

C. N. E. A. Biblioteca	
ARCHIVO PUBLICACIONES	
NO 1	AÑO Bib. 1967

"GENERALIZACION DE UN NUEVO METODO QUE PERMITE DERIVAR RELACIONES DE

SUPERCONVERGENCIA Y EXPRESAR LA INFORMACION CONTENIDA EN EL ALGEBRA DE CORRIENTES"

TESIS

OSCAR S. ZANDRON

* * * * *

CENTRO ATOMICO BARILOCHE
Comisión Nacional de Energía Atómica

INSTITUTO DE FISICA " Dr. J. A. BALSEIRO "
Universidad Nacional de Cuyo

San Carlos de Bariloche, Río Negro - ARGENTINA

"GENERALIZACION DE UN NUEVO METODO QUE PERMITE DERIVAR RELACIONES DE

SUPERCONVERGENCIA Y EXPRESAR LA INFORMACION CONTENIDA EN EL ALGEBRA DE CORRIENTES"

TESIS

OSCAR S. ZANDRON

* * * * *

CENTRO ATOMICO BARILOCHE
Comisión Nacional de Energía Atómica

INSTITUTO DE FISICA " Dr. J. A. BALSEIRO "
Universidad Nacional de Cuyo

San Carlos de Bariloche, Río Negro - ARGENTINA

I N D I C E
=====

INTRODUCCION pag. 1

PRIMERA PARTE
=====

I. 1 - Representación de Khuri	"	6
I. 2 - Amplitudes fuera y sobre el "mass-shell"	"	7
I. 3 - Descomposición en invariantes	"	11
I. 4 - Relaciones del álgebra de corrientes	"	21
I. 5 - Scattering Compton a baja energía	"	27
I. 6 - Descomposición invariante con derivadas	"	29
I. 7 - Comportamiento a la Regge	"	40

SEGUNDA PARTE
=====

II.1 - Amplitudes fuera y sobre el "mass-shell"	"	44
II.2 - Identidad de Ward	"	48
II.3 - Universalidad de la carga eléctrica	"	49
II.4 - Amplitudes fuera y sobre el "mass-shell" defini- das entre una corriente pseudoescalar isovecto- rial y la corriente electromagnética	"	50
II.5 - Identidad de Ward	"	51
II.6 - Universalidad de la carga eléctrica	"	53
II.7 - Límite a baja energía. Teorema de Kroll-Rudermann"		54
II.8 - Límite a baja energía de la amplitud de fotopro- ducción	"	55

APENDICE A	pag	60
APENDICE B	"	91
BIBLIOGRAFIA	"	96

INTRODUCCION

En la primera parte de esta tesis se generaliza un nuevo método propuesto por Fubini ⁽¹⁾⁽²⁾ para derivar relaciones de interacción fuerte (relaciones superconvergentes) y expresar la información contenida en el álgebra de corrientes, ⁽³⁾ de una manera más general.

Se aplicará dicho método a un proceso con "target" de spin $\frac{1}{2}$ y cuando ambas corrientes tienen spin 1. blanco

Ilustremos brevemente las ideas del método.

El problema de obtener consecuencias generales, en término de cantidades/observables, de los conmutadores fundamentales del álgebra de corrientes/ fue objeto de muchas investigaciones. En particular se desarrolló una técnica general, la cual traslada a los conmutadores a tiempos iguales entre densidades de carga en reglas de suma del álgebra de corrientes del tipo (4)(5)

$$(1) \quad \frac{1}{\pi} \int \text{Im} A(\nu, u_1, u_2, t) d\nu = \Psi(t)$$

donde A es una amplitud de interacción débil (amplitud fuera del "mass-shell"), u_1 y u_2 son los momentos invariantes transferidos, asociados con las dos corrientes externas y $\Psi(t)$ es un factor de forma electromagnético o débil.

La amplitud en (1) proviene de corrientes que son fuentes de campos de // masas m_1 y m_2 , por lo tanto tienen polos para dichos valores de los impulsos transferidos u_1 y u_2 . El residuo es finito y se obtiene entonces / realizando el siguiente límite

$$(2) \quad \lim_{\substack{u_1 \rightarrow m_1^2 \\ u_2 \rightarrow m_2^2}} (u_1 - m_1^2) (u_2 - m_2^2) A(\nu, u_1, u_2, t) = A^{(S)}(\nu, t)$$

(donde m_1 y m_2 son las masas relativas a las corrientes cuando nos ponemos sobre el "mass-shell") obtenemos la relación de superconvergencia ⁽⁶⁾

$$(3) \quad \frac{1}{\pi} \int \text{Im } A^{(S)}(\nu, t) d\nu = 0$$

donde $A^{(S)}$ es ahora la amplitud de interacción fuerte.

Es sabido que la ecuación (3) se obtiene directamente (7)(8) a partir de relación de dispersión y una hipótesis explícita sobre el desarrollo asintótico de $A^{(S)}$ usando por ejemplo el modelo de Regge.

El formalismo basado en reglas de suma de tipo (1) tiene una dificultad. La validez de la ecuación (1) depende, no sólo de los conmutadores fundamentales entre densidades de carga sino también de la convergencia de la integral dispersiva (1), tal que, si uno acepta el modelo de polos de // Regge (y sea por ejemplo $A^{(S)} = A_{\rho\pi}^{(S)}$ y $m_1 = m_2 = m_\rho$) obtenemos, //

$$\text{Im } A(\nu, t) \sim \nu^{\alpha-2}$$

Concluimos entonces que la ecuación (1) es válida solamente para $t < m_\rho^2$ ya que para $t > m_\rho^2$ resulta ser $\alpha_\rho(t) > 1^{(*)}$ y obtendríamos una integral / divergente.

El método de Fubini consiste en expresar las identidades fundamentales // del álgebra de corrientes en una forma que sea completamente independien- te de la convergencia o no de la integral dispersiva.

Resultados obtenidos por J. Bronzan, I. Gerstein, B. Lee y F. Low, (2) / muestran que el desarrollo de Regge sería reconciliado con la validez de la ecuación (1) solamente si la amplitud de interacción débil A tiene /

(*) Experimentalmente se conoce que $\text{Re } \alpha_\rho(t=0) \approx 0,5$ y como la ρ tiene / spin 1, graficando $\text{Re } \alpha_\rho(t)$ en función de t debe ocurrir que para $t = m_\rho^2$ sea $\text{Re } \alpha_\rho(t) = 1$, es evidente por lo tanto que para $t > m_\rho^2$ resulta ser / $\text{Re } \alpha_\rho(t) > 1$.

un polo fijo en $J = 1$, cuyo residuo es proporcional al factor de forma / $\Psi(t)$. Considerando dichos resultados Fubini obtiene relaciones del álgebra de corrientes más generales, expresando las identidades como afirmación sobre la posición y residuos de polos fijos en el plano complejo de J .

De esta manera, las reglas de suma del álgebra de corrientes del tipo (1) pueden ser interpretadas como una forma integral de escribir la afirmación más general que en el plano complejo de J hay un polo fijo cuyo residuo es proporcional a $\Psi(t)$; en cambio las relaciones de superconvergencia (3), donde intervienen solamente las amplitudes de interacción / fuerte $A^{(S)}$, pueden ser interpretadas como una forma integral de escribir la afirmación que para las interacciones fuertes no hay polos fijos / en el plano complejo de J .

Como se trabaja también con cantidades fuera del "mas-shell" se ve que es más conveniente usar la representación de Khuri, ⁽⁹⁾ que la representación de Regge.

Por supuesto existe una simple relación entre las representaciones de / Regge y de Khuri.

Las ventajas del método propuesto por Fubini son las siguientes:

- 1) La relación entre álgebra de corrientes y polos de Regge resulta más / clara.
- 2) El rango de validez de las ecuaciones es independiente de los valores del momento transferido.
- 3) Muchos resultados que serían descartados tomando como base la no convergencia de las reglas de suma, pueden ser en este nuevo esquema aceptados con seguridad como afirmación sobre la posición y residuos de polos / fijos en las representaciones de Khuri o de Regge.

La generalización de este método al caso de "target" de spin $\frac{1}{2}$ ⁽¹⁰⁾ y cuando ambas corrientes tienen spin 1 no es trivial, debido a que tenemos que trabajar con el álgebra de las matrices γ y especialmente debido a que el "target" debe satisfacer la ecuación de Dirac.

Otra dificultad surge en la descomposición de la amplitud física \mathcal{T} en amplitudes invariantes $\bar{\Phi}_i$. En efecto si construimos adecuadamente todos / los invariantes posibles I_i usando en forma combinada los elementos del álgebra de Dirac, los vectores polarización y los momentos de las partículas y corrientes presentes en el proceso, obtenemos la siguiente descomposición

$$(4) \quad \mathcal{T} = \sum_{i=1}^{34} \bar{\Phi}_i(s, \bar{s}, t) I_i$$

que sería la manera natural de obtener las amplitudes $\bar{\Phi}_i$, en una teoría perturbativa, con buenas propiedades de analiticidad en las variables de Mandelstam y en la variable momento angular total.

Pero los 34 invariantes I_i que aparecen en la ecuación (4) no son todos independientes entre ellos. Esto proviene del hecho que en el espacio cuatri-dimensional de Minkowsky solamente cuatro vectores como máximo pueden ser independientes y como dijimos los invariantes I_i se construyen utilizando los dos cuadvectores polarización y los tres cuadrimomentos invariantes del proceso.

(11)

Precisamente existen dos relaciones entre los invariantes I_i

$$(5) \quad \sum_{i=1}^{34} c_i^{(\alpha)} I_i = 0 \quad (\alpha = 1, 2)$$

Por lo tanto solamente aquellas combinaciones lineales de los $\bar{\Phi}_i$ s que / tienen en cuenta las relaciones (5) serán amplitudes observables. Sin / embargo, se puede ver que es más conveniente trabajar primero con las amplitudes $\bar{\Phi}_i$ (amplitudes fuera del "dimensionality-shell") ya que podemos razonablemente suponer que ellas tengan propiedades analíticas simples y luego pasar a las combinaciones lineales observables de los $\bar{\Phi}_i$ s, es / decir sobre el "dimensionality-shell". Cuando trabajamos sobre el "mass-shell" obtenemos algunas reglas de superconvergencia de dos maneras distintas. En la primera manera (método algebraico) exigimos propiedades de

analiticidad conectadas con el uso de la ecuación de Dirac y la condición de invariancia de "gauge" como condiciones subsidiarias. En la segunda manera usamos la descomposición con derivadas, introducida por primera vez en referencia (8).

Las amplitudes invariantes F y G que aparecen en esta descomposición tienen propiedades analíticas simples en el plano de Regge ρ de Khuri y particularmente podemos suponer que ellas no tienen polos fijos.

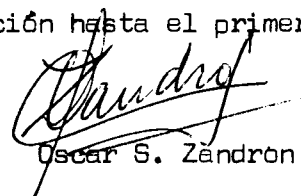
Esta suposición, juntamente con la expresión explícita de las amplitudes invariantes en una descomposición "usual" en término de las amplitudes F y G, nos permite escribir las mismas relaciones de superconvergencia que obtenemos con el método algebraico. Usando la descomposición con derivadas obtenemos también el desarrollo asintótico a la Regge de las amplitudes "usuales" invariantes que nos permite estudiar el rango en el cual las relaciones de superconvergencia pueden ser llevadas a una forma integral.

Finalmente usando el formalismo desarrollado y la invariancia de "gauge" es posible calcular la amplitud del scattering Compton hasta el primer orden en la frecuencia del fotón (12).

En la segunda parte de esta tesis consideramos la amplitud de fotoproducción de piones fuera y sobre el "mass-shell". La invariancia de "gauge" / del campo electromagnético se traslada en una condición de divergencia nula de tal manera que podemos expresar fácilmente la identidad de Ward, la universalidad de la carga eléctrica y el teorema a baja energía de fotoproducción (teorema de Kroll-Rudermann)

Se discuten dos procesos: un proceso de fotoproducción sobre "target" pseudo escalar y otro proceso de fotoproducción sobre "target" de spin $\frac{1}{2}$. Por último partiendo de una amplitud fuera del "mas-shell" definida entre una densidad de corriente isovectorial axial vectorial y la densidad de corriente electromagnética y usando nuevamente el formalismo y la invariancia de "gauge" similarmente como lo hicimos en la primera parte, calculamos el límite a baja energía de la amplitud de fotoproducción hasta el primer orden incluido en la frecuencia del fotón.

Prof. Dr. Carlos G. Bollini
Asesor Científico


Oscar S. Zandron

PRIMERA PARTE

I. 1 - Representación de Khuri

Comenzamos esta primera parte resumiendo algunas ideas utilizadas en referencia (1), sobre la representación de Khuri.

Consideremos una cierta amplitud invariante $A(s, \bar{s}, t)$ y supongamos que:

a) $A(s, \bar{s}, t)$ contiene solamente singularidades dinámicas en s . De acuerdo/ al principio de máxima analiticidad de primera clase, el cual supone que una amplitud de scattering tiene solamente las singularidades forzadas por la unitariedad, $A(s, \bar{s}, t)$ debe satisfacer una relación de dispersión en s a t fijo

b) Podemos desarrollar $A(s, \bar{s}, t)$ en series de potencias en las variables de Mandelstam s y \bar{s}

$$(1.1) \quad A(s, \bar{s}, t) = \sum_{n=0}^{\infty} A_n(t) s^n + \sum_{n=0}^{\infty} \bar{A}_n(t) \bar{s}^n$$

con radios de convergencia s_0 y \bar{s}_0 respectivamente (donde s_0 y \bar{s}_0 son las/singularidades más bajas en s y \bar{s})

c) Las integrales

$$(1.2) \quad \begin{aligned} A(z) &= \frac{1}{\pi} \int_s \frac{ds}{(1+z)} \operatorname{Im} A(s) \\ \bar{A}(z) &= \frac{1}{\pi} \int_{\bar{s}} \frac{d\bar{s}}{(1+z)} \operatorname{Im} \bar{A}(\bar{s}) \end{aligned}$$

o sus prolongaciones analíticas, cuando ellas no convergen (*), nos pro-

(*) Realmente las integrales que definen a $A(z)$ y $\bar{A}(z)$ convergen solamente para $\operatorname{Re} z > M$, $\operatorname{Re} z > N$, respectivamente, donde M y N son los números de sustracciones necesarias en las contribuciones de los canales s y \bar{s} a la relación de dispersión para $A(s, \bar{s}, t)$.

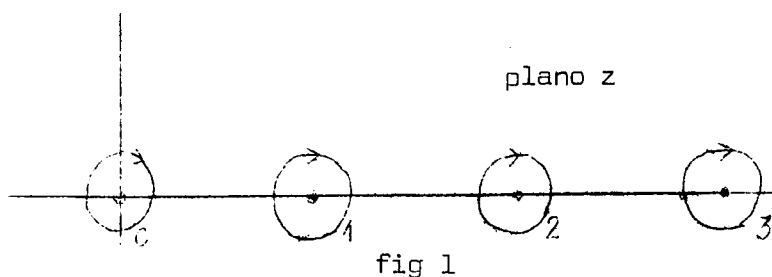
cionan todos los coeficientes en el desarrollo en series de potencias (1.1).

La suposición c) en esencia establece que la amplitud total $A(s, \bar{s}, t)$ queda determinada por su parte absorbitiva $\text{Im } A(s, \bar{s}, t)$ y corresponde al llamado principio de máxima analiticidad de segunda clase, el cual establece/ que todas las partículas intercambiadas en el canal t son compuestas y pertenecen a trayectorias de Regge.

Si $A(z)$ y $\bar{A}(z)$ tienen un buen comportamiento al infinito, entonces podemos llevar a cabo una transformación de Sommerfeld-Watson de las series de potencias en (1.1) obteniendo

$$(1.3) \quad A = \frac{i}{2} \int_{\gamma} \frac{A(z) (-s)^z}{\text{sen } \pi z} dz + \frac{i}{2} \int_{\gamma} \frac{\bar{A}(z) (-\bar{s})^z}{\text{sen } \pi z} dz$$

donde el camino de integración esta indicado en la figura 1.



Cuando una amplitud invariante $A(s, \bar{s}, t)$ satisface los requerimientos a), b), y c) tal que podamos llevar a cabo la transformación de Sommerfeld - Watson (1.3), podemos decir que $A(s, \bar{s}, t)$ verifica la representación de Khuri, o brevemente que es "smooth". Obviamente el lenguaje de Khuri puede ser llevado al lenguaje de Regge.

Despues de estas consideraciones generales pasamos a estudiar nuestro problema particular.

I.2 - Amplitudes fuera y sobre el "mass - shell"

Consideremos la amplitud fuera del "mass-shell" (gráficamente representada en la fig. 2)

$$(2.1) \quad T_{\mu\nu}^{\alpha\beta} = i \int d^4x \exp(i k_2 x) \langle p_2 | T (j_{\mu}^{\alpha}(x) j_{\nu}^{\beta}(0)) | p_1 \rangle$$

donde j_{μ}^{α} y j_{ν}^{β} son densidades de corrientes vectoriales- isovectoriales/ (α y β índices de la simetría interna) con cuadrimomentos k_2 y $k_1 = p_2 + k_2 - p_1$; p_1 y p_2 son los cuadrimomentos de los nucleones inicial y final, respectivamente.

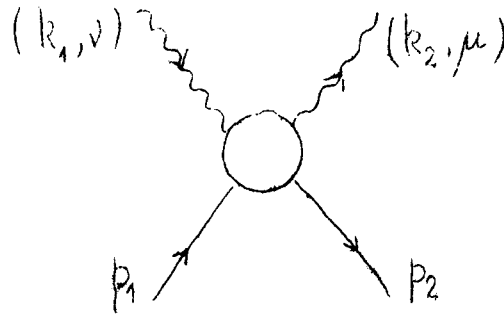


fig. 2

Definimos

$$P = \frac{p_1 + p_2}{2}, \quad Q = \frac{k_1 + k_2}{2}, \quad \Delta = \frac{p_2 - p_1}{2} = \frac{k_1 - k_2}{2}$$

$$(2.2) \quad s = (P + Q)^2, \quad \bar{s} = (P - Q)^2, \quad t = \frac{\Delta^2}{4}$$

$$\nu = \frac{s - \bar{s}}{4} = P \cdot Q, \quad u_1 = k_1^2, \quad u_2 = k_2^2$$

Por lo tanto, si postulamos la relación de conmutación a tiempos iguales^(*)

$$(2.3) \quad [j_0^{\alpha}(\bar{x}, t), j_{\nu}^{\beta}(\bar{y}, t)] = i \xi_{\alpha\beta\gamma} j_{\nu}^{\gamma}(\bar{x}, t) \int^3 (\bar{x} - \bar{y}) + \text{términos de Schwinger}$$

(*) La presencia de posibles términos de Schwinger en el conmutador a / tiempos iguales sugiere agregar un término extra a (2.1) de manera de / compensar la falta de covariancia debido al producto temporal ordenada. Ver por ejemplo L. Brown, Phys. Rev. 150, 1338 (1966).

y consideramos que (2.1) se escribe

$$(2.4) \quad \begin{aligned} T_{\mu\nu}^{\alpha\beta} &= i \int d^4 x e^{ik_2 x} \theta(x_0) \langle p_2 | [j_\mu^\alpha(x), j_\nu^\beta(0)] | p_1 \rangle \\ &= i \int d^4 x e^{-ik_1 x} \theta(-x_0) \langle p_2 | [j_\mu^\alpha(0), j_\nu^\beta(x)] | p_1 \rangle \end{aligned}$$

y además tenemos en cuenta que en el límite de simetría exacta SU(2) la corriente vectorial se conserva ($\partial^\mu j_\mu(x) = 0$) obtenemos

(2.5)

$$k_2^\mu T_{\mu\nu}^{\alpha\beta} = i \int (-i) \partial^\mu e^{ik_2 x} \theta(x_0) \langle p_2 | [j_\mu^\alpha(x), j_\nu^\beta(0)] | p_1 \rangle d^4 x$$

Integrando por partes resulta

(2.6)

$$k_2^\mu T_{\mu\nu}^{\alpha\beta} = - \int e^{ik_2 x} \delta(x_0) \langle p_2 | [j_0^\alpha(x), j_\nu^\beta(0)] | p_1 \rangle d^4 x$$

Introduciendo (2.3) y aplicando invariancia por traslación obtenemos

(2.7)

$$\begin{aligned} k_2^\mu T_{\mu\nu}^{\alpha\beta} &= -i \varepsilon_{\alpha\beta\gamma} \int e^{ik_2 x} \delta(x_0) e^{i(p_2 - p_1)x} \langle p_2 | j_\nu^\gamma(0) | p_1 \rangle \delta^3(x) d^4 x \\ &= -i \varepsilon_{\alpha\beta\gamma} \langle p_2 | j_\nu^\gamma(0) | p_1 \rangle \end{aligned}$$

De la misma manera obtenemos

(2.8)

$$T_{\mu\nu}^{\alpha\beta} k_1^\nu = -i \varepsilon_{\alpha\beta\gamma} \langle p_2 | j_\mu^\gamma(0) | p_1 \rangle$$

Escribiendo para el elemento de matriz $\langle p_2 | j_\nu^\gamma(0) | p_1 \rangle$ su expresión más general

(2.9)

$$\langle p_2 | j_\nu^\gamma(0) | p_1 \rangle = \bar{u}(p_2) \frac{\tau^\gamma}{2} \left\{ \Psi_1(t) \gamma_\nu - \frac{p_\nu}{m} \Psi_2(t) \right\} u(p_1)$$

(donde $\Psi_1(t)$ y $\Psi_2(t)$ son respectivamente los factores de forma eléctrico y magnético) obtenemos finalmente la siguiente relación

(2.10)

$$\begin{aligned}
k_2^\mu T_{\mu\nu}^{\alpha\beta} &= T_{\nu\mu}^{\alpha\beta} k_1^\mu = -i \xi_{\alpha\beta\gamma} \langle p_2 | j_\nu^\gamma(0) | p_1 \rangle = \\
&= -i \xi_{\alpha\beta\gamma} \bar{u}(p_2) \frac{\tau^\gamma}{2} \left\{ \Psi_1(t) \gamma_\nu - \frac{p_\nu}{m} \Psi_2(t) \right\} u(p_1) = \\
&= \bar{u}(p_2) \left\{ \Psi_1^{\alpha\beta}(t) \gamma_\nu - \frac{p_\nu}{m} \Psi_2^{\alpha\beta}(t) \right\} u(p_1)
\end{aligned}$$

A partir de $T_{\mu\nu}$ podemos obtener, a menos de un factor multiplicativo, las amplitudes físicas $T_{\mu\nu}$ para la electroproducción ρ , la fotoproducción ρ , scattering $\rho-\rho$ y scattering Compton sobre nucleones, simplemente llevando a cabo los siguientes límites

$$\lim_{u_2 \rightarrow m_\rho^2} (u_2 - m_\rho^2) T_{\mu\nu}^{\alpha Q} \quad (\text{electroducción } \rho)$$

$$\begin{aligned}
&\lim_{u_1 \rightarrow 0} (u_2 - m_\rho^2) T_{\mu\nu}^{\alpha Q} \quad (\text{fotoproducción } \rho) \\
&u_2 \rightarrow m_\rho^2
\end{aligned}$$

(2.11)

$$\lim_{u_1 \rightarrow m_\rho^2} (u_1 - m_\rho^2) (u_2 - m_\rho^2) T_{\mu\nu}^{\alpha\beta} \quad (\text{scattering } \rho-\rho)$$

$$u_2 \rightarrow m_\rho^2$$

$$\lim_{u_1 \rightarrow 0} T^{QQ} \quad (\text{scattering Compton})$$

$$u_2 \rightarrow 0$$

donde Q es el índice interno para la corriente electromagnética completa (parte isovectorial y parte isoescalar)

Las ecuaciones (2.10) en los cuatro casos se convierten en

$$(2.12) \quad k_2^\mu T_{\mu\nu} = T_{\nu\mu} k_1^\mu = 0$$

como era de esperar debido a la invariancia de "gauge" o condición de transversalidad.

I.3 Descomposición en invariantes

La primera dificultad proviene de la descomposición de los diversos $T_{\mu\nu}$, definidos en la sección I.2, en amplitudes invariantes.

La teoría de perturbación sugiere la siguiente descomposición (*)

$$(3.1) \quad e_2^\mu T_{\mu\nu} e_1^\nu = e_2^\mu A_{\mu\nu} e_1^\nu + e_2^\mu B_{\mu\nu} e_1^\nu \gamma \cdot Q + C_\mu^{(+)} (e_1^\mu \gamma \cdot e_2 + e_2^\mu \gamma \cdot e_1) + \\ + C_\mu^{(-)} (e_1^\mu \gamma \cdot e_2 - e_2^\mu \gamma \cdot e_1) + D_\mu^{(+)} \left[e_1^\mu (\gamma \cdot e_2, \gamma \cdot Q) + e_2^\mu (\gamma \cdot e_1, \gamma \cdot Q) \right] + \\ + D_\mu^{(-)} \left[e_1^\mu (\gamma \cdot e_2, \gamma \cdot Q) - e_2^\mu (\gamma \cdot e_1, \gamma \cdot Q) \right] + E_1 (\gamma \cdot e_2, \gamma \cdot e_1) + \\ + E_2 (\gamma \cdot e_2, \gamma \cdot Q, \gamma \cdot e_1)$$

(en la cual por simplicidad hemos suprimido las funciones spinoriales $\bar{u}(p_2)$ y $u(p_1)$)

donde

$$e_2 \cdot A \cdot e_1 = A_{00} (e_2 \cdot e_1) + A_{11} (P \cdot e_2)(P \cdot e_1) + A_{22} (\Delta \cdot e_2)(\Delta \cdot e_1) + A_{33} (Q \cdot e_2)(Q \cdot e_1) + \\ + A_{12}^{(+)} \left[(P \cdot e_2)(\Delta \cdot e_1) + (\Delta \cdot e_2)(P \cdot e_1) \right] + A_{12}^{(-)} \left[(P \cdot e_2)(\Delta \cdot e_1) - (\Delta \cdot e_2)(P \cdot e_1) \right] + \\ + A_{13}^{(+)} \left[(P \cdot e_2)(Q \cdot e_1) + (Q \cdot e_2)(P \cdot e_1) \right] + A_{13}^{(-)} \left[(P \cdot e_2)(Q \cdot e_1) - (Q \cdot e_2)(P \cdot e_1) \right] + \\ + A_{23}^{(+)} \left[(\Delta \cdot e_2)(Q \cdot e_1) + (Q \cdot e_2)(\Delta \cdot e_1) \right] + A_{23}^{(-)} \left[(\Delta \cdot e_2)(Q \cdot e_1) - (Q \cdot e_2)(\Delta \cdot e_1) \right]$$

y de la misma manera para $e_2 \cdot B \cdot e_1$,

y donde

$$C_\mu^{(\pm)} = C_1^{(\pm)} P_\mu + C_2^{(\pm)} \Delta_\mu + C_3^{(\pm)} Q_\mu$$

y de la misma manera para $D_\mu^{(\pm)}$.

(*) e_2 y e_1 son dos cuadrivectores convenientes, que pasan a ser los vectores polarización en el scattering ρ y en el scattering Compton, y

$$(\gamma \cdot a_1, \gamma \cdot a_2, \dots, \gamma \cdot a_n) = \frac{1}{n!} \sum_{\text{todas las permutaciones}} (\pm 1) \gamma \cdot a_{i1} \gamma \cdot a_{i2}, \dots, \gamma \cdot a_{in}$$

Pero en esta descomposición, que podemos escribir brevemente

$$e_2 \cdot T \cdot e_1 = \sum_{i=1}^{34} \Phi_i(s, \bar{s}, t) I_i \quad (\Phi_i = A_{ii}^{(+)}, A_{ij}^{(+)}, B_{ii}^{(+)}, B_{ij}^{(+)}, C_i^{(+)}, D_i^{(+)}, E_1, E_2)$$

los covariantes I_i no son independientes y precisamente ellos satisfacen dos relaciones lineales (11)

$$(3.2) \quad \sum_{i=1}^{34} c_i^{(\alpha)} I_i = 0 \quad (\alpha = 1, 2)$$

Con la finalidad de mostrarlo y hallar los $c_i^{(\alpha)}$ comenzamos por hacer notar que una función $F(P, \Delta, Q, e_1, e_2)$ multilineal y antisimétrica por el intercambio de dos vectores cualesquiera debe ser idénticamente nula

$$F(P, \Delta, Q, e_1, e_2) = 0$$

Esto resulta claro teniendo en cuenta que los cinco vectores P, Δ, Q, e_1 y e_2 no pueden ser independientes en el espacio cuadridimensional de Minkowsky.

Poniendo $P_1^\mu = P^\mu, P_2^\mu = \Delta^\mu, P_3^\mu = Q^\mu, P_4^\mu = e_1^\mu, P_5^\mu = e_2^\mu$, tenemos realmente

$$(\gamma \cdot P_1, \gamma \cdot P_2, \gamma \cdot P_3, \gamma \cdot P_4, \gamma \cdot P_5) = 0$$

$$\sum_A P_{i1}^\alpha (\gamma \cdot P_{i2}, \gamma \cdot P_{i3}, \gamma \cdot P_{i4}, \gamma \cdot P_{i5}) = 0$$

$$(3.3) \quad \sum_A \begin{pmatrix} P_{i1} & P_{i2} \\ \alpha & \beta \end{pmatrix} (\gamma \cdot P_{i3}, \gamma \cdot P_{i4}, \gamma \cdot P_{i5}) = 0$$

$$\sum_A \begin{pmatrix} P_{i1} & P_{i2} & P_{i3} \\ \alpha & \beta & \delta \end{pmatrix} (\gamma \cdot P_{i4}, \gamma \cdot P_{i5}) = 0$$

donde

$$\begin{pmatrix} P_1 & P_2 & \dots & P_n \\ \alpha_1 & \alpha_2 & \dots & \alpha_n \end{pmatrix}$$

representa el determinante de Gram, $\det (p_i^{\alpha_j})$ y \sum_A representa una suma / antisimétrica sobre los P'_i s.

Estas relaciones, cuando saturamos con $P^{\mu}, \Delta^{\nu}, Q^{\mu}$, nos permiten obtener ocho / relaciones independientes, las cuales, teniendo en cuenta las ecuación de Dirac, se reducen a sólo dos relaciones independientes (*).

Consideramos la tercera de las relaciones (3.3)

$$\begin{aligned}
 (3.4) \quad & \begin{pmatrix} e_1 & e_2 \\ - & - \end{pmatrix} (\gamma.P, \gamma.Q, \gamma.\Delta) - \begin{pmatrix} e_1 & P \\ - & - \end{pmatrix} (\gamma.e_2, \gamma.Q, \gamma.\Delta) + \\
 & + \begin{pmatrix} e_1 & Q \\ - & - \end{pmatrix} (\gamma.e_2, \gamma.P, \gamma.\Delta) - \begin{pmatrix} e_1 & \Delta \\ - & - \end{pmatrix} (\gamma.e_2, \gamma.P, \gamma.Q) + \\
 & + \begin{pmatrix} e_2 & P \\ - & - \end{pmatrix} (\gamma.e_1, \gamma.Q, \gamma.\Delta) - \begin{pmatrix} e_2 & Q \\ - & - \end{pmatrix} (\gamma.e_1, \gamma.P, \gamma.\Delta) + \\
 & + \begin{pmatrix} e_2 & \Delta \\ - & - \end{pmatrix} (\gamma.e_1, \gamma.P, \gamma.Q) + \begin{pmatrix} P & Q \\ - & - \end{pmatrix} (\gamma.e_1, \gamma.e_2, \gamma.\Delta) - \\
 & - \begin{pmatrix} P & \Delta \\ - & - \end{pmatrix} (\gamma.e_1, \gamma.e_2, \gamma.Q) + \begin{pmatrix} Q & \Delta \\ - & - \end{pmatrix} (\gamma.e_1, \gamma.e_2, \gamma.P) = 0
 \end{aligned}$$

reduciendo los productos antisimétricos de tres γ , aplicando la ecuación / de Dirac, obtenemos

(*) J.S. Gerstein también obtiene dos relaciones independientes, las cuales son combinaciones de nuestras relaciones. Ver referencia (11).-

(3.5)

$$\begin{aligned}
& m \begin{pmatrix} e_1 & e_2 & Q \\ - & - & P \end{pmatrix} + \left[- \begin{pmatrix} e_1 & e_2 & P \\ - & - & P \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} e_1 & e_2 & \Delta \\ - & - & \Delta \end{pmatrix} - \Delta^2 \begin{pmatrix} e_1 & e_2 \\ - & - \end{pmatrix} \right] \chi \cdot Q + \\
& + \left[- \begin{pmatrix} e_1 & P & Q \\ - & - & P \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} e_1 & \Delta & Q \\ - & - & \Delta \end{pmatrix} + \Delta^2 \begin{pmatrix} e_1 & Q \\ - & - \end{pmatrix} \right] \chi \cdot e_2 + \\
& + \left[\begin{pmatrix} e_2 & P & Q \\ - & - & P \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} e_2 & \Delta & Q \\ - & - & \Delta \end{pmatrix} - \Delta^2 \begin{pmatrix} e_2 & Q \\ - & - \end{pmatrix} \right] \chi \cdot e_1 + \\
& + m \begin{pmatrix} e_1 & \Delta \\ - & - \end{pmatrix} (\chi \cdot e_2, \chi \cdot Q) - m \begin{pmatrix} e_2 & \Delta \\ - & - \end{pmatrix} (\chi \cdot e_1, \chi \cdot Q) + \\
& + m \begin{pmatrix} Q & \Delta \\ - & - \end{pmatrix} (\chi \cdot e_1, \chi \cdot e_2) - \begin{pmatrix} P & \Delta \\ - & - \end{pmatrix} (\chi \cdot e_2, \chi \cdot Q, \chi \cdot e_1) = 0
\end{aligned}$$

Tenemos así tres relaciones cuando ponemos al lugar de $-$ y $-$, P y Δ , P y Q , Q y Δ , pero solamente dos de ellas resultan independientes. Eligiendo P y Δ , Q y Δ obtenemos las siguientes dos relaciones

$$\begin{aligned}
& - \Delta^2 \begin{pmatrix} e_1 & e_2 \\ P & \Delta \end{pmatrix} \chi \cdot Q + \Delta^2 \begin{pmatrix} e_1 & Q \\ P & \Delta \end{pmatrix} \chi \cdot e_2 - \Delta^2 \begin{pmatrix} e_2 & Q \\ P & \Delta \end{pmatrix} \chi \cdot e_1 + \\
& + m \begin{pmatrix} e_1 & \Delta \\ P & \Delta \end{pmatrix} (\chi \cdot e_2, \chi \cdot Q) - m \begin{pmatrix} e_2 & \Delta \\ P & \Delta \end{pmatrix} (\chi \cdot e_1, \chi \cdot Q) - \\
& - m \begin{pmatrix} Q & \Delta \\ P & \Delta \end{pmatrix} (\chi \cdot e_2, \chi \cdot e_1) - \begin{pmatrix} P & \Delta \\ P & \Delta \end{pmatrix} (\chi \cdot e_2, \chi \cdot Q, \chi \cdot e_1) = 0
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
(3.6) \quad & m \begin{pmatrix} e_1 & e_2 & Q \\ Q & \Delta & P \end{pmatrix} - m^2 \begin{pmatrix} e_1 & e_2 \\ Q & \Delta \end{pmatrix} \chi \cdot Q - \nu \begin{pmatrix} e_1 & e_2 \\ \Delta & P \end{pmatrix} \chi \cdot Q + m^2 \begin{pmatrix} e_1 & Q \\ Q & \Delta \end{pmatrix} \chi \cdot e_2 - \\
& - m^2 \begin{pmatrix} e_2 & Q \\ Q & \Delta \end{pmatrix} \chi \cdot e_1 + \nu \begin{pmatrix} e_1 & Q \\ \Delta & P \end{pmatrix} \chi \cdot e_2 - \nu \begin{pmatrix} e_2 & Q \\ \Delta & P \end{pmatrix} \chi \cdot e_1 +
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + m \begin{pmatrix} e_1 & \Delta \\ Q & \Delta \end{pmatrix} (\gamma \cdot e_2, \gamma \cdot Q) - m \begin{pmatrix} e_2 & \Delta \\ Q & \Delta \end{pmatrix} (\gamma \cdot e_1, \gamma \cdot Q) - \\
& - m \begin{pmatrix} Q & \Delta \\ Q & \Delta \end{pmatrix} (\gamma \cdot e_2, \gamma \cdot e_1) - \sqrt{\Delta^2} (\gamma \cdot e_2, \gamma \cdot Q, \gamma \cdot e_1) = 0
\end{aligned}$$

La existencia de estas dos relaciones también puede ser convenientemente/ establecida diciendo que las amplitudes $\bar{\Phi}_i$,s no son observables ya que la amplitud física $e_2 \cdot T \cdot e_1$ permanece invariante por transformaciones del / tipo

$$(3.7) \quad \bar{\Phi}_i \rightarrow \bar{\Phi}_i - c_i^{(\infty)} \psi$$

donde ψ es una función invariante cualquiera. Las transformaciones (3.7), en cierto sentido pueden ser interpretadas como transformaciones de "gauge". Por lo tanto con el propósito de trabajar con amplitudes físicas ϕ_i , es/ suficiente con escribir combinaciones lineales de las $\bar{\Phi}_i$'s, invariantes/ bajo transformaciones del tipo (3.7).

Precisamente dichas combinaciones se escriben (*)

$$(3.8) \quad \phi_i = \frac{1}{\begin{vmatrix} c_j^{(1)} & c_k^{(1)} \\ c_j^{(2)} & c_k^{(2)} \end{vmatrix}} \begin{vmatrix} \bar{\Phi}_i & \bar{\Phi}_j & \bar{\Phi}_k \\ c_i^{(1)} & c_j^{(1)} & c_k^{(1)} \\ c_i^{(2)} & c_j^{(2)} & c_k^{(2)} \end{vmatrix}$$

donde j y k son dos valores fijos cualesquiera y $i = 1, 2, \dots, 34$ ($i \neq j, i \neq k$).

Esto equivale a expresar en $e_2 \cdot T \cdot e_1 = \sum_{i=1}^{34} \phi_i I_i$, I_j y I_k por medio de

las relaciones (3.2) en término de los otros T_i 's, obteniendo así

$$(*) \quad \phi_i = A_{ii}, A_{ij}^{(+)}, B_{ii}, B_{ij}^{(+)}; C_i^{(+)}, D_i^{(+)}; \mathcal{E}_1, \mathcal{E}_2$$

$$(3.9) \quad e_2 \cdot T \cdot e_1 = \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq j \\ i \neq k}}^{34} \phi_i I_i$$

Los coeficientes cinemáticos $c_i^{(\infty)}$ son complicados, por lo tanto las amplitudes físicas ϕ_i tendrán propiedades analíticas mucho más complicadas que las amplitudes "perturbativas" $\bar{\phi}_i$. Es más conveniente, por esta razón, estudiar primero las propiedades analíticas de las amplitudes $\bar{\phi}_i$ definidas fuera del "dimensionality-shell" y pasar al final a las amplitudes físicas ϕ_i (definidas sobre el "dimensionality-shell") a través de las ecuaciones (3.8).

De esta manera podemos investigar fácilmente los "daños" causados a la analiticidad de las ϕ_i 's, debido a los coeficientes cinemáticos $c_i^{(\infty)}$

Nos será de utilidad conocer las propiedades de simetría de las amplitudes $\bar{\phi}_i$'s.

La invariancia por el cruzamiento $p_1 \rightleftharpoons -p_2$ (Ver apéndice A) nos dice que debe ser

(3.10)

$$\begin{aligned} A_{ii}(-\sqrt{\nu})^* &= \bar{A}_{ii}(\sqrt{\nu}) & (i=0,1,2,3) & C_1^{(\pm)}(-\sqrt{\nu})^* &= \bar{C}_1^{(\pm)}(\sqrt{\nu}) \\ A_{1i}^{(\pm)}(-\sqrt{\nu})^* &= -\bar{A}_{1i}^{(\pm)}(\sqrt{\nu}) & (i=2,3) & C_i^{(\pm)}(-\sqrt{\nu})^* &= -\bar{C}_i^{(\pm)}(\sqrt{\nu}) \quad (i=2,3) \\ A_{23}^{(\pm)}(-\sqrt{\nu})^* &= \bar{A}_{23}^{(\pm)}(\sqrt{\nu}) & & D_1^{(\pm)}(-\sqrt{\nu})^* &= \bar{D}_1^{(\pm)}(\sqrt{\nu}) \\ B_{ii}(-\sqrt{\nu})^* &= -\bar{B}_{ii}(\sqrt{\nu}) & (i=0,1,2,3) & D_i^{(\pm)}(-\sqrt{\nu})^* &= -\bar{D}_i^{(\pm)}(\sqrt{\nu}) \quad (i=2,3) \\ B_{1i}^{(\pm)}(-\sqrt{\nu})^* &= \bar{B}_{1i}^{(\pm)}(\sqrt{\nu}) & (i=2,3) & E_1(-\sqrt{\nu})^* &= -\bar{E}_1(\sqrt{\nu}) \\ B_{23}^{(\pm)}(-\sqrt{\nu})^* &= -\bar{B}_{23}^{(\pm)}(\sqrt{\nu}) & & E_2(-\sqrt{\nu})^* &= \bar{E}_2(\sqrt{\nu}) \end{aligned}$$

donde $\bar{\phi}$ está en lugar de $\phi^{\alpha\beta}$ y $\bar{\bar{\phi}}$ en lugar de $\bar{\phi}^{\beta\alpha}$. La invariancia por el intercambio simultáneo $p_1 \rightleftharpoons -p_2, k_1 \rightleftharpoons -k_2$, es decir por el intercambio $u_1 \rightleftharpoons u_2$, nos dice que

(3.11)

$$A_{ii} \rightleftharpoons A_{ii} \quad (i=0,1,2,3)$$

$$A_{12}^{(+)} \rightleftharpoons \mp A_{12}^{(+)}$$

$$A_{13}^{(+)} \rightleftharpoons \pm A_{13}^{(+)}$$

$$A_{23}^{(+)} \rightleftharpoons \mp A_{23}^{(+)}$$

$$B_{ii} \rightleftharpoons B_{ii} \quad (i=0,1,2,3)$$

$$B_{12}^{(+)} \rightleftharpoons \mp B_{12}^{(+)}$$

$$B_{13}^{(+)} \rightleftharpoons \pm B_{13}^{(+)}$$

$$B_{23}^{(+)} \rightleftharpoons \mp B_{23}^{(+)}$$

$$C_1^{(+)} \rightleftharpoons \pm C_1^{(+)}$$

$$C_2^{(+)} \rightleftharpoons \mp C_2^{(+)}$$

$$C_3^{(+)} \rightleftharpoons \pm C_3^{(+)}$$

$$D_1^{(+)} \rightleftharpoons \mp D_1^{(+)}$$

$$D_2^{(+)} \rightleftharpoons \pm D_2^{(+)};$$

$$D_3^{(+)} \rightleftharpoons \mp D_3^{(+)}$$

$$E_1 \rightleftharpoons E_1$$

$$E_2 \rightleftharpoons E_2$$

Es importante hacer notar que para obtener la descomposición (3.1), de la amplitud $T_{\mu\nu}$ debemos hacer uso de la ecuación de Dirac para reducir el número de amplitudes independientes.

El hecho que tengamos que usar la ecuación de Dirac para construir las amplitudes Φ_i complica la investigación de las propiedades de "smoothness" (*) de dichas amplitudes.

Para evitar esta dificultad, la ecuación de Dirac será considerada como una condición subsidiaria que impondremos después que las propiedades de // "smoothness" de las amplitudes fueron investigadas.

(*) Para una definición detallada de "smoothness" ver también referencia (13).

Por lo tanto la amplitud $e_2 T e_1$ descompuesta en amplitudes invariantes definidas fuera del "dimensionality-shell" y fuera del "Dirac equation-shell" será:

(3.12)

$$\begin{aligned}
 e_2 T e_1 = & R \cdot 1 + \sum_i S_i (\gamma \cdot P_i) + \sum_{i < j} U_{ij} (\gamma \cdot P_i, \gamma \cdot P_j) + \\
 & + \sum_{i < j < k} V_{ijk} (\gamma \cdot P_i, \gamma \cdot P_j, \gamma \cdot P_k) + \\
 & + \sum_{i < j < k < h} W_{ijkh} (\gamma \cdot P_i, \gamma \cdot P_j, \gamma \cdot P_k, \gamma \cdot P_h) + \\
 & + Z (\gamma \cdot P_1, \gamma \cdot P_2, \gamma \cdot P_3, \gamma \cdot P_4, \gamma \cdot P_5)
 \end{aligned}$$

donde

$$P_1^\mu = P^\mu, P_2^\mu = \Delta^\mu, P_3^\mu = Q^\mu, P_4^\mu = e_1^\mu, P_5^\mu = e_2^\mu$$

y donde además por simplicidad la dependencia e_1, e_2 de las amplitudes / invariantes está sobreentendida.

Sobre la base de la teoría de perturbación suponemos que todas las 136 amplitudes que aparecen en (3.12) son "smooth".

Cuando imponemos la ecuación de Dirac.

$$(3.13) \quad (\gamma \cdot p_2 - m) e_2 \cdot T \cdot e_1 = 0$$

$$e_2 \cdot T \cdot e_1 (\gamma \cdot p_1 - m) = 0$$

las amplitudes en (3.12) pueden ser expresadas en términos de las $\bar{\Phi}_i$'s.

Ya que trabajamos fuera del "dimensionality-shell" por supuesto estas expresiones no son unívocas.

Elegimos por ello, las expresiones que se obtienen multiplicando sucesivamente

$$\frac{1}{4m^2} (\gamma \cdot p_2 + m) \left\{ \sum_{i=1}^{34} \bar{\Phi}_i I_i \right\} (\gamma \cdot p_1 + m)$$

por cada elemento del álgebra de Dirac $1, \gamma_\alpha, (\gamma_\alpha, \gamma_\beta), (\gamma_\alpha, \gamma_\beta, \gamma_\rho), / (\gamma_\alpha, \gamma_\beta, \gamma_\rho, \gamma_\sigma)$ que aparecen en la descomposición (3.12) y calculamos / luego la traza (Ver apéndice A).

De esta manera es posible ver que todos los Φ_i' son "smooth" ya que:

$$e_2 \cdot A \cdot e_1 ; e_2 \cdot B \cdot e_1 ; (C^{(+)} + C^{(-)}) \cdot e_1 ; (C^{(+)} - C^{(-)}) \cdot e_2 ; (D^{(+)} + D^{(-)}) \cdot e_1$$

$$(D^{(+)} - D^{(-)}) \cdot e_2 ; E_1 \text{ y } E_2 \text{ son respectivamente los coeficientes de}$$

$$(\gamma \cdot \Delta, \gamma \cdot P); (\gamma \cdot \Delta, \gamma \cdot Q, \gamma \cdot P) , (\gamma \cdot \Delta, \gamma \cdot e_2, \gamma \cdot P), (\gamma \cdot \Delta, \gamma \cdot e_1, \gamma \cdot P),$$

$$(\gamma \cdot \Delta, \gamma \cdot e_2, \gamma \cdot Q, \gamma \cdot P); (\gamma \cdot \Delta, \gamma \cdot e_1, \gamma \cdot Q, \gamma \cdot P) ; (\gamma \cdot \Delta, \gamma \cdot e_2, \gamma \cdot e_1, \gamma \cdot P)$$

$$\text{y } (\gamma \cdot P, \gamma \cdot e_2, \gamma \cdot Q, \gamma \cdot e_1).$$

Nos interesan también los coeficientes de $\gamma \cdot P; (\gamma \cdot P, \gamma \cdot e_2);$

$(\gamma \cdot P, \gamma \cdot e_1); (\gamma \cdot e_2, \gamma \cdot e_1)$ que a parte de un factor no esencial son:

(3.14)

$$a) \quad S_1 = \sqrt{(e_2 B e_1) + (C^{(+)} + C^{(-)}) \cdot e_1 (e_2 \cdot P) + (C^{(+)} - C^{(-)}) \cdot e_2 (e_1 \cdot P)}$$

$$b) \quad U_{15} = \sqrt{(D^{(+)} + D^{(-)}) \cdot e_1 + (e_1 \cdot P) E_1}$$

$$c) \quad U_{14} = \sqrt{(D^{(+)} - D^{(-)}) \cdot e_2 + (e_2 \cdot P) E_1}$$

$$d) \quad U_{45} = -P^2 E_1 + m \sqrt{E_2}$$

La suposición que las amplitudes $S_1, U_{15}, U_{14}, U_{45}$, poseen "smoothness" nos provee ahora de algunas igualdades que se hubieran mantenido ocultas si hubiésemos usado la ecuación de Dirac desde el principio.

Para ver esto claramente introducimos la transformación de Sommerfeld-Watson para las amplitudes de scattering que nos interesan, obteniendo por ejemplo para la (3.14 d)

$$\begin{aligned}
& - \frac{i}{2} p^2 \int_{\gamma} \frac{E_1(z) (-s)^z - \bar{E}_1(z) (-\bar{s})^z}{\text{sen } \pi z} dz + \frac{i}{2} m \int_{\gamma} \frac{E_2(z) (-s)^z + \bar{E}_2(z) (-\bar{s})^z}{\text{sen } \pi z} dz = \\
& = \frac{i}{2} \int_{\gamma} \frac{U_{45}(z) (-s)^z - \bar{U}_{45}(z) (-\bar{s})^z}{\text{sen } \pi z} dz
\end{aligned}$$

El desarrollo de E_1 , E_2 y U_{45} , para grandes s , se puede entonces obtener de una manera bien conocida, abriendo el camino γ hacia la izquierda y / mirando las singularidades de

$$\frac{E_1(z) (-s)^z}{\text{sen } \pi z} ; \quad \frac{E_2(z) (-s)^z}{\text{sen } \pi z} \quad \text{y} \quad \frac{U_{45}(z) (-s)^z}{\text{sen } \pi z}$$

en el plano de z , no contenidas en los pequeños círculos que circundan a / los valores de $z = 0, 1, 2, \dots$

Podemos ver fácilmente que para que el polo de $\frac{1}{\text{sen } \pi z}$ para $z = -1$ en / la integral de E_2 , no nos dé origen a un término asintótico constante en el miembro izquierdo, término que no aparece en el miembro derecho, debe / ocurrir que

$$(3.15) \quad \lim_{z \rightarrow -1} [E_2(z) - \bar{E}_2(z)] = 0$$

De igual manera considerando las (3.14,a,b,c) obtenemos las siguientes relaciones

$$\begin{aligned}
(3.16) \quad & \lim_{z \rightarrow -1} [B_{ii}(z) + \bar{B}_{ii}(z)] = 0 \quad (i = 0, 1, 2, 3) \\
& \lim_{z \rightarrow -1} [B_{li}^{(+)}(z) - \bar{B}_{li}^{(+)}(z)] = 0 \quad (i = 2, 3) \\
& \lim_{z \rightarrow -1} [B_{23}^{(+)}(z) + \bar{B}_{23}^{(+)}(z)] = 0 \\
& \lim_{z \rightarrow -1} [D_1^{(+)}(z) - \bar{D}_1^{(+)}(z)] = 0 \\
& \lim_{z \rightarrow -1} [D_i^{(+)}(z) + \bar{D}_i^{(+)}(z)] = 0 \quad (i = 2, 3)
\end{aligned}$$

Podemos también darnos cuenta fácilmente que estas relaciones son todas las que se pueden obtener imponiendo la ecuación de Dirac sobre la amplitud

$e_2^T e_1$. En efecto, solamente las amplitudes multiplicadas por $\gamma.Q$ en (3.1), pueden ganar un factor γ en el pasaje de la descomposición (3.1) a la descomposición (3.12)

I,4 Relaciones del álgebra de corrientes

Las relaciones (3.15) y (3.16) que hemos obtenido son válidas sea que trabajemos fuera o sobre el "mass-shell".

Queremos ahora fijar nuestra atención en las amplitudes fuera del "mass-shell" definidas en la sección (I,2).

Se pueden obtener otras relaciones mediante las condiciones de divergencia

(4.1)

$$a) \quad k_2^\mu T_{\mu\nu}^{\alpha\beta} e_1^\nu = - \left\{ \Psi_1^{\alpha\beta}(t) \gamma.e_1 - \frac{(e_1.P)}{m} \Psi_2^{\alpha\beta}(t) \right\}$$

$$b) \quad e_2^\mu T_{\mu\nu}^{\alpha\beta} k_1^\nu = - \left\{ \Psi_1^{\alpha\beta}(t) \gamma.e_2 - \frac{(e_2.P)}{m} \Psi_2^{\alpha\beta}(t) \right\}$$

Haciendo uso de la descomposición (3.1) para $T_{\mu\nu}^{\alpha\beta}$ escribimos

$$k_2^\mu A e_1^\nu + k_2^\mu B e_1^\nu \gamma.Q + (C^{(+)} + C^{(-)}) . e_1^\nu \gamma. k_2 + (C^{(+)} - C^{(-)}) . k_2^\nu \gamma.e_1 +$$

$$+ (D^{(+)} + D^{(-)}) . e_1^\nu (\gamma.k_2, \gamma.Q) + (D^{(+)} - D^{(-)}) . k_2^\nu (\gamma.e_1, \gamma.Q) + E_1 (\gamma.k_2, \gamma.e_1) +$$

$$+ E_2 (\gamma.k_2, \gamma.Q, \gamma.e_1) = - \left\{ \Psi_1(t) \gamma.e_1 - \frac{(e_1.P)}{m} \Psi_2(t) \right\}$$

$$e_2^\mu A k_1^\nu + e_2^\mu B k_1^\nu \gamma.Q + (C^{(+)} + C^{(-)}) . k_1^\nu \gamma.e_2 + (C^{(+)} - C^{(-)}) . e_2^\nu \gamma.k_1 +$$

$$+ (D^{(+)} + D^{(-)}) . k_1^\nu (\gamma.e_2, \gamma.Q) + (D^{(+)} - D^{(-)}) . e_2^\nu (\gamma.k_1, \gamma.Q) + E_1 (\gamma.e_2, \gamma.k_1) +$$

$$+ E_2 (\gamma.e_2, \gamma.Q, \gamma.k_1) = - \left\{ \Psi_1(t) \gamma.e_2 - \frac{(e_2.P)}{m} \Psi_2(t) \right\}$$

de lo cual, haciendo uso de la ecuación de Dirac para reducir los productos antisimétricos deducimos (Ver apéndice A):

$$(4.2) \quad k_2 A e_1 + \gamma (D^{(+)} + D^{(-)}) \cdot e_1 + (e_1 \cdot P) E_1 = \frac{(e_1 \cdot P)}{m} \Psi_2(t)$$

$$k_2 B e_1 + (C^{(+)} + C^{(-)}) \cdot e_1 - m (D^{(+)} + D^{(-)}) \cdot e_1 - (e_1 \cdot P) E_2 = 0$$

$$(C^{(+)} - C^{(-)}) \cdot k_2 - m E_1 + \gamma E_2 = - \Psi_1(t)$$

$$(D^{(+)} - D^{(-)}) \cdot k_2 - E_1 = 0$$

$$e_2 A k_1 - \gamma (D^{(+)} - D^{(-)}) \cdot e_2 + (e_2 \cdot P) E_1 = \frac{(e_2 \cdot P)}{m} \Psi_2(t)$$

$$e_2 B k_1 + (C^{(+)} - C^{(-)}) \cdot e_2 + m (D^{(+)} - D^{(-)}) \cdot e_2 - (e_2 \cdot P) E_2 = 0$$

$$(C^{(+)} + C^{(-)}) \cdot k_1 - m E_1 + \gamma E_2 = - \Psi_1(t)$$

$$(D^{(+)} + D^{(-)}) \cdot k_1 + E_1 = 0$$

El uso combinado de las ecuaciones (3.15), (3.16) y (4.2) nos permite llegar a la siguiente lista de relaciones del álgebra de corrientes para las amplitudes no observables $\hat{\Phi}_i$ (Ver apéndice A).

(4 -3)

$$\lim_{z \rightarrow -1} \frac{1}{2} \left[A_{11}(z) - \bar{A}_{11}(z) \right] = - \frac{1}{m} \Psi_2(t)$$

$$\lim_{z \rightarrow -1} \left[A_{11}(z-1) + \bar{A}_{11}(z-1) \right] = 0$$

$$\lim_{z \rightarrow -1} \left[A_{1i}^{(+)}(z) + \bar{A}_{1i}^{(+)}(z) \right] = 0 \quad (i = 2, 3)$$

$$\lim_{z \rightarrow -1} \left[B_{ii}(z) + \bar{B}_{ii}(z) \right] = 0 \quad (i = 0, 1, 2, 3)$$

$$\lim_{z \rightarrow -1} \frac{1}{2} \left[B_{11}(z-1) - \bar{B}_{11}(z-1) \right] = - \Psi_1(t)$$

$$\lim_{z \rightarrow -1} \left[B_{1i}^{(+)}(z) - \bar{B}_{1i}^{(+)}(z) \right] = 0 \quad (i = 2, 3)$$

$$\lim_{z \rightarrow -1} \left[B_{23}^{(+)}(z) + \bar{B}_{23}^{(+)}(z) \right] = 0$$

$$\lim_{z \rightarrow -1} \frac{1}{2} \left[C_1^{(+)}(z) - \bar{C}_1^{(+)}(z) \right] = \Psi_1(t)$$

$$\lim_{z \rightarrow -1} \left[C_1^{(-)}(z) - \bar{C}_1^{(-)}(z) \right] = 0$$

$$\lim_{z \rightarrow -1} \left[D_1^{(+)}(z) - \bar{D}_1^{(+)}(z) \right] = 0$$

$$\lim_{z \rightarrow -1} \left[D_i^{(+)}(z) + \bar{D}_i^{(+)}(z) \right] = 0 \quad (i=2, 3)$$

$$\lim_{z \rightarrow -1} \left[E_2(z) - \bar{E}_2(z) \right] = 0$$

$$\lim_{z \rightarrow -1} \left[B_{1i}^{(+)}(z-1) + C_i^{(+)}(z) + \bar{B}_{1i}^{(+)}(z-1) + \bar{C}_i^{(+)}(z) \right] = 0 \quad (i=2, 3)$$

$$\lim_{z \rightarrow -1} \left[D_1^{(+)}(z-1) + \bar{D}_1^{(+)}(z-1) \right] = 0$$

$$\lim_{z \rightarrow -1} \left[D_1^{(-)}(z-1) + E_1(z) + \bar{D}_1^{(-)}(z-1) + \bar{E}_1(z) \right] = 0$$

$$\lim_{z \rightarrow -1} \left[B_{11}(z-2) + 2C_1^{(+)}(z-1) + \bar{B}_{11}(z-2) + 2\bar{C}_1^{(+)}(z-1) \right] = 0$$

Estas relaciones son válidas para cualquier valor de t y son independientes de cualquier suposición sobre la ubicación de las diferentes singularidades en el plano z .

Cuando las integrales que definen las $\bar{\Phi}_i(z)$'s que aparecen en (4.3) convergen para el valor de z involucrado en el límite, las relaciones (4.3) pueden ser trasladadas a las formas integrales usuales, constituyendo así las reglas de suma del álgebra de corrientes.

A esta altura debemos obtener las amplitudes físicas ϕ_i usando (3.8).

Claramente para todas las amplitudes $\bar{\Phi}_i$ que multiplican a un covariante I_i simétrico por el intercambio $e_1 \leftrightarrow e_2$, debe ser $\bar{\Phi}_i = \phi_i$ y por lo tanto sus propiedades de "smoothness" y las relaciones del álgebra de corrientes en (4.3) siguen valiendo sin ninguna variante.

Elegimos $\bar{\Phi}_{1j} = D_1^{(-)}$ y $\bar{\Phi}_{1k} = D_3^{(-)}$ y tenemos en cuenta la forma explícita de los coeficientes $c_i^{(\alpha)}$.

Podemos comprobar así (Ver apéndice A) que todas las amplitudes $\bar{\Phi}_i$ son "smooth", menos la $\phi_2^{(-)}$, que sin embargo puede ser reemplazada por la amplitud "smooth" $\sqrt{2} B_{12}^{(+)} + \phi_2^{(-)}$.

Además las relaciones del álgebra de corrientes para las amplitudes $\bar{\Phi}_i$ que multiplican a un covariante I_i antisimétrico por el intercambio $e_1 \leftrightarrow e_2$ deben ser cambiadas o suprimidas, obteniendo finalmente la siguiente lista de relaciones del álgebra de corrientes para las 32 amplitudes físicas ϕ_i :

$$(4.4) \quad \lim_{z \rightarrow -1} \frac{1}{2} \left[\mathcal{A}_{11}(z) - \bar{\mathcal{A}}_{11}(z) \right] = -\frac{1}{m} \Psi_2(t)$$

$$\lim_{z \rightarrow -1} \left[\mathcal{A}_{11}(z-1) + \bar{\mathcal{A}}_{11}(z-1) \right] = 0$$

$$\lim_{z \rightarrow -1} \left[\mathcal{A}_{1i}^{(+)}(z) + \bar{\mathcal{A}}_{1i}^{(+)}(z) \right] = 0 \quad (i=2,3)$$

$$\lim_{z \rightarrow -1} \left[\mathcal{B}_{ii}(z) + \bar{\mathcal{B}}_{ii}(z) \right] = 0 \quad (i=0,1,2,3)$$

$$\lim_{z \rightarrow -1} \frac{1}{2} \left[\mathcal{B}_{11}(z-1) - \bar{\mathcal{B}}_{11}(z-1) \right] = -\Psi_1(t)$$

$$\lim_{z \rightarrow -1} \left[\mathcal{B}_{12}^{(+)}(z) - \bar{\mathcal{B}}_{12}^{(+)}(z) \right] = 0$$

$$\lim_{z \rightarrow -1} \left[\Delta^2 \mathcal{B}_{12}^{(-)}(z) - \mathcal{E}_2(z) - \Delta^2 \bar{\mathcal{B}}_{12}^{(-)}(z) + \bar{\mathcal{E}}_2(z) \right] = 0$$

$$\lim_{z \rightarrow -1} \left[\mathcal{B}_{13}^{(+)}(z) - \bar{\mathcal{B}}_{13}^{(+)}(z) \right] = 0$$

$$\lim_{z \rightarrow -1} \left[\mathcal{B}_{23}^{(+)}(z) + \bar{\mathcal{B}}_{23}^{(+)}(z) \right] = 0$$

$$\lim_{z \rightarrow -1} \frac{1}{2} \left[\mathcal{C}_1^{(+)}(z) - \bar{\mathcal{C}}_1^{(+)}(z) \right] = \Psi_1(t)$$

$$\lim_{z \rightarrow -1} \left[\Delta^2 \mathcal{C}_1^{(-)}(z) - (Q \cdot \Delta) \mathcal{E}_2(z) - \Delta^2 \bar{\mathcal{C}}_1^{(-)}(z) + (Q \cdot \Delta) \bar{\mathcal{E}}_2(z) \right] = 0$$

$$\lim_{z \rightarrow -1} \left[\mathcal{D}_1^{(+)}(z) - \bar{\mathcal{D}}_1^{(+)}(z) \right] = 0$$

$$\lim_{z \rightarrow -1} \left[\mathcal{D}_1^{(+)}(z-1) + \bar{\mathcal{D}}_1^{(+)}(z-1) \right] = 0$$

$$\lim_{z \rightarrow -1} \left[\mathcal{D}_2^{(+)}(z) + \bar{\mathcal{D}}_2^{(+)}(z) \right] = 0$$

$$\lim_{z \rightarrow -1} \left[\mathcal{D}_3^{(+)}(z) + \bar{\mathcal{D}}_3^{(+)}(z) \right] = 0$$

$$\lim_{z \rightarrow -1} \left[\mathcal{E}_1(z) + \bar{\mathcal{E}}_1(z) \right] = 0$$

$$\lim_{z \rightarrow -1} \left[\mathcal{B}_{1i}^{(+)}(z-1) + \mathcal{E}_i^{(+)}(z) + \bar{\mathcal{B}}_{1i}^{(+)}(z-1) + \bar{\mathcal{E}}_i^{(+)}(z) \right] = 0 \quad (i=2,3)$$

$$\lim_{z \rightarrow -1} \left[\mathcal{B}_{11}(z-2) + 2 \mathcal{E}_1^{(+)}(z-1) + \bar{\mathcal{B}}_{11}(z-2) + 2 \bar{\mathcal{E}}_1^{(+)}(z-1) \right] = 0$$

Hemos así logrado nuestro propósito, escribiendo 32 amplitudes físicas "smooth" y todas las relaciones del álgebra de corrientes que ellas satisfacen. Si estuviésemos interesados en las amplitudes $T_{\mu\nu}$ sobre el "mass-shell" definidas en (2.11), las condiciones de divergencia (4.1) deben ser reemplazadas por las condiciones de invariancia de "gauge" (o condiciones de transversalidad).

$$k_2 \cdot e_1 = e_2 \cdot k_1 = 0$$

Esto significa que todas las relaciones de superconvergencia que verifican las amplitudes físicas sobre el "mass-shell" se pueden obtener simplemente anulando los factores de forma en el miembro derecho de las ecuaciones (4.4). (*)

(*) Acerca de investigaciones previas en álgebra de corrientes y superconvergencia para "target" de spin $\frac{1}{2}$, ver por ejemplo los trabajos indicados en referencias (11) y (14).

I. 5 Scattering Compton a baja energia

En esta sección nos interesa estudiar el scattering Compton en nucleones/ cuando consideramos el límite a baja energía de los fotones que sufrieron scattering y tenemos en cuenta hasta el primer orden incluido en la frecuencia del fotón.

Nos resulta conveniente usar la descomposición (3.12) y distinguir en ella dos tipos de términos:

- Aquellos que llamaremos $e_2 \tau e_1^{(0)}$ que son determinados hasta el primer orden $O(k)$, solamente en términos de su aproximación de Born.
- Aquellos que llamaremos $e_2 \tau e_1^{(e)}$ que reciben contribuciones de orden $O(k)$, también de los estados excitados intermedios.

(5.1)

$$(e_2 \tau e_1)_{\text{low}} = (e_2 \tau e_1^{(0)})_{\text{low}} + (e_2 \tau e_1^{(e)})_{\text{low}}$$

realizando una inspección detallada de todos los términos que aparecen en (3.12) podemos concluir que (Ver apéndice A)

$$(e_2 \tau e_1^{(e)})_{\text{low}} = (A_{00} + \frac{\gamma}{m} B_{00})_{\text{low}} (e_2 \cdot e_1) + (E_1 - \frac{\gamma}{m} E_2)_{\text{low}} (\gamma \cdot e_2, \gamma \cdot e_1)$$

Usando las relaciones que se obtienen de considerar la invariancia de "gauge", $(A_{00} + \frac{\gamma}{m} B_{00})$ y $(E_1 - \frac{\gamma}{m} E_2)$, pueden ser expresados

de la siguiente manera

$$(A_{00} + \frac{\gamma}{m} B_{00})_{\text{low}} = \left[-\gamma (A_{12}^{(+)} - A_{12}^{(-)}) - \frac{\gamma}{m} (C_2^{(+)} - C_2^{(-)}) \right]_{\text{low}}$$

(5-3)

$$\begin{aligned}
(E_1 - \frac{\nu}{m} E_2)_{\text{low}} = \frac{1}{2} \left[-\frac{\nu^2}{m} B_{11} - (k_1 \cdot \Delta) (D_2^{(+)} + D_2^{(-)}) - \right. \\
- (k_1 \cdot Q) (D_3^{(+)} + D_3^{(-)}) + \frac{(k_1 \cdot \Delta)}{m} (C_2^{(+)} + C_2^{(-)}) + \\
\left. + \frac{(k_1 \cdot Q)}{m} (C_3^{(+)} + C_3^{(-)}) \right]_{\text{low}}
\end{aligned}$$

por lo tanto vemos que la condición de invariancia de "gauge" nos permite calcular $e_2 \cdot T \cdot e_1^{(e)}$ hasta el primer orden $O(k)$ conociendo solamente los términos de Born de $e_2 \cdot T \cdot e_1$.

El resultado que se obtiene, es que el límite de la amplitud de scattering Compton y también de las derivadas primeras con respecto a la frecuencia del fotón, para frecuencia cero del fotón, está determinado por la carga, la masa y el momento magnético estático μ_T de los fermiones de spin $\frac{1}{2}$.

Eligiendo el "gauge" particular $p_1 \cdot e_1 = p_1 \cdot e_2 = 0$, obtenemos para $e_2 \cdot T \cdot e_1$

$$\begin{aligned}
e_2 \cdot T \cdot e_1 = -\frac{e^2}{m} (e_1 \cdot e_2) + \left[\frac{2\nu}{m} \left(\mu_T - \frac{e}{2m} \right)^2 + \frac{2m \Delta^2}{\nu} \mu_T^2 \right] (\gamma \cdot e_2, \gamma \cdot e_1) + \\
+ 4m \left(\mu_T - \frac{e}{2m} \right) \mu_T \frac{1}{\nu} \left[(e_2 \cdot Q) (\gamma \cdot e_1, \gamma \cdot Q) - (e_1 \cdot Q) (\gamma \cdot e_2, \gamma \cdot Q) \right] - \\
(5.4) \quad - 4m \left(\mu_T + \frac{e}{2m} \right) \mu_T \frac{1}{\nu} \left[(e_1 \cdot Q) (\gamma \cdot e_1, \gamma \cdot \Delta) + (e_1 \cdot Q) (\gamma \cdot e_2, \gamma \cdot \Delta) \right] + \\
+ \frac{4m \mu_T^2}{\nu} (e_2 \cdot e_1) (\gamma \cdot Q, \gamma \cdot \Delta) + O(k^2)
\end{aligned}$$

que en el sistema del laboratorio es idéntica a la expresión dada por Low y Gell - Mann, Goldembar (12).

I.6 Descomposición invariante con derivadas

Las relaciones de interacción fuerte se pueden también obtener de una manera completamente distinta.

Para este propósito, siguiendo las prescripciones de referencia (8), vamos a descomponer la amplitud $e_2 \text{ T } e_1$ en un conjunto de amplitudes invariantes que posean una expresión simple en ondas parciales en el canal t.

Introducimos primero el operador (pseudo) cuadrivector w_μ que representa/ (a menos de un factor multiplicativo) en el sistema centro de masa del canal t, el momento angular relativo de las dos partículas entrantes de cuadrimomentos p_1 y p_2 o el de las dos partículas salientes de cuadrimomentos k_1 y k_2 y el operador cuadrivector \mathcal{T}_μ .

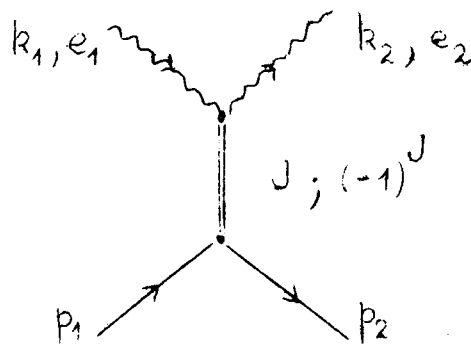
$$(6.1) \quad \begin{aligned} w_\mu &= \frac{1}{2} \epsilon_{\mu\nu\rho\sigma} M^{\nu\rho} p_1^\sigma \\ \mathcal{T}_\mu &= \epsilon_{\mu\nu\rho\sigma} Q^\nu p_1^\rho w^\sigma \end{aligned}$$

donde el operador tensorial $M^{\mu\nu}$ se define como sigue

$$(6.2) \quad \begin{aligned} M^{\mu\nu} &= i \left(p_1^\mu \frac{\partial}{\partial p_1^\nu} - p_1^\nu \frac{\partial}{\partial p_1^\mu} \right) \\ M^{\mu\nu} &= -i \left(Q^\mu \frac{\partial}{\partial Q^\nu} - Q^\nu \frac{\partial}{\partial Q^\mu} \right) \end{aligned}$$

de acuerdo a que operemos en el espacio p o en el espacio k respectivamente.

Consideramos el intercambio de una partícula de spin J y paridad $(-1)^J$, de acuerdo al siguiente gráfico



donde a la partícula intermedia en el canal t, la describimos mediante un campo $\phi_{\mu_1 \dots \mu_j}$ simétrico en sus índices de traza nula y divergencia nula. Teniendo en cuenta los operadores definidos en (6.1) y (6.2), podemos escribir los siguientes operadores para el vértice bariónico y fotónico.

$$P = (-1)^{J+1}$$

Bariónico

$$\alpha_1 = i(\gamma \cdot W)$$

$$\alpha_2 = \gamma_5$$

Fotónico

$$\beta_1 = i(e_1 \cdot \Delta)(e_2 \cdot W)$$

$$\beta_2 = i(e_2 \cdot \Delta)(e_1 \cdot W)$$

$$\beta_3 = i(e_1 \cdot Q)(e_2 \cdot W)$$

$$\beta_4 = i(e_2 \cdot Q)(e_1 \cdot W)$$

$$\beta_5 = (e_1 \cdot W)(e_2 \cdot \bar{C}) + (e_2 \cdot \bar{C})(e_1 \cdot W)$$

$$\beta_6 = (e_2 \cdot W)(e_1 \cdot \bar{C}) + (e_1 \cdot \bar{C})(e_2 \cdot W)$$

$$P = (-1)^J$$

$$\gamma_1 = i \gamma_5 (\gamma \cdot W)$$

$$\gamma_2 = 1$$

(6.3)

$$\eta_0 = (e_1 \cdot e_2)$$

$$\eta_1 = (e_1 \cdot \Delta)(e_2 \cdot \Delta)$$

$$\eta_2 = (e_1 \cdot \Delta)(e_2 \cdot Q)$$

$$\eta_3 = (e_2 \cdot \Delta)(e_1 \cdot Q)$$

$$\eta_4 = (e_1 \cdot Q)(e_2 \cdot Q)$$

$$\eta_5 = i(e_1 \cdot \Delta)(e_2 \cdot \bar{C})$$

$$\eta_6 = i(e_2 \cdot \Delta)(e_1 \cdot \bar{C})$$

$$\eta_7 = i(e_1 \cdot Q)(e_2 \cdot \bar{C})$$

$$\eta_8 = i(e_2 \cdot Q)(e_1 \cdot \bar{C})$$

$$\eta_9 = (e_1 \cdot W)(e_2 \cdot W) + (e_2 \cdot W)(e_1 \cdot W)$$

Donde α_i, ζ_i son los operadores invariantes en el espacio p y β_j, η_j son los operadores invariantes en el espacio k.

Podemos ahora descomponer la amplitud $e_2 \cdot T \cdot e_1$ en un conjunto de 32 amplitudes invariantes independientes,

$$(6.4) \quad e_2 \cdot T \cdot e_1 = \sum_{\substack{i=1,2 \\ j=1, \dots, 6}} \alpha_i \beta_j F_{ij} + \sum_{\substack{i=1,2 \\ j=0, \dots, 9}} \zeta_i \eta_j G_{ij}$$

en la cual por simplicidad hemos suprimido los índices de la simetría interna y las funciones spinoriales $\bar{u}(p_2)$ y $u(p_1)$.

Ya que los operadores que multiplican a las amplitudes F's y a G's son escalares bajo rotaciones simultáneas en el espacio p y en el espacio k, las amplitudes F's y las G's se pueden descomponer en el canal t como en una teoría escalar, de la siguiente manera

$$(6.5) \quad \begin{aligned} F(t, \cos \theta_t) &= \sum_{J=0}^{\infty} F_J(t) P_J(\cos \theta_t) \\ G(t, \cos \theta_t) &= \sum_{J=0}^{\infty} G_J(t) P_J(\cos \theta_t) \end{aligned}$$

donde θ_t es el ángulo de scattering baricéntrico en el canal t y las funciones $F_J(t)$ y $G_J(t)$ nos describen la producción de estados intermedios de momento angular total J.

Sin embargo es importante hacer notar que las F's y las G's no son amplitudes físicamente observables. Realmente para obtener amplitudes físicamente observables, debemos llevar a cabo implícitamente las derivadas $\frac{\partial}{\partial Q_{\vec{e}}}$ y $\frac{\partial}{\partial P_{\vec{e}}}$ que aparecen en (6.4) y obtener así la descomposición invariantes "usual".

Por lo tanto daremos a las expansiones (6.5) solamente un significado formal.

Las expansiones (6.5) significan que las amplitudes F's y las G's tienen propiedades analíticas simples en el plano complejo de J o en el plano de Khuri y esto es lo que necesitamos en lo siguiente .

Vamos a discutir ahora las propiedades de cruzamiento de las amplitudes / F' s y de las G's .

La invariancia por el cruzamiento $p_1 \rightleftharpoons -p_2$ nos dice que debe ser

$$\begin{aligned}
 (6.6) \quad & F_{1j} (-\sqrt{})^* = -\bar{F}_{1j} (\sqrt{}) \quad j=1, \dots, 6 \\
 & F_{2j} (-\sqrt{})^* = \bar{F}_{2j} (\sqrt{}) \quad j=1, \dots, 6 \\
 & G_{ij} (-\sqrt{})^* = \bar{G}_{ij} (\sqrt{}) \quad i=1,2 \quad j=0,1, \dots, 9
 \end{aligned}$$

y además se deben satisfacer las siguientes relaciones, teniendo en cuenta la invariancia por el intercambio $u_1 \rightleftharpoons u_2$

$$\begin{aligned}
 (6.7) \quad & F_{11} \rightleftharpoons -F_{12} & F_{21} \rightleftharpoons F_{22} \\
 & F_{13} \rightleftharpoons F_{14} & F_{23} \rightleftharpoons -F_{24} \\
 & F_{15} \rightleftharpoons F_{16} & F_{25} \rightleftharpoons -F_{26} \\
 & G_{ij} \rightleftharpoons G_{ij} & i=1,2 \quad j=0,1,4,9 \\
 & G_{i2} \rightleftharpoons -G_{i3} & i=1,2 \\
 & G_{i5} \rightleftharpoons -G_{i6} & i=1,2 \\
 & G_{i7} \rightleftharpoons G_{i8} & i=1,2
 \end{aligned}$$

Llevando a cabo los cálculos (ver apéndice A) podemos expresar las funciones invariantes de la descomposición covariante usual (3.1) en términos de las derivadas de las amplitudes F's y G's obteniendo así

(6.8)

$$\begin{aligned}
\mathcal{A}_{00} &= 2m\omega\check{\nu}\Delta^2(F'_{15} + F'_{16}) + m\check{\nu}G'_{10} + G'_{20} + 2m\check{\nu}P^2\omega G'_{19} - \\
&\quad - 2m\check{\nu}\Delta^2(\check{\nu}^2G'_{19} + 3\check{\nu}G'_{19} + G'_{19}) + 2P^2\omega G'_{29} - 2\check{\nu}\Delta^2(\check{\nu}G'_{29}G'_{29}) \\
\mathcal{A}_{11} &= -2m\omega^2(F'_{15} + F'_{16}) - 2\omega(Q.\Delta)(F'_{25} + F'_{26}) - 2m\omega(\check{\nu}G'_{19} + 2G'_{19}) - \\
&\quad - 2\omega G'_{29}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\mathcal{A}_{12}^{(+)} &= \frac{1}{2}m\omega(F'_{11} + F'_{12}) - \frac{1}{2}(Q.\Delta)(F'_{21} + F'_{22}) - m\omega(Q.\Delta)\left[2\check{\nu}(F'_{15} + F'_{16}) - \right. \\
&\quad \left. - F'_{15} - F'_{16}\right] + \check{\nu}\omega(F'_{25} + F'_{26}) - (Q.\Delta)^2\left[\check{\nu}(F'_{25} + F'_{26}) + F'_{25} + F'_{26}\right] - \\
&\quad - \frac{1}{2}m\omega\left[\check{\nu}(G'_{15} + G'_{16}) + G'_{15} + G'_{16}\right] - \frac{1}{2}\omega(G'_{25} + G'_{26}) - \\
&\quad - m(Q.\Delta)(2\check{\nu}^2G'_{19} + 5\check{\nu}G'_{19} + G'_{19}) - (Q.\Delta)(2\check{\nu}G'_{29} + G'_{29})
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\mathcal{A}_{12}^{(-)} &= \frac{1}{2}m\omega(F'_{11} - F'_{12}) - \frac{1}{2}(Q.\Delta)(F'_{21} - F'_{22}) - \frac{1}{2}Q^2(F'_{23} - F'_{24}) - \\
&\quad - \frac{1}{2}m\omega\left[\check{\nu}(G'_{15} - G'_{16}) + G'_{15} - G'_{16}\right] - \frac{1}{2}\omega(G'_{25} - G'_{26})
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\mathcal{A}_{22} &= m(Q.\Delta)\check{\nu}(F'_{11} + F'_{12}) + \check{\nu}(F'_{21} + F'_{22}) - 2m\check{\nu}\left[\check{\nu}(Q.\Delta)^2(F'_{15} + F'_{16}) + \right. \\
&\quad \left. + \omega(F'_{15} + F'_{16})\right] + 2\check{\nu}(Q.\Delta)\left[\check{\nu}(F'_{25} + F'_{26}) + F'_{25} + F'_{26}\right] + m\check{\nu}G'_{11} + G'_{21} - \\
&\quad - m\check{\nu}(Q.\Delta)\left[\check{\nu}(G'_{15} + G'_{16}) + G'_{15} + G'_{16}\right] - \check{\nu}(Q.\Delta)(G'_{25} + G'_{26}) - \\
&\quad - 2m\check{\nu}\left[(P^2Q^2 - \check{\nu}^2)G'_{19} - 3\check{\nu}G'_{19} + G'_{19}\right] - 2\left[(P^2Q^2 - \check{\nu}^2)G'_{29} - 2\check{\nu}G'_{29}\right]
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
A_{13}^{(+)} = & \frac{1}{2} m \omega (F'_{13} + F'_{14}) - \frac{1}{2} (Q \cdot \Delta) (F'_{23} + F'_{24}) + m \omega \Delta^2 \left[2 \sqrt{} (F'_{15} + F'_{16}) - \right. \\
& \left. - F'_{15} - F'_{16} \right] + \Delta^2 (Q \cdot \Delta) \left[\sqrt{} (F'_{25} + F'_{26}) + F'_{25} + F'_{26} \right] - \frac{1}{2} m \omega \left[\sqrt{} (G'_{17} + G'_{18}) + \right. \\
& \left. + G'_{17} + G'_{18} \right] - \frac{1}{2} \omega (G'_{27} + G'_{28}) + m \Delta^2 (2 \sqrt{} G'_{16} + 5 \sqrt{} G'_{16} + G'_{16}) + \\
& + \Delta^2 (2 \sqrt{} G'_{29} + G'_{19})
\end{aligned}$$

$$A_{13}^{(-)} = \frac{1}{2} m \omega (F'_{13} - F'_{14}) - \frac{1}{2} m \omega \left[\sqrt{} (G'_{17} - G'_{18}) + G'_{17} - G'_{18} \right] - \frac{1}{2} \omega (G'_{27} - G'_{28})$$

$$\begin{aligned}
A_{33} = & - m \sqrt{} \Delta^2 (F'_{13} + F'_{14}) - 2m \sqrt{}^2 (\Delta^2)^2 (F'_{15} + F'_{16}) + m \sqrt{} G'_{14} + G'_{24} + \\
& + m \sqrt{} \Delta^2 \left[\sqrt{} (G'_{17} + G'_{18}) + G'_{17} + G'_{18} \right] + \sqrt{} \Delta^2 (G'_{27} + G'_{28}) - \\
& - 2 P^2 \Delta^2 (m \sqrt{} G'_{19} + G'_{29})
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
A_{23}^{(+)} = & - \frac{1}{2} m \sqrt{} \Delta^2 (F'_{11} + F'_{12}) + \frac{1}{2} m \sqrt{} (Q \cdot \Delta) (F'_{13} + F'_{14}) + \frac{1}{2} \sqrt{} (F'_{23} + F'_{24}) - \\
& - 2m \sqrt{}^2 \Delta^2 (Q \cdot \Delta) (F'_{15} + F'_{16}) - \sqrt{} \Delta^2 \left[\sqrt{} (F'_{25} + F'_{26}) + F'_{25} + F'_{26} \right] + \\
& + \frac{1}{2} m \sqrt{} (G'_{12} + G'_{13}) + \frac{1}{2} (G'_{22} + G'_{23}) + \frac{1}{2} m \sqrt{} \Delta^2 \left[\sqrt{} (G'_{15} + G'_{16}) + G'_{15} + G'_{16} \right] + \\
& + \frac{1}{2} \sqrt{} \Delta^2 (G'_{25} + G'_{26}) - \frac{1}{2} m \sqrt{} (Q \cdot \Delta) \left[\sqrt{} (G'_{17} + G'_{18}) + G'_{17} + G'_{18} \right] - \\
& - \frac{1}{2} \sqrt{} (Q \cdot \Delta) (G'_{27} + G'_{28}) + 2 P^2 (Q \cdot \Delta) (m \sqrt{} G'_{19} + G'_{29})
\end{aligned}$$

$$A_{23}^{(-)} = \frac{1}{2} m \sqrt{} \Delta^2 (F'_{11} - F'_{12}) + \frac{1}{2} m \sqrt{} (Q \cdot \Delta) (F'_{13} - F'_{14}) + \frac{1}{2} m \sqrt{} (G'_{13} - G'_{12}) -$$

$$\begin{aligned}
& -\frac{1}{2} (G_{23} - G_{24}) - \frac{1}{2} m \sqrt{\Delta^2} \left[\sqrt{(G'_{15} - G'_{16}) + G'_{15} - G'_{16}} \right] - \frac{1}{2} \sqrt{\Delta^2} (G'_{25} - G'_{26}) - \\
& -\frac{1}{2} m \sqrt{(Q \cdot \Delta)} \left[\sqrt{(G'_{17} - G'_{18}) + G'_{17} - G'_{18}} \right] - \frac{1}{2} \sqrt{(Q \cdot \Delta)} (G'_{27} - G'_{28}) \\
\mathcal{B}_{00} = & -2 P^2 \Delta^2 \omega (F'_{15} + F'_{16}) - P^2 G'_{10} - 2(P^2)^2 \omega G'_{19} + 2 P^2 \Delta^2 (\sqrt{G'_{19}} + \\
& + 3 \sqrt{G'_{19} + G'_{19}}) \\
\mathcal{B}_{11} = & 2 \omega \Delta^2 \left[\sqrt{(F'_{15} + F'_{16}) + 2 (F'_{15} + F'_{16})} \right] + 2 P^2 \omega G'_{19} \\
\mathcal{B}_{12}^{(+)} = & -\frac{1}{2} \Delta^2 \left[\sqrt{(F'_{11} + F'_{12}) + F'_{11} + F'_{12}} \right] + P^2 \omega (Q \cdot \Delta) (F'_{15} + F'_{16}) + \\
& + \Delta^2 (Q \cdot \Delta) \left[\sqrt{(F'_{15} + F'_{16}) + \sqrt{(F'_{15} + F'_{16}) - F'_{15} - F'_{16}}} \right] + \\
& + \frac{1}{2} P^2 \omega (G'_{15} + G'_{16}) + P^2 (Q \cdot \Delta) (2 \sqrt{G'_{19}} + 3 G'_{19}) \\
\mathcal{B}_{12}^{(-)} = & -\frac{1}{2} \Delta^2 \left[\sqrt{(F'_{11} - F'_{12}) + F'_{11} - F'_{12}} \right] + \frac{1}{2} \frac{\sqrt{\Delta^2}}{m} (F'_{23} - F'_{24}) + \\
& + P^2 \omega (Q \cdot \Delta) (F'_{15} - F'_{16}) - \\
& - \Delta^2 (Q \cdot \Delta) \left[\sqrt{(F'_{15} - F'_{16}) + 4 \sqrt{(F'_{15} - F'_{16}) + 2(F'_{15} - F'_{16})}} \right] + \\
& + \frac{1}{2} \frac{1}{m} (\sqrt{\Delta^2} - P^2 \omega) (F'_{26} - F'_{26}) - 2 \frac{\sqrt{\Delta^2}}{m} \Delta^2 (F'_{25} - F'_{26}) \\
\mathcal{B}_{22} = & -P (Q \cdot \Delta) (F'_{11} + F'_{12}) - m (F'_{21} + F'_{22}) + 2 \sqrt{\Delta^2} (Q \cdot \Delta)^2 (F'_{15} + F'_{16}) + \\
& + 2 P^2 \omega (F'_{16} + F'_{16}) - 2 m (Q \cdot \Delta) \left[\sqrt{(F'_{25} + F'_{26}) + F'_{25} + F'_{26}} \right] - 2 P^2 G'_{11} + \\
& + P^2 (Q \cdot \Delta) \left[\sqrt{(G'_{15} + G'_{16}) + G'_{15} + G'_{16}} \right] + 2(P^2)^2 Q^2 G'_{19} - 2 P^2 (\sqrt{G'_{19}} + \\
& + 3 \sqrt{G'_{19} + G'_{19}})
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \mathcal{B}_{13}^{(+)} = & -\frac{1}{2} \Delta^2 \left[\sqrt{(F'_{13} + F'_{14}) + F'_{13} + F'_{14}} \right] - \Delta^2 P^2 \omega (F'_{15} + F'_{16}) - \\ & - (\Delta^2)^2 \left[\sqrt{(F'_{15} + F'_{16}) + F'_{15} + F'_{16}} \right] + \frac{1}{2} P^2 \omega (G'_{17} + G'_{18}) - \\ & - P^2 \Delta^2 (2 \sqrt{G'_{19}} + 3 G'_{19}) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \mathcal{B}_{13}^{(-)} = & -\frac{1}{2} \Delta^2 \left[\sqrt{(F'_{13} - F'_{14}) + F'_{13} - F'_{14}} \right] - \Delta^2 P^2 \omega (F'_{15} - F'_{16}) + \\ & + (\Delta^2)^2 \left[\sqrt{(F'_{15} + F'_{16}) + 4 \sqrt{(F'_{15} - F'_{16}) + 2 (F'_{15} - F'_{16})}} \right] + \\ & + \frac{1}{2} P^2 \omega (G'_{17} - G'_{18}) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \mathcal{B}_{33} = & P^2 \Delta^2 (F'_{13} + F'_{14}) + 2 P^2 (\Delta^2)^2 \sqrt{(F'_{15} + F'_{16})} - P^2 G'_{14} - \\ & - P^2 \Delta^2 \left[\sqrt{(G'_{17} + G'_{18}) + G'_{17} + G'_{18}} \right] + 2 (P^2)^2 \Delta^2 G'_{19} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \mathcal{B}_{23}^{(+)} = & \frac{1}{2} P^2 \Delta^2 (F'_{11} + F'_{12}) - \frac{1}{2} P^2 (Q \cdot \Delta) (F'_{13} + F'_{14}) - \frac{1}{2} m (F'_{13} + F'_{14}) - \\ & - 2 \sqrt{P^2 \Delta^2 (Q \cdot \Delta) (F'_{15} + F'_{16}) + m \Delta^2 \left[\sqrt{(F'_{25} + F'_{26}) + F'_{25} + F'_{26}} \right]} - \\ & - \frac{P^2}{2} (G'_{12} + G'_{13}) - \\ & - \frac{1}{2} P^2 \Delta^2 \left[\sqrt{(G'_{15} + G'_{16}) + G'_{15} + G'_{16}} \right] + \frac{1}{2} P^2 (Q \cdot \Delta) \left[\sqrt{(G'_{17} + G'_{18}) + G'_{17} + G'_{18}} \right] - \\ & - 2 (P^2)^2 (Q \cdot \Delta) G'_{19} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \mathcal{B}_{23}^{(-)} = & -\frac{1}{2} P^2 \Delta^2 (F'_{11} - F'_{12}) - \frac{1}{2} P^2 (Q \cdot \Delta) (F'_{13} - F'_{14}) + \frac{1}{2} P^2 (G'_{12} - G'_{13}) + \\ & + \frac{1}{2} P^2 \Delta^2 \left[\sqrt{(G'_{15} - G'_{16}) + G'_{15} - G'_{16}} \right] + \\ & + \frac{1}{2} P^2 (Q \cdot \Delta) \left[\sqrt{(G'_{17} - G'_{18}) + G'_{17} - G'_{18}} \right] \end{aligned}$$

$$\phi_1^{(+)} = P^2 \omega^2 (F'_{15} + F'_{16}) - \sqrt{\Delta^2} \omega \left[\sqrt{\Delta^2} (F'_{15} + F'_{16}) + 2 (F'_{15} + F'_{16}) \right] +$$

$$+ m \omega (Q \cdot \Delta) (F'_{25} + F'_{26}) + 2 P^2 \omega G'_{19}$$

$$\phi_1^{(-)} = \frac{\sqrt{\Delta^2}}{m} (Q \cdot \Delta) (F'_{23} - F'_{24}) - P^2 \omega^2 (F'_{15} - F'_{16}) + \Delta^2 \omega \left[\sqrt{\Delta^2} (F'_{15} - F'_{16}) + \right.$$

$$+ 4 \sqrt{\Delta^2} (F'_{15} - F'_{16}) + 2 (F'_{15} - F'_{16}) \left. \right] - \frac{(Q \cdot \Delta)}{m} (\omega P^2 - \sqrt{\Delta^2} \Delta^2) (F'_{25} - F'_{26}) +$$

$$+ \frac{2 \sqrt{\Delta^2}}{m} \Delta^2 (Q \cdot \Delta) (F'_{25} - F'_{26})$$

$$\phi_2^{(+)} = -\frac{1}{2} P^2 \omega (F'_{11} + F'_{12}) + \frac{1}{2} \sqrt{\Delta^2} \left[\sqrt{\Delta^2} (F'_{11} + F'_{12}) + F'_{11} + F'_{12} \right] + \frac{1}{2} m (Q \cdot \Delta) (F'_{21} + F'_{22}) +$$

$$+ P^2 \omega \sqrt{\Delta^2} (Q \cdot \Delta) (F'_{15} + F'_{16}) - \sqrt{\Delta^2} (Q \cdot \Delta) \left[\sqrt{\Delta^2} (F'_{15} + F'_{16}) - \sqrt{\Delta^2} (F'_{15} + F'_{16}) + \right.$$

$$+ F'_{15} + F'_{16} \left. \right] + m (Q \cdot \Delta)^2 \left[\sqrt{\Delta^2} (F'_{25} + F'_{26}) + F'_{25} + F'_{26} \right] + \frac{1}{2} P^2 \omega (G'_{15} + G'_{16}) +$$

$$P^2 (Q \cdot \Delta) (2 \sqrt{\Delta^2} G'_{19} + G'_{19})$$

$$\phi_2^{(-)} = -\frac{1}{2} P^2 \omega (F'_{11} - F'_{12}) + \frac{1}{2} \sqrt{\Delta^2} \left[\sqrt{\Delta^2} (F'_{11} - F'_{12}) + F'_{11} - F'_{12} \right] +$$

$$+ \frac{1}{2} m (Q \cdot \Delta) (F'_{21} - F'_{22}) - \frac{1}{2} \left(\frac{\sqrt{\Delta^2}}{m} - m Q^2 \right) (F'_{23} - F'_{24}) - P^2 \omega \sqrt{\Delta^2} (Q \cdot \Delta) (F'_{15} - F'_{16}) +$$

$$+ \sqrt{\Delta^2} (Q \cdot \Delta) \Delta^2 \left[\sqrt{\Delta^2} (F'_{15} - F'_{16}) + 4 \sqrt{\Delta^2} (F'_{15} - F'_{16}) + 2 (F'_{15} - F'_{16}) \right] +$$

$$+ \frac{\sqrt{\Delta^2}}{m} (\omega P^2 - \sqrt{\Delta^2} \Delta^2) (F'_{25} - F'_{26}) - \frac{2 \sqrt{\Delta^2}}{m} \Delta^2 (F'_{25} - F'_{26}) + \frac{1}{2} P^2 \omega (G'_{15} - G'_{16})$$

$$\phi_3^{(+)} = \frac{1}{2} P^2 \omega (F'_{13} + F'_{14}) + \frac{1}{2} \sqrt{\Delta^2} \left[\sqrt{\Delta^2} (F'_{13} + F'_{14}) + F'_{11} + F'_{12} \right] + \frac{1}{2} m (Q \cdot \Delta) (F'_{23} + F'_{24}) -$$

$$- \sqrt{\Delta^2} P^2 \omega (F'_{15} + F'_{16}) + \sqrt{\Delta^2} (\Delta^2)^2 \left[\sqrt{\Delta^2} (F'_{15} + F'_{16}) + \sqrt{\Delta^2} (F'_{15} + F'_{16}) - \right.$$

$$- F'_{15} - F'_{16}] - m(Q, \Delta) \Delta^2 \cdot [\sqrt{\nu} (F''_{25} + F''_{26}) + F'_{25} + F'_{26}] + \frac{1}{2} P^2 \omega (G'_{17} + G'_{18}) - P^2 \Delta^2 (2 \sqrt{\nu} G'_{19} + G'_{19})$$

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_3^{(-)} = & -\frac{1}{2} P^2 \omega (F'_{13} - F'_{14}) + \frac{1}{2} \sqrt{\nu} \Delta^2 [\sqrt{\nu} (F'_{13} - F'_{14}) + F'_{11} - F'_{12}] + \\ & + \sqrt{\nu} \Delta^2 P^2 \omega (F'_{15} - F'_{16}) - \sqrt{\nu} (\Delta^2)^2 [\sqrt{\nu}^2 (F'_{15} - F'_{16}) + \sqrt{\nu} (F'_{15} - F'_{16}) + \\ & + F'_{15} - F'_{16}] + \frac{1}{2} P^2 \omega (G'_{17} - G'_{18}) \end{aligned}$$

$$\mathcal{D}_1^{(+)} = \Delta^2 \omega (F'_{25} + F'_{26})$$

$$\mathcal{D}_2^{(+)} = \frac{1}{2} \Delta^2 (F'_{21} + F'_{22}) + \Delta^2 (Q, \Delta) [\sqrt{\nu} (F'_{25} + F'_{26}) + F'_{25} + F'_{26}]$$

$$\mathcal{D}_2^{(-)} = \frac{1}{2} \Delta^2 (F'_{21} - F'_{22}) + \frac{1}{2} (Q, \Delta) (F'_{23} - F'_{24})$$

$$\mathcal{D}_3^{(+)} = \frac{1}{2} \Delta^2 (F'_{23} + F'_{24}) - (\Delta^2)^2 [\sqrt{\nu} (F'_{25} + F'_{26}) + F'_{25} + F'_{26}]$$

$$\mathcal{L}_1 = \frac{1}{2} \omega (F'_{23} - F'_{24}) - \frac{1}{2} \omega \Delta^2 (F'_{25} - F'_{26})$$

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_2 = & \frac{1}{2} \frac{\sqrt{\nu}}{m} \Delta^2 (F'_{23} - F'_{24}) + \frac{\Delta^2}{m} \left[(\sqrt{\nu}^2 \Delta^2 - \omega P^2) (F'_{25} - F'_{26}) \right] + \\ & + \frac{2\sqrt{\nu}}{m} (\Delta^2)^2 (F'_{25} - F'_{26}) \end{aligned}$$

donde

$$\omega \equiv \begin{pmatrix} Q & \Delta \\ Q & \Delta \end{pmatrix}, \quad F' = \frac{\partial F}{\partial \nu}, \quad F'' = \frac{\partial^2 F}{\partial \nu^2}, \quad F''' = \frac{\partial^3 F}{\partial \nu^3}, \quad \text{etc.}$$

Relaciones superconvergentes: A partir de las expresiones (6.8) aplicadas en el caso de trabajar sobre el "mass-shell", podemos rederivar todas las relaciones superconvergentes obtenidas en la sección (I.4) y solamente ellas. Para ello será suficiente desarrollar en series de potencias de ν (*) las amplitudes F's, las G's, y las amplitudes usuales ϕ_i . Como un ejemplo fijemos nuestra atención en la amplitud A_{11} .

A partir de

$$(6.9) \quad A_{11} = -2m\omega^2 \left(\frac{\partial^3 F_{15}}{\partial \nu^3} + \frac{\partial^3 F_{16}}{\partial \nu^3} \right) - 2(q \cdot \Delta) \omega \left(\frac{\partial^2 F_{25}}{\partial \nu^2} + \frac{\partial^2 F_{26}}{\partial \nu^2} \right) - 2m\nu\omega \frac{\partial^3 G_{19}}{\partial \nu^3} - 4m\omega \frac{\partial^2 G_{19}}{\partial \nu^2} - 2\omega \frac{\partial^2 G_{29}}{\partial \nu^2}$$

si escribimos $A_{11} = \sum_{n=0}^{\infty} A_n^{(11)} \nu^n$, y expresiones similares para /

las amplitudes F's y G's, obtenemos

$$(6.10) \quad A_n^{(11)} = (n+1)(n+2) \left[-2m\omega^2 (n+3) \left(F_{n+3}^{(15)} + F_{n+3}^{(16)} \right) - 2(q \cdot \Delta) \omega \left(F_{n+2}^{(25)} + F_{n+2}^{(26)} \right) - 2m\omega (n+2) G_{n+2}^{(19)} - 2\omega G_{n+2}^{(29)} \right]$$

En los procesos que estamos considerando: electroproducción ρ , fotoproducción ρ , scattering $\rho - \rho$ y scattering Compton, todas las partículas que pueden ser intercambiadas en el canal t, pertenecen a trayectorias de Regge y por lo tanto la F_J ($F(z)$) y la G_J ($G(z)$) no tienen polos fijos en el plano complejo de J (o en el plano de Khuri).

(*) En principio esto no es posible para todo valor de t. Un desarrollo / en s y \bar{s} en general nos daría los mismos resultados.

Llegamos así a que debe ser

$$A_{11}(-1) - \bar{A}_{11}(-1) = 0$$

$$A_{11}(-2) - \bar{A}_{11}(-2) = 0$$
(6.11)

Procediendo de la misma manera para las otras amplitudes superconvergentes es posible rederivar todas las relaciones superconvergentes, como era de esperar.

I. 7 - Comportamiento a la Regge

Finalmente deseamos obtener el comportamiento a la Regge de la parte absorbente de las 32 amplitudes físicas ϕ_i .

Para este propósito usamos nuevamente las relaciones entre las amplitudes ϕ_i y las amplitudes F y G.

En efecto la parte absorbente de las amplitudes F y G tienen un comportamiento asintótico simple en \sqrt{s} en términos de las trayectorias de Regge intercambiadas en el canal t. Precisamente, si $\alpha(t)$ es la trayectoria de Regge predominante, el comportamiento asintótico en \sqrt{s} de una amplitud genérica (que designaremos con H) en la descomposición con derivadas, está dado por

$$(7.1) \quad \text{Im } H(\sqrt{s}, t) \sim h(t) \sqrt{s}^{\alpha(t)} (1 + \exp i \alpha(t))$$

Vamos a separar H en el espacio del spin isotópico en sus partes simétrica y antisimétrica.

Podemos distinguir los tres casos siguientes, de acuerdo a las propiedades isotópicas de las partículas o corrientes que sufrieron scattering.

$$\begin{aligned}
 H^{\alpha\beta} &= H^{(+)} \int_{\alpha\beta} + H^{(-)} \frac{1}{2} [\tau_\alpha, \tau_\beta] \\
 (7.2) \quad H^{\alpha Q} &= H^{(+)} \int_{\alpha 3} + H^{(-)} \frac{1}{2} [\tau_\alpha, \tau_3] + H^{(0)} \tau_\alpha \\
 H^{QQ} &= H^{(+)} 1 + H^{(0)} \tau_3
 \end{aligned}$$

En los tres casos, la paridad G y el isospin I de las trayectorias que contribuyen a $H^{(+)}$, $H^{(-)}$ o a $H^{(0)}$ están dados en Tabla 1.

	paridad G	I
(+)	+ 1	0
(-)	+ 1	1
(0)	- 1	1

Tabla 1

Además (Ver apéndice A), las trayectorias que contribuyen a las amplitudes G y a las amplitudes F, deben tener respectivamente paridad natural ($\mathcal{P} = +1$) y antinatural ($\mathcal{P} = -1$) y signatura de acuerdo a las propiedades de cruzamiento (6.6)

Por simplicidad suponemos válida la simetría de SU (3) y que en nuestros procesos, las posibles trayectorias dominantes en el canal t, pueden ser reagrupadas en octetos de SU (3).

Recordando que en un mismo octeto, el triplete y singlete de SU (2) tienen paridad G opuesta, podemos ver inmediatamente que para estudiar el comportamiento a la Regge es suficiente distinguir, entre la parte simétrica y antisimétrica de las amplitudes, en el espacio del spin isotópico.

Concluyendo, podemos dar la Tabla 2 para las trayectorias de SU(3) que pueden contribuir a nuestras amplitudes.

	Signatura	σ	Paridad G del triplete de SU (2) en el octeto
$G_{ij}^{(+), (0)}$	+	+ 1	- 1
$F_{1j}^{(+), (0)}$	-	- 1	- 1
$F_{2j}^{(+), (0)}$	+	- 1	- 1
$G_{ij}^{(-)}$	-	+ 1	+ 1
$F_{1j}^{(-)}$	+	-1	+ 1
$F_{2j}^{(-)}$	-	- 1	+ 1

Tabla 2

Si suponemos que las únicas trayectorias dominantes, en la parte simétrica de las amplitudes en el espacio del spin isotópico, sean $\alpha_{A_2}(t)$, $\alpha_{\pi}(t)$ y $\alpha_{A_1}(t)$ a las cuales pertenecen respectivamente las resonancias (15)

$A_2 (J^P = 2^+, I^G = 1^-), \pi$ y $A_1 (J^P = 1^-, I^G = 1^-)$ obtenemos

(7.3)

$$\begin{aligned}
 A_{11} &: \sqrt{B_{11} + 2} \ell_1^{(+)} \dots \dots \dots (\sqrt{\alpha_{A_2}^{-2}}, \sqrt{\alpha_{A_1}^{-3}}, \sqrt{\alpha_{\pi}^{-2}}) \\
 A_{12}^{(+)} &: A_{13}^{(+)}; \sqrt{B_{12}^{(+)} + \ell_2^{(+)}; \sqrt{B_{13}^{(+)} + \ell_3^{(+)}; B_{23}^{(+)}; B_{22} (\sqrt{\alpha_{A_2}^{-1}}, \sqrt{\alpha_{A_1}^{-2}}, \sqrt{\alpha_{\pi}^{-1}}) \\
 A_{13}^{(-)} &: \sqrt{B_{13}^{(-)} + \ell_3^{(-)}; B_{23}^{(-)}; B_{00}; B_{33} \dots \dots \dots (\sqrt{\alpha_{A_2}^{-1}}, \sqrt{\alpha_{A_1}^{-2}}, 0)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
A_{23}^{(+)}; A_{22} & \dots\dots\dots (\sqrt{\alpha_{A_2}}, \sqrt{\alpha_{A_1}^{-1}}, \sqrt{\alpha_{\pi}}) \\
A_{23}^{(-)}; A_{00}; A_{33} & \dots\dots\dots (\sqrt{\alpha_{A_2}}, \sqrt{\alpha_{A_1}^{-1}}, 0) \\
B_{11} & \dots\dots\dots (\sqrt{\alpha_{A_2}^{-3}}, \sqrt{\alpha_{A_1}^{-2}}, 0) \\
B_{12}^{(+)}; \mathcal{E}_1^{(+)} & \dots\dots\dots (\sqrt{\alpha_{A_2}^{-2}}, \sqrt{\alpha_{A_1}^{-1}}, \sqrt{\alpha_{\pi}^{-2}}) \\
B_{12}^{(-)} & \dots\dots\dots (\sqrt{\alpha_{A_2}^{-2}}, \sqrt{\alpha_{A_1}^{-1}}, \sqrt{\alpha_{\pi}}) \\
B_{13}^{(+)}; \Delta^2 B_{12}^{(-)} - \mathcal{E}_2 & \dots\dots\dots (\sqrt{\alpha_{A_2}^{-2}}, \sqrt{\alpha_{A_1}^{-1}}, 0) \\
\mathcal{E}_1^{(-)} & \dots\dots\dots (0, \sqrt{\alpha_{A_1}^{-1}}, \sqrt{\alpha_{\pi}}) \\
\mathcal{E}_2^{(+)}; \mathcal{E}_3^{(+)} & \dots\dots\dots (\sqrt{\alpha_{A_2}^{-1}}, \sqrt{\alpha_{A_1}}, \sqrt{\alpha_{\pi}^{-1}}) \\
\mathcal{E}_3^{(-)} & \dots\dots\dots (\sqrt{\alpha_{A_2}^{-1}}, \sqrt{\alpha_{A_1}}, 0) \\
D_1^{(+)} & \dots\dots\dots (0, 0, \sqrt{\alpha_{\pi}^{-2}}) \\
D_2^{(\pm)}; D_3^{(+)}; \mathcal{E}_1 & \dots\dots\dots (0, 0, \sqrt{\alpha_{\pi}^{-1}}) \\
\mathcal{E}_2 & \dots\dots\dots (0, 0, \sqrt{\alpha_{\pi}}) \\
\Delta^2 \mathcal{E}_1^{(-)} - (Q. \Delta) \mathcal{E}_2 & \dots\dots\dots (0, \sqrt{\alpha_{A_1}^{-1}}, 0)
\end{aligned}$$

Con respecto a la parte antisimétrica de las amplitudes en el espacio del spin isotópico, si suponemos que las únicas trayectorias dominantes sean $\alpha_{\rho}(t)$, $\alpha_B(t)$ y $\alpha^*(t)$, a las cuales pertenecen respectivamente las resonancias ${}^{(15)}\rho, B (J^P = 1^+, I^G = 1^+)$ y una supuesta resonancia con $(J^P = 0^-, I^G = 1^+)$ o $(J^P = 2^-, zI^G = 1^+)$ obtenemos las mismas fórmulas que arriba después de la sustitución de $\alpha_{A_2}, \alpha_{A_1}$ y α_{π} con α_{ρ}, α^* y α_B respectivamente.

SEGUNDA PARTE

II. 1 - Amplitudes fuera y sobre el "mass - shell"

En esta segunda parte hallaremos ciertos resultados fundamentales de la teoría de campos como son: la identidad de Ward, la universalidad de la / carga eléctrica y el límite a baja energía de la amplitud de fotoproducción como una consecuencia directa de la invariancia de "gauge" del campo electromagnético.

Consideremos la siguiente amplitud fuera del "mass - shell"

$$(1.1) \quad T_{\mu}^{\alpha Q} = i \int d^4 x e^{-ikx} \theta(-x_0) \langle p_2 | [\phi^{\alpha}(0), j_{\mu}^Q(x)] | p_1 \rangle$$

del proceso graficamente representado en fig. 1, donde ϕ^{α} es un campo / escalar isovectorial con cuadrimomento $q = k + p_1 - p_2$ y j_{μ}^Q es la densidad de corriente electromagnética, con cuadrimomento k ; p_1 y p_2 son los cuadrimomentos de las partículas pseudoescalares inicial y final respectivamente.

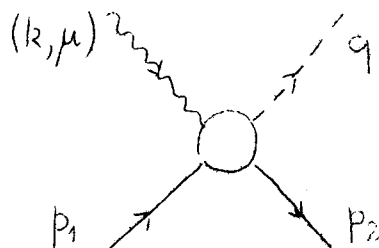


fig. 1

Definimos nuevamente

$$(1.2) \quad P = \frac{p_1 + p_2}{2}, \quad Q = \frac{k + q}{2}; \quad \Delta = \frac{p_2 - p_1}{2} = \frac{k - q}{2}$$

$$s = (P + Q)^2, \quad \bar{s} = (P - Q)^2, \quad t = \frac{\Delta^2}{4}$$

$$v = (P \cdot Q) = \frac{s - \bar{s}}{4}$$

Consideremos un proceso real de fotoproducción, con un fotón real entrante y una partícula escalar saliente de cuadrimento q . Para un proceso tal, la invariancia de "gauge" o la condición de divergencia, se puede expresar como

$$(1.3) \quad k_\mu S_\mu = 0$$

donde

$$(1.4) \quad S_\mu = \lim_{\substack{k^2 \rightarrow 0 \\ q^2 \rightarrow \mu^2}} (q^2 - \mu^2) T_\mu$$

Si postulamos la siguiente relación de conmutación a tiempos iguales

$$(1.5) \quad [\phi^\alpha(\bar{x}, t), j_0^Q(\bar{y}, t)] = e_0 i \epsilon_{\alpha 3 \gamma} \phi^\gamma(\bar{x}, t) \delta^3(\bar{x} - \bar{y})$$

(donde e_0 es la carga eléctrica no renormalizada, es decir la que introducimos en el lagrangiano, ya que ϕ representa un campo libre) y recordando que la corriente electromagnética se conserva ($\partial^\mu j_\mu^Q = 0$) obtenemos

$$(1.6) \quad \begin{aligned} k_\mu T_\mu^{\alpha Q} &= i \int (-i \partial_\mu e^{-ikx}) \theta(-x_0) \langle p_2 | [\phi^\alpha(0), j_\mu^Q(x)] | p_1 \rangle d^4x = \\ &= - \int \delta(x_0) e^{-ikx} \langle p_2 | [\phi^\alpha(0), j_0^Q(x)] | p_1 \rangle d^4x = \\ &= - e_0 \frac{1}{2} [\bar{t}_2, \bar{t}_3] \langle p_2 | \phi^\gamma(0) | p_1 \rangle = - \Psi^{\alpha Q}(t) \end{aligned}$$

(donde $\Psi(t)$ es el factor de forma débil representado en la fig. 2)

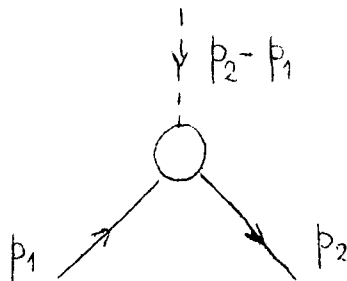


fig. 2

Descompongamos ahora la amplitud T_μ en un conjunto de funciones invariantes como sigue

$$(1.7) \quad T_\mu = A P_\mu + B k_\mu + C q_\mu$$

aplicando la invariancia de "gauge" o condición de divergencia obtenemos

$$(1.8) \quad \sqrt{A} + B k^2 + C q \cdot k = - \Psi(t)$$

En el caso de un proceso real de fotoproducción tendríamos para la amplitud S_μ una descomposición similar a (1.7).

Cuando investigamos los residuos de los polos en los distintos canales, este tratamiento nos permite obtener dos conclusiones importantes, la identidad de Ward y la universalidad de la carga eléctrica, de acuerdo a que // trabajamos fuera o sobre el "mass-shell" respectivamente.

En el primer caso, si consideramos la línea de cuadrимomento q como una corriente que transporta carga, la presencia del término $\Psi(t)$ en el miembro derecho de la ecuación (1.8) tiene en cuenta el hecho que la corriente transporta la carga $e_0^{(2C)}$. Entonces en el límite $k \rightarrow 0$, el único término que da contribución, en el miembro izquierdo de la ecuación (1.8), proviene de un polo en la amplitud A para $\sqrt{A} = 0$ y el residuo de ese polo es proporcional a e .

Por lo tanto, es posible establecer la igualdad entre la carga eléctrica / renormalizada e y la carga eléctrica no renormalizada e_0 .

En el segundo caso, si consideramos la línea de cuadrимomento q como una partícula, es decir el proceso es una producción verdadera, $\Psi(t)$ se hace cero, pero ahora (en el mismo límite que arriba y condiciones cinemáticas distintas en el miembro izquierdo de la ecuación (1.8) tenemos //

también la contribución de un polo en el canal t y el residuo de este polo para $t = \mu^2$ (donde μ es la masa de la partícula intercambiada en el canal t) será proporcional a la constante de acoplamiento del vértice en el canal t . Por lo tanto podemos establecer la igualdad entre las dos cargas.

Para el cálculo explícito de las funciones invariantes usamos la técnica de relación de dispersión.

Consideremos la cantidad t_μ definida como sigue (16)

$$(1.9) \quad t_\mu = \frac{1}{2} \int d^4 x e^{-ikx} \langle p_2 | \left[\phi^\alpha(0), j_\mu^q(x) \right] | p_1 \rangle$$

y descompongamos t_μ en un conjunto de funciones invariantes de la siguiente manera

$$(1.10) \quad t_\mu = a p_\mu + b k_\mu + c q_\mu$$

donde las relaciones entre A, B, C y a, b, c son

$$(1.11) \quad A = \frac{1}{\pi} \int a \frac{(\nu', t)}{\nu' - \nu} d\nu'$$

y expresiones similares para B y C .

Para el cálculo explícito de los residuos en el canal s , consideremos las siguientes expresiones para los elementos de matriz que aparecen en la parte imaginaria de la amplitud T_μ , ecuación (1.9), después de la introducción de un conjunto completo de estados físicos intermedios

$$(1.12) \quad \begin{aligned} \langle p_2 | \phi^\alpha(0) | p_n \rangle &= F^\alpha(q^2) \\ \langle p_n | j_\mu^q(0) | p_1 \rangle &= (p_n + p_1)_\mu F_1(k^2) \end{aligned}$$

donde $F(q^2)$ y $F_1(k^2)$ son los correspondientes factores de forma.

Se pueden dar expresiones similares para los elementos de matriz en el canal t .

Es facil ver en este caso, que si la corriente transporta la carga, entonces no tenemos contribución del canal cruzado \bar{s} .

II, 2 - Identidad de Ward

Consideremos la expresión (1.8) sección (II.1) y usemos la siguiente condición cinemática

$$(2.1) \quad k^2 = 0 \quad q, k = 0$$

por lo tanto $t = q^2$.

Calculando explícitamente (Ver apéndice B) las contribuciones de los canales s y t hallamos (*)

$$(2.2) \quad \begin{aligned} A &= \frac{1}{2\pi} F^\alpha(q^2) \left\{ \frac{F_1(k^2)}{m^2 - s} + \text{términos regulares en } m^2 - s = 0 \right\} \\ G &= \frac{1}{2\pi} F^\alpha(q^2) \left\{ \frac{F_1(k^2)}{m^2 - s} + \frac{2 F_2(k^2)}{\mu^2 - t} \right\} + \text{términos regulares en } m^2 - s = 0 \end{aligned}$$

Quando vamos sobre el polo ($\sqrt{s} = 0$) el residuo, en el miembro izquierdo de la ecuación (1.8) es proporcional a la constante de acoplamiento renormalizada e (como se puede observar de la primera de las ecuaciones (2.2)) y ya que $\bar{\Psi}(t)$ es proporcional a la constante de acoplamiento no renormalizada e_0 , obtenemos $e = e_0$, que es la identidad de Ward y establece que: hasta el primer orden en las interacciones electromagnéticas, la relación entre la constante de renormalización de la función de onda y la del vértice es igual a la unidad ($z_1/z_2 = 1$).

(*) Hacemos notar que por definición $F_1(k^2 = 0) = e_1$ y $F_2(k^2 = 0) = e_2$ son las constantes de acoplamiento electromagnético renormalizadas correspondientes a los vértices del canal s y del canal t respectivamente.

II. 3 - Universalidad de la carga eléctrica

En este caso nos ponemos sobre el "mass-shell" del fotón y el de la partícula de cuádrimomento q ,

La condición cinemática es ahora

$$(3.1) \quad k^2 = 0 \quad q \cdot k = 0 \quad q^2 = \mu^2$$

es decir $t = \mu^2$, con la condición de invariancia de "gauge" o condición de divergencia (1.3) sección (II.1).

Calculando explícitamente (Ver apéndice B) las contribuciones de los canales s y t , para $\nu \rightarrow 0$ y $t \rightarrow \mu^2$, en el miembro izquierdo de la ecuación (1.3) tenemos también la contribución del canal t (ver diagrama fig. 3) como podemos observar de las expresiones (2.2) sección (II.2) y el residuo de este polo es proporcional a la constante de acoplamiento electromagnética de la partícula que lleva el cuádrimomento final q .

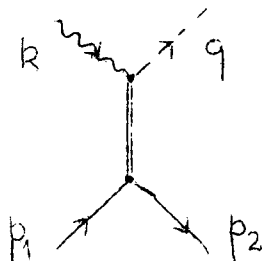


fig. 3

Por lo tanto la condición de divergencia (1.3) nos permite establecer la igualdad entre las dos constantes de acoplamiento electromagnético, correspondientes a los dos vértices distintos

$$(3.2)$$

$$e_1 = e_2$$

II. 4 - Amplitudes fuera y sobre el "mass-shell" definidas entre una corriente pseudoescalar isovectorial y la corriente electromagnética

Consideremos en esta sección las amplitudes fuera y sobre el "mass-shell" para el proceso físico de producción sobre nucleones.

Partimos de la siguiente amplitud fuera del "mass-shell"

$$(4.1) \quad T_{\mu}^{\alpha Q} = i \int d^4 x e^{-ikx} \theta(-x_0) \langle p_2 | \left[\bar{D}^{\alpha}(0), j_{\mu}^Q(x) \right] | p_1 \rangle$$

del proceso graficamente representado en la fig. 1 sección (II.1).

En este caso, la línea de cuadrimomento $q = k + p_1 - p_2$ es una corriente pseudoescalar isovectorial $\bar{D}^{\alpha} (\bar{D}^{\alpha} = \partial^{\mu} A_{\mu}^{\alpha})$, donde A_{μ}^{α} es una densidad de corriente axial vectorial isovectorial).

Postulamos ahora la siguiente relación de conmutación a tiempos iguales

$$(4.2) \quad \left[\bar{D}^{\alpha}(\bar{x}, t), j_{\mu}^Q(\bar{y}, t) \right] = e_0 i \epsilon_{\alpha\beta\gamma} \bar{D}^{\beta}(\bar{x}, t) \delta^3(\bar{x} - \bar{y})$$

Siguiendo la técnica de sección (II.1), consideremos las dos siguientes descomposiciones equivalentes para la amplitud $T_{\mu}^{(10)}$

$$(4.3) \quad T_{\mu} = A_{\mu} \gamma_5 + B_{\mu} \gamma.k \gamma_5 + C \gamma_{\mu} \gamma_5 + \frac{1}{2} D [\gamma_{\mu}, \gamma.k] \gamma_5$$

con

$$(4.4) \quad A_{\mu} = A_1 P_{\mu} + A_2 Q_{\mu} + A_3 \Delta_{\mu}$$

$$B_{\mu} = B_1 P_{\mu} + B_2 Q_{\mu} + B_3 \Delta_{\mu}$$

y

$$(4.5) \quad T_{\mu} = A'_{\mu} \gamma_5 + B'_{\mu} \gamma.k \gamma_5 + C' \gamma_{\mu} \gamma_5 + D' (\gamma_{\mu}, \gamma.k, \gamma.\Delta) \gamma_5$$

donde para A'_{μ} y B'_{μ} se dan expresiones similares a (4.4).

La relación entre los invariantes de (4.3) y (4.5) se calcula utilizando la ecuación de Dirac para reducir el producto antisimétrico de tres γ en (4.5), obteniendo así

$$\begin{aligned}
 (4.6) \quad & A_1 = A'_1 & A_2 = A'_2 & A_3 = A'_3 \\
 & B_1 = B'_1 - D' & B_2 = B'_2 & B_3 = B'_3 \\
 & C = C' + \sqrt{D'} & D = m D' &
 \end{aligned}$$

Notemos que la descomposición (4.3) es la que surge espontáneamente, utilizando teoría perturbativa. En nuestro caso es más conveniente usar la descomposición equivalente (4.5) ya que en el límite a baja energía tendremos así contribución solamente del término en C' .

Llevando a cabo los cálculos, similarmente como lo hicimos en (1.6) sección (II.1) y utilizando la relación de conmutación a tiempos iguales dada en (4.2), la condición de invariancia de "gauge" o condición de divergencia ahora se expresará de la siguiente manera

$$(4.7) \quad k_\mu T_\mu = - \Psi(t) \gamma_5$$

II. 5 - Identidad de Ward

Como no nos interesa un estado particular de spin, sumamos sobre todos los estados de spin, inicial y final, multiplicamos la amplitud T_μ por γ_5 y finalmente hacemos la traza, obteniendo así

$$\begin{aligned}
 (5.1) \quad & k_\mu \text{Tr} \left\{ \gamma_5 (\gamma \cdot p_2 + m) T_\mu (\gamma \cdot p_1 + m) \right\} = \\
 & = - \Psi(t) \text{Tr} \left\{ \gamma_5 (\gamma \cdot p_2 + m) \gamma_5 (\gamma \cdot p_1 + m) \right\}
 \end{aligned}$$

Llevando a cabo el cálculo de las trazas (ver Apendice B) llegamos a

$$(5.2) \quad k_{\mu} A'_{\mu} + m k_{\mu} B'_{\mu} \left(\frac{\Delta^2 + Q \cdot \Delta}{\Delta^2} \right) + m C' \left(\frac{\Delta^2 + Q \cdot \Delta}{\Delta^2} \right) = - \Psi(t)$$

explícitamente

$$(5.3) \quad \sqrt{A'_1 + A'_2 (Q^2 + Q \cdot \Delta) + A'_3 (\Delta^2 + Q \cdot \Delta)} + m \left[\sqrt{B'_1 + B'_2 (Q^2 + Q \cdot \Delta) + B'_3 (\Delta^2 + Q \cdot \Delta) + C'} \right] \left(\frac{\Delta^2 + Q \cdot \Delta}{\Delta^2} \right) = - \Psi(t)$$

Si la condición cinemática es la siguiente

$$(5.4) \quad k^2 = 0 \quad q \cdot k = 0$$

es decir $t = q^2$, $Q^2 + Q \cdot \Delta = 0$, $\Delta^2 + Q \cdot \Delta = 0$ y tomamos la parte imaginaria de la ecuación (5.2)

$$\sqrt{a'_1 + a'_2 (Q^2 + Q \cdot \Delta) + a'_3 (\Delta^2 + Q \cdot \Delta)} + m \left[\sqrt{b'_1 + b'_2 (Q^2 + Q \cdot \Delta) + b'_3 (\Delta^2 + Q \cdot \Delta) + c'} \right] \left(\frac{\Delta^2 + Q \cdot \Delta}{\Delta^2} \right) = 0$$

ya que a'_2 , a'_3 , b'_1 , b'_2 , b'_3 y c' no tienen polos en $Q^2 + Q \cdot \Delta =$

$\Delta^2 + Q \cdot \Delta = 0$, tenemos que $\sqrt{a'_1} = 0$ es decir $a'_1 = \delta(\sqrt{\quad})$, por lo tanto

$$(5.6) \quad \sqrt{A'_1} = - \Psi(t) = - e_0 F^{\chi}(q^2)$$

y A'_1 tendrá un polo en $\sqrt{\quad} = 0$

Para el cálculo explícito de los residuos de los polos en los canales s y \bar{s} , consideremos las siguientes expresiones para los elementos de matriz

$$(5.7) \quad \langle p_2 | \bar{D}^{\alpha}(0) | p_n \rangle = F^{\alpha}(q^2) \bar{u}(p_2) \gamma_5 u(p_n)$$

$$\langle p_n | j_\mu^q(0) | p_1 \rangle = \bar{u}(p_n) \left\{ F_1(k^2) \gamma_\mu + \mathcal{T}_{\mu\nu} k_\nu F_2(k^2) \right\} u(p_1)$$

$$\langle p_2 | j_\mu^q(0) | p_n \rangle = \bar{u}(p_2) \left\{ F_1(k^2) \gamma_\mu + \mathcal{T}_{\mu\nu} k_\nu F_2(k^2) \right\} u(p_n)$$

$$\langle p_n | \bar{D}^\alpha(0) | p_1 \rangle = F^\alpha(q^2) \bar{u}(p_n) \gamma_5 u(p_1)$$

(donde $\mathcal{T}_{\mu\nu} = \frac{1}{2} [\gamma_\mu, \gamma_\nu]$ y $F^\alpha(q^2)$, $F_1(k^2)$, $F_2(k^2)$ son los correspondientes factores de forma.)

Calculando los residuos similarmente como lo hicimos en el caso de "target" pseudoescalar obtenemos

$$(5.8) \quad A'_1 = F_1(k^2) F^\alpha(q^2) \left\{ \frac{1}{m^2 - s} - \frac{1}{m^2 - \bar{s}} \right\} + \text{términos regulares en } \begin{matrix} m^2 - s = m^2 - \bar{s} = 0 \end{matrix}$$

Considerando el residuo del polo para $\sqrt{s} = 0$ (y teniendo en cuenta que $F_1(k^2=0) = e$) llegamos nuevamente a que $e = e_0$ es decir $z_1/z_2 = 1$.

II. 6 - Universalidad de la carga eléctrica

Nos ponemos ahora sobre el "mass-shell" del fotón y del pión y tenemos en cuenta la condición de divergencia $k_\mu S_\mu = 0$. Calculando explícitamente las contribuciones de los canales s , \bar{s} y t obtenemos la igualdad entre la carga del pión y la del nucleón, es decir

$$(6.1) \quad e_p = e_\pi$$

El residuo del polo en el canal t es proporcional a la constante de acoplamiento electromagnético $\gamma-\pi$, es decir la carga del pión e_π y los residuos de los polos en los canales s y \bar{s} son proporcionales a las correspondientes constantes de acoplamiento, es decir a la carga del nucleón e_p .

II. 7 - Límite a baja energía . Teorema de Kroll - Rudermann

En razón de obtener una segunda relación que proviene de la condición de invariancia de "gauge" (4.7) sección (II.4) , multiplicamos la amplitud T_μ por γ_ν y llevamos a cabo la traza obteniendo

$$(7.1) \quad k_\mu \text{Tr} \left\{ \gamma_\nu (\gamma \cdot p_2 + m) T_\mu (\gamma \cdot p_1 + m) \right\} = \\ = - \Psi(t) \text{Tr} \left\{ \gamma_\nu (\gamma \cdot p_2 + m) \gamma_5 (\gamma \cdot p_1 + m) \right\} = 0$$

y realizando los cálculos (Ver apéndice B) obtenemos

$$(7.2) \quad k_\mu B'_\mu + C' = 0$$

explícitamente

$$(7.3) \quad \sqrt{B'_1 + B'_2 (Q^2 + Q \cdot \Delta) + B'_3 (\Delta^2 + Q \cdot \Delta)} + C' = 0$$

Primeramente consideramos el caso de un proceso real de fotoproducción, es decir $k^2 = 0$, $q^2 = \mu^2$ en consecuencia

$$(7.4) \quad \begin{aligned} Q^2 + Q \cdot \Delta &= 2 q \cdot k \\ \Delta^2 + Q \cdot \Delta &= -2 q \cdot k \end{aligned}$$

Luego llevamos a cabo el límite a baja energía de la amplitud de fotoproducción T_μ , es decir $q \rightarrow 0$ y consideremos en el límite $\frac{\mu}{m} \rightarrow 0$ o sea

que la masa del pión sea nula con respecto a la del nucleón (lo cual implica $k_0 \ll m$). Por lo tanto en el límite a baja energía las relaciones (7.4) son $O(\mu)$. Con los mismos argumentos usados para obtener (5.6) sección (II.5), en este caso obtenemos

$$(7.5) \quad \sqrt{B'_1} + C' = 0$$

y calculando explícitamente es posible ver que solamente el término de Born de C' está presente y a $\sqrt{\quad} = 0$ da

$$(7.6) \quad G'_{\text{low}} = - \frac{eg}{2m} N\pi$$

Por tanto el límite a baja energía de la amplitud de fotoproducción es

$$(7.7) \quad (T.e)_{\text{low}} = - \frac{e g N\pi}{2 m} \gamma \cdot e \gamma_5$$

es decir el límite a baja energía de la amplitud T_μ está determinado solamente por las propiedades estáticas del sistema: la masa m del nucleón, la carga renormalizada e del nucleón y la constante de acoplamiento fuerte renormalizada $g_{N\pi}$; obteniendo así el resultado de Kroll- Rudermann.

II. 8 - Límite a baja energía de la amplitud de fotoproducción

Partiendo de una amplitud fuera del "mass-shell" definida entre una densidad de corriente isovectorial axial vectorial y la densidad de corriente electromagnética y usando el formalismo y el método de cálculo utilizado en sección (I.5) es posible hallar el límite a baja energía de la amplitud de fotoproducción hasta el primer orden $O(k,q)$ incluido.

Consideremos la siguiente amplitud fuera del "mass-shell"

$$(8.1) \quad \begin{aligned} T_{\mu\nu}^{\alpha Q} &= i \int d^4 x e^{iqx} \theta(x_0) \langle p_2 | [A_\mu^\alpha(x), j_\nu^Q(0)] | p_1 \rangle \\ &= i \int d^4 x e^{-ikx} \theta(-x_0) \langle p_2 | [A_\mu^\alpha(0), j_\nu^Q(x)] | p_1 \rangle \end{aligned}$$

del proceso graficamente representado en fig. 4, donde A_μ^α es una densidad de corriente isovectorial axial vectorial y j_ν^Q es la densidad de corriente electromagnética con cuádrimomentos

$q = k + p_1 - p_2$ y k respectivamente; p_1 y p_2 son los cuádrimomentos de los nucleones, inicial y final.

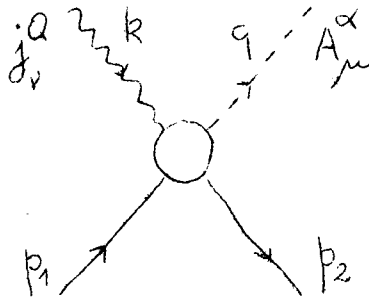


fig. 4

Teniendo en cuenta la descomposición en invariantes (3.1) sección (I.3) podemos ahora en forma similar, descomponer (8.1) de la siguiente manera

$$\begin{aligned}
 (8.2) \quad T_{\mu\nu} = & A_{\mu\nu} \gamma_5 + B_{\mu\nu} \gamma_5 \gamma \cdot k + C_{\nu}^{(1)} \gamma_5 \gamma_{\mu} + C_{\mu}^{(2)} \gamma_5 \gamma_{\nu} + \\
 & + D_{\nu}^{(1)} \gamma_5 (\gamma_{\mu}, \gamma \cdot k) + D_{\mu}^{(2)} \gamma_5 (\gamma_{\nu}, \gamma \cdot k) + E_1 \gamma_5 (\gamma_{\mu}, \gamma_{\nu}) + \\
 & + E_2 \gamma_5 (\gamma_{\mu}, \gamma \cdot k, \gamma_{\nu})
 \end{aligned}$$

Para estudiar los conmutadores a tiempos iguales, saturamos la $T_{\mu\nu}^{\alpha Q}$ con q^{μ} y k^{ν} obteniendo

$$\begin{aligned}
 (8.3) \quad q^{\mu} T_{\mu\nu}^{\alpha Q} = & - \int \delta(x_0) e^{iq \cdot x} d^4 x \langle p_2 | \left[\bar{D}^{\alpha}(x), j_{\nu}^Q(0) \right] | p_1 \rangle \\
 & - \int \delta(x_0) e^{iqx} d^4 x \langle p_2 | \left[A_0^{\alpha}(x), j_{\nu}^Q(0) \right] | p_1 \rangle
 \end{aligned}$$

(donde $\bar{D}^{\alpha} = \partial^{\mu} A_{\mu}^{\alpha}$ es la cuadrivergencia de la corriente axial)

$$\begin{aligned}
 (8.4) \quad k^{\nu} T_{\mu\nu}^{\alpha Q} = & - \int \delta(x_0) e^{-ikx} d^4 x \langle p_2 | \left[A_{\mu}^{\alpha}(0), j_0^Q(x) \right] | p_1 \rangle \\
 & \text{(ya que } j_0^Q = 0)
 \end{aligned}$$

Suponiendo válido el esquema SU(3) x SU(3), postulamos las siguientes relaciones de conmutación a tiempos iguales

$$\left[A_0^\alpha(x), j_\nu^Q(0) \right]_{x_0=0} = i \varepsilon_{\alpha\beta\gamma} A_\nu^\delta(0) \int^3(x)$$

(8.5)

$$\left[A_\mu^\alpha(0), j_0^Q(x) \right]_{x_0=0} = i \varepsilon_{\alpha\beta\gamma} A_\mu^\delta(0) \int^3(x)$$

Si llamamos

$$(8.6) \quad \tilde{\tau}_\nu^{\alpha Q} = \int d^4x e^{iqx} \theta(x_0) \langle p_2 | \left[\bar{D}^\alpha(x), j_\nu^Q(0) \right] | p_1 \rangle$$

y tenemos en cuenta la primera de las relaciones (8.5), podemos escribir

(8.3) como sigue

$$(8.7) \quad q^\mu T_{\mu\nu}^{\alpha Q} = -\tilde{\tau}_\nu^{\alpha Q} - i \varepsilon_{\alpha\beta\gamma} \langle p_2 | A_\nu^\delta(0) | p_1 \rangle$$

Escribimos para el elemento de matriz $\langle p_2 | A_\nu^\delta(0) | p_1 \rangle$ la siguiente expresión

$$(8.8) \quad \langle p_2 | A_\nu^\delta(0) | p_1 \rangle = \bar{u}(p_2) \frac{\tilde{\tau}_\nu^\delta}{2} \left\{ G_1(t) \chi_5^\delta \gamma_\nu + G_2(t) \chi_5^\delta (p_2 - p_1)_\nu \right\} u(p_1)$$

donde $G_1(0) = g_A$.

Recordamos que, cuando ponemos la $\tilde{\tau}_\nu$ definida en (8.6) sobre el "mass-shell" del fotón y del pión y llevamos a cabo el límite

$$(8.9) \quad \lim_{\substack{k^2 \rightarrow 0 \\ q^2 \rightarrow \mu^2}} (q^2 - \mu^2) \tilde{\tau}_\nu^{\alpha Q}$$

(donde μ es la masa del pión) obtenemos la amplitud de fotoproducción.

A partir de la relación (8.7) vemos que podemos obtener el límite a baja energía de la amplitud $\tilde{\tau}_\nu$ hasta el primer orden $O(k, q)$ incluido, conociendo el límite a baja energía de la amplitud $T_{\mu\nu}$ solamente al primer orden $O(1)$, ya que en la ecuación (8.7) aparece $q^\mu T_{\mu\nu}$ y q^μ es un $O(q)$.

El cálculo del límite a baja energía de la amplitud $T_{\mu\nu}$ definida en (8.2) se lleva a cabo de la misma manera como calculamos el límite a baja energía en el scattering Compton, sección (I.5).

Sea A una amplitud genérica que aparece en el desarrollo (8.2) y descompongamos A en el espacio del spin isotópico, en sus partes simétrica y antisimétrica, de la siguiente manera

$$(8.10) \quad A = A^{(+)} \tilde{\tau}_\alpha + A^{(0)} \tilde{\tau}_{\alpha 3} + A^{(-)} \frac{1}{2} [\tilde{\tau}_\alpha, \tilde{\tau}_3]$$

Realizando una inspección detallada, es posible ver que: a) las partes $(q^\mu T_{\mu\nu}^{(+)})_{\text{low}}$ se determinan hasta el primer orden $O(k,q)$ solamente en términos de su aproximación de Born.

b) la parte $(q^\mu T_{\mu\nu}^{(-)})_{\text{low}}$ recibe contribución de orden $O(k,q)$ también de los estados excitados intermedios

Como lo hicimos en sección (I.5), para determinar $(q^\mu T_{\mu\nu}^{(-)})_{\text{low}}$ hacemos uso de la condición de invariancia de "gauge" (8.4), que nos permite evaluar la contribución del continuo, en función de la contribución de los términos de Born, con lo cual $(q^\mu T_{\mu\nu}^{(-)})_{\text{low}}$ nos queda determinada hasta el primer orden $O(k,q)$, solamente en términos de su aproximación de Born. Llevando a cabo los cálculos se obtiene

$$(8.11) \quad q^\mu T_{\mu\nu}^{(+)} e^\nu = \frac{4m e g}{\sqrt{}} (P.e) \gamma_5^+ + \frac{4 m \mu g}{\sqrt{}} (P.e) \gamma_5 \gamma_{.k} + \\ + 2 \frac{(e.g. - 2 m \mu g)}{\sqrt{}} (P.k) \gamma_5 \cdot \gamma_{.e} - \\ - 2m \frac{(e.g. - 2 m \mu g)}{\sqrt{}} \gamma_5 (\gamma_{.e}, \gamma_{.k}) + O(k^2)$$

$$\begin{aligned}
q^{\mu} T_{\mu\nu}^{(-)} e^{\nu} &= - \frac{4 m e g}{\sqrt{v}} (\Delta \cdot e) \gamma_5 - \frac{4 m \mu g}{\sqrt{v}} (\Delta \cdot e) \gamma_5 \gamma \cdot k - \\
&- \frac{(2 m \mu g - e g)}{\sqrt{v}} (q \cdot k) \gamma_5 \gamma \cdot e + \\
&+ 2 \mu g \gamma_5 (\gamma \cdot e, \gamma \cdot k) + O(k^2)
\end{aligned}$$

APENDICE A

Recordando que: (*)

$$u^C = C \bar{u}^T \quad C^{-1}(\gamma.a) C = -(\gamma.a)^T$$

$$\bar{u}^C = -u^T C^{-1} \quad C^{-1}(\gamma.a)(\gamma.b) C = (\gamma.a)^T (\gamma.b)^T$$

$$C^{-1}(\gamma.a)(\gamma.b)(\gamma.c) C = -(\gamma.a)^T (\gamma.b)^T (\gamma.c)^T$$

Como para el cruzamiento de la parte spinorial resulta:

$$\bar{u}(\gamma.a_1, \gamma.a_2, \dots, \gamma.a_n) u \rightarrow -\bar{u}^C(\gamma.a_1, \gamma.a_2, \dots, \gamma.a_n) u^C$$

obtenemos

$$\bar{u} u \rightarrow -\bar{u}^C u^C = u^T C^{-1} C \bar{u}^T = u^T \bar{u}^T = \bar{u} u \quad (\text{cruzamiento } +).$$

$$\bar{u}(\gamma.Q) u \rightarrow -\bar{u}^C(\gamma.Q) u^C = u^T C^{-1}(\gamma.Q) C \bar{u}^T = -u^T (\gamma.Q)^T \bar{u}^T =$$

$$= -\bar{u}(\gamma.Q) u \quad (\text{cruzamiento } -)$$

y el mismo cruzamiento para las amplitudes con parte spinorial

$$\bar{u}(\gamma.e_1) u \quad \text{y} \quad \bar{u}(\gamma.e_2) u.$$

$$\bar{u}(\gamma.e_2, \gamma.Q) u \rightarrow -\bar{u}^C(\gamma.e_2, \gamma.Q) u^C = u^T C^{-1} \gamma.e_2 \gamma.Q C \bar{u}^T =$$

$$= u^T (\gamma.e_2^T, \gamma.Q^T) \bar{u}^T = \bar{u}(\gamma.Q, \gamma.e_2) u =$$

$$= -\bar{u}(\gamma.e_2, \gamma.Q) u \quad (\text{cruzamiento } -)$$

y el mismo cruzamiento para las amplitudes con parte spinorial

$$\bar{u}(\gamma.e_1, \gamma.Q) u \quad \text{y} \quad \bar{u}(\gamma.e_2, \gamma.e_1) u.$$

$$\bar{u}(\gamma.e_2, \gamma.Q, \gamma.e_1) u \rightarrow -\bar{u}^C(\gamma.e_2, \gamma.Q, \gamma.e_1) u^C =$$

(*) N.N. Bogoliubov, D.V. Shirkov. Introduction to the Theory of Quantized Fields, pag. 124.

$$\begin{aligned}
&= u^T C^{-1}(\gamma.e_2, \gamma.Q, \gamma.e_1) C \bar{u}^T = -u^T(\gamma.e_2^T, \gamma.Q^T, \gamma.e_1^T) \bar{u}^T = \\
&= -\bar{u}(\gamma.e_1, \gamma.Q, \gamma.e_2) u = \bar{u}(\gamma.e_2, \gamma.Q, \gamma.e_1) u \text{ (cruzamiento +)}
\end{aligned}$$

Teniendo en cuenta el cruzamiento de la parte spinorial y además que cuando $p_1 \rightleftharpoons -p_2$ resulta que $P \rightarrow -P$, podemos escribir las relaciones (3.10) sección (I.3).

Para escribir las relaciones en el caso de intercambio simultáneo, es decir $p_1 \rightleftharpoons -p_2$, $k_1 \rightleftharpoons -k_2$ debemos tener en cuenta que $P \rightarrow -P$, $Q \rightarrow -Q$ $e_2 \rightleftharpoons e_1$, obtenemos así las relaciones (3.11) sección (I.3).

Una de las maneras de calcular los coeficientes de $(\gamma.\Delta, \gamma.P)$,
 $(\gamma.\Delta, \gamma.Q, \gamma.P)$, $(\gamma.\Delta, \gamma.e_2, \gamma.P)$, $(\gamma.\Delta, \gamma.e_1, \gamma.P)$, $(\gamma.\Delta, \gamma.e_2, \gamma.Q, \gamma.P)$
 $(\gamma.\Delta, \gamma.e_1, \gamma.Q, \gamma.P)$, $(\gamma.\Delta, \gamma.e_2, \gamma.e_1, \gamma.P)$, $(\gamma.P, \gamma.e_2, \gamma.Q, \gamma.e_1)$
que son respectivamente:
 $e_2 A e_1$, $e_2 B e_1$, $(C^{(+)} + C^{(-)}) . e_1$, $(C^{(+)} - C^{(-)}) . e_2$, $(D^{(+)} + D^{(-)}) . e_1$,
 $(D^{(+)} - D^{(-)}) . e_2$, E_1 , E_2 , es multiplicar sucesivamente

$$\frac{1}{4 m^2} (\gamma.P_2 + m) \left\{ \sum_{i=1}^{34} \Phi_i I_i \right\} (\gamma.P_1 + m)$$

por cada elemento del álgebra de Dirac $1, \gamma_\alpha, (\gamma_\alpha, \gamma_\beta), (\gamma_\alpha, \gamma_\beta, \gamma_\rho),$
 $(\gamma_\alpha, \gamma_\beta, \gamma_\rho, \gamma_\sigma)$, que aparecen en la descomposición (3.12) sección (I.3), calcular luego la traza y saturar los índices con adecuados productos de matrices γ .

Como un ejemplo calculemos el coeficiente de $(\gamma.\Delta, \gamma.P)$,

$$\frac{\gamma_\alpha \gamma_\beta}{4 m^2} \text{Tr} \left\{ (\gamma_\alpha, \gamma_\beta) (\gamma.P + \gamma.\Delta + m) \left[\sum_{i=1}^{34} \Phi_i I_i \right] (\gamma.P - \gamma.\Delta + m) \right\}$$

observando la expresión (3.1) sección (I.3) vemos que el único término de la traza, que puede contribuir a $(\gamma.\Delta, \gamma.P)$ es

$$\begin{aligned} & \frac{\gamma_\alpha \gamma_\beta}{4 m^2} \text{Tr} \left\{ (\gamma_\alpha, \gamma_\beta) (\gamma.P + \gamma.\Delta + m) e_2 A e_1 (\gamma.P - \gamma.\Delta + m) \right\} = \\ & = - \frac{e_2 A e_1}{4 m^2} \gamma_\alpha \gamma_\beta \text{Tr} \left\{ (\gamma_\alpha, \gamma_\beta) \left[\gamma.\Delta \gamma.\Delta - \gamma.P \gamma.P + (\gamma.\Delta, \gamma.P) \right] \right\} = \\ & = - \frac{e_2 A e_1}{4 m^2} \gamma_\alpha \gamma_\beta \text{Tr} \left\{ (\gamma_\alpha, \gamma_\beta) \gamma_\rho \gamma_\sigma \Delta_\rho \Delta_\sigma - (\gamma_\alpha, \gamma_\beta) \gamma_\rho \gamma_\sigma P_\rho P_\sigma + \right. \\ & + \left. (\gamma_\alpha, \gamma_\beta) (\gamma_\rho, \gamma_\sigma) \Delta_\rho P_\sigma \right\} = \\ & = \frac{e_2 A e_1}{4 m^2} \gamma_\alpha \gamma_\beta \text{Tr} \left\{ (\gamma_\alpha, \gamma_\beta) (\gamma_\rho, \gamma_\sigma) \Delta_\rho P_\sigma \right\} = \end{aligned}$$

$$= - \frac{4 e_2 A e_1}{4 m^2} \gamma_\alpha \gamma_\beta (\Delta_\beta P_\alpha - P_\beta \Delta_\alpha) = - \frac{2 e_2 A e_1}{m^2} (\gamma \cdot \Delta, \gamma \cdot P)$$

Como un segundo ejemplo calculemos el coeficiente de $\gamma \cdot P$, para ello hacemos

$$\frac{\gamma_\alpha}{4 m^2} \text{Tr} \left\{ \gamma_\alpha (\gamma \cdot P + \gamma \cdot \Delta + m) \left[\sum_{i=1}^{34} \Phi_i I_i \right] (\gamma \cdot P - \gamma \cdot \Delta + m) \right\}$$

los únicos términos de esta traza que contribuyen al coeficiente de $\gamma \cdot P$ son:

$$\frac{\gamma_\alpha}{4 m^2} \text{Tr} \left[\gamma_\alpha (\gamma \cdot P + \gamma \cdot \Delta + m) e_2 A e_1 (\gamma \cdot P - \gamma \cdot \Delta + m) \right]$$

$$\frac{\gamma_\alpha}{4 m^2} \text{Tr} \left[\gamma_\alpha (\gamma \cdot P + \gamma \cdot \Delta + m) e_2 B e_1 \gamma \cdot Q (\gamma \cdot P - \gamma \cdot \Delta + m) \right]$$

$$\frac{\gamma_\alpha}{4 m^2} \text{Tr} \left[\gamma_\alpha (\gamma \cdot P + \gamma \cdot \Delta + m) (C^{(+)} + C^{(-)}) \cdot e_1 \cdot \gamma \cdot e_2 (\gamma \cdot P - \gamma \cdot \Delta + m) \right]$$

$$\frac{\gamma_\alpha}{4 m^2} \text{Tr} \left[\gamma_\alpha (\gamma \cdot P + \gamma \cdot \Delta + m) (C^{(+)} - C^{(-)}) \cdot e_2 \cdot \gamma \cdot e_1 (\gamma \cdot P - \gamma \cdot \Delta + m) \right]$$

calculando estas trazas obtenemos

$$\begin{aligned} & \frac{e_2 A e_1}{4 m^2} \gamma_\alpha \text{Tr} \left[\gamma_\alpha (\gamma \cdot P + \gamma \cdot \Delta + m) (\gamma \cdot P - \gamma \cdot \Delta + m) \right] = \\ & = 8 m \frac{e_2 A e_1}{4 m^2} \gamma_\alpha P_\beta \int_{\alpha\beta} = 8 m \frac{e_2 A e_1}{4 m^2} \gamma \cdot P \end{aligned}$$

donde se ve que el coeficiente de $\gamma \cdot P$ es proporcional a $m e_2 A e_1$.

$$\begin{aligned} & \frac{e_2 B e_1}{4 m^2} \gamma_\alpha \text{Tr} \left[\gamma_\alpha (\gamma \cdot P + \gamma \cdot \Delta + m) \gamma \cdot Q (\gamma \cdot P - \gamma \cdot \Delta + m) \right] = \\ & = \frac{e_2 B e_1}{4 m^2} \gamma_\alpha \text{Tr} \left[\gamma_\alpha \gamma_\beta \gamma_\rho \gamma_\sigma (P_\beta Q_\rho P_\sigma - P_\beta Q_\rho \Delta_\sigma + \Delta_\beta Q_\rho P_\sigma - \Delta_\beta Q_\rho \Delta_\sigma) \right] = \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= 4 \frac{e_2^B e_1}{4 m^2} \gamma_\alpha \left[(\delta_{\alpha\beta} \delta_{\rho\sigma} - \delta_{\alpha\rho} \delta_{\beta\sigma} + \delta_{\alpha\sigma} \delta_{\beta\rho}) (P_\beta Q_\rho P_\sigma - P_\beta Q_\rho \Delta_\sigma + \Delta_\beta Q_\rho P_\sigma - \Delta_\beta Q_\rho \Delta_\sigma) \right] = \\
&= 4 \frac{e_2^B e_1}{4 m^2} \gamma_\alpha \left[2 \not{P}_\alpha - (P^2 - \Delta^2) \not{Q}_\alpha - 2 (\Delta \cdot Q) \not{\Delta}_\alpha \right] = \\
&= 8 \frac{e_2^B e_1}{4 m^2} \left[\not{P} \gamma \cdot P - \frac{(P^2 - \Delta^2)}{2} \gamma \cdot Q - (\Delta \cdot Q) \gamma \cdot \Delta \right]
\end{aligned}$$

donde se ve que el coeficiente de $\gamma \cdot P$ es proporcional a $\sqrt{e_2^B e_1}$

$$\begin{aligned}
&\frac{(C^{(+)} + C^{(-)}) \cdot e_1}{4 m^2} \gamma_\alpha \text{Tr} \left[\gamma_\alpha (\gamma \cdot P + \gamma \cdot \Delta + m) \gamma \cdot e_2 (\gamma \cdot P - \gamma \cdot \Delta + m) \right] = \\
&= 8 \frac{(C^{(+)} + C^{(-)}) \cdot e_1}{4 m^2} \left[(P \cdot e_2) \not{P} - \frac{(P^2 - \Delta^2)}{2} \not{e}_2 - (\Delta \cdot e_2) \not{\Delta} \right]
\end{aligned}$$

donde se ve que el coeficiente de $\gamma \cdot P$ es proporcional a

$$(C^{(+)} + C^{(-)}) \cdot e_1 (P \cdot e_2).$$

Similarmente cuando $e_2 \rightarrow e_1$, obtenemos que el coeficiente de $\gamma \cdot P$ es

proporcional a $(C^{(+)} - C^{(-)}) \cdot e_2 (P \cdot e_1)$.

Teniendo en cuenta la condición de divergencia (4.1a) sección (I.4) y la /
descomposición (3.1) sección (I.3) para $\Gamma_{\mu\nu}^{\alpha\beta}$ podemos escribir explícitamente

$$\begin{aligned} & k_2 A e_1 + k_2 B e_1 \gamma \cdot Q + (C^{(+)} + C^{(-)}) \cdot e_1 \gamma \cdot (Q - \Delta) + (C^{(+)} - C^{(-)}) \cdot k_2 \gamma \cdot e_1 + \\ & + (D^{(+)} + D^{(-)}) \cdot e_1 (\gamma \cdot Q - \gamma \cdot \Delta, \gamma \cdot Q) + (D^{(+)} - D^{(-)}) \cdot k_2 (\gamma \cdot e_1, \gamma \cdot Q) + \\ & + E_1 (\gamma \cdot Q - \gamma \cdot \Delta, \gamma \cdot e_1) + E_2 (\gamma \cdot Q - \gamma \cdot \Delta, \gamma \cdot Q, \gamma \cdot e_1) = \\ & = - \left[\Psi_1(t) \gamma \cdot e_1 - \frac{1}{m} (e_1 \cdot P) \Psi_2(t) \right] \end{aligned}$$

Usando la ecuación de Dirac para reducir los productos antisimétricos, escribimos

$$\bar{u}_2 \gamma \cdot (Q - \Delta) u_1 = \bar{u}_2 \gamma \cdot Q u_1 - \frac{1}{2} \bar{u}_2 \gamma \cdot (p_2 - p_1) u_1 = \bar{u}_2 \gamma \cdot Q u_1$$

$$\begin{aligned} \bar{u}_2 (\gamma \cdot Q - \gamma \cdot \Delta, \gamma \cdot Q) u_1 &= \bar{u}_2 (\gamma \cdot Q, \gamma \cdot \Delta) u_1 = \frac{1}{2} \bar{u}_2 (\gamma \cdot Q, \gamma \cdot (p_2 - p_1)) u_1 = \\ &= \bar{u}_2 (\not{V} - m \gamma \cdot Q) u_1 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \bar{u}_2 (\gamma \cdot Q - \gamma \cdot \Delta, \gamma \cdot e_1) u_1 &= \bar{u}_2 (\gamma \cdot Q, \gamma \cdot e_1) u_1 - 1/4 \bar{u}_2 \left[\gamma \cdot (p_2 - p_1) \gamma \cdot e_1 - \right. \\ &\quad \left. - \gamma \cdot e_1 \gamma \cdot (p_2 - p_1) \right] u_1 = \end{aligned}$$

$$= \bar{u}_2 (\gamma \cdot Q, \gamma \cdot e_1) u_1 - \frac{1}{2} \bar{u}_2 \left[\frac{1}{2} m \gamma \cdot e_1 - (p_1 \cdot e_1) + \frac{1}{2} m \cdot \gamma \cdot e_1 - (p_2 \cdot e_1) + \right.$$

$$\left. + \frac{1}{2} m \gamma \cdot e_1 + \frac{1}{2} m \gamma \cdot e_1 \right] u_1 =$$

$$= \bar{u}_2 (\gamma \cdot Q, \gamma \cdot e_1) u_1 + \bar{u}_2 \left[(e_1 \cdot P) - m \gamma \cdot e_1 \right] u_1$$

$$\bar{u}_2 (\gamma \cdot Q - \gamma \cdot \Delta, \gamma \cdot Q, \gamma \cdot e_1) u_1 = - \bar{u}_2 (\gamma \cdot \Delta, \gamma \cdot Q, \gamma \cdot e_1) u_1 =$$

$$\begin{aligned}
&= -1/4 \bar{u}_2 \left[\gamma \cdot (p_2 - p_1) \gamma \cdot Q \gamma \cdot e_1 - \gamma \cdot e_1 \gamma \cdot Q \gamma \cdot (p_2 - p_1) \right] u_1 = \\
&= -\frac{1}{2} \bar{u}_2 \left[\frac{1}{2} m \gamma \cdot Q \gamma \cdot e_1 - (p \cdot Q) \gamma \cdot e_1 + (p_1 \cdot e_1) \gamma \cdot Q - \frac{1}{2} m \gamma \cdot Q \gamma \cdot e_1 - \right. \\
&\quad \left. - (p_2 \cdot Q) \gamma \cdot e_1 + (p_2 \cdot e_1) \gamma \cdot Q - \frac{1}{2} m \gamma \cdot e_1 \gamma \cdot Q + \frac{1}{2} m \gamma \cdot e_1 \gamma \cdot Q \right] u_1 = \\
&= \bar{u}_2 \left[\not{V} \gamma \cdot e_1 - (e_1 \cdot P) \gamma \cdot Q \right] u_1
\end{aligned}$$

Reemplazando obtenemos

$$\begin{aligned}
&k_2 A e_1 + k_2 B e_1 \gamma \cdot Q + (C^{(+)} + C^{(-)}) \cdot e_1 \gamma \cdot Q + (C^{(+)} - C^{(-)}) \cdot k_2 \gamma \cdot e_1 + \\
&+ (D^{(+)} + D^{(-)}) \cdot e_1 (\not{V} - m \gamma \cdot Q) + (D^{(+)} - D^{(-)}) \cdot k_2 (\gamma \cdot e_1, \gamma \cdot Q) + \\
&+ E_1 \left[(\gamma \cdot Q, \gamma \cdot e_1) + (e_1 \cdot P) - m \gamma \cdot e_1 \right] + E_2 \left[\not{V} \gamma \cdot e_1 - (e_1 \cdot P) \gamma \cdot Q \right] = \\
&= - \left[\Psi_1(t) \gamma \cdot e_1 - \frac{1}{m} (e_1 \cdot P) \Psi_2(t) \right]
\end{aligned}$$

Igualando coeficientes obtenemos las siguientes ecuaciones

$$a) \quad k_2 A e_1 + \not{V} (D^{(+)} + D^{(-)}) \cdot e_1 + (e_1 \cdot P) E_1 = \frac{1}{m} (e_1 \cdot P) \Psi_2(t)$$

$$b) \quad k_2 B e_1 + (C^{(+)} + C^{(-)}) \cdot e_1 - m (D^{(+)} + D^{(-)}) \cdot e_1 - (e_1 \cdot P) E_2 = 0$$

(A.1)

$$c) \quad (C^{(+)} - C^{(-)}) \cdot k_2 - m E_1 + \not{V} E_2 = - \Psi_1(t)$$

$$d) \quad (D^{(+)} - D^{(-)}) \cdot k_2 - E_1 = 0$$

De la misma manera teniendo en cuenta la condición de divergencia (4.1b)/ sección (I.4) obtenemos las otras ecuaciones

$$a) \quad e_2 A k_1 - \not{V} (D^{(+)} - D^{(-)}) \cdot e_2 + (e_2 \cdot P) E_1 = \frac{1}{m} (e_2 \cdot P) \Psi_2(t)$$

$$b) \quad e_2 B k_1 + (C^{(+)} - C^{(-)}) \cdot e_2 + m (D^{(+)} - D^{(-)}) \cdot e_2 - (e_2 \cdot P) E_2 = 0$$

(A.2)

$$c) (C_1^{(+)} + C_1^{(-)}) \cdot k_1 - m E_1 + \sqrt{E_2} = - \Psi_1(t)$$

$$d) (D_1^{(+)} + D_1^{(-)}) \cdot k_1 + E_1 = 0$$

que son las ocho ecuaciones (4.2) sección (I.4) obtenidas a partir de las condiciones de divergencia (4.1) sección (I.4).

Consideremos la (A.1d)

$$\sqrt{(D_1^{(+)} - D_1^{(-)}) + (k_2 \cdot \Delta)(D_2^{(+)} - D_2^{(-)}) + (k_2 \cdot Q)(D_3^{(+)} - D_3^{(-)})} - E_1 = 0$$

observando en $z = -1$ y en $z = -2$ y teniendo en cuenta que $D_i^{(\pm)}(-1) = 0$, $i=2,3$ deducimos que debe ser

$$\left[D_1^{(+)}(-2) - D_1^{(-)}(-2) \right] - E_1(-1) = 0$$

similarmente considerando la (A. 2d) se obtiene

$$\left[D_1^{(+)}(-2) + D_1^{(-)}(-2) \right] + E_1(-1) = 0$$

sumando y restando estas dos ecuaciones podemos obtener dos nuevas relaciones

$$\lim_{z \rightarrow -1} \left[D_1^{(+)}(z-1) + \bar{D}_1^{(+)}(z-1) \right] = 0$$

$$\lim_{z \rightarrow -1} \left[D_1^{(-)}(z-1) + E_1(z) + \bar{D}_1^{(-)}(z-1) + \bar{E}_1(z) \right] = 0$$

Consideremos la (A.1c)

$$\begin{aligned} \sqrt{(C_1^{(+)} - C_1^{(-)}) + (k_2 \cdot \Delta)(C_2^{(+)} - C_2^{(-)}) + (k_2 \cdot Q)(C_3^{(+)} - C_3^{(-)})} - \\ - m E_1 + \sqrt{E_2} = - \Psi_1(t) \end{aligned}$$

Observando en $z=-1$ y teniendo en cuenta que $E_2(-1) = 0$, deducimos que debe ser

$$C_1^{(+)}(-1) - C_1^{(-)}(-1) = - \Psi_1(t)$$

similarmente considerando la (A.2c) se obtiene

$$c_1^{(+)}(-1) + c_1^{(-)}(-1) = - \Psi_1(t)$$

sumando y restando estas dos ecuaciones podemos obtener otras dos nuevas / relaciones

$$\lim_{z \rightarrow -1} [c_1^{(+)}(z) - \bar{c}_1^{(+)}(z)] = \Psi_1(t)$$

$$\lim_{z \rightarrow -1} [c_1^{(-)}(z) - \bar{c}_1^{(-)}(z)] = 0$$

Consideremos la (A.1a)

$$\begin{aligned} & A_{00}(k_2 \cdot e_1) + \sqrt{A_{11}(P \cdot e_1) + A_{22}(\Delta \cdot k_2)(\Delta \cdot e_1) + A_{33}(Q \cdot k_2)(Q \cdot e_1)} + \\ & + A_{12}^{(+)}[\sqrt{(\Delta \cdot e_1) + (\Delta \cdot k_2)(P \cdot e_1)}] + A_{12}^{(-)}[\sqrt{(\Delta \cdot e_1) - (\Delta \cdot k_2)(P \cdot e_1)}] + \\ & + A_{13}^{(+)}[\sqrt{(Q \cdot e_1) + (Q \cdot k_2)(P \cdot e_1)}] + A_{13}^{(-)}[\sqrt{(Q \cdot e_1) - (Q \cdot k_2)(P \cdot e_1)}] + \\ & + A_{23}^{(+)}[(\Delta \cdot k_2)(Q \cdot e_1) + (Q \cdot k_2)(\Delta \cdot e_1)] + A_{23}^{(-)}[(\Delta \cdot k_2)(Q \cdot e_1) - (Q \cdot k_2)(\Delta \cdot e_1)] + \\ & + \sqrt{[D_1^{(+)} + D_1^{(-)}](P \cdot e_1) + [D_2^{(+)} + D_2^{(-)}](\Delta \cdot e_1) + [D_3^{(+)} + D_3^{(-)}](Q \cdot e_1)} + (e_1 \cdot P)E_1 = \\ & = \frac{(e_1 \cdot P)}{m} \Psi_2(t) \end{aligned}$$

Observando el coeficiente de $(e_1 \cdot P)$ tenemos

$$\begin{aligned} & \sqrt{A_{11} + (\Delta \cdot k_2)(A_{12}^{(+)} - A_{12}^{(-)}) + (Q \cdot k_2)(A_{13}^{(+)} - A_{13}^{(-)})} + \sqrt{[D_1^{(+)} + D_1^{(-)}]} + E_1 = \\ & = \frac{1}{m} \Psi_2(t) \end{aligned}$$

observando en $z = -1$ y teniendo en cuenta que $D_1^{(\pm)}(-1) = 0$, deducimos que debe ser

$$A_{11}(-1) = \frac{1}{m} \Psi_2(t)$$

o sea obtenemos la relación

$$\lim_{z \rightarrow -1} [A_{11}(z) - \bar{A}_{11}(z)] = - \frac{1}{m} \Psi_2(t)$$

Observando (en $z = -1$) los coeficientes de $(\Delta \cdot e_1)$ y $(Q \cdot e_1)$ obtenemos las relaciones

$$\lim_{z \rightarrow -1} \left[A_{1i}^{(+)}(z) + \bar{A}_{1i}^{(+)}(z) \right] = 0 \quad (i = 1, 2)$$

Consideramos ahora la (A.1 a, b) doblemente saturada con los cuadrimpulsos k_2 y k_1

$$\begin{aligned} & A_{00}(k_2 \cdot k_1) + \sqrt{2} A_{11} + A_{22}(\Delta \cdot k_2)(\Delta \cdot k_1) + A_{33}(Q \cdot k_2)(Q \cdot k_1) + \\ & + A_{12}^{(+)} \left[\sqrt{2}(\Delta \cdot k_1) + \sqrt{2}(\Delta \cdot k_2) \right] + A_{12}^{(-)} \left[\sqrt{2}(\Delta \cdot k_1) - \sqrt{2}(\Delta \cdot k_2) \right] + \\ & + A_{13}^{(+)} \left[\sqrt{2}(Q \cdot k_1) + \sqrt{2}(Q \cdot k_2) \right] + A_{13}^{(-)} \left[\sqrt{2}(Q \cdot k_1) - \sqrt{2}(Q \cdot k_2) \right] + \\ & + A_{23}^{(+)} \left[(\Delta \cdot k_2)(Q \cdot k_1) + (Q \cdot k_2)(\Delta \cdot k_1) \right] + A_{23}^{(-)} \left[(\Delta \cdot k_2)(Q \cdot k_1) - (Q \cdot k_2)(\Delta \cdot k_1) \right] + \\ & + \sqrt{2} \left[\sqrt{2}(D_1^{(+)} + D_1^{(-)}) + (D_2^{(+)} + D_2^{(-)})(\Delta \cdot k_1) + (D_3^{(+)} + D_3^{(-)})(Q \cdot k_1) \right] + \sqrt{2} E_1 = \\ & = \frac{\sqrt{2}}{m} \Psi_2(t) \end{aligned}$$

observando en $z = -2$ y en $z = -1$ y teniendo en cuenta que $D_1^{(+)}(-2) = 0$, $D_1^{(-)}(-2) + E_1(-1) = 0$, deducimos que debe ser

$$A_{11}(-2) = 0$$

o sea obtenemos la relación

$$\lim_{z \rightarrow -1} \left[A_{11}(z-1) + \bar{A}_{11}(z-1) \right] = 0$$

$$\begin{aligned} & B_{00}(k_2 \cdot k_1) + \sqrt{2} B_{11} + B_{22}(\Delta \cdot k_2)(\Delta \cdot k_1) + B_{33}(Q \cdot k_2)(Q \cdot k_1) + \\ & + B_{12}^{(+)} \left[\sqrt{2}(\Delta \cdot k_1) + \sqrt{2}(\Delta \cdot k_2) \right] + B_{12}^{(-)} \left[\sqrt{2}(\Delta \cdot k_1) - \sqrt{2}(\Delta \cdot k_2) \right] + \\ & + B_{13}^{(+)} \left[\sqrt{2}(Q \cdot k_1) + \sqrt{2}(Q \cdot k_2) \right] + B_{13}^{(-)} \left[\sqrt{2}(Q \cdot k_1) - \sqrt{2}(Q \cdot k_2) \right] + \\ & + B_{23}^{(+)} \left[(\Delta \cdot k_2)(Q \cdot k_1) + (Q \cdot k_2)(\Delta \cdot k_1) \right] + B_{23}^{(-)} \left[(\Delta \cdot k_2)(Q \cdot k_1) - (Q \cdot k_2)(\Delta \cdot k_1) \right] \\ & + \sqrt{2} (C_1^{(+)} + C_1^{(-)}) + (k_1 \cdot \Delta)(C_2^{(+)} + C_2^{(-)}) + (k_1 \cdot Q)(C_3^{(+)} + C_3^{(-)}) - \\ & - m \left[\sqrt{2}(D_1^{(+)} + D_1^{(-)}) + (k_1 \cdot \Delta)(D_2^{(+)} + D_2^{(-)}) + (k_1 \cdot Q)(D_3^{(+)} + D_3^{(-)}) \right] - \sqrt{2} E_2 = 0 \end{aligned}$$

Observando en $z = -2$ y teniendo en cuenta la (A.2 c), deducimos que debe ser

$$B_{11}(-2) = \Psi_1(t)$$

o sea obtenemos la relación

$$\lim_{z \rightarrow -1} \left[B_{11}(z-1) - \bar{B}_{11}(z-1) \right] = - \Psi_1(t)$$

Si consideramos la (A. 1b) y (A.2b) doblemente saturada con los cuádrimomentos k_2 y k_1 y observamos (en $z = -2$ y $z = -1$) los coeficientes de $(\Delta \cdot k_1)$ y $(Q \cdot k_1)$ obtenemos las relaciones

$$\lim_{z \rightarrow -1} \left[B_{1i}^{(\pm)}(z-1) + C_i^{(\pm)}(z) + \bar{B}_{1i}^{(\pm)}(z-1) + \bar{C}_i^{(\pm)}(z) \right] = 0 \quad (i=2,3)$$

Finalmente considerando el coeficiente de $(P \cdot e_1)$ de la (A.2b), los coeficientes $(\Delta \cdot e_1)$ y $(Q \cdot e_1)$ de la (A.1b) y la (A.2a) que son respectivamente

$$i) \quad \sqrt{B_{11}} + (k_1 \cdot \Delta)(B_{12}^{(+)} + B_{12}^{(-)}) + (k_1 \cdot Q)(B_{13}^{(+)} + B_{13}^{(-)}) + (C_1^{(+)} - C_1^{(-)}) +$$

$$+ m(D_1^{(+)} - D_1^{(-)}) - E_2 = 0$$

$$ii) \quad \sqrt{B_{12}^{(+)} + B_{12}^{(-)}} + (C_2^{(+)} + C_2^{(-)}) - m(D_2^{(+)} + D_2^{(-)}) +$$

$$+ (k_2 \cdot Q)(B_{23}^{(+)} - B_{23}^{(-)}) - B_{00} + (k_2 \cdot \Delta) B_{22} = 0$$

$$iii) \quad \sqrt{B_{13}^{(+)} + B_{13}^{(-)}} + (C_3^{(+)} + C_3^{(-)}) - m(D_3^{(+)} + D_3^{(-)}) +$$

$$+ (k_2 \cdot \Delta)(B_{23}^{(+)} + B_{23}^{(-)}) + B_{00} + (k_2 \cdot Q) B_{33} = 0$$

$$iiii) \quad \sqrt{C_1^{(+)} + C_1^{(-)}} + (k_1 \cdot \Delta)(C_2^{(+)} + C_2^{(-)}) + (k_1 \cdot Q)(C_3^{(+)} + C_3^{(-)}) -$$

$$- m E_1 + \sqrt{E_2} = - \Psi_1(t)$$

y hacemos la combinación

$$\sqrt{i) - (k_1 \cdot \Delta) (ii) - (k_1 \cdot Q) (iii) + (iiii) = - \Psi_1(t)$$

Observando en $z = -3$, $z = -2$ y $z = -1$ y teniendo en cuenta que

$$D_1^{(-)}(-2) + E(-1) = 0 \quad \text{y} \quad D_1^{(+)}(-2) = 0, \text{ deducimos que debe ser}$$

$$B_{11}(-3) + 2 C_1^{(+)}(-2) = 0$$

o sea obtenemos la relación

$$\lim_{z \rightarrow -1} \left[B_{11}(z-2) + 2 C_1^{(+)}(z-1) + \bar{B}_{11}(z-2) + 2 \bar{C}_1^{(+)}(z-1) \right] = 0$$

Hemos obtenido de esta manera todas las relaciones posibles entre las amplitudes no observables Φ_i 's, Nuestro próximo paso es pasar a las amplitudes físicas ϕ_i usando (3.8) sección (I.3).

Tomamos $\Phi_j = D_1^{(-)}$ y $\Phi_k = D_3^{(-)}$. Por lo tanto $c_1^{(1)}$, $c_1^{(2)}$, $c_3^{(1)}$ y $c_3^{(2)}$ serán respectivamente los coeficientes de $D_1^{(-)}$ y $D_3^{(-)}$ en las dos relaciones (3.6) sección (I.3).

Tenemos

$$c_1^{(1)} = m \Delta^2 \quad c_3^{(1)} = 0 \quad c_1^{(2)} = 0 \quad c_3^{(2)} = m \Delta^2$$

Con estos valores (3.8) sección (I.3) queda:

$$\phi_i = \frac{1}{m^2 \Delta^2} \begin{vmatrix} \Phi_i & D_1^{(-)} & D_3^{(-)} \\ c_i^{(1)} & m \Delta^2 & 0 \\ c_i^{(2)} & 0 & m \Delta^2 \end{vmatrix}$$

$$= \Phi_i - \frac{c_i^{(1)} D_1^{(-)} + c_i^{(2)} D_3^{(-)}}{m \Delta^2}$$

$$A_{12}^{(-)} = A_{12}^{(-)} - \frac{q^2}{\Delta^2} D_3^{(-)}$$

$$A_{13}^{(-)} = A_{13}^{(-)} + \frac{(\Delta \cdot q)}{\Delta^2} D_3^{(-)}$$

$$B_{12}^{(-)} = B_{12}^{(-)} - \frac{1}{m} D_1^{(-)} + \frac{\sqrt{\quad}}{m \Delta^2} D_3^{(-)}$$

$$B_{13}^{(-)} = B_{13}^{(-)}$$

$$B_{23}^{(-)} = B_{23}^{(-)} + \frac{m}{\Delta^2} D_3^{(-)}$$

$$C_1^{(-)} = C_1^{(-)} - \frac{(\Delta \cdot q)}{m} D_1^{(-)} + \frac{\sqrt{(\Delta \cdot q)}}{m \Delta^2} D_3^{(-)}$$

$$C_2^{(-)} = C_2^{(-)} + \frac{\sqrt{\quad}}{m} D_1^{(-)} + \frac{(m^2 q^2 - \sqrt{\quad}^2)}{m \Delta^2} D_3^{(-)}$$

$$C_3^{(-)} = C_3^{(-)} - \frac{m (\Delta \cdot q)}{\Delta^2} D_3^{(-)}$$

$$D_2^{(-)} = D_2^{(-)} + \frac{(\Delta \cdot q)}{\Delta^2} D_3^{(-)}$$

$$E_1 = E_1 + \sqrt{\quad} D_1^{(-)} + \frac{[q^2 \Delta^2 - (\Delta \cdot q)^2]}{\Delta^2} D_3^{(-)}$$

$$E_2 = E_2 + \frac{p^2}{m} D_1^{(-)} + \frac{\sqrt{\quad}}{m} D_3^{(-)}$$

logicamente $D_1^{(-)} = D_3^{(-)} = 0$

Observando estas relaciones vemos que perdemos la relación para $B_{12}^{(-)}$, $C_1^{(-)}$, E_2 pues ellas tienen el término en $D_3^{(-)}$ cuyos coeficientes / contienen al menos un $\sqrt{\quad}$ al numerador, Sin embargo podemos ganar otras relaciones pues

$$\Delta^2 \mathcal{B}_{12}^{(-)} - \mathcal{E}_2 = \Delta^2 B_{12}^{(-)} - m D_1^{(-)}$$

$$\Delta^2 \mathcal{P}_1^{(-)} - (\Delta \cdot Q) \mathcal{E}_2 = \Delta^2 C_1^{(-)} - m (\Delta \cdot Q) D_1^{(-)} - (\Delta \cdot Q) E_2$$

De esta forma obtenemos para las amplitudes físicas ϕ_i la lista de relaciones dadas en (4.4) sección (I.4).

Cálculo de los términos de Born

Comenzamos calculando las contribuciones a los términos de Born del proceso/ representado en fig. 2 sección (I.2).

Consideramos la parte imaginaria de (2.1) sección (I.2)

(A.3)

$$e_2^\mu t_{\mu\nu}^{\alpha\beta} e_1^\nu = \frac{1}{2} e_2^\mu e_1^\nu \int d^4x e^{ik_2x} \langle p_2 | [j_\mu^\alpha(x), j_\nu^\beta(0)] | p_1 \rangle$$

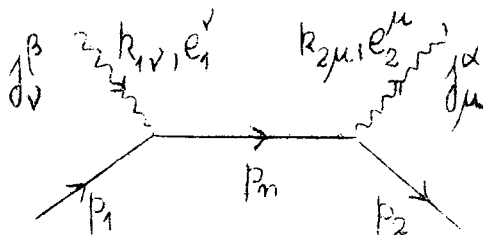
donde j_μ^α y j_ν^β son densidades de corriente electromagnetica .

Introduciendo un conjunto completo de estados intermedios escribimos

(A.4)

$$e_2^\mu t_{\mu\nu}^{\alpha\beta} e_1^\nu = \frac{1}{2} e_2^\mu e_1^\nu \int d^4x e^{ik_2x} \langle p_2 | j_\mu^\alpha(x) | p_n \rangle \cdot \langle p_n | j_\nu^\beta(0) | p_1 \rangle - c.t$$

donde p_n representa el cuádrimpulso de la partícula intercambiada en el canal s del diagrama



Tenemos así:

(A.5)

$$e_2^\mu t_{\mu\nu}^{\alpha\beta} e_1^\nu = \frac{1}{2} e_2^\mu e_1^\nu \int d^4(k_2 - p_n + k_2) \langle p_2 | j_\mu^\alpha(0) | p_n \rangle \langle p_n | j_\nu^\beta(0) | p_1 \rangle - c.t$$

donde dejamos sobreentendido la integral sobre $d^3 \vec{p}_n$

Para pasar de las amplitudes imaginarias a las amplitudes totales lo hacemos utilizando la técnica de relaciones de dispersión sabiendo que

(A.6)

$$\Phi = \int \frac{\text{Im } \Phi(s', t)}{s' - s} ds'$$

Teniendo en cuenta la cuadriconservación de la corriente electromagnética, la forma más general para los elementos de matriz es

(A.7)

$$e_2^\mu \langle p_2 | j_\mu(0) | p_n \rangle = \bar{u}(p_2) \left\{ e \gamma_\mu + \mu \sigma_{\mu\rho} k_{2\rho} \right\} u(p_n) e_2^\mu$$

$$e_1^\nu \langle p_n | j_\nu(0) | p_1 \rangle = \bar{u}(p_n) \left\{ e \gamma_\nu + \mu \sigma_{\nu\lambda} k_{1\lambda} \right\} u(p_1) e_1^\nu$$

con

$$\sigma_{\mu\nu} = \frac{1}{2} [\gamma_\mu, \gamma_\nu]$$

Debemos por lo tanto calcular los siguientes elementos de matriz:

(A.8)

$$e^2 \bar{u}(p_2) \gamma \cdot e_2 u(p_n) \bar{u}(p_n) \gamma \cdot e_1 u(p_1)$$

$$e \mu \left[\bar{u}(p_2) \sigma_{\mu\rho} e_2^\mu k_{2\rho} u(p_n) \bar{u}(p_n) \gamma \cdot e_1 u(p_1) + \right.$$

$$\left. + \bar{u}(p_2) \gamma \cdot e_2 u(p_n) \bar{u}(p_n) \sigma_{\nu\lambda} e_1^\nu k_{1\lambda} u(p_1) \right]$$

$$\mu^2 \bar{u}(p_2) \sigma_{\mu\rho} k_{2\rho} e_2^\mu u(p_n) \bar{u}(p_n) \sigma_{\nu\lambda} k_{1\lambda} e_1^\nu u(p_1)$$

con

$$u(p_n) \bar{u}(p_n) = (\gamma \cdot p_n + m) = (\gamma \cdot P + \gamma \cdot Q + m)$$

Como un ejemplo calculamos explícitamente el primero de (A.8)

$$\bar{u}(p_2) \gamma \cdot e_2 (\gamma \cdot P + \gamma \cdot Q + m) \gamma \cdot e_1 u(p_1) =$$

$$= \bar{u}(p_2) \left[(p_2 \cdot e_2) \gamma \cdot e_1 + (p_1 \cdot e_2) \gamma \cdot e_2 + \gamma \cdot e_2 \gamma \cdot Q \gamma \cdot e_1 \right] u(p_1)$$

y teniendo en cuenta que

$$\gamma \cdot e_2 \gamma \cdot Q \gamma \cdot e_1 = (\gamma \cdot e_2, \gamma \cdot Q, \gamma \cdot e_1) + (e_1 \cdot Q) \gamma \cdot e_2 - (e_1 \cdot e_2) \gamma \cdot Q +$$

$$+ (e_2 \cdot Q) \gamma \cdot e_1$$

$$p_2 = P + \Delta$$

$$p_1 = P - \Delta$$

obtenemos

$$\bar{u}(p_2) \gamma \cdot e_2 (\gamma \cdot P + \gamma \cdot Q + m) \gamma \cdot e_1 u(p_1) =$$

(A.9)

$$= \bar{u}(p_2) \left[(P + \Delta + Q) \cdot e_2 \quad \gamma \cdot e_1 + (P - \Delta + Q) \cdot e_1 \quad \gamma \cdot e_2 - (e_1 \cdot e_2) \gamma \cdot Q + \right. \\ \left. + (\gamma \cdot e_2, \gamma \cdot Q, \gamma \cdot e_1) \right] u(p_1)$$

Comparando con la descomposición en invariantes (3.1) sección (I. 3) vemos que las contribuciones a los términos de Born, proporcionales a e^2 , están dadas por

$$\boxed{e^2}$$

$$e_2 \quad A \quad e_1 = 0$$

$$e_2 \quad B \quad e_1 = - (e_1 \cdot e_2)$$

$$(C^{(+)} + C^{(-)}) \cdot e_1 = (P - \Delta + Q) \cdot e_1$$

$$(C^{(+)} - C^{(-)}) \cdot e_2 = (P + \Delta + Q) \cdot e_2$$

(A.10)

$$(D^{(+)} + D^{(-)}) \cdot e_1 = 0$$

$$(D^{(+)} - D^{(-)}) \cdot e_2 = 0$$

$$E_1 = 0$$

$$E_2 = 0$$

De la misma manera se calculan los otros dos elementos de matriz proporcionales a $e\mu$ y a μ^2 y las contribuciones a los términos de Born están dadas, respectivamente por

$$\boxed{e\mu}$$

$$(A.11) \quad e_2 \quad A \quad e_1 = 4 (P \cdot e_2)(P \cdot e_1) - 2 (\Delta \cdot e_2) (\Delta \cdot e_1) + 2(Q \cdot e_2)(Q \cdot e_1) + \\ + 3 \left[(P \cdot e_2)(Q \cdot e_1) + (P \cdot e_1)(Q \cdot e_2) \right] + \\ + 3 \left[(\Delta \cdot e_2)(P \cdot e_1) - (P \cdot e_2) (\Delta \cdot e_1) \right] + \\ + 2 \left[(\Delta \cdot e_2)(Q \cdot e_1) - (\Delta \cdot e_1)(Q \cdot e_2) \right] - 2(e_1 \cdot e_2) \left[2(P \cdot Q) - \Delta^2 + Q^2 \right]$$

$$e_2 B e_1 = 4 m (e_2 \cdot e_1)$$

$$(C^{(+)} + C^{(-)}) \cdot e_1 = - m (2 P - 3 \Delta + 3 Q) \cdot e_1$$

(A.11)

$$(C^{(+)} - C^{(-)}) \cdot e_2 = - m (2 P + 3 \Delta + 3 Q) \cdot e_2$$

$$(D^{(+)} + D^{(-)}) \cdot e_1 = (2 P - \Delta + Q) \cdot e_1$$

$$(D^{(+)} - D^{(-)}) \cdot e_2 = - (2 P + \Delta + Q) \cdot e_2$$

$$E_1 = 2 \left[2 (P \cdot Q) - \Delta^2 + Q^2 \right] \quad (*)$$

$$E_2 = - 4 m$$

μ^2

$$e_2 A e_1 = 2m (\Delta \cdot e_2)(\Delta \cdot e_1) - 2m (Q \cdot e_2)(Q \cdot e_1) +$$

$$+ 2m \left[(P \cdot e_2)(\Delta \cdot e_1) - (P \cdot e_1)(\Delta \cdot e_2) \right] - 2m \left[(P \cdot e_2)(Q \cdot e_1) + (P \cdot e_1)(Q \cdot e_2) \right] -$$

$$- 2m \left[(\Delta \cdot e_2)(Q \cdot e_1) - (\Delta \cdot e_1)(Q \cdot e_2) \right] + 2m (e_1 \cdot e_2) \left[2(P \cdot Q) - \Delta^2 + Q^2 \right]$$

$$e_2 B e_1 = 4(P \cdot e_2)(P \cdot e_1) - (\Delta \cdot e_2)(\Delta \cdot e_1) + (Q \cdot e_2)(Q \cdot e_1) -$$

$$- 2 \left[(P \cdot e_2)(\Delta \cdot e_1) - (P \cdot e_1)(\Delta \cdot e_2) \right] + 2 \left[(P \cdot e_2)(Q \cdot e_1) + (P \cdot e_1)(Q \cdot e_2) \right] +$$

$$+ \left[(\Delta \cdot e_2)(Q \cdot e_1) - (\Delta \cdot e_1)(Q \cdot e_2) \right] - (e_1 \cdot e_2) \left[2(P \cdot Q) - \Delta^2 + Q^2 + 4m^2 \right]$$

(*) Hacemos notar que al pasar de la parte imaginaria de la amplitud, a la amplitud total tenemos una $\delta(s - m^2)$ donde $s = m^2 = 2(P \cdot Q) - \Delta^2 + Q^2$, por lo tanto la contribución a los términos de Born de la amplitud E_1 es nula.

(A.12)

$$(C^{(+)} + C^{(-)}) \cdot e_1 = - (P \cdot e_1) \left[2 (P \cdot Q) - \Delta^2 + Q^2 \right] - 2m^2 (\Delta \cdot e_1) + 2m^2 (Q \cdot e_1)$$

$$(C^{(+)} - C^{(-)}) \cdot e_2 = - (P \cdot e_2) \left[2 (P \cdot Q) - \Delta^2 + Q^2 \right] + 2m^2 (\Delta \cdot e_2) + 2m^2 (Q \cdot e_2)$$

$$(D^{(+)} + D^{(-)}) \cdot e_1 = - 4m (P \cdot e_1) + 2m (\Delta \cdot e_1) - 2m (Q \cdot e_1)$$

$$(D^{(+)} - D^{(-)}) \cdot e_2 = 4m (P \cdot e_2) + 2m (\Delta \cdot e_2) + 2m (Q \cdot e_2)$$

$$E_1 = - 2m \left[2 (P \cdot Q) - \Delta^2 + Q^2 \right] (*)$$

$$E_2 = \left[2 (P \cdot Q) - \Delta^2 + Q^2 + 4m^2 \right]$$

Debemos considerar a continuación, cuales son las amplitudes del desarrollo (3.12) sección (I.3) que contribuyen sólo en la aproximación de Born y las cuales son las que contribuyen en la aproximación de Born más el continuo. Para ello es necesario conocer el orden de los invariantes que multiplican a cada amplitud y el cruzamiento de cada amplitud.

Comenzamos por hacer notar que tanto en el sistema del laboratorio como en el sistema del centro de masa

$$P \cdot e_{1,2} \rightarrow 0(k) \quad \Delta \cdot e_{1,2} \rightarrow 0(k) \quad Q \cdot e_{1,2} \rightarrow 0(k)$$

ya que :

a) Sistema del laboratorio

$$e_1 \equiv (\vec{e}_1, 0) \quad k_1 \cdot e_1 = 0 \quad p_1 \cdot e_1 = 0$$

$$e_2 \equiv (\vec{e}_2, 0) \quad k_2 \cdot e_2 = 0 \quad p_1 \cdot e_2 = 0$$

$$p_1 + k_1 = p_2 + k_2$$

$$k_2 \cdot e_1 = (p_1 + k_1 - p_2) \cdot e_1 = p_1 \cdot e_1 + k_1 \cdot e_1 - p_2 \cdot e_1$$

$$k_2 \cdot e_1 = - p_2 \cdot e_1$$

y lo mismo

$$k_1 \cdot e_2 = p_2 \cdot e_2$$

por lo tanto:

$$P \cdot e_{1,2} = \frac{1}{2} (p_1 + p_2) \cdot e_{1,2} = -\frac{1}{2} k_2 \cdot e_1 \rightarrow O(k)$$

b) Sistema del centro de masa

$$e_1 \equiv (\vec{e}_1, 0) \quad k_1 \cdot e_1 = 0 \quad p_1 \cdot e_1 = 0$$

$$e_2 \equiv (\vec{e}_2, 0) \quad k_2 \cdot e_2 = 0 \quad p_2 \cdot e_2 = 0$$

$$k_2 \cdot e_1 = (p_1 + k_1 - p_2) \cdot e_1 = - p_2 \cdot e_1$$

$$k_2 \cdot e_1 = - p_2 \cdot e_1$$

y lo mismo:

$$k_1 \cdot e_2 = - p_1 \cdot e_2$$

por lo tanto:

$$P \cdot e_{1,2} \rightarrow O(k)$$

Además teniendo en cuenta que:

a) Para las amplitudes con cruzamiento - el término Born es un $1/O(k)$ y el continuo es un $O(k)$,

b) Para las amplitudes con cruzamiento + el término de Born es un $O(1)$ y el continuo es un $O(1)$,

después de un cuidadoso análisis es posible demostrar que las únicas amplitudes que contribuyen son las que multiplican a los siguientes invariantes (cuyos órdenes escribimos)

$$1 \rightarrow O(1)$$

$$(\gamma \cdot e_2, \gamma \cdot e_1) \rightarrow O(1)$$

$$(\gamma.e_2, \gamma.e_1, \gamma.P) = m(\gamma.e_2, \gamma.e_1) + (\Delta.e_1) \gamma.e_2 - (\Delta.e_2) \gamma.e_1 \rightarrow O(1) + O(k)$$

$$\gamma.P = m \rightarrow O(1)$$

$$(\gamma.e_{1,2}, \gamma.Q) \rightarrow O(k)$$

$$(A.13) \quad (\gamma.e_{1,2}, \gamma.\Delta) = -m \gamma.e_{1,2} + (P.e_{1,2}) \rightarrow O(1) + O(k)$$

$$(\gamma.e_{1,2}, \gamma.P, \gamma.Q) = -m(\gamma.e_{1,2}, \gamma.Q) + (\Delta.e_{1,2}) \gamma.Q \rightarrow O(k) + O(k^2)$$

$$(\gamma.e_{1,2}, \gamma.P, \gamma.\Delta) = p^2 \gamma.e_{1,2} - m(P.e_{1,2}) \rightarrow O(1) + O(k)$$

$$(\gamma.P, \gamma.Q, \gamma.\Delta) = m\sqrt{v} - p^2 \gamma.Q \rightarrow O(k)$$

$$(\gamma.Q, \gamma.\Delta) = -m \gamma.Q + \sqrt{v} \rightarrow O(k)$$

Ademas las amplitudes que contribuyen en la aproximación de Born más el / continuo son algunas de las amplitudes que multiplican a los siguientes invariantes

$$\begin{array}{ll} 1 & (\gamma.e_2, \gamma.e_1) \\ \gamma.P & (\gamma.e_2, \gamma.e_1, \gamma.P) \quad (*) \end{array} \quad (A.14)$$

y las amplitudes que contribuyen solamente en la aproximación de Born son algunas de las amplitudes que multiplican a los siguientes invariantes

$$\begin{array}{ll} (\gamma.e_{1,2}, \gamma.Q) & (\gamma.e_{1,2}, \gamma.\Delta) \\ (\gamma.e_{1,2}, \gamma.P, \gamma.Q) & (\gamma.e_{1,2}, \gamma.P, \gamma.\Delta) \\ (\gamma.P, \gamma.Q, \gamma.\Delta) & (\gamma.Q, \gamma.\Delta) \end{array} \quad (A.15)$$

Como un ejemplo calcularemos explícitamente la contribución de las amplitudes que multiplican al invariante 1 y al invariante $\gamma.P$.

(*) Hacemos notar que $\gamma.P$ y $(\gamma.e_2, \gamma.e_1, \gamma.P)$ se reducen respectivamente a los invariantes 1 y $(\gamma.e_2, \gamma.e_1)$

(A.16)

$$\begin{aligned}
& \frac{1}{4 m^2} \text{Tr} \left\{ (\not{\gamma} \cdot p + m) \left[\sum_{i=1}^{34} \Phi_i I_i \right] (\not{\gamma} \cdot p_1 + m) \right\} = \\
& = \frac{1}{4 m^2} \left\{ 2(m^2 - \Delta^2) e_2 A e_1 + 2 m \not{v} e_2 B e_1 + 2m (P \cdot e_2) (C^{(+)} + C^{(-)}) \cdot e_1 + \right. \\
& + 2m (P \cdot e_1) (C^{(+)} - C^{(-)}) \cdot e_2 + 2 \left[\not{v} (\Delta \cdot e_2) - (\Delta \cdot Q) (P \cdot e_2) \right] (D^{(+)} + D^{(-)}) \cdot e_1 + \\
& + 2 \left[\not{v} (\Delta \cdot e_1) - (\Delta \cdot Q) (P \cdot e_1) \right] (D^{(+)} - D^{(-)}) \cdot e_2 + \\
& \left. + 2 \left[(P \cdot e_2) (\Delta \cdot e_1) - (P \cdot e_1) (\Delta \cdot e_2) \right] E_1 \right\}
\end{aligned}$$

Teniendo en cuenta la expresión explícita de $e_2 \cdot A \cdot e_1$ y $e_2 \cdot B \cdot e_1$ y el cruzamiento de cada amplitud es fácil ver que las únicas amplitudes que multiplican al invariante 1 y al invariante $\not{\gamma} \cdot P$ y que contribuyen son

$$A_{00} \rightarrow \text{Born} + \text{continuo}$$

$$A_{12}^{(\pm)}, A_{13}^{(\pm)} \rightarrow \text{Born} (*)$$

$$B_{00} \rightarrow \text{Born}$$

$$C_2^{(\pm)}, C_3^{(\pm)} \rightarrow \text{Born}$$

Luego la contribución de las amplitudes que multiplican al invariante 1 y al invariante $\not{\gamma} \cdot P$ es:

$$\begin{aligned}
& (A_{00} + \frac{\not{v}}{m} B_{00})(e_2 \cdot e_1) + \frac{1}{2 m^2} A_{12}^{(-)} \left[(P \cdot e_2) (\Delta \cdot e_1) - (P \cdot e_1) (\Delta \cdot e_2) \right] + \\
& + \frac{1}{2 m^2} A_{13}^{(+)} \left[(P \cdot e_2) (Q \cdot e_2) + (P \cdot e_1) (Q \cdot e_2) \right] + \\
& (A.17) \quad + \frac{1}{m} \left[(C_2^{(+)} + C_2^{(-)}) (P \cdot e_2) (\Delta \cdot e_1) + (C_3^{(+)} + C_3^{(-)}) (P \cdot e_2) (Q \cdot e_1) \right] + \\
& + \frac{1}{m} \left[(C_2^{(+)} - C_2^{(-)}) (P \cdot e_1) (\Delta \cdot e_2) + (C_3^{(+)} - C_3^{(-)}) (P \cdot e_1) (Q \cdot e_2) \right]
\end{aligned}$$

(*) Hacemos notar que los términos de Born de $A_{12}^{(+)}$ y $A_{13}^{(-)}$ son nulos .-

De la misma manera es posible ver que las únicas amplitudes que multiplican al invariante $(\gamma.e_2, \gamma.e_1)$ y al invariante $(\gamma.e_2, \gamma.e_1, \gamma.P)$ y que contribuyen son

$$E_1 \rightarrow \text{Born} + \text{continuo}$$

$$E_2 \rightarrow \text{Born} + \text{continuo}$$

y la contribución está dada por

(A.18)

$$(E_1 - \frac{\gamma}{m} E_2) (\gamma.e_2, \gamma.e_1)$$

Un análisis idéntico nos lleva a que las amplitudes que contribuyen solamente en la aproximación de Born son:

(A.19)

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} (D^{(+)} - D^{(-)}) . e_2 (\gamma.e_1, \gamma.Q) + \frac{1}{2} (D^{(+)} + D^{(-)}) . e_1 (\gamma.e_2, \gamma.Q) - \\ & - \frac{1}{2m} (C^{(+)} - C^{(-)}) . e_2 (\gamma.e_1, \gamma.\Delta) - \frac{1}{2m} (C^{(+)} + C^{(-)}) . e_1 (\gamma.e_2, \gamma.\Delta) - \\ & - \frac{1}{2m} (D^{(+)} - D^{(-)}) . e_2 (\gamma.e_1, \gamma.P, \gamma.Q) - \frac{1}{2m} (D^{(+)} + D^{(-)}) . e_1 (\gamma.e_2, \gamma.P, \gamma.Q) + \\ & + \frac{1}{2m^2} (C^{(+)} - C^{(-)}) . e_2 (\gamma.e_1, \gamma.P, \gamma.\Delta) + \frac{1}{2m^2} (C^{(+)} + C^{(-)}) . e_1 (\gamma.e_2, \gamma.P, \gamma.\Delta) - \\ & - \frac{1}{2m^2} (e_2 . e_1) B_{00} (\gamma.P, \gamma.Q, \gamma.\Delta) - \frac{1}{2m} (e_2 . e_1) B_{00} (\gamma.Q, \gamma.\Delta) \end{aligned}$$

Reduciendo los productos antisimétricos $(\gamma.e_{1,2}, \gamma.P, \gamma.Q)$, $(\gamma.e_{1,2}, \gamma.P, \gamma.\Delta)$ y $(\gamma.P, \gamma.Q, \gamma.\Delta)$ y despreciando órdenes superiores a $O(k)$ nos queda:

(A.20)

$$\begin{aligned} & \left[(D_2^{(+)} - D_2^{(-)}) (\Delta . e_2) + (D_3^{(+)} - D_3^{(-)}) (Q . e_2) \right] (\gamma.e_1, \gamma.Q) + \\ & + \left[(D_2^{(+)} + D_2^{(-)}) (\Delta . e_1) + (D_3^{(+)} + D_3^{(-)}) (Q . e_1) \right] (\gamma.e_2, \gamma.Q) - \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& - \frac{1}{m} \left[(c_2^{(+)} - c_2^{(-)}) (\Delta \cdot e_2) + (c_3^{(+)} - c_3^{(-)}) (Q \cdot e_2) \right] (\gamma \cdot e_1, \gamma \cdot \Delta) - \\
& - \frac{1}{m} \left[(c_2^{(+)} + c_2^{(-)}) (\Delta \cdot e_1) + (c_3^{(+)} + c_3^{(-)}) (Q \cdot e_1) \right] (\gamma \cdot e_2, \gamma \cdot \Delta) - \\
& - \frac{1}{m} (e_2 \cdot e_1) B_{00} (\gamma \cdot Q, \gamma \cdot \Delta)
\end{aligned}$$

Para calcular la contribución (A. 17) y (A.18) hacemos uso de la condición / de " gauge" $k_2 \cdot e_1 = e_2 \cdot k_1 = 0$

que nos permite calcular las contribuciones del continuo solamente en función de los términos de Born.

Consideremos las relaciones

$$A_{00} + \sqrt{A_{12}^{(+)} + A_{12}^{(-)}} - \sqrt{D_2^{(+)} - D_2^{(-)}} = 0 + O(k^2)$$

$$B_{00} + \sqrt{B_{12}^{(+)} + B_{12}^{(-)}} + (c_2^{(+)} - c_2^{(-)}) + m (D_2^{(+)} - D_2^{(-)}) = 0 + O(k^2)$$

de estas dos relaciones obtenemos

$$\left(A_{00} + \frac{\sqrt{B_{00}}}{m} B_{00} \right)_{low} = \left[- \sqrt{A_{12}^{(+)} - A_{12}^{(-)}} - \frac{\sqrt{B_{00}}}{m} (c_2^{(+)} - c_2^{(-)}) \right]_{low}$$

Consideremos ahora las relaciones

$$\begin{aligned}
& \sqrt{c_1^{(+)} + c_1^{(-)}} + (\Delta \cdot k_1)(c_2^{(+)} + c_2^{(-)}) + (Q \cdot k_1)(c_3^{(+)} + c_3^{(-)}) - m E_1 + \sqrt{E_2} = 0 + O(k^2) \\
& \sqrt{D_1^{(+)} + D_1^{(-)}} + (\Delta \cdot k_1)(D_2^{(+)} + D_2^{(-)}) + (Q \cdot k_1)(D_3^{(+)} + D_3^{(-)}) - E_1 = 0 + O(k^2) \\
& \sqrt{B_{11}} + (\Delta \cdot k_1)(B_{12}^{(+)} - B_{12}^{(-)}) + (Q \cdot k_1)(B_{13}^{(+)} - B_{13}^{(-)}) + (c_1^{(+)} + c_1^{(-)}) + \\
& + m (D_1^{(+)} + D_1^{(-)}) - E_2 = 0 + O(k^2)
\end{aligned}$$

de estas relaciones obtenemos

$$\begin{aligned} (E_1 - \frac{v}{m} E_2)_{low} = \frac{1}{2} \left[-\frac{v^2}{m} B_{11} - (k_1 \cdot \Delta)(D_2^{(+)} + D_2^{(-)}) - \right. \\ \left. - (k_1 \cdot Q)(D_3^{(+)} + D_3^{(-)}) + \frac{(k_1 \cdot \Delta)}{m} (C_2^{(+)} + C_2^{(-)}) + \frac{(k_1 \cdot Q)}{m} (C_3^{(+)} + C_3^{(-)}) \right]_{low} \end{aligned}$$

Podemos así calcular $(e_2 \cdot e_1)_{low}$ solamente en función de los términos de Born.

Haciendo uso de los términos de Born dados en (A.10), (A.11) y (A.12) obtenemos para $e_2 \cdot e_1$ la expresión dada en (5.4) sección (I.5).

Donde
$$\mu = \frac{e}{2m} - \mu_T$$

Como un ejemplo calculemos explícitamente el término $\alpha_2 \beta_1 =$

$$= i \gamma_5 (\Delta \cdot e_1) (e_2 \cdot W) \text{ de (6.4) sección (I.6).}$$

Primeramente hacemos notar que

$$i W_\mu = \epsilon_{\mu\nu\rho\sigma} Q^\nu P^\rho \Delta^\sigma \frac{\partial}{\partial v} = \gamma_5 (\gamma_\mu, \gamma_Q, \gamma_P, \gamma_\Delta) \frac{\partial}{\partial v}$$

Por lo tanto

$$\alpha_2 \beta_1 = (e_1 \cdot \Delta) (\gamma \cdot e_2, \gamma_Q, \gamma_P, \gamma_\Delta)$$

Teniendo en cuenta que:

$$(\gamma \cdot e_2, \gamma_Q, \gamma_P, \gamma_\Delta) = \frac{1}{2} (\gamma \cdot e_2 \gamma_Q \gamma_P \gamma_\Delta + \gamma_\Delta \gamma_P \gamma_Q \gamma \cdot e_2) + \\ + (P \cdot e_2)(Q \cdot \Delta) - \sqrt{(\Delta \cdot e_2)}$$

y utilizando la ecuación de Dirac para reducir los productos de cuatro matrices γ obtenemos

$$\alpha_2 \beta_1 = (e_1 \cdot \Delta) \left\{ - \Delta^2 (\gamma \cdot e_2, \gamma_Q) - m (\Delta \cdot Q) \gamma \cdot e_2 + m (\Delta \cdot e_2) \gamma_Q + \right. \\ \left. + (P \cdot e_2)(Q \cdot \Delta) - \sqrt{(\Delta \cdot e_2)} \right\} \frac{\partial}{\partial v}$$

De la misma manera calculando explícitamente los demás operadores y comparando con la descomposición (3.1) sección (I.3), obtenemos las relaciones (6.8) sección (I.6),

Primeramente recordemos que los tres casos dados en (7.2) sección (I.7) corresponden a:

$\alpha\beta \rightarrow$ corriente vectorial - corriente vectorial
(scattering $\rho - \rho$)

$\alpha Q \rightarrow$ corriente vectorial - corriente electromagnética
(fotoproducción ρ , electroproducción ρ)

$QQ \rightarrow$ corriente electromagnética - corriente electromagnética
(scattering Compton)

Además la paridad G de una corriente vectorial dada por $G J^{(V)}_{G^{-1}} = J^{(V)}$, es / positiva. Para la corriente electromagnética $J^Q = J^{(S)} + J^{(V)}$, la paridad G de la parte isoescalar dada por $G J^{(S)}_{G^{-1}} = - J^{(S)}$, es negativa y la paridad G de la parte isovectorial (tercera componente) dada por $G J^{(V)}_{G^{-1}} = J^{(V)}$, es positiva

Caso $\alpha\beta (V - V)$. Existe la siguiente posibilidad

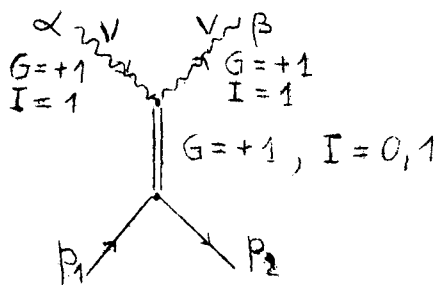


fig. 1

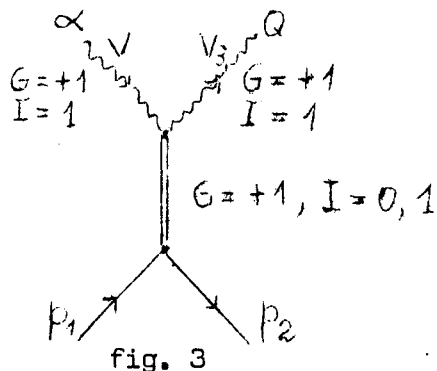
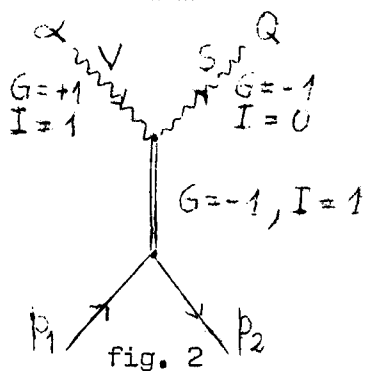
La paridad G del estado intermedio debe ser positiva ($G = +1$). Además teniendo en cuenta que p_1 y p_2 son bariones, en el estado intermedio tenemos la posibilidad de intercambiar un isovector ($I = 1$) o un isoescalar ($I = 0$). Observando la primera de (7.2) sección (I.7) vemos que: $H^{(+)}$ contribuye al intercambio del isoescalar y $H^{(-)}$ al intercambio del isovector.

En síntesis tenemos

$\alpha\beta$	G	I
(+)	+1	0
(-)	+1	1

Tabla A

Caso $\alpha Q(V - Q)$. Existen las dos posibilidades siguientes



De la fig. 2 vemos que en el estado intermedio debemos tener $G = -1$ y solamente hay posibilidades de intercambiar un isovector ($I = 1$).

De la fig. 3 vemos que en el estado intermedio debemos tener $G = +1$ y hay posibilidad de intercambiar un isoescalar ($I = 0$) y un isovector ($I = 1$).

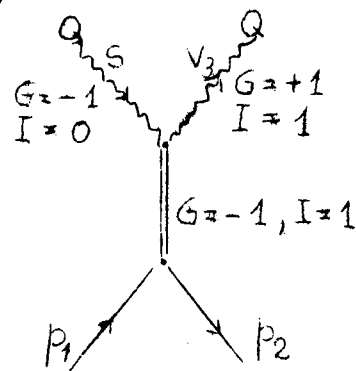
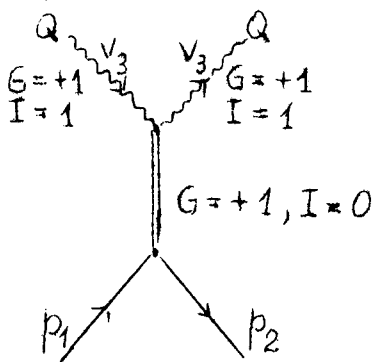
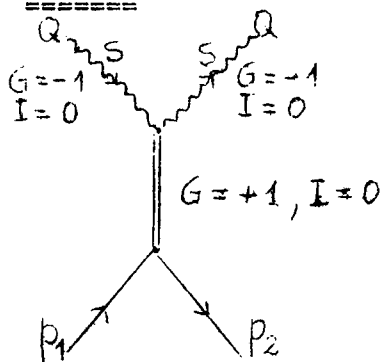
Observando la segunda de (7.2) sección (I.7) vemos que: $H^{(+)}$ contribuye al intercambio del isoescalar y $H^{(-)}$, $H^{(0)}$ contribuyen al intercambio del isovector.

En síntesis tenemos

Tabla B

αQ	G	I
(+)	+1	0
(-)	+1	1
(0)	-1	1

Caso QQ . Existen las tres posibilidades siguientes



De la fig. 4 vemos que en el estado intermedio debemos tener $G = +1$ y solamente hay posibilidad de intercambiar un isoescalar ($I = 0$)

De la fig. 5 vemos que en el estado intermedio debemos tener $G = +1$ y solamente hay posibilidad de intercambiar un isoescalar ($I = 0$) (ya que en el estado final tenemos solamente las terceras componentes de un isovector).

De la fig. 6 vemos que en el estado intermedio debemos tener $G = -1$ y solamente hay posibilidad de intercambiar un isovector ($I = 1$)

Observando la tercera de (7.2) sección (I.7) vemos que : $H^{(+)}$ contribuye al intercambio del isoescalar y $H^{(o)}$ contribuye al intercambio del isovector.

En síntesis tenemos

QQ	G	I
(+)	+ 1	0
(o)	- 1	1

Tabla C

De las tablas A, B, y C vemos que $H^{(+)}$ contribuye, en los tres casos, al intercambio de un isoescalar, mientras que $H^{(-)}$ y $H^{(o)}$ contribuyen al intercambio de un isovector. Por lo tanto podemos dar la Única Tabla 1 sección (I.7) para los tres procesos.

Además teniendo en cuenta la Tabla 1 y que en un mismo octeto la paridad $G /$ del triplete es opuesta a la del singlete, haciendo referencia a la paridad G del triplete podemos escribir la siguiente tabla

	G
(+), (o)	- 1
(-)	+ 1

Tabla D

Veamos ahora las posibles series de J^P , teniendo en cuenta la selección por / cruzamiento (o signatura de cada trayectoria).

Sabemos que las trayectorias con signatura positiva contienen los valores pares de J ($J = 0, 2, 4, \dots$) y las trayectorias con signatura negativa contienen los valores impares de J ($J = 1, 3, 5, \dots$). De la fórmula (7.1) sección / (I.7), haciendo $\alpha(t) \rightarrow J$ vemos que una amplitud genérica H con cruzamiento positivo, contribuye al intercambio de una resonancia cuya trayectoria tiene signatura positiva, e inversamente una amplitud genérica H con cruzamiento negativo contribuye al intercambio de una resonancia cuya trayectoria tiene signatura negativa.

Teniendo en cuenta la paridad espacial P , definiendo paridad natural $\sigma = +1$ a $(-1)^J$ y paridad antinatural $\sigma = -1$ a $(-1)^{J+1}$, podemos escribir las cuatro series siguientes de J^P

cruzamiento	σ	J^P	serie
+	-	$0^- \quad 2^- \quad 4^- \dots\dots\dots$	a
+	+	$0^+ \quad 2^+ \quad 4^+ \dots\dots\dots$	b
-	+	$1^- \quad 3^- \quad 5^- \dots\dots\dots$	c
-	-	$1^+ \quad 3^+ \quad 5^+ \dots\dots\dots$	d

Tabla E

Cuando tenemos en cuenta la paridad G , obtenemos en total ocho tipos de / trayectorias distintas.

Por último observando las (6.3) y (6.6) sección (I.6), podemos dar la siguiente tabla

	cruzamiento	σ
G_{ij}	+	+
F_{1j}	-	-
F_{2j}	+	-

Tabla F

Teniendo en cuenta las Tablas D, E y F deducimos que:

Las partes simétricas (+), (o) de las amplitudes, en el espacio del spin / isotópico contribuyen a

$$\begin{array}{ll}
 G_{ij}^{(+),(o)} & \text{a la serie b} \\
 F_{1j}^{(+),(o)} & \text{a la serie d} \\
 F_{2j}^{(+),(o)} & \text{a la serie a}
 \end{array}$$

y la parte antisimétrica (-) de las amplitudes, en el espacio del spin isotópico contribuyen a

$$\begin{array}{ll}
 G_{ij}^{(-)} & \text{a la serie c} \\
 F_{1j}^{(-)} & \text{a la serie a} \\
 F_{2j}^{(-)} & \text{a la serie d}
 \end{array}$$

Teniendo en cuenta las relaciones (6.8) sección (I.6) y bajo la suposición de pag 42, acerca de las posibles trayectorias dominantes, podemos obtener las (7.3) sección (I.7) que nos dan el comportamiento a la Regge de la parte / absorbente de las 32 amplitudes físicas ϕ_i .

Los resultados de Tablas D, E, y F fueron condensados en Tabla 2 ,sección (I.7) como se puede observar

APENDICE B
=====

Cálculo de los residuos en el canal s
=====

Consideremos la t_{μ} definida en (1.9) sección (II.1)

$$(B.1) \quad t_{\mu}^{(s)} = \frac{1}{2} \int d^4 x e^{-ikx} \langle p_2 | [\Phi^{\alpha}(0), j_{\mu}^{\beta}(x)] | p_1 \rangle$$

Introduciendo un conjunto completo de estados físicos intermedios y aplicando invariancia relativista por translación obtenemos

$$(B.2) \quad t_{\mu}^{(s)} = \frac{1}{2} \left\{ \langle p_2 | \Phi^{\alpha}(0) | p_n \rangle \langle p_n | j_{\mu}^{\beta}(0) | p_1 \rangle \cdot \int d^4(-k + p_n - p_1) - c.t. \right\} d^3 \vec{p}_n$$

Como en este caso solamente nos interesa el canal s, dejamos de lado el término c.t.

Utilizando las expresiones (1.12) sección (II.1) para los elementos de matriz tenemos

$$(B.3) \quad t_{\mu}^{(s)} = \frac{1}{2} F_1(k^2) F^{\alpha}(q^2) \int (p_n + p_1)_{\mu} \int d^4(-k + p_n - p_1) d^3 \vec{p}_n = \\ = \frac{1}{2} F_1(k^2) F^{\alpha}(q^2) \int (p_n + p_1)_{\mu} \int d^3(-\vec{k} + \vec{p}_n - \vec{p}_1) \cdot$$

$$\int d^3(-\vec{k}_0 + \vec{p}_{n0} - \vec{p}_{10}) d^3 \vec{p}_n$$

donde $\int d^3(-\vec{k}_0 + \vec{p}_{n0} - \vec{p}_{10}) = \int (m^2 - s)$

Para pasar a la amplitud total T_{μ} tenemos en cuenta la relación (1.11) sección (II.1) (a t fijo)

$$(B.4) \quad T_{\mu}^{(s)} = \frac{1}{2\pi} F_1(k_2^2) F^{\alpha}(q^2) \int (p_n + p_1)_{\mu} \int d^3(-\vec{k} + \vec{p}_n - \vec{p}_1) \cdot \\ \cdot \int (m^2 - s) \frac{ds'}{s' - s} d^3 \vec{p}_n$$

o sea

$$T_{\mu}^{(s)} = \frac{1}{2\pi} F_1(k^2) F^{\alpha}(q^2) \frac{(2p_1 + k)\mu}{m^2 - s} =$$

$$= \frac{1}{2\pi} F_1(k^2) F^{\alpha}(q^2) \frac{(p_1 + q)\mu}{m^2 - s}$$

donde $F_1(k^2=0) = e_1$ es la constante de acoplamiento electromagnético del vértice en el canal s y $F^{\alpha}(q^2 = \mu^2) = g$ es la constante de acoplamiento del vértice de fig. 7

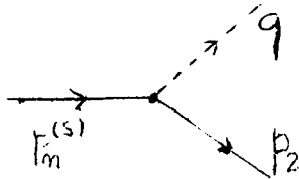


fig. 7

Llevando a cabo el mismo cálculo en el canal t (a s fijo) llegamos a

$$(B.6) \quad T_{\mu}^{(t)} = \frac{1}{2\pi} F_2(k^2) F^{\alpha}(p_1^2) \frac{(2q + k)\mu}{\mu^2 - t}$$

donde μ es la masa de la partícula intercambiada en el canal t, $F_2(k^2=0) = e_2$ es la constante de acoplamiento electromagnético del vértice en el canal t y $F^{\alpha}(p_1^2 = m^2) = F^{\alpha}(q^2 = \mu^2) = g$ es la constante de acoplamiento del vértice de fig. 8

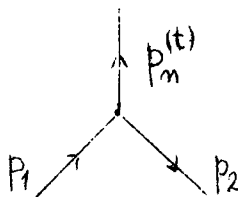


fig. 8

Teniendo en cuenta la descomposición (1.7) sección (II.1) podemos escribir la amplitud física T_e del proceso.

Siendo e_{μ} el cuadrivector polarización del fotón resulta $k \cdot e = 0$, por lo tanto

$$(B.7) \quad T_e = A (p \cdot e) + C (q \cdot e)$$

Comparando con (B.5) y (B.6) podemos obtener las ecuaciones (2.2) sección (II.2).

Cálculo de las trazas de las ecuaciones (5.1) y (7.1) de las secciones (II.5) y (II.7) respectivamente

Utilizamos para T_{μ} la descomposición (4.5) sección (II.4).

En el primer miembro de la ecuación (5.1) sección (II.5) tenemos las siguientes trazas

$$\begin{aligned}
 k_{\mu} \text{Tr} \left\{ \gamma_5 (\gamma \cdot p_2 + m) A'_{\mu} \gamma_5 (\gamma \cdot p_1 + m) \right\} &= k_{\mu} \text{Tr} \left\{ (-\gamma \cdot p_2 + m) A'_{\mu} (\gamma \cdot p_1 + m) \right\} \\
 &= 8 \Delta^2 k_{\mu} A'_{\mu} \\
 k_{\mu} \text{Tr} \left\{ \gamma_5 (\gamma \cdot p_2 + m) B'_{\mu} \gamma \cdot k \gamma_5 (\gamma \cdot p_1 + m) \right\} &= \\
 = k_{\mu} \text{Tr} \left\{ (\gamma \cdot p_2 - m) B'_{\mu} \gamma \cdot k (\gamma \cdot p_1 + m) \right\} &= m k_{\mu} B'_{\mu} \text{Tr} (\gamma \cdot p_2 \gamma \cdot k - \gamma \cdot k \gamma \cdot p_1) = \\
 = 4 m k_{\mu} B'_{\mu} (p_2 \cdot k - p_1 \cdot k) &= 8 m k_{\mu} B'_{\mu} (\Delta^2 + Q \cdot \Delta) \\
 k_{\mu} \text{Tr} \left\{ \gamma_5 (\gamma \cdot p_2 + m) C' \gamma_{\mu} \gamma_5 (\gamma \cdot p_1 + m) \right\} &= \\
 = k_{\mu} \text{Tr} \left\{ (\gamma \cdot p_2 - m) C' \gamma_{\mu} (\gamma \cdot p_1 + m) \right\} &= m k_{\mu} C' \text{Tr} (\gamma \cdot p_2 \gamma_{\mu} - \gamma_{\mu} \gamma \cdot p_1) = \\
 = 4 m k_{\mu} C' (p_2 \nu \delta_{\nu\mu} - p_1 \nu \delta_{\nu\mu}) &= 8 m C' (\Delta^2 + Q \cdot \Delta)
 \end{aligned}$$

y teniendo en cuenta que

$$(\gamma_{\mu}, \gamma \cdot k, \gamma \cdot \Delta) \gamma_5 = \epsilon_{\mu\nu\rho\sigma} k^{\nu} \Delta^{\rho} \gamma^{\sigma}$$

resulta

$$\begin{aligned}
 k_{\mu} \text{Tr} \left\{ \gamma_5 (\gamma \cdot p_2 + m) D' (\gamma_{\mu}, \gamma \cdot k, \gamma \cdot \Delta) \gamma_5 (\gamma \cdot p_1 + m) \right\} &= \\
 = k_{\mu} \text{Tr} \left\{ \gamma_5 (\gamma \cdot p_2 + m) D' \epsilon_{\mu\nu\rho\sigma} k^{\nu} \Delta^{\rho} \gamma^{\sigma} (\gamma \cdot p_1 + m) \right\} &= 0
 \end{aligned}$$

El segundo miembro de la (5.1) nos da

$$\begin{aligned}
 - \Psi(t) \text{Tr} \left\{ \gamma_5 (\gamma \cdot p_2 + m) \gamma_5 (\gamma \cdot p_1 + m) \right\} &= - \Psi(t) \text{Tr} (-\gamma \cdot p_2 \gamma \cdot p_1 + m^2) = \\
 &= - 8 \Delta^2 \Psi(t)
 \end{aligned}$$

Dividiendo por $8 \Delta^2$ obtenemos

$$k_\mu A'_\mu + m k_\mu B'_\mu \left(\frac{\Delta^2 + q \cdot \Delta}{\Delta^2} \right) + m C' \left(\frac{\Delta^2 + q \cdot \Delta}{\Delta^2} \right) = - \Psi(t)$$

que es la ecuación (5.2) sección (II.5)

En el primer miembro de la ecuación (7.1) sección (II.7), tenemos las siguientes trazas

$$k_\mu \text{Tr} \left\{ \gamma_\nu (\gamma \cdot p_2 + m) A'_\mu \gamma_5 (\gamma \cdot p_1 + m) \right\} = 0$$

$$k_\mu \text{Tr} \left\{ \gamma_\nu (\gamma \cdot p_2 + m) B'_\mu \gamma \cdot k \gamma_5 (\gamma \cdot p_1 + m) \right\} = -4 k_\mu B'_\mu \epsilon_{\nu\lambda\ell\rho} p_{2\lambda} k_\ell p_{1\rho}$$

$$k_\mu \text{Tr} \left\{ \gamma_\nu (\gamma \cdot p_2 + m) C'_\mu \gamma_5 (\gamma \cdot p_1 + m) \right\} = -4 k_\mu C'_\mu \epsilon_{\nu\lambda\mu\rho} p_{2\lambda} p_{1\rho}$$

$$k_\mu \text{Tr} \left\{ \gamma_\nu (\gamma \cdot p_2 + m) D' (\gamma_\mu, \gamma \cdot k, \gamma \cdot \Delta) \gamma_5 (\gamma \cdot p_1 + m) \right\} =$$

$$= -k_\mu \text{Tr} \left\{ \gamma_\nu (\gamma \cdot p_2 + m) D' \epsilon_{\mu\tau\rho\sigma} k_\tau \Delta_\rho \gamma_\sigma (\gamma \cdot p_1 + m) \right\} =$$

$$= -k_\mu D' \epsilon_{\mu\tau\rho\sigma} k_\tau \Delta_\rho \text{Tr} \left\{ \gamma_\nu (\gamma \cdot p_2 + m) \gamma_\sigma (\gamma \cdot p_1 + m) \right\} =$$

$$= -k_\mu D' \epsilon_{\mu\tau\rho\sigma} k_\tau \Delta_\rho A_{\nu\sigma}$$

donde

$$A_{\nu\sigma} = 8 \left\{ p_\nu p_\sigma - \Delta_\nu \Delta_\sigma + \Delta^2 \delta_{\nu\sigma} \right\}$$

por lo tanto tenemos

$$k_\mu \left\{ -4 B'_\mu \epsilon_{\nu\lambda\ell\rho} p_{2\lambda} k_\ell p_{1\rho} - 4 C'_\mu \epsilon_{\nu\lambda\mu\rho} p_{2\lambda} p_{1\rho} - D' \epsilon_{\mu\tau\rho\sigma} k_\tau \Delta_\rho A_{\nu\sigma} \right\} = 0$$

y como

$$\epsilon_{\mu\tau\rho\sigma} k_\mu k_\tau \Delta_\rho A_{\nu\sigma} = 0$$

resulta

$$-4 \epsilon_{\nu\lambda\ell\rho} p_{2\lambda} k_\ell p_{1\rho} \left\{ k_\mu B'_\mu + C' \right\} = 0$$

os sea

$$k_\mu B'_\mu + C' = 0$$

que es la ecuación (7.1) sección (II.7).

* * * * *

Expreso mi agradecimiento a los Doctores M. Boiti y F. Pempinelli cuya colaboración permitió la realización de este trabajo. Además agradezco a / los Profesores Dr. G. G. Bollini y Dr. S. Fubini por sus invalorable sugerencias y comentarios. Finalmente deseo expresar mi gratitud a la señora Zulema Urtubey de Moline por la gentileza de mecanografiar este trabajo, y a la Señorita Maria Alicia Salazar ,quien confeccionó las matrices originales del mismo.-

BIBLIOGRAFIA

- 1) - S. Fubini, "A general treatment of current algebra"
(Universidad de Torino, a publicarse en el Nuovo Cimento).
- 2) - S. B. Bronzan, I. S. Gerstein, B. W. Lee, F.E. Low, Phys. Rev.;
Lett. 18, 32 (1967) y Phys. Rev. 157, 1448 (1967)
V. Singh, Phys. Rev. Lett. 18, 36 (1967)
N. Cabibbo, L. Horvitz, Y. Ne'eman, Phys. Rev. Lett. 22, 336 (1966)
N. Cabibbo, L. Horvitz, J.J.J. Kokkedee, Nuovo Cimento 45, 275 (1966)
- 3) - M. Gell-Mann, Phys. Rev. 125, 1067 (1962)
S. Fubini, G. Furlan, Physics. 1, 229 (1965)
S. Fubini, Lecturas dadas en Cargése y Istambul (1966)
G. Furlan, C. Rossetti, Acta Physica Academiae Scientiarum
Hungaricae 22, 239 (1967)
D. Amati, R. Jengo, E. Remiddi, "Families of sum rules from
current algebra" (CERN preprint 1967)
- 4) - R. Dashen y M. Gell-Mann, Phys. Rev. Lett. 17, 340 (1966)
- 5) - S. Fubini, Nuovo Cimento 43, 475 (1966)
- 6) - S. Fubini y G. Segré, Nuovo Cimento 45, 641 (1966)
- 7) - V. de Alfaro, S. Fubini, G. Furlan, C. Rossetti, Phys. Rev. Lett.
21, 576 (1966)
- 8) - V. de Alfaro, S. Fubini, G. Furlan, C. Rossetti, "Superconver-
gence and current algebra", Annals of Physics 44, 165 (1967)
S. Fubini. Comunicación interna Universidad de Torino.
- 9) - N.N. Khuri, Phys. Rev. 132, 914 (1963)
- D.S. Freedman, J.M. Wang, Phys. Rev. 153, 1596 (1967)
- 10) - M. Boiti y F. Pempinelli, "Superconvergence and current algebra
for a $\frac{1}{2}$ - spin target". A ser publicado en el Nuovo Cimento.

- 11) - I.S. Gerstein, Phys. Rev. 161, 1631 (1967)
- 12) - F.E. Low, Phys. Rev. 96, 1428 (1954).
M. Gell-Mann, M.L. Goldberger, Phys. Rev. 96, 1433 (1954)
- 13) - S. Fubini, Nuovo Cimento 52, 224 (1967)
- 14) - H.G. Dosch, David Gordon, "Current algebra sum rules for arbitrary spin and mass". A publicarse en el Phys. Rev.
M. Gourdin, Nuovo Cimento 47, 145 y 195 (1967)
J.^M. Meyer, Phys. Rev. 153, 1652 (1967)
M. Bander, Phys. Rev. 160, 1416 (1967)
T. L. Trueman, Phys. Rev. Lett 17, 1198 (1966).
S. Rai Choudhuri, Phys. Rev. Lett. 19, 96 (1967)
S. D. Drell, A.C. Hearn, Phys. Rev. Lett. 16, 908 (1966)
- 15) - A.H. Rosenfeld, N. Barash - Schmidt, A. Barbara Galtieri,
W. J. Podolsky, L. R. Price, P. Soding, C. G. Wohl, M. Ross
y W.J. Willis, "Data on particles and resonant states"
Publicado en el Rev. Mod. Phys. (1967)
- 16) - G. Furlan, C. Rossetti, "Dispersive sum rules from current algebra ". Lecturas dadas en el Balaton meeting (1966)
- 17) - J.S. Ball, Phys. Rev. 124, 2014 (1961)
- 18) - N.M. Kroll, M.A. Rudermann, Phys. Rev. 93, 233 (1954).
F. E. Low, Phys. Rev. 97, 1392 (1952).
- 19) - V. de Alfaro, "Dispersión sum rules in elementary particles physics". Lecturas dadas en Schladming (1967).
- 20) - S. Fubini, G. Furlan, "Renormalization effects for partially conserved current (1964)

