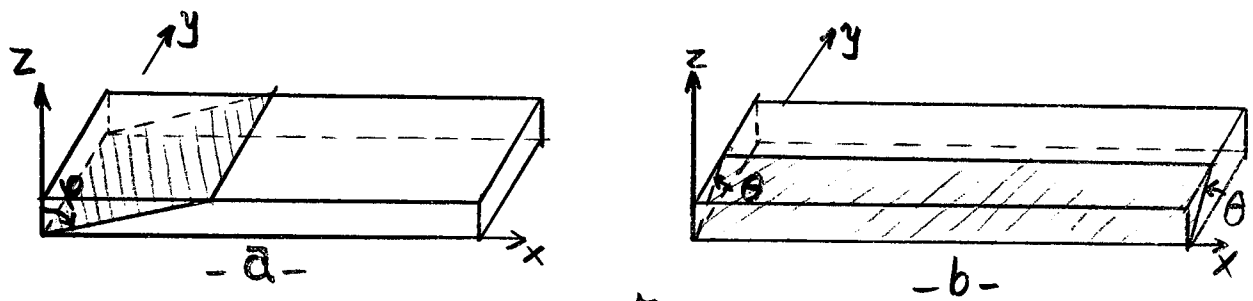


Figura 7

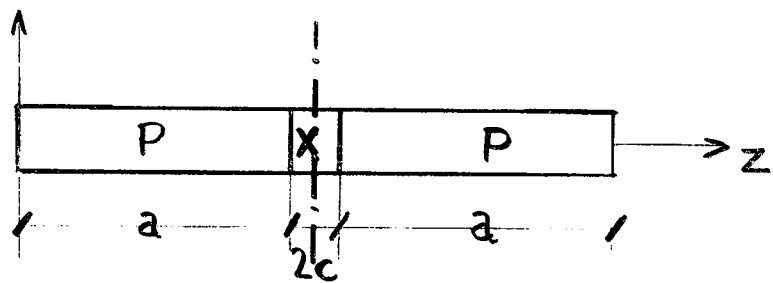
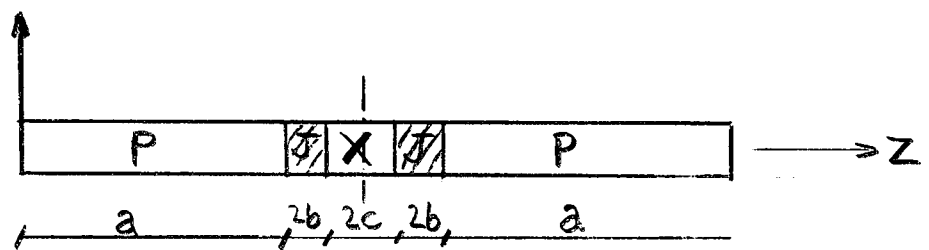
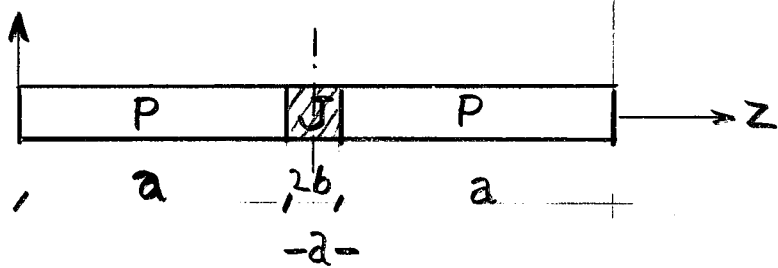


Figura 8



-b-
Figura 9

d) En una muestra a 0° : E_z ; G_{zx}

e) En una muestra a 90° : G_{yz}

f) En una muestra con $\varphi = 45^\circ$: G_{zx} 45°

g) En una muestra con $\theta = 45^\circ$: G_{yz} 45°

se pueden conocer :

5) Los módulos de Poisson μ_{zxy} μ_{yz} por (8) y (9)

6) Los módulos de Poisson μ_{xzy} μ_{zy} por (2)

7) El módulo de Young en cualquier dirección del espacio

8) El módulo transversal en cualquier dirección del espacio

ANEXO II

Si se tiene una barra compuesta por dos materiales (P y X) pegados como indica la figura 8, las frecuencias propias del sistema serán función de las dimensiones geométricas, de las constantes elásticas y de las densidades de ambos materiales.

La ecuación diferencial de propagación de una onda de tracción compresión, es en cada uno de los medios

$$(1) \quad V_{Li}^2 \frac{\partial^2 u_i}{\partial z^2} - \frac{\partial^2 u_i}{\partial t^2} = 0$$

donde

$$(2) \quad V_{Li}^2 = \frac{E_i}{\delta_i} d_{Li}$$

V_{Li} : velocidad de propagación de la onda de tracción-compresión en el medio i

E_i : módulo de Young

δ_i : densidad

d_{Li} : factor que tiene en cuenta la dispersión debida a la inercia lateral. *

* Los factores d_L y d_T que tienen en cuenta la dispersión de los modos longitudinales y torsionales respectivamente, dependen de la geometría de la sección transversal, del módulo de Poisson y de la longitud de la onda que se propaga. Así, por ejemplo, para una sección circular $d_T=1$; $d_L=1 - \frac{n^2 \sigma^2 \pi^2 \phi^2}{32 a^2}$ donde n es el orden del modo correspondiente y ϕ el diámetro. Evidentemente para $n=1$ ó 2, y, $\phi \leq a/10$ d_L es prácticamente igual a 1.

La solución de la (1), da para el desplazamiento u_i y para la tensión normal σ_i

$$(3) \quad u_i = A \cdot \cos \gamma_i z + B \sin \gamma_i z$$

$$(4) \quad \sigma_i = \gamma_i E_i (-A \sin \gamma_i z + B \cos \gamma_i z)$$

donde

$$(5) \quad \gamma_i = \frac{2\pi}{\lambda_i} = \frac{\omega}{V_{Li}} = 2\pi f \sqrt{\frac{\delta_i}{E_i \cdot d_{Li}}}$$

Suponiendo la barra libre, en el extremo $Z = 0$ debe cumplirse

$$(6) \quad \sigma_p \Big|_{z=0} = 0$$

y en la superficie de separación de los medios P, X (o sea $Z = a$)

$$(7) \quad \begin{cases} u_p = u_x \\ \sigma_p = \sigma_x \end{cases} \quad \text{para } Z = a$$

Ambas ecuaciones de contorno (6) y (7) conducen a que la condición de resonancia es :

para los modos impares (nodo de velocidad en el punto medio del resonador compuesto)

$$(8) \quad \frac{E_x \cdot \gamma_x}{E_p \cdot \gamma_p} = \tan \gamma_p a \cdot \tan \gamma_x C$$

para los modos pares (nodos de tensión en el punto medio del resonador compuesto)

$$(9) \quad \frac{E_x \cdot \gamma_x}{E_p \cdot \gamma_p} = -\tan \gamma_p a \cdot \cot \gamma_x C$$

Si el espesor $2C$ de la muestra X es pequeño (que es lo que ocurre cuando se quiere medir chapas)

$$(10) \quad \tan \gamma_x C \cong \gamma_x C$$

y las ecuaciones (8) y (9) se transforman, teniendo en cuenta la (5), en

$$(11) \quad \frac{E_x}{E_p} = \frac{C}{a} \cdot \gamma_p a \cdot \tan \gamma_p a \quad (\text{modos impares})$$

$$(12) \quad \frac{\delta_x \cdot C}{\delta_p \cdot a} = -\frac{d_{Lx}}{d_{Lp}} \cdot \frac{\tan \gamma_p a}{\gamma_p a} \quad (\text{modos pares})$$

Puesto que el objetivo es medir muestras de pequeño espesor, la influencia del adhesivo con que se pega el material X al P es notoria y hay que tenerla en cuenta.

La forma de trabajo consiste en :

- I) Pegar entre sí las dos barras de material P con una capa de cemento J de espesor 2.b (ver figura 9.a). De acuerdo con la fórmula (11) se tiene para el primer modo de resonancia.

$$(13) \quad \frac{E_J}{E_P} = \frac{b}{a} \cdot \delta_{P_1} a \cdot \operatorname{tg} \delta_{P_1} a$$

y para el segundo modo de resonancia, de acuerdo con la (12)

$$(14) \quad \frac{\delta_J \cdot b}{\delta_P \cdot a} = - \frac{d_{LJ_2}}{d_{LP_2}} \cdot \frac{\operatorname{tg} \delta_{P_2} a}{\delta_{P_2} a}$$

- II) Formar el resonador compuesto mostrado en la figura 9.b, tratando de pegar la muestra de material X mediante el adhesivo J en condiciones idénticas al caso anterior.

La condición de resonancia se deduce en este caso en forma enteramente análoga al de la figura 8.

Para los modos impares resulta

$$(15) \quad \frac{E_X}{E_P} = \frac{c}{a} \cdot \frac{1}{\frac{\cot \delta_{P_1} a}{\delta_{P_1} a} - \frac{E_P}{E_J} \cdot \frac{2b}{a}}$$

y para los pares

$$(16) \quad \frac{\delta_X \cdot c}{\delta_P \cdot a} = - \frac{d_{LX_2}}{d_{LP_2}} \frac{\operatorname{tg} \delta_{P_2} a}{\delta_{P_2} a} - \frac{\delta_J \cdot 2b}{\delta_P \cdot a} \cdot \frac{d_{LX_2}}{d_{LJ_2}}$$

Dado que $\frac{\delta_J \cdot b \cdot d_{LP_2}}{\delta_P \cdot a \cdot d_{LJ_2}} \sim 10^{-5}$

de la (14) se deduce que

$$(17) \quad \delta_{P_2} a \cong \pi$$

Teniendo en cuenta la (5)

$$(18) \quad \sqrt{\frac{E_P d_{LP_2}}{\delta_P}} = 2f_2 a$$

donde f_2 es la frecuencia de resonancia del segundo modo longitudinal sin la muestra pegada.

Y de la (16) y (18) se deduce que

$$(19) \quad \frac{c}{a} = \frac{\delta_P}{\delta_X} \left(1 - \frac{f_2'}{f_2}\right)$$

donde f_2' es la frecuencia de resonancia del segundo modo longitudinal con la muestra pegada.

Introduciendo la fórmula (13) en la (15)

$$(20) \quad \frac{E_X}{E_P} = \frac{c}{a} \cdot \frac{1}{\frac{\cotg \gamma_{P_1}' a}{\delta_{P_1}' a} - 2 \frac{\cotg \gamma_{P_1} a}{\delta_{P_1} a}}$$

que si se desarrolla la cotangente y se tiene en cuenta la fórmula (5), queda

$$(21) \quad \frac{E_X}{E_P} = \frac{c}{a} \cdot \frac{f_2}{[f_2 - 2f_1' \sqrt{\frac{d_{LP_2}}{d_{LP_1}}}] - 2[f_2 - 2f_1 \sqrt{\frac{d_{LP_2}}{d_{LP_1}}}]}$$

donde f_1 y f_1' son respectivamente las frecuencias de resonancia del primer modo longitudinal sin y con la muestra pegada al resonador compuesto.

Exactamente los mismos pasos se siguen para determinar el módulo transversal (G_{ZX} en la figura 5), partiendo de

$$(22) \quad V_{Ti}^2 = \frac{G_i}{\delta_i} d_{Ti} k$$

$$(23) \quad \gamma_i = \frac{2\pi}{\lambda_i} = \frac{\omega}{V_{Ti}} = 2\pi f \sqrt{\frac{\delta_i}{G_i d_{Ti} k}}$$

donde k es un factor que depende de la forma de la sección transversal, se llega a

$$(24) \quad \frac{G_X}{G_P} = \frac{c}{a} \cdot \frac{f_2}{[f_2 - 2f_1' \sqrt{\frac{d_{TP_2}}{d_{TP_1}}}] - 2[f_2 - 2f_1 \sqrt{\frac{d_{TP_2}}{d_{TP_1}}}]}$$

donde las frecuencias son ahora las correspondientes a los modos torsionales..

BIBLIOGRAFIA

- 1 MAZINI N., IURMAN L. SAENZ LOPEZ A., LUCAIOLI A., BLANCO J.M.
Relación entre anisotropía y embutibilidad de chapas metálicas (A publicar en Metalurgia Moderna, Buenos Aires)
- 2 LEFEVRE J., TRICOT, R. CASTRO R.
Emboutissabilité des aciers inoxydables austénitiques en relation avec les coefficients d'écrouissage et d'anisotropie. Mémoires Scientifiques Rev. Métallurg., LXVI, No.4, 1969, p. 255-262
- 3 STICKELS C.A., MOULD P.R.
The use of Young's modulus for predicting the plastic strain ratio of Low-Carbon Steel Sheets. Met. Trans., May 1970, 1, (5), 1303-1312
- 4 COREMBERG J., KOHEN M., SALOMON O.
Anisotropía de módulos elásticos en chapas de acero laminado. (A publicar en Metalurgia Moderna, Buenos Aires)
- 5 WASSERMAN G., GREWEN J.
Texturen metallischer Werkstoffe Springer Verlag - Berlin, 1962
- 6 MIKLYAEV P.G., Ya. B. FRIDMAN
Anisotropiya mekhanicheskikh svoistv materialov - Izd Metallurgiya - Moskva, 1969
- 7 KOHEN M., COREMBERG J.
Medición de los módulos elásticos por métodos resonantes (A publicar en Metalurgia Moderna, Buenos Aires)