

**UNIVERSIDAD NACIONAL DE GENERAL SAN MARTÍN
COMISIÓN NACIONAL DE ENERGÍA ATÓMICA
INSTITUTO DE TECNOLOGÍA
“Prof. Jorge A. Sabato”**

**Ergodicidad, entropía y entrelazamiento en sistemas
multipartitos^(*)**

por Lic. Pablo D. Bergamasco

Directores

**Dr. Alejandro M. F. Rivas
Dr. Gabriel G. Carlo**

(*)Tesis para optar al título de Doctor en Ciencia y Tecnología mención Física

República Argentina

2023

Agradecimientos

Fue un largo camino transitado hasta llegar a este momento y no habría podido lograrlo sin la ayuda y el apoyo de muchas personas.

En primer lugar, a mis directores, Alejandro Rivas y Gabriel Carlo, por la infinita paciencia que me tuvieron durante estos años. Por los consejos y las innumerables charlas que hemos tenido, de las cuales me llevo muchas enseñanzas. Pero por sobre todo, por alentarme a seguir y no bajar los brazos durante este arduo proceso. He tenido dos directores que son muy buenos profesionales, pero más importante aún son muy buenas personas que buscan lo mejor para sus alumnos. Espero seguir aprendiendo de ellos en esta nueva etapa.

A mi familia, por estar presente incondicionalmente y apoyarme en todo lo que he decidido. A mis amigos, por mostrarse interesados en mis largas y tediosas explicaciones físicas.

Por último, quiero agradecerle a Flavia, la persona que elijo día a día para compartir esta vida. Sin ella probablemente no estaría viviendo este momento. Me dio fuerza en los momentos más difíciles, me alentó continuamente a perseguir mis metas. Soporto mis frustraciones, mis enojos como también mis alegrías y siempre estuvo ahí con una sonrisa o una palabra de aliento o un mate. Creo que ella tenía más confianza en mi que la que yo me tenía. Gracias por todo, te amo.

Perdón, me olvidaba de otro ser muy importante, mi gato "Dirac", que con sus maullidos, ronroneos y cabezazo siempre lograba sacarme una sonrisa en esos momentos de mucho estrés.

Resumen

En los últimos años, el interés en los out-of-time ordered correlators (OTOCs) ha experimentado un aumento significativo. Esto se debe principalmente a su capacidad para caracterizar la dinámica en sistemas de muchos cuerpos, así como en física de altas energías y gravedad cuántica. En la comunidad de caos cuántico, ha existido un enfoque constante en la búsqueda de indicadores que permitan comprender la naturaleza de la dinámica en sistemas cuánticos, similar al papel desempeñado por el exponente de Lyapunov en sistemas clásicos. El OTOC se presenta como una herramienta prometedora en este sentido. Además, el Teorema OTOC-RE ha establecido una conexión entre los OTOCs y la segunda entropía de Renyi, lo que ha aumentado aún más su interés.

A pesar de que la investigación sobre OTOCs se ha centrado principalmente en sistemas de un solo grado de libertad, existe un vacío de conocimiento sobre su comportamiento y utilidad en sistemas multipartitos. En un estudio detallado, se examinaron los OTOCs en un sistema bipartito compuesto por dos mapas de gato acoplados con dinámicas regulares o caóticas. Los resultados revelaron que el comportamiento de los OTOCs se asemeja cualitativamente a la Entropía de von Neumann, una medida global de complejidad en el espacio de fase. Esto se demostró a través de relaciones entre la Entropía de von Neumann y la Entropía Lineal, así como el Teorema OTOC-RE. En resumen, se estableció un vínculo significativo entre los OTOCs y la complejidad global del sistema.

Uno de los hallazgos clave fue que el comportamiento de los OTOCs, incluyendo su crecimiento inicial y saturación, depende en gran medida del tipo de dinámica presente en el sistema. En particular, se observó que un solo grado de libertad caótico es suficiente para que las medidas de complejidad alcancen los valores predichos por la teoría de matrices aleatorias (RMT). Sin embargo, cuando al menos uno de los grados de libertad posee una dinámica regular, el crecimiento exponencial de los OTOCs no se manifiesta en condiciones iniciales localizadas.

En un estudio adicional, se profundizó en el Teorema OTOC-RE utilizando el mismo sistema bipartito y tres bases de operadores diferentes. Se

descubrió que no todos los OTOCs contribuyen de la misma manera al promedio, lo que significa que solo una fracción menor de la base de operadores es necesaria para recuperar la Entropía Lineal. Además, se observó que el número de operadores relevantes necesarios para caracterizar la entropía lineal puede servir como un indicador alternativo de complejidad, similar al concepto de complejidad algorítmica. Estos operadores relevantes se destacaron a través de su representación en el espacio de fase, que sigue las huellas cuánticas de la evolución clásica correspondiente.

El trabajo se extendió al estudio de sistemas abiertos disipativos, centrándose en el rotor pateado disipativo y modificado (DMKRM). En este contexto, se encontró que el OTOC exhibe un rápido crecimiento seguido de un decaimiento exponencial que se relaciona estrechamente con el exponente de Lyapunov rescalado de su contraparte clásica. Aunque no se pudo extraer directamente el exponente de Lyapunov del OTOC, se identificó un comportamiento similar que se denominó “exponente Lyapunov cuántico”. Además, se demostró que el OTOC es más sensible que otras medidas de complejidad, como el Índice de Participación de Autovalores (IPR), para distinguir los regímenes dinámicos del sistema, y que la interacción entre scrambling y disipación es esencial para la complejidad en sistemas cuánticos disipativos.

En resumen, este trabajo de tesis doctoral ha avanzado significativamente en la comprensión de los OTOCs y su aplicación en sistemas bipartitos y disipativos. Los OTOCs se revelaron como una herramienta valiosa para caracterizar la complejidad y la dinámica en sistemas cuánticos, y su comportamiento se relacionó con la naturaleza de la dinámica presente en el sistema, tanto tiempos menores al tiempo de Ehrenfest como para tiempos largos. Estos hallazgos tienen implicaciones importantes en campos como la física de altas energías, la gravedad cuántica y la comprensión de sistemas multipartitos y disipativos.

Índice general

1. Introducción	7
2. Conceptos Generales	12
2.1. Caos clásico, Ergodicidad y Mixing	12
2.2. Función de Wigner	14
2.2.1. Representación de Weyl-Wigner	16
2.3. Evolución de la distribución de Liouville: Operador Perron-Frobenius	16
2.3.1. Discretización del operador Perron-Frobenius: método Ulam	18
3. Mapas hamiltonianos y disipativos	20
3.1. Mapa del Gato de Arnold	20
3.1.1. Mapas clásicos sobre el toro	20
3.1.2. Cuantización del Mapa de Gato en el Toro	21
3.2. Rotador pateado modificado con disipación	28
3.2.1. Evolución del sistema	30
3.3. Descomposición Espectral	32
4. OTOCs, complejidad y entropía en sistemas bipartitos	34
4.1. OTOCs y Entropía de Separabilidad de Wigner (WSE)	35
4.2. Resultados	37
4.3. Conclusión	43
5. Teorema OTOC-RE: OTOCs relevantes y la dinámica clásica subyacente	45
5.1. Bases de Operadores	46
5.2. Resultados	47
5.3. Conclusiones	61
6. Exponente de Lyapunov cuántico en sistemas disipativos	62
6.1. Resultados	63

6.2. Conclusión	70
7. Conclusión	74
A. Descomposición espectral del OTOC	77
B. Resultados adicionales	80
B.1. Diferentes parámetros de disipación γ	80
B.2. Independencia del estado inicial	80
B.3. Independencia de la elección de los operadores	84

Capítulo 1

Introducción

El comportamiento caótico es una propiedad de los sistemas clásicos que implica una divergencia exponencial de las trayectorias partiendo de condiciones iniciales cercanas, siendo el exponente de Lyapunov el indicador que cuantifica la velocidad de dicha divergencia.

Para tiempos suficientemente largos, es de esperar que estos sistemas exploren todo el espacio de fase, esta propiedad se denomina ergodicidad y es el ingrediente principal en el que se basa la termodinámica estadística.

Con el nacimiento de la mecánica cuántica, surgió la pregunta de si los sistemas en este nuevo marco teórico presentaban sensibilidad a las condiciones iniciales. Desde el punto de vista de la teoría de Schrödinger, el solapamiento u overlap entre dos estados inicialmente cercanos es el análogo clásico a la distancia entre órbitas cercanas y se define como,

$$d(\psi(t), \bar{\psi}(t)) = |\langle \psi(t) | \bar{\psi}(t) \rangle|^2$$

donde $\psi(t)$ y $\bar{\psi}(t)$ representan dos estados que inicialmente eran vecinos. Si escribimos estos estados en función de sus expresiones a tiempo $t = 0$, $\psi(0)$ y $\bar{\psi}(0)$, obtenemos,

$$d(\psi(t), \bar{\psi}(t)) = |\langle \psi(t) | \bar{\psi}(t) \rangle|^2 = |\langle \psi(0) | U^\dagger U | \bar{\psi}(0) \rangle|^2$$

donde U es el operador de evolución temporal del sistema y dada su unitariedad, llegamos a la siguiente igualdad,

$$d(\psi(t), \bar{\psi}(t)) = d(\psi(0), \bar{\psi}(0))$$

Esto implica que no existe sensibilidad a las condiciones iniciales en el producto interno[1] lo que sumado a la pérdida de la noción de trayectorias debido al principio de incertidumbre de Heisenberg, parece implicar que las nociones de caos y ergodicidad no se aplican en sistemas cuánticos. Por otro lado, en los sistemas cuánticos existe la propiedad de entrelazamiento, la

cual no posee contraparte clásica. Esto motivó diversos estudios respecto a la correspondencia que existe entre la descripción clásica y cuántica de los fenómenos físicos, sobre todo aquellos con un comportamiento clásico caótico.

El estudio de la correspondencia clásica - cuántica fue abordado desde dos vertientes con problemáticas y metodologías distintas. La primera de ellas está relacionada con los sistemas aislados, donde el problema principal es relacionar la evolución cuántica unitaria con la evolución determinista hamiltoniana clásica cuando $\hbar \rightarrow 0$. Si el sistema es integrable, el método WKB o en su actual versión EBK [2] provee una descripción precisa de la correspondencia entre números cuánticos y niveles de energía y entre autofunciones y toros invariantes. Para sistemas caóticos, la fórmula de trazas de Gutzwiller permite relacionar las órbitas periódicas clásicas con la densidad de estados cuánticos [3].

La segunda vertiente tiene como eje el fenómeno de decoherencia y se plantea el estudio de la correspondencia entre sistemas cuánticos abiertos y sistemas clásicos, ruidosos y/o disipativos. En este caso, la problemática se centra en la producción de entropía, el entrelazamiento cuántico, el colapso de la función de onda en el proceso de medición y en la emergencia del mundo clásico debido a la supresión de los efectos de interferencia.

En un artículo reciente [4], se plantean los esfuerzos realizados en la comprensión de las leyes de la termodinámica desde el punto de vista cuántico, en particular en sistemas de pocas partículas, donde las hipótesis de la mecánica estadística se vuelven cuestionables. Esto abre el debate a cuestiones fundamentales como por ejemplo la termalización en sistemas cuánticos de partículas interactuantes[5].

En línea con esto, Pattanayak [6] mostró la relación entre el comportamiento ergódico de los sistemas clásicos y la producción de entrelazamiento cuántico. Más recientemente, se consideró un sistema de 3 qubits superconductores [7], donde se observó una coincidencia entre regiones de alta entropía de entrelazamiento (cuántica) y la dinámica clásica caótica.

Por otro lado, en [8] estudiaron la generación de entrelazamiento como función de la dinámica clásica subyacente de una peonza pateada estándar, mostrando que pueden obtenerse valores altos de la entropía lineal de entrelazamiento aún en dinámicas regulares. Posteriormente, en [9] a partir de un modelo Toda de dos partículas interactuantes evidenciaron que los casos caóticos y regulares pueden distinguirse a partir de la generación de entrelazamiento.

Estos trabajos muestran que aun en el caso de sistemas cuánticos interactuantes de pocas partículas, los mismos alcanzan un equilibrio reflejado en la saturación de la entropía de entrelazamiento.

En trabajos anteriores [10], utilizando mapas hamiltonianos de dos grados

de libertad, en particular, mapas de gato de Arnold acoplados, estudiamos la producción de entrelazamiento en sistemas con dinámicas hiperbólicas, elípticas y mixtas. Utilizando como medidas de complejidad la entropía de separabilidad clásica (CSE)[11] y la de Wigner [12], pudimos observar en estos sistemas que la presencia de un solo grado de libertad hiperbólico es necesario para alcanzar el máximo de complejidad lo que equivale a un alto grado de entrelazamiento.

Más recientemente, en la comunidad de caos cuántico se ha visto un gran interés en los *out-of-time ordered correlators* (OTOCs) que han sido relacionados con las medidas tradicionales de caos, como la estadística espectral o similares [13, 14]. Estos correladores fueron introducidos por primera vez en el marco del estudio de superconductividad [15], donde se observó que el crecimiento exponencial de estos estaba asociado al comportamiento caótico del sistema.

El OTOC suele definirse como el valor medio de la norma del conmutador de dos operadores a diferentes tiempos,

$$C(t) = \left\langle \left[\hat{A}(t), \hat{B} \right] \left[\hat{A}(t), \hat{B} \right]^\dagger \right\rangle \quad (1.1)$$

Como hemos mencionado, en los sistemas clásicos, la forma usual de determinar si un sistema es caótico es observando si trayectorias cercanas divergen exponencialmente o no. La tasa a la que divergen está dada por lo que se conoce como exponente de Lyapunov (LE). Un exponente de Lyapunov positivo, indica que el sistema es caótico. En la Ref [16] a partir de un rotador cuántico pateado (QKR) compararon cómo se relaciona el exponente de Lyapunov con el crecimiento del OTOC cuántico y clásico. Mostraron que la tasa de crecimiento de los OTOCs difiere del LE cuando la intensidad de la patada $K < K_{cr}$, argumentando que el crecimiento del OTOC es más sensible a las islas regulares aisladas. Por otro lado, en la Ref [17], se mostró que a nivel semiclásico en un mapa de gato de un solo grado de libertad, la tasa de crecimiento del OTOC está dada por dos veces el LE. Esto lo hicieron, utilizando los operadores de posición \hat{X} y momento \hat{P} y luego aproximando semiclásicamente el conmutador de la Ec. (1.1) al corchete de Poisson de las variables q y p . Con un espíritu similar, en la Ref. [18], estudiaron el OTOC para el mapa de panadero (Baker map), donde los operadores utilizados eran proyectores. En este caso, el OTOC presenta un crecimiento exponencial pero dado por el LE, no el doble de este. Complementariamente, en la Ref. [19] y en el marco de modelos de agujeros negros, se conjeturó que esta velocidad de crecimiento está acotada superiormente por $4\pi k_B T / \hbar$.

El concepto de scrambling es muy utilizado en el contexto de información cuántica y da cuenta del proceso por el cual la información fluye de un

grado de libertad local, ej. un qubit en un estado $|a\rangle$, a uno no local, donde ese estado $|a\rangle$ ahora es compartido por múltiples qubits. Este concepto es similar al de *mixing* en sistemas clásicos caóticos. Se ha visto en diversos trabajos [20–22] que justamente el OTOC está relacionado conceptualmente a este concepto de scrambling y de entrelazamiento cuántico [10]. Es en este sentido que surge el teorema OTOC-Renyi entropy (OTOC-RE) [23, 24], el cual establece la equivalencia entre la entropía lineal S_L y el promedio de OTOCs de cuatro puntos sobre una base completa de operadores de alguna partición arbitraria del sistema. Lo notable de este teorema, es que tiende un puente entre un concepto intrínsecamente dinámico como el OTOC y uno relacionado con la teoría de la información como lo es la entropía.

En un trabajo pionero [25], propusieron una forma de obtener un exponente de Lyapunov para un sistema cuántico disipativo, pero es difícil extenderlo a otros sistemas. Sin embargo, teniendo en cuenta los antecedentes sobre sistemas cerrados que sugieren que el OTOC puede ser un buen indicador de caos, nos conduce a la pregunta de si estas características del OTOC son igualmente aplicables a sistemas cuánticos abiertos. Es decir, si este correlador es capaz de distinguir el comportamiento regular o caótico en sistemas abiertos, como lo hace el exponente de Lyapunov en el caso clásico.

En este trabajo nos centramos tanto en el estudio del OTOC para sistemas cuánticos cerrados como abiertos. En los Capítulos 2 y 3 hacemos una descripción de conceptos generales y los sistemas utilizados respectivamente. En Capítulo 4 usando mapas de gato con dos grados de libertad estudiamos el comportamiento del OTOC para las diferentes dinámicas posibles y lo comparamos con las medidas de complejidad previamente estudiadas en Ref. [10]. Encontramos que en general los OTOCs son un buen indicador de complejidad, pudiéndose relacionar con las WSE y CSE mediante el teorema OTOC-Renyi. Por otro lado, dada la importancia del Teorema OTOC-Renyi, y usando el mismo sistema, en el Capítulo 5 abordamos más en profundidad el estudio de este teorema para las distintas dinámicas y base de operadores. Algo interesante que observamos fue que la relación entre el promedio de OTOCs y la entropía lineal que plantea el teorema se cumple bastante bien para un número significativamente menor de OTOCs relevantes, es decir, no es necesario tener una base completa de operadores para lograr una buena estimación de la entropía. Más aún, los operadores que contribuyen a estos correladores relevantes son aquellos que mejor capturan la dinámica clásica subyacente en el espacio de fase.

En el Capítulo 6 extendimos el estudio del comportamiento del OTOC para sistemas abiertos disipativos, en particular consideramos el mapa de rotador pateado modificado con disipación (DMKRM) como un representante paradigmático de este tipo de sistemas y ampliamente estudiado en el área

de la dinámica no lineal. La intensidad del forzante y la disipación determinan completamente la dinámica del sistema. Un resultado relevante, en este caso, fue que no se observó crecimiento exponencial en el OTOC como en los sistemas cerrados, por el contrario, después de un cierto tiempo $t \approx 5$ el OTOC decae exponencialmente a una tasa que sigue estrechamente al exponente de Lyapunov de su contraparte clásica. Esto sugiere que la velocidad de decaimiento del OTOC captura la misma información sobre la dinámica del sistema cuántico que el exponente de Lyapunov en los sistemas clásicos. Este decaimiento depende de la intensidad del forzante y de la disipación (los parámetros K y γ respectivamente) que establecen el grado de scrambling y de los efectos ambientales. La interacción entre estos dos procesos determina el régimen de decaimiento del OTOC, que está cuantitativamente relacionado con el gap espectral del operador de evolución cuántico.

Capítulo 2

Conceptos Generales

2.1 Caos clásico, Ergodicidad y Mixing

En la mecánica clásica existen dos tipos de movimientos cualitativamente muy distintos: el movimiento regular de los sistemas integrables y el movimiento caótico de los sistemas no integrables. Una forma de distinguir ambas dinámicas es observando un grupo de trayectorias que comiencen en puntos cercanos del espacio de fase. En el caso caótico, las trayectorias se separarán exponencialmente a medida que el tiempo avance. El ritmo con el que lo hacen está dado por lo que se denomina exponente de Lyapunov, el cual se define de la siguiente forma,

$$\lambda(\mathbf{x}_o) = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \log \left(\frac{d(\mathbf{x}_o, t)}{d(\mathbf{x}_o, 0)} \right)$$

donde $d(\mathbf{x}_o, t)$ es la distancia de dos trayectorias a tiempo t . Esta propiedad de los sistemas caóticos se conoce como sensibilidad a las condiciones iniciales.

En el caso regular, por otro lado, las trayectorias se separarán a un ritmo dado por una potencia, pero nunca de forma exponencial. Para estos casos, el exponente de Lyapunov es nulo.

Además del exponente de Lyapunov, otra forma de determinar que un sistema es caótico o no es mediante la entropía métrica o entropía K-S (Kolmogorov - Sinai). Esta medida puede considerarse como un número que mide la tasa de creación de información a medida que evoluciona una órbita caótica[26]. Esto puede verse de la siguiente forma:

Si en el espacio de fase podemos distinguir dos órbitas con cierta precisión, y suponiendo que inicialmente estas dos trayectorias están a una distancia inferior a nuestro límite de detección, a medida que el sistema evolucione y debido a la divergencia exponencial de las órbitas, llegará un momento en que seremos capaces de distinguir las. Asumiendo que conocemos exactamente las ecuaciones que rigen la dinámica del sistema y que podemos calcularlas para

una dada órbita, nuestras observaciones a tiempos futuros nos permitirían, en principio, determinar las condiciones iniciales con mas precisión. Es en este sentido que decimos que las órbitas caóticas crean información. [26].

La relación entre la entropía K-S, $h(\mu)$ y el exponente de Lyapunov, λ_i , esta dada por la siguiente expresión,

$$h(\mu) = \sum_{\lambda_i > 0} \lambda_i$$

La suma es sobre los exponentes de Lyapunov positivos. Esta expresión, dada por Pesin (1976), se aplica a los sistemas hamiltonianos típicos, donde la medida de interés es solo la fracción de volumen de una región ergódica caótica.

Existen sistemas fuertemente caóticos, por ejemplo los mapas hiperbólicos que preservan el área, entre los cuales se encuentra el mapa de gato con el que trabajaremos a lo largo de esta tesis. Estos sistemas tienen la propiedad de mixing. Para ilustrar esta característica, consideremos un área A de nuestro espacio de fase, la cual se deformará con las sucesivas aplicaciones del mapa. Que sea mixing significa que tomando cualquier región \mathcal{R} del espacio de fase, la fracción que ocupa la parte de A dentro de esta región \mathcal{R} , es igual a la fracción que ocupa toda el área A sobre todo el espacio de fase.

Más formalmente, dado un mapa \mathcal{M} sobre un espacio compacto S , es mixing en S si dados dos subconjuntos σ y σ' de S , donde σ y σ' tienen medidas de Lebesgue positivas ($\mu_L(\sigma) > 0$, $\mu_L(\sigma') > 0$, entonces[26]

$$\frac{\mu_L(\sigma)}{\mu_L(S)} = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{\mu_L(\sigma' \cap \mathcal{M}^t(\sigma))}{\mu_L(\sigma')}$$

Además, que un sistema sea mixing implica que es ergódico, es decir, tenderá a ocupar todo el espacio de fase transcurrido un tiempo suficientemente largo. Por otro lado, si es ergódico, entonces se cumple el teorema de Birkhoff, lo cual implica que dada cualquier función integrable $f : S \rightarrow \mathbb{R}$, su promedio espacial sobre el espacio de fase es igual a su promedio temporal:

$$\int f d\mu_L = \frac{1}{T} \int_0^T f(x) dt$$

para $T \rightarrow \infty$ y donde x es cualquier punto en S con excepción de un conjunto de medida cero.

La ergodicidad tiene un papel central en la fundamentación de la mecánica estadística. En el contexto Gibbsiano, la importancia es doble. Por un lado, permite justificar la elección de un ensamble microcanónico para representar el estado de equilibrio termodinámico, donde la función de distribución $\rho(x)$

es constante en toda la región del espacio de fase accesible al sistema. Por otro lado, interviene en la evolución hacia el equilibrio, debido a que es necesario que el sistema sea mixing y por lo tanto ergódico, para producir un aumento de la entropía termodinámica.[27].

2.2 Función de Wigner

En mecánica clásica es muy frecuente la utilización de un espacio de fase para estudiar el movimiento de una partícula. Si esta se mueve en una dimensión, dicho espacio de fase será una representación bidimensional cuyos ejes son la posición de la partícula y su momento. Si quisiéramos realizar una comparación entre un sistema cuántico y uno clásico, sería de mucha utilidad contar con una representación similar en la mecánica cuántica. La función de Wigner nos permite justamente representar un estado, dado por una matriz densidad, en un espacio de fase.

Originalmente, la función de Wigner fue definida para sistemas con espacio de fase continuos, posteriormente Wootters[28] propuso una expresión para espacios de fase discretos. En esta sección introduciremos inicialmente la función de Wigner continua y sus propiedades más importantes. Mencionaremos la expresión para el caso discreto sin entrar en detalle de su deducción, la cual puede verse en[28][29].

La función de Wigner para un espacio de fase continuo se define como:

$$W(q, p) = \frac{1}{\pi\hbar} \int \langle q - x | \hat{\rho} | q + x \rangle e^{2ipx/\hbar} dx \quad (2.1)$$

donde q y p son la posición y el momento respectivamente y los estados están en la representación de posición. Las propiedades más importantes de la función de Wigner son:

1. $W(q, p)$ es una función real
2. Está normalizada $\int W(q, p) dq dp = 1$
3. Dados dos estados $\hat{\rho}$ y $\hat{\rho}'$, el producto interno puede calcularse a partir de sus respectivas funciones de Wigner como:

$$Tr(\hat{\rho}\hat{\rho}') = 2\pi\hbar \int \int W(q, p)W'(q, p) dq dp \quad (2.2)$$

4. La integral de la función de Wigner en una franja del espacio de fase comprendida entre las rectas $aq + bp = c_1$ y $aq + bp = c_2$ ($a, b, c_1, c_2 \in \mathbb{R}$)

es igual a la probabilidad que el observable $a\hat{q} + b\hat{p}$ se encuentre entre los valores c_1 y c_2 .

Una consecuencia de esta última propiedad es que: $\int W(q, p)dq$ es la distribución de probabilidades de momentos y $\int W(q, p)dp$ es la distribución de probabilidades de posiciones.

Respecto a la última propiedad, no debe interpretarse la función de Wigner como distribución de probabilidades sobre los puntos del espacio de fase debido a que no es definida positiva. Por ejemplo, la función de Wigner de la superposición de dos estados coherentes será una función que oscilará entre valores positivos y negativos debido a las interferencias entre los estados.

Cuando nuestro espacio de fase es discreto, necesitamos una nueva expresión de la función de Wigner que se adecue al nuevo escenario. En [28], Wootters realiza un desarrollo completo donde obtiene una expresión para la función de Wigner discreta a partir de los llamados «operadores de punto». Por otro lado, en [29] realizan un procedimiento similar, obteniendo la función de Wigner discreta dada por la ecuación (2.3),

$$W(q, p) \equiv \frac{1}{2N} \sum_{n=0}^{N-1} \langle q - n | \hat{\rho} | n \rangle \exp \left\{ i \frac{2\pi}{N} n(p - q/2) \right\} \quad (2.3)$$

Las propiedades de la función de Wigner discreta son análogas a las del caso continuo,

1. $W(q, p)$ es una función real
2. Está normalizada $\sum_{\alpha} W_{\alpha} = 1$ con $\alpha = (q, p)$
3. Dadas las funciones de Wigner W_{α} y W'_{α} correspondientes a las matrices densidad $\hat{\rho}$ y $\hat{\rho}'$, entonces:

$$Tr(\hat{\rho}\hat{\rho}') = N \sum_{\alpha} W_{\alpha} W'_{\alpha} \quad (2.4)$$

4. La suma de la función de Wigner a lo largo de una línea λ del espacio de fase, debe ser igual a la probabilidad de obtener en una medición el valor correspondiente a un proyector asociado a esa línea $P(\lambda)$

$$p_{\lambda} = Tr(\hat{\rho}P(\lambda)) = \sum_{\alpha \in \lambda} W_{\alpha} \quad (2.5)$$

2.2.1 Representación de Weyl-Wigner

Entre todas las representaciones de la mecánica cuántica, la representación de Weyl-Wigner permite una descomposición de los operadores que actúan en el espacio de Hilbert \mathcal{H} en la base generada por \hat{R}_x , conjunto de operadores unitarios de reflexión en el punto $x \equiv (q, p)$ [30, 31] en un espacio de fase compacto $2d$ -dimensional $\Omega = \Omega' \oplus \Omega''$. Estos operadores de reflexión son ortogonales en el siguiente sentido,

$$\text{Tr} \left[\hat{R}_{\mathbf{x}_a} \hat{R}_{\mathbf{x}_b} \right] = (2\pi\hbar)^d \delta(\mathbf{x}_b - \mathbf{x}_a). \quad (2.6)$$

A partir de esto, cualquier operador que actúe sobre el espacio de Hilbert \mathcal{H} puede ser unívocamente descompuesto en términos de los operadores de reflexión de la siguiente forma,

$$\hat{A} = \left(\frac{1}{2\pi\hbar} \right)^d \int d\mathbf{x} A_W(\mathbf{x}) \hat{R}_x. \quad (2.7)$$

Con esta descomposición al operador \hat{A} se le asigna unívocamente una función $A_W(x)$, la cual vive en Ω , un espacio de fase compacto $2d$ -dimensional. A esta función se la conoce con el nombre de símbolo de Weyl-Wigner del operador. Usando la ecuación (2.6) podemos obtener una expresión para la función $A_W(x)$

$$A_W(\mathbf{x}) = \text{Tr} \left[\hat{R}_x \hat{A} \right].$$

La función de Wigner que introdujimos anteriormente es un caso particular de un símbolo de Weyl-Wigner, donde el operador asociado es el operador densidad $\hat{\rho}$. Con este nuevo formalismo, la función de Wigner se define como:

$$W(\mathbf{x}) = (2\pi\hbar)^{-d/2} \rho(\mathbf{x}) = (2\pi\hbar)^{-d/2} \text{Tr} \left[\hat{R}_x \hat{\rho} \right]. \quad (2.8)$$

Donde a partir de las propiedades de normalización del operador densidad obtenemos nuevamente las propiedades:

$$\int d\mathbf{x} W(\mathbf{x}) = \text{Tr}(\hat{\rho}) = 1, \quad \text{mientras que} \quad \int d\mathbf{x} W^2(\mathbf{x}) = \|\hat{\rho}\|.$$

2.3 Evolución de la distribución de Liouville: Operador Perron-Frobenius

En los mapas clásicos que estuvimos exponiendo en lo que va de este trabajo, uno puede representar los estados como puntos en un espacio de

fase. Entonces, a distintos tiempos t_n , uno obtiene una nueva colección de puntos que representan las nuevas posiciones y momentos producto de la evolución del sistema. Existe una forma alternativa para representar estos estados y es a partir de la densidad de Liouville $\rho(\mathbf{x}, t)$.

Dada una densidad ρ , debemos saber cómo evoluciona en el tiempo. Tomamos una densidad inicial ρ_0 , en una región \mathcal{E}_i del espacio de fase a tiempo $t = 0$. Dado el sistema $\mathbf{x}_t = \mathbf{f}(\mathbf{x}_{t-1})$, si evolucionamos a un tiempo t , la región \mathcal{E}_i se transforma en $\mathbf{f}^t(\mathcal{E}_i)$. Como no hay creación o destrucción de las trayectorias, es decir, todos los puntos en \mathcal{E}_i son mapeados a $\mathbf{f}^t(\mathcal{E}_i)$, las densidades en estos puntos deben cumplir,

$$\int_{\mathbf{f}^t(\mathcal{E}_i)} d\mathbf{x}\rho(\mathbf{x}, t) = \int_{\mathcal{E}_i} d\mathbf{x}\rho(\mathbf{x}_0, t) \quad (2.9)$$

El lado izquierdo de la expresión anterior podemos ponerlo en función de \mathbf{x}_0 sabiendo que $\mathbf{x} = \mathbf{f}^t(\mathbf{x}_0)$,

$$\int_{\mathcal{E}_i} d\mathbf{x}_0\rho(\mathbf{f}^t(\mathbf{x}_0), t) |\det J^t(\mathbf{x}_0)| = \int_{\mathcal{E}_i} d\mathbf{x}\rho(\mathbf{x}_0, t) \quad (2.10)$$

donde la matriz Jacobiana o Jacobiano se define como,

$$J(\mathbf{x}) = \begin{vmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1}(x) & \frac{\partial f_1}{\partial x_2}(x) & \dots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n}(x) \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1}(x) & \frac{\partial f_2}{\partial x_2}(x) & \dots & \frac{\partial f_2}{\partial x_n}(x) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f_n}{\partial x_1}(x) & \frac{\partial f_n}{\partial x_2}(x) & \dots & \frac{\partial f_n}{\partial x_n}(x) \end{vmatrix} \quad (2.11)$$

El determinante del Jacobiano en un dado punto nos brinda información importante del comportamiento de \mathbf{f} en la cercanía de ese punto. Además, el valor absoluto de este, nos indica el factor por el cual la función \mathbf{f} expande o contrae el volumen cerca del punto \mathbf{x} .

Por lo tanto, la densidad $\rho(\mathbf{x}, t)$ cambia en el tiempo inversamente proporcional al Jacobiano, es decir, cambia inversamente con el volumen infinitesimal ocupado por las trayectorias

$$\rho(\mathbf{x}, t) = \frac{\rho(\mathbf{x}_0, t)}{|\det J^t(\mathbf{x}_0)|} \quad \text{con } x = \mathbf{f}^t(\mathbf{x}_0) \quad (2.12)$$

La ecuación (2.12) podemos escribirla en el lenguaje de operadores de la siguiente forma,

$$\rho(\mathbf{x}, t) = (\mathcal{P}^t \circ \rho)(\mathbf{x}) = \int_{\mathcal{E}} d\mathbf{x}_0 \delta(\mathbf{x} - \mathbf{f}^t(\mathbf{x}_0)) \rho(\mathbf{x}_0, t) \quad (2.13)$$

Definimos al operador integral con el núcleo dado por la ecuación (2.13), como el operador *Perron-Frobenius*:

$$\mathcal{P}^t(\mathbf{y}, \mathbf{x}) = \delta(\mathbf{y} - \mathbf{f}^t(\mathbf{x})) \quad (2.14)$$

El operador Perron-Frobenius conecta la densidad $\rho(\mathbf{y}, t)$ a tiempo t con la densidad $\rho(\mathbf{x}, 0)$ a tiempo $t = 0$. Este operador posee las siguientes propiedades:

- $\mathcal{P}^0 = I$
- $\mathcal{P}^t \mathcal{P}^{t'} = \mathcal{P}^{t+t'}$

2.3.1 Discretización del operador Perron-Frobenius: método Ulam

Uno de los métodos más usados para obtener una discretización del operador Perron-Frobenius es el método de Ulam [32]. Este método consiste en lo siguiente:

Tomemos $\{\mathcal{B}_1, \dots, \mathcal{B}_k\} \subset \mathcal{B}$ una partición que cubre el espacio de fase \mathcal{E} con medida μ , compuesta por un número finito de cajas disjuntas. Definimos $\mathbb{I}_{\mathcal{B}_i}$ una función indicadora de la caja \mathcal{B}_i tal que,

$$\mathbb{I}_{\mathcal{B}_i}(x) = \begin{cases} 1, & \text{si } x \in \mathcal{B}_i \\ 0, & \text{otro caso} \end{cases}$$

El método de Ulam es una proyección Galerkin del operador Perron-Frobenius en el subespacio generado por la función indicadora [33], es decir,

$$\int \mathbb{I}_{\mathcal{B}_j} \cdot \mathcal{P} \mathbb{I}_{\mathcal{B}_i} d\mu = \int (\mathbb{I}_{\mathcal{B}_j} \circ f) \cdot \mathbb{I}_{\mathcal{B}_i} d\mu = \int \mathbb{I}_{f^{-1}(\mathcal{B}_j)} \cdot \mathbb{I}_{\mathcal{B}_i} d\mu \quad (2.15)$$

$$= \mu(f^{-1}(\mathcal{B}_j) \cap \mathcal{B}_i) \quad (2.16)$$

Por lo tanto, podemos expresar el operador discreto como una matriz $P = (p_{ij}) \in \mathbb{R}^{k \times k}$, tal que,

$$p_{ij} = \frac{\mu(f^{-1}(\mathcal{B}_j) \cap \mathcal{B}_i)}{\mu(\mathcal{B}_i)}$$

donde el denominador $\mu(\mathcal{B}_i)$ normaliza los elementos p_{ij} .

Los elementos p_{ij} pueden ser vistos como la probabilidad de ser mapeado de la casilla \mathcal{B}_i a la \mathcal{B}_j por la acción del sistema f .

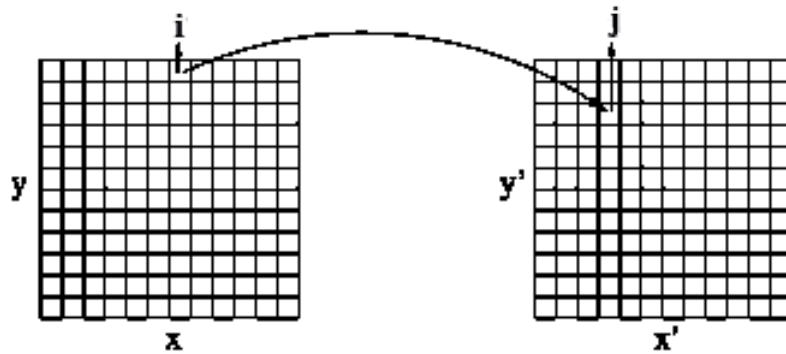


Figura 2.1: Ilustración del método de Ulam: el espacio de fase (x, y) es dividido en $N_x \times N_y$. Una fracción m de los n puntos que inicialmente estaban en la celda i fueron a la casilla j luego de la iteración del mapa. Por lo tanto, el elemento de matriz $p_{ij} = m/n$

El método numérico para obtener los elementos p_{ij} , consiste en discretizar el espacio de fase en $N_x \times N_y$ casilleros, como muestra la figura 2.1 y partiendo de una gran cantidad de puntos $x_1 \cdots x_n$ ubicados en la casilla i -ésima. Aplicando el sistema dinámico $x' = f(x)$, lo que hará que estos puntos, en general, evolucionen a otras casillas. Contamos la cantidad de puntos que alcanzaron la casilla j -ésima habiendo partido de la casilla i -ésima y dividiéndola por la cantidad total de puntos n , obtenemos el elemento de matriz p_{ij} .

Capítulo 3

Mapas hamiltonianos y disipativos

3.1 Mapa del Gato de Arnold

3.1.1 Mapas clásicos sobre el toro

Los mapas que preservan el área proveen una forma simple y precisa de visualizar y cuantificar el comportamiento de sistemas conservativos. Una de sus principales ventajas es que pueden ser fácilmente implementados computacionalmente y nos permiten estudiar con precisión el comportamiento caótico.

En particular, en este trabajo, nos centraremos en los «Cat Maps» o «Mapa de Gato», los cuales son un automorfismo lineal del toro que pueden exhibir una dinámica regular o totalmente caótica. Por otro lado, el teorema de Anosov establece que los mapas hiperbólicos (caóticos) son estructuralmente estables, es decir, si perturbamos ligeramente estos sistemas, las nuevas órbitas son conjugadas a las del mapa sin perturbar por un homeomorfismo [34].

La ecuación (3.1) define un mapa de gato perturbado sobre un 2-Toro,

$$\begin{pmatrix} q_{t+1} \\ p_{t+1} \end{pmatrix} = \mathcal{M} \begin{pmatrix} q_t \\ p_t + \epsilon(q_t) \end{pmatrix} \text{ mod } 1 \quad (3.1)$$

donde $q \in \mathbb{R}$ y $p \in \mathbb{R}$ son tomados módulo 1 y \mathcal{M} es una matriz de 2×2 con elementos enteros y $\det(\mathcal{M}) = 1$ permitiendo de esta forma preservar la continuidad y el área. Si elegimos \mathcal{M} tal que $Tr(\mathcal{M}) > 2$ el mapa resultante es hiperbólico y, por lo tanto, su dinámica es caótica. Por otro lado, eligiendo \mathcal{M} tal que $|Tr(\mathcal{M})| < 2$, el mapa que obtenemos es elíptico y su dinámica regular.

En todo este trabajo, los mapas con los que trabajaremos estarán definidos por las siguientes matrices,

- Caso Hiperbólico: $\mathcal{M}_H = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$
- Caso Elíptico: $\mathcal{M}_E = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$

Consideraremos, tanto para el mapa elíptico como hiperbólico, una perturbación dada por la siguiente expresión,

$$\epsilon(q_t) = -\frac{K}{2\pi} \sin(2\pi q_t) \quad (3.2)$$

El agregado de una pequeña perturbación tiene como finalidad remover ciertas simetrías y las degeneraciones en el espectro y de esta forma obtener una estadística espectral genérica para el mapa de gato compatible con la teoría de matrices aleatorias[34, 35]. De acuerdo al teorema de Anosov [36], el mapa de gato es *estructuralmente estable*, lo cual significa que todo difeomorfismo ϕ suficientemente cercano a un mapa de gato A es conjugado a A mediante algún homeomorfismo H , es decir, $\phi = H \circ A \circ H^{-1}$. Si el mapa A es ligeramente perturbado como en nuestro caso, el nuevo mapa es topológicamente igual y preserva todas las propiedades caóticas del mapa sin perturbar, en particular la inestabilidad de las órbitas[37]. Es importante mencionar que en [38] hemos estudiado los valores de K para los cuales se mantiene la estabilidad de los autovalores tanto para el caso hiperbólico como elíptico.

3.1.2 Cuantización del Mapa de Gato en el Toro

Para obtener la versión cuántica del mapa de gato debemos construir las funciones de onda permitidas dadas las condiciones de contorno que impone la geometría toroidal del espacio de fase y luego derivar el operador unitario que permite la evolución temporal de los estados.

Las traslaciones actuando en un espacio de fase se llevan a cabo como una transformación $L^2(\mathbb{R})$ que pertenece a una representación irreducible unitaria del grupo Weyl-Heisenberg[39],

$$\text{Grupo Weyl-Heisenberg} \ni (\phi, q, p) \rightarrow T(\phi, q, p) = e^{-\frac{i}{\hbar}\phi} \underbrace{e^{-\frac{i}{\hbar}p\hat{Q}-q\hat{P}}}_{\equiv \hat{D}(z)} \quad (3.3)$$

donde ϕ es una fase, que a nuestros fines podemos considerarla nula, mientras que \hat{Q} y \hat{P} son los operadores de posición y momento respectivamente.

Un toro de dos dimensiones \mathbb{T}^2 es el producto cartesiano de dos círculos $\mathbb{T}^2 = S^1 \times S^1$. Este también puede ser considerado como el producto Cartesiano de dos cosets:

$$\mathbb{T}^2 = \mathbb{R}/a\mathbb{Z} \times \mathbb{R}/b\mathbb{Z} = \mathbb{R}^2/\Gamma \quad (3.4)$$

donde Γ es la grilla $\Gamma = \{(ma, nb), (m, n) \in \mathbb{Z}^2\}$. Su topología es la del producto cartesiano de dos intervalos semiabiertos:

$$\mathbb{T}^2 = [0, a) \times [0, b) = \{(q, p), 0 \leq q < a, 0 \leq p < b\}$$

La variable q puede ser asociada con la posición, mientras que p podría ser el momento. En este sentido, el toro es un espacio de fase o variedad simpléctica equipada con la 2-forma $w = dq \wedge dp$ y la medida normalizada $\mu = \frac{dqdp}{ab}$

Adaptar el formalismo de Weyl-Heisenberg al espacio de fase toroidal, $\mathbb{T}^2 = \mathbb{R}^2/\Gamma$, nos permite pedir condiciones de contorno periódicas tanto en q como en p , es decir, esperamos que el operador traslación actúe sobre cualquier estado de la siguiente forma [39],

$$T(a, 0) |\psi\rangle = e^{-ik_1 a} |\psi\rangle \quad T(0, b) |\psi\rangle = e^{-ik_2 b} |\psi\rangle \quad (3.5)$$

donde $T(a, 0)$ y $T(0, b)$ son los operadores de traslación en q y p respectivamente. Los valores de k_1 y k_2 son tales que,

$$(k_1, k_2) \in [0, \frac{2\pi}{a}) \times [0, \frac{2\pi}{b}) \quad (3.6)$$

los cuales definen el espacio toroidal recíproco \mathcal{T}^2 . En nuestro caso, tomaremos los valores $k_1 = 0$ y $k_2 = 0$ sin pérdida de generalidad.

Las condiciones (3.5) indican que el estado $|\psi\rangle$ debe ser autoestado tanto del operador $T(a, 0)$ como $T(0, b)$, por lo tanto, [39],

$$\begin{aligned} T(a, 0)T(0, b) |\psi\rangle &= T(0, b)T(a, 0) |\psi\rangle \\ &= e^{\frac{i}{\hbar}ab} T(a, 0)T(0, b) |\psi\rangle \end{aligned} \quad (3.7)$$

$$\Rightarrow ab = 2\pi\hbar N \text{ con } N \in \mathbb{N} \quad (3.8)$$

La última igualdad, resulta de haber aplicado la regla de conmutación de Weyl $e^{inQ}e^{imP} = e^{-i\hbar nm}e^{imP}e^{inQ}$, con $n = -\frac{i}{\hbar}b$ y $m = -\frac{i}{\hbar}a$.

Tomando un espacio de fase de área unidad, $ab = 1$, de acuerdo a la ecuación (3.8), nos queda $\hbar = \frac{1}{2\pi N}$. Por lo tanto, el límite semiclásico $\hbar \rightarrow 0$ corresponde a $N \rightarrow \infty$ con b y a fijos[40].

Veamos ahora que para que se cumplan las condiciones de periodicidad impuestas, las funciones de onda deben ser «peines» de deltas de Dirac.

Renombrando $a = \Delta q$ y Δp para una mejor identificación con el espacio de fase y sabiendo que las condiciones de periodicidad imponen que $\langle q|\psi\rangle = \langle q + \Delta q|\psi\rangle$ y $\langle p|\psi\rangle = \langle p + \Delta p|\psi\rangle$, la función de onda permitida en la fase de momentos toma la siguiente forma[41]:

$$\begin{aligned}
\langle p|\psi\rangle &= \int dq \langle p|q\rangle \langle q|\psi\rangle \\
&= \int dq \langle p|q\rangle \langle q + \Delta q|\psi\rangle \\
&= \int dq' \langle p|q' - \Delta q\rangle \langle q'|\psi\rangle \\
&= \int dq' e^{-ip(q' - \Delta q)} \langle q'|\psi\rangle \\
&= e^{-ip\Delta q} \int dq' \langle p|q'\rangle \langle q'|\psi\rangle \\
&= e^{-ip\Delta q} \langle p|\psi\rangle
\end{aligned}$$

Esta igualdad es cierta si $\langle p|\psi\rangle$ toma el valor cero cuando $p\Delta q \neq 2\pi n$. En otras palabras, $\langle p|\psi\rangle$ es una serie de deltas de Dirac equiespaciadas,

$$\langle p|\psi\rangle = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \phi_n \delta\left(p - \frac{2\pi n}{\Delta q}\right) \quad (3.9)$$

Un procedimiento similar conduce a lo mismo para la función de onda en la representación de posición $\langle q|\psi\rangle$.

En el proceso de cuantización, la naturaleza de los estados cambia sustancialmente. En el caso clásico tenemos un continuo de puntos en un espacio de fase bidimensional, mientras que en el caso cuántico, los estados disponibles son representados por un vector en un espacio de Hilbert N-dimensional. El módulo al cuadrado de las componentes de este vector en la representación de posición corresponde a la probabilidad de encontrar a la partícula en cada una de las posiciones discretas. Por otro lado, la representación en momento de este estado se relaciona con la representación en posición a través de la transformada discreta de Fourier.

El paso siguiente para lograr la cuantización del mapa es obtener el operador unitario que permita evolucionar los estados. La dinámica de cualquier estado cuántico está gobernada por la ecuación de Schrödinger,

$$\frac{d}{dt} |\Psi\rangle = -\frac{i}{\hbar} H |\Psi\rangle \quad (3.10)$$

Esta ecuación puede ser integrada para obtener el estado a todo tiempo $|\Psi\rangle$

$$|\Psi(t)\rangle = e^{-\frac{i}{\hbar} \int^t H dt} |\Psi\rangle = U(t)\Psi \quad (3.11)$$

donde U es un operador unitario, cuyos elementos de matriz $\langle q_j | U | q_k \rangle$ representan la transición de la posición discreta q_j a la q_k .

Consideremos primero un operador U actuando sobre un espacio de fase plano. Debido a que el mapa que intentamos cuantizar es lineal, la expresión semiclásica, dado por el propagador de Van Vleck, es exacta [42],

$$\langle q_j | U | q_k \rangle = (-1)^r \left(i \frac{\partial^2 S}{\partial q_j \partial q_k} \right)^{1/2} e^{\frac{i}{\hbar} S(q_j, q_k)} \quad (3.12)$$

donde $S(q_j, q_k)$ es la acción a lo largo de una única trayectoria clásica que conecta los puntos q_j y q_k y para un mapa lineal su expresión es cuadrática [43] en q_j y q_k , tal como se muestra en la ecuación (3.13),

$$S(q_j, q_k) = \frac{1}{2} (S_{11} q_j^2 + S_{12} q_j q_k + S_{22} q_k^2) \quad (3.13)$$

A partir de las relaciones clásicas $p_j = -\partial S / \partial q_j$ y $p_k = \partial S / \partial q_k$, podemos relacionar los momentos iniciales y finales con las posiciones iniciales y finales, quedando como resultado la ecuación (3.14)

$$\begin{pmatrix} -p_j \\ p_k \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} S_{11} & S_{12} \\ S_{12} & S_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} q_j \\ q_k \end{pmatrix} \quad (3.14)$$

Nuestro mapa clásico está definido a partir de la ecuación (3.15)

$$\begin{pmatrix} q_k \\ p_k \end{pmatrix} = M \begin{pmatrix} q_j \\ p_j \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} M_{11} & M_{12} \\ M_{21} & M_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} q_j \\ p_j \end{pmatrix} \text{ mod } 1 \quad (3.15)$$

la cual relaciona las posiciones y momentos iniciales (q_j, p_j) con las posiciones y momentos finales (q_k, p_k) . Utilizando la ecuación (3.14) y (3.15) obtenemos los elementos de la matriz S a partir de los valores de la matriz M . Este resultado se expresa en la ecuación (3.16)

$$\begin{pmatrix} S_{11} & S_{12} \\ S_{12} & S_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{M_{11}}{M_{12}} & -\frac{1}{M_{12}} \\ -\frac{1}{M_{12}} & \frac{M_{22}}{M_{12}} \end{pmatrix} \quad (3.16)$$

A partir de acá, podemos evaluar el operador U dado por la ecuación (3.12), sobre el toro. En la evaluación de U , la amplitud de la transición de $q_j \rightarrow q_k$ es la suma de todas las transiciones de las posiciones iniciales equivalentes del toro, $q_j = j/N + m$ a todas las posiciones finales equivalentes

$q_k = k/N + m'$, donde j, k, m y m' son enteros. Los $j, k \in [0, N)$, representan la posición en una grilla de $N \times N$ y los m y m' recorren las demás posiciones equivalentes debido a la simetría toroidal del espacio de fase.

Este paso en el caso cuántico no es trivial, debido principalmente a que el estado en la representación de posición está constituido por infinitas deltas de Dirac. Además, debido a que estamos trabajando en una geometría toroidal, debemos mantener un seguimiento de las fases que se agregan a las trayectorias al propagarse sitios equivalentes de la red, lo que lleva a que la función de onda interfiera consigo misma.

Usando la ecuación (3.12), la suma sobre todas las coordenadas iniciales q_1 está dada por la ecuación (3.17), cuya normalización fue derivada por los autores en [43],

$$U_{jk} = \sqrt{\frac{iM_{12}}{N}} \left\langle \exp \left\{ \left[\frac{i\pi}{NM_{12}} M_{11}(j + mN)^2 - 2(j + mN)k + M_{22}k^2 \right] \right\} \right\rangle_m \quad (3.17)$$

Aquí los paréntesis angulares $\langle \dots \rangle_m$ denotan un promedio sobre los valores de m . La exponencial es una oscilación Gaussiana en m , el mismo Gauss evaluó este promedio, el cual puede encontrarse en numerosos libros de teoría de números [44–46]. La principal dificultad es encontrar el signo de este promedio. Siguiendo el procedimiento dado en [43], lo que necesitamos evaluar es un promedio del tipo

$$\left\langle \exp \left[\frac{i\pi}{b} (am^2 + cm) \right] \right\rangle_m \quad (3.18)$$

donde a y b son enteros coprimos. Además, este promedio es cero a menos que c sea un entero. De hecho, es distinto de cero si y solo si $(ab + c)$ es un entero par.

$$\langle \dots \rangle_m = \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{b}} \binom{a}{b} \exp \left[\frac{-i\pi}{4} (b-1) \right] \exp \left[\frac{-i\pi a}{b} (a \setminus b)^2 \left(\frac{c}{2} \right)^2 \right], & b \text{ impar y } a, c \text{ pares} \\ \frac{1}{\sqrt{b}} \binom{b}{a} \exp \left[\frac{i\pi a}{4} \right] \exp \left[\frac{-i\pi a}{b} (a \setminus b)^2 \left(\frac{c}{2} \right)^2 \right], & a \text{ impar y } b, c \text{ pares} \\ \frac{1}{\sqrt{b}} \binom{a}{b} \exp \left[\frac{i\pi a}{4} \right] \exp \left[\frac{-i\pi 4a}{b} (4a \setminus b)^2 (c^2) \right], & a, b \text{ y } c \text{ impares} \\ 0, & \text{en otro caso} \end{cases} \quad (3.19)$$

Aquí $\binom{a}{b}$ es el símbolo del signo de Jacobi, el cual toma los valores ± 1 , mientras que $(a \setminus b)$ es un entero tal que cumple la siguiente ecuación:

$$a \cdot (a \setminus b) \equiv 1 \pmod{b}$$

Para poder utilizar la Ec. (3.19) debemos extraer todos los factores independientes de m en la expresión de U_{jk} , lo que nos queda:

$$U_{jk} = \sqrt{\frac{iM_{12}}{N}} \exp \left\{ \left[\frac{i\pi}{NM_{12}} (M_{11}j^2 - 2jk + M_{22}k^2) \right] \right\} \left\langle \exp \left[\frac{i\pi}{M_{12}} (NM_{11}m^2 + 2(M_{11}j - k)m) \right] \right\rangle_m \quad (3.20)$$

Aplicando la solución al $\langle \dots \rangle_m$ planteada en la Ec. (3.19) obtenemos el propagador del mapa (ver detalles en [43]):

$$U_{jk} = A \exp \left[\frac{i\pi}{NM_{12}} (M_{11}j^2 - 2jk + M_{22}k^2) \right] \quad (3.21)$$

donde,

$$A = \left(\frac{1}{iNM_{12}} \right)^{1/2}$$

Este método de cuantización planteado en [43] solo es útil si la matriz \mathcal{M} de la Ec. (3.1) es de la forma:

$$\begin{pmatrix} \text{par} & \text{impar} \\ \text{impar} & \text{par} \end{pmatrix} \text{ o } \begin{pmatrix} \text{impar} & \text{par} \\ \text{par} & \text{impar} \end{pmatrix} \quad (3.22)$$

Como es el caso de las matrices de interés

$$\mathcal{M}_H = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} \text{ y } \mathcal{M}_E = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$$

con las que trabajaremos en toda esta tesis.

De esta forma, obtuvimos el operador U que permite evolucionar el estado a tiempo t a un tiempo $t + 1$. Por lo tanto, partiendo de un estado inicial $|\Psi_0\rangle$ podemos obtener el estado de tiempo $t = n$ aplicando sucesivamente el operador U , tal como expresa la ecuación (3.23)

$$|\Psi_n\rangle = U^n |\Psi_0\rangle \quad (3.23)$$

El operador evolución es periódico $U^l = \mathbb{I}$ y sus autovalores son de la forma:

$$\exp \left(\frac{i(2\pi k + \phi)}{l} \right) \quad (3.24)$$

con $1 \leq k \leq l$. El problema surge debido a que $l < N$ y, por lo tanto, algunos autovalores necesariamente están degenerados. Pero además, l depende de N

y en promedio la cantidad de autoestados degenerados aumenta lentamente en el límite semiclásico ($N \rightarrow \infty$), lo que hace que el mapa de gato no pertenezca a ninguna clase de universalidad, como los ensambles circulares ortogonales y unitarios (COE) y (CUE) respectivamente por sus siglas en inglés, o los ensambles Gaussianos (GOE) y (GUE). Como hemos mencionado en la Sec. 3.1.1, agregando una perturbación, evitamos esto y se consigue que el mapa sea genérico[34].

Es importante notar que en la ecuación (3.1) la perturbación está aplicada sobre la componente de momento, esto se conoce como perturbación de tipo cizalla. Lo bueno de este tipo de perturbación es que la aproximación semiclásica sigue siendo exacta[34]. De hecho, la función generatriz del mapa perturbado no es más que $S(q, p) = S_{sp}(q, p) + S_p(q)$, donde S_{sp} y S_p son las funciones generatrices del mapa sin perturbar y de la perturbación respectivamente. Por lo tanto, el operador unitario es,

$$U_{jk} = A \exp \left[\frac{i\pi}{NM_{12}} (M_{11}j^2 - 2jk + M_{22}k^2) + i2\pi N S_p(q) \right] \quad (3.25)$$

Para obtener S_p recurrimos nuevamente a las relaciones $p = \partial S / \partial q$ pero tomando como p a la perturbación $\epsilon(q)$. Por consiguiente, para la perturbación propuesta en la Ec. (3.2), obtenemos la siguiente función generatriz,

$$S_p(q) = \frac{K}{4\pi^2} \cos(2\pi q) \quad (3.26)$$

Es necesario que S_p tenga periodo 1, de otra forma el propagador de la perturbación es nulo[34]. Llevando a cabo el mismo procedimiento de cuantización que en el caso sin perturbar, obtenemos la expresión para el operador unitario del mapa perturbado,

$$U_{jk} = A \exp \left[\frac{i\pi}{NM_{12}} (M_{11}j^2 - 2jk + M_{22}k^2) + \frac{iKN}{2\pi} \cos \left(2\pi \frac{j}{N} \right) \right] \quad (3.27)$$

Para un sistema de dos grados de libertad, debemos considerar que tenemos dos mapas acoplados, lo que define un espacio de fase de 4 dimensiones con coordenadas (q^1, q^2, p^1, p^2) ,

$$\begin{pmatrix} q_{t+1}^1 \\ p_{t+1}^1 \end{pmatrix} = M_1 \begin{pmatrix} q_t^1 \\ p_t^1 + \epsilon(q_t^1) + \kappa(q_t^1, q_t^2) \end{pmatrix} \text{ mod } (1) \quad (3.28)$$

y

$$\begin{pmatrix} q_{t+1}^2 \\ p_{t+1}^2 \end{pmatrix} = M_2 \begin{pmatrix} q_t^2 \\ p_t^2 + \epsilon(q_t^2) + \kappa(q_t^1, q_t^2) \end{pmatrix} \text{ mod } (1) \quad (3.29)$$

Donde el acoplamiento entre ambos mapas esta dado por una función periódica en las coordenadas q_i de cada mapa, con la siguiente expresión,

$$\kappa(q_t^1, q_t^2) = -\frac{K_c}{2\pi} \sin(2\pi q_t^1 + 2\pi q_t^2)$$

Nuevamente, siguiendo el proceso de cuantización detallado anteriormente, obtenemos el correspondiente propagador U del sistema de dos grados de libertad. Este está dado por el producto tensorial de los operadores de cada mapa junto con una matriz de acomplamiento, dando como resultado una matriz unitaria de $N^2 \times N^2$,

$$U_{j_1, j_2, k_1, k_2}^{2D} = U_{j_1, k_1} U_{j_2, k_2} C_{j_1, j_2} \quad (3.30)$$

donde C es dicha matriz de acoplamiento, la cual es diagonal en la representación de coordenadas y está dada por,

$$C_{j_1, j_2} = \exp \left\{ \left(\frac{iNK_c}{2\pi} \right) \cos \left[\frac{2\pi}{N} (j_1 + j_2) \right] \right\} \quad (3.31)$$

Para todos los casos, hemos trabajado con $K = 0,25$ y $K_c = 0,5$, parámetros que aseguran que estemos trabajando en las condiciones del teorema de Anosov [47]).

3.2 Rotador pateado modificado con disipación

La manifestación del caos en sistemas Hamiltonianos es bastante diferente a como se presenta en sistemas abiertos, en particular en sistemas disipativos. Nuestro propósito es extender el estudio del OTOC a estos sistemas abiertos y comprender cómo este correlador puede darnos información sobre la dinámica. Para esto, trabajaremos con el *Dissipative Modified Kicked Rotator map* (DMKRM), el cual corresponde al movimiento de una partícula en una dimensión [$q \in (-\infty, \infty)$] a la cual se le aplica una "patada" periódicamente, dada por el potencial:

$$V(q, t) = k \left[\cos(q) + \frac{a}{2} \cos(2q + \phi) \right] \sum_{m=-\infty}^{\infty} \delta(t - m\tau), \quad (3.32)$$

donde k es la intensidad de la patada y τ su periodo. Agregando disipación, obtenemos[48]

$$\bar{n} = \gamma n + k[\sin(q) + \sin(2q + \phi)] \quad \bar{q} = q + \tau \bar{n}, \quad (3.33)$$

donde n (\bar{n}) es el momento, variable conjugada a q (\bar{q}) antes (después) de la patada y γ ($0 \leq \gamma \leq 1$) es el parámetro de disipación. Con $\gamma = 1$ recuperamos el sistema conservativo, mientras que $\gamma = 0$ corresponde al sistema sobreamortiguado. Normalmente, el momento rescalado $p = \tau n$ y la cantidad $K = \tau k$ son introducidos con el fin de simplificar las expresiones. Tomamos $a = 0,5$ y $\phi = \pi/2$, los cuales están relacionados con las simetrías espacio-temporal del sistema y en particular esos valores nos proporcionan un rico paisaje dinámico adecuado para nuestra investigación.

Para cuantizar el modelo, seguimos el procedimiento estándar $q \rightarrow \hat{q}$ y $n \rightarrow \hat{n} = -i(d/dq)$ ($\hbar = 1$). Dado esto $[\hat{q}, \hat{p}] = i\tau$ (donde $\hat{p} = \hat{n}$), definimos la constante de Planck efectiva identificando $\hbar_{\text{eff}} = \tau$. En el límite clásico, $\hbar_{\text{eff}} \rightarrow 0$ y $K = \hbar_{\text{eff}} k$ permanece constante.

En los sistemas cuánticos cerrados, en la representación de Schrödinger la evolución del sistema está determinada por la ecuación de von Neumann para el operador densidad,

$$\dot{\rho} = -\frac{i}{\hbar}[H, \rho] \quad (3.34)$$

que en el caso de que ρ represente un estado puro, es el equivalente a la ecuación de Schrödinger para la función de onda. En el caso de los sistemas disipativos, la forma usual de expresar la evolución del sistema es a través de la ecuación de Lindblad,

$$\dot{\rho} = -\frac{i}{\hbar}[H_s, \rho] + \sum_{\nu} \left(L_{\nu} \rho L_{\nu}^{\dagger} - \frac{1}{2} \{L_{\nu}^{\dagger} L_{\nu}, \rho\} \right) \quad (3.35)$$

donde $H_s = \hat{n}^2/2 + V(\hat{q}, \tau)$ es el Hamiltoniano del sistema, $\{ , \}$ el anti-conmutador y L_{ν} son un conjunto de operadores conocidos como *operadores de salto* que caracterizan la disipación del sistema. Estos describen cómo el entorno interactúa con el sistema.

Es importante resaltar que esta descripción solo es válida si la evolución del sistema cuántico es *Markoviana*, es decir, *local* en el tiempo. Debido a la interacción entre el sistema y el entorno siempre existirán algunas correlaciones entre ambos, por lo tanto, tener una descripción Markoviana exacta es imposible. Sin embargo, podemos obtener una muy buena aproximación a este escenario si la escala de tiempo de estas correlaciones (τ_{corr}) y de la relajación del entorno (τ_{ent}) son mucho menores al tiempo característico de nuestra dinámica (τ_{sis}). De esta forma, podemos asumir que el entorno siempre estará en equilibrio y desacoplado de nuestro sistema [49].

En la representación de Heisenberg, la evolución de cualquier operador B que vive en el espacio de Hilbert del sistema, está determinada por una

expresión similar,

$$\dot{\hat{B}} = i[\hat{H}_s, \hat{B}] - \frac{1}{2} \sum_{\nu} \{\hat{L}_{\nu}^{\dagger} \hat{L}_{\nu}, \hat{B}\} + \sum_{\nu} \hat{L}_{\nu}^{\dagger} \hat{B} \hat{L}_{\nu} \equiv \mathcal{L}(\hat{B}), \quad (3.36)$$

Como hemos mencionado, la forma en la que el sistema interactúa con el entorno, está representada en los \hat{L}_{ν} , donde para este caso están dados por,

$$\begin{aligned} \hat{L}_1 &= g \sum_n \sqrt{n+1} |n\rangle \langle n+1| \\ \hat{L}_2 &= g \sum_n \sqrt{n+1} |-n\rangle \langle -n-1|, \end{aligned} \quad (3.37)$$

La elección de estos operadores se debe a que las ecuación de Ehrenfest son semejantes a Ec. (3.33) y por lo tanto, dan una buena descripción de un sistema sujeto a fricción [50]. El efecto de estos operadores es Donde la suma se efectua sobre la base de momento $\{|n\rangle\}$ con $n = 0, 1, \dots, N$, siendo N la base del espacio de Hilbert y $g = \sqrt{-\ln \gamma}$ [51, 52].

3.2.1 Evolución del sistema

Si pensamos a la evolución de la matriz densidad ρ dada por la ecuación Ec. (3.35) como la aplicación de un superoperador sobre ρ , podemos escribir,

$$\dot{\rho} = \mathcal{L}(\rho) \quad (3.38)$$

integrando entre t y $t+1$ para obtener el estado después de la aplicación del mapa, obtenemos,

$$\rho_{t+1} = \Lambda \rho_t \quad (3.39)$$

Conocer Λ para una evolución general y continua no es una tarea fácil. Sin embargo, los mapas son una visión estroboscópica de la dinámica del sistema, es decir, observamos el estado del sistema a intervalos discretos de tiempo, es decir, $t \in \mathbb{N}$ y representa el número de pasos del mapa. En el caso del DMKRM, nos interesa analizar el sistema inmediatamente después de cada aplicación del forzante o *patada*. Esto tiene la desventaja de que no tenemos información de la evolución del sistema entre estos intervalos de tiempo, pero, ganamos libertad en poder descomponer el mapa en subsecuentes submapas, actuando uno a continuación del otro. Esto podemos resumirlo escribiendo la ecuación Ec. (3.39) como,

$$\rho_{t+1} = \Lambda \rho_t = [\Lambda_{free} \Lambda_{pot} \Lambda_d] \rho_t \quad (3.40)$$

donde Λ_{free} es el mapa asociado a la evolución libre, Λ_{pot} el correspondiente al potencial y por último, Λ_d es el mapa debido a la disipación del sistema y esta dado por los términos que contienen los operadores de Lindblad en la Ec. (3.35).

Como hemos mencionado, cada submapa se aplica a continuación del otro, matemáticamente podemos expresarlo de la siguiente forma,

$$\rho' = \Lambda_d \rho_t$$

luego

$$\rho'' = \Lambda_{pot} \rho' = e^{-iV(q)} \rho' e^{iV(q)}$$

y finalmente

$$\rho_{t+1} = \Lambda_{free} \rho'' = e^{-i\frac{\hat{n}^2}{2}} \rho'' e^{i\frac{\hat{n}^2}{2}}$$

Si subdividimos el intervalo de integración entre cada paso del mapa, es decir, entre t y $t + 1$, en pequeños intervalos δt , podemos trabajar con la ecuación Ec. (3.35) a primer orden en δt , lo que nos lleva a,

$$\rho_{t+\delta t} \approx \left[\sum_{\nu} \left(L_{\nu} \rho_t L_{\nu}^{\dagger} - \frac{1}{2} \{ L_{\nu}^{\dagger} L_{\nu}, \rho_t \} \right) \right] \delta t \quad (3.41)$$

Repitiendo el procedimiento $M = (\delta t)^{-1}$ veces obtenemos la disipación en el tiempo $t + 1$. A este resultado le sigue la aplicación de los otros dos submapas dados por Λ_{free} y Λ_{pot} , obteniéndose así el estado del sistema ρ_{t+1} a $t + 1$.

Si trabajamos en la representación de Heisenberg, debido a que se emplea la ecuación adjunta, se deben aplicar los superoperadores en orden inverso, es decir, la evolución de un operador B se obtiene siguiendo el siguiente procedimiento,

$$\hat{B}_{t+1} = \Lambda \hat{B}_t = [\Lambda_d \Lambda_{pot} \Lambda_{free}] \hat{B}_t \quad (3.42)$$

donde ahora

$$\hat{B}' = \Lambda_{free} \hat{B}_t = e^{i\frac{\hat{n}^2}{2}} \hat{B}_t e^{-i\frac{\hat{n}^2}{2}}$$

luego

$$\hat{B}'' = \Lambda_{pot} \hat{B}' = e^{iV(q)} \hat{B}' e^{-iV(q)}$$

y finalmente aplicamos el efecto de la disipación subdividiendo nuevamente el paso del mapa en $M = (\delta t)^{-1}$ intervalos de tamaño δt

$$\hat{B}_{t+\delta t} = \Lambda_d^{(\delta t)} \hat{B}_t'' = \left[\frac{1}{2} \sum_{\nu=1}^2 \{ \hat{L}_{\nu}^{\dagger} \hat{L}_{\nu}, \hat{B}_t'' \} + \sum_{\nu=1}^2 \hat{L}_{\nu}^{\dagger} \hat{B}_t'' \hat{L}_{\nu} \right] \delta t$$

obteniendo así,

$$\hat{B}_{t+1} = \underbrace{\Lambda_d^{(\delta t)} \dots \Lambda_d^{(\delta t)}}_{M \text{ veces}} \hat{B}_t'' = \Lambda_d \hat{B}_t''$$

Teniendo la evolución para cada paso del mapa, podemos escribir la evolución total desde un tiempo $t = 0$ a un tiempo t discreto como la aplicación sucesiva del superoperador Λ , es decir,

$$\hat{B}(t) = e^{\mathcal{L}t} \hat{B}(0) = \Lambda^t \hat{B}(0) \quad (3.43)$$

Así como obtuvimos la evolución para un operador \hat{B} , podemos hacer lo mismo para el operador \hat{B}^\dagger

$$(\dot{\hat{B}})^\dagger = \left(i[\hat{H}_s, \hat{B}] - \frac{1}{2} \sum_{\nu=1}^2 \{ \hat{L}_\nu^\dagger \hat{L}_\nu, \hat{B} \} + \sum_{\nu=1}^2 \hat{L}_\nu^\dagger \hat{B} \hat{L}_\nu \right)^\dagger \quad (3.44)$$

$$= -i[\hat{H}_s, \hat{B}]^\dagger - \frac{1}{2} \sum_{\nu=1}^2 \left(\{ \hat{L}_\nu^\dagger \hat{L}_\nu, \hat{B} \} \right)^\dagger + \sum_{\nu=1}^2 \left(\hat{L}_\nu^\dagger \hat{B} \hat{L}_\nu \right)^\dagger \quad (3.45)$$

$$= i[\hat{H}_s, \hat{B}^\dagger] - \frac{1}{2} \sum_{\nu=1}^2 \{ \hat{L}_\nu^\dagger \hat{L}_\nu, \hat{B}^\dagger \} + \sum_{\nu=1}^2 \hat{L}_\nu^\dagger \hat{B}^\dagger \hat{L}_\nu \quad (3.46)$$

$$= \mathcal{L}(\hat{B}^\dagger) \quad (3.47)$$

donde se usó que $\hat{H}_s^\dagger = \hat{H}_s$. Esto implica que evolucionar el operador \hat{B} y luego transponer y conjugar es igual a evolucionar \hat{B}^\dagger , es decir,

$$\dot{\hat{B}}^\dagger = \left(\dot{\hat{B}} \right)^\dagger = \left(\mathcal{L} \hat{B} \right)^\dagger = \mathcal{L} \hat{B}^\dagger \quad (3.48)$$

3.3 Descomposición Espectral

El superoperador \mathcal{L} admite una descomposición espectral, aunque al no ser en general hermítico, tendrá autovalores complejos, σ_i y autovectores a derecha e izquierda, R_i y L_i respectivamente. Por lo tanto, podemos escribir,

$$\mathcal{L} = \sum \sigma_i |R_i\rangle\rangle \langle\langle L_i| \quad (3.49)$$

donde $|R_i\rangle\rangle$ y $\langle\langle L_i|$ son los autovectores de \mathcal{L} escritos de forma vectorizada. Por otro lado, cuando escribamos R_i y L_i estaremos asumiendo que están en forma matricial.

Donde se cumple que:

$$\mathcal{L}R_i = \sigma_i R_i \quad \mathcal{L}R_i^\dagger = \sigma_i^* R_i^\dagger \quad (3.50)$$

$$\mathcal{L}^\dagger L_i = \sigma_i^* L_i \quad \mathcal{L}^\dagger L_i^\dagger = \sigma_i L_i^\dagger \quad (3.51)$$

El producto interno está dado por $\langle\langle A|B\rangle\rangle = \text{Tr}(A^\dagger B)$ y para los autovectores de \mathcal{L} se cumple $\text{Tr}(L_i^\dagger R_j) = \text{Tr}(L_i^\dagger R_j^\dagger) = \text{Tr}(L_i R_j) = \delta_{ij}$

Con todo esto y usando la relación 3.48, es fácil demostrar por qué R_i^\dagger tiene asociado el autovalor σ_i^* :

$$\mathcal{L}R_i^\dagger = (LR_i)^\dagger = (\sigma_i R_i)^\dagger = \sigma_i^* R_i^\dagger \quad (3.52)$$

Podemos escribir la descomposición espectral de $\lambda = \exp(\mathcal{L})$ de la siguiente forma:

$$\Lambda = \sum \exp(\sigma_i) |R_i\rangle\rangle \langle\langle L_i| = \sum \lambda_i |R_i\rangle\rangle \langle\langle L_i| \quad (3.53)$$

donde $\lambda_i = \exp(\sigma_i)$

Capítulo 4

OTOCs, complejidad y entropía en sistemas bipartitos

El OTOC se define usualmente como,

$$C(t) = \left\langle \left[\hat{A}(t), \hat{B} \right] \left[\hat{A}(t), \hat{B} \right]^\dagger \right\rangle \quad (4.1)$$

donde, $\langle \cdot \rangle = \text{Tr}(\cdot)/N$ es el promedio térmico del producto de conmutadores entre dos operadores a diferentes instantes de tiempo, con N la dimensión del espacio de Hilbert.

En las investigaciones llevadas a cabo en los últimos años, muestran al OTOC como una buena medida para caracterizar la dinámica en sistemas cuánticos y distinguir si son caóticas o regulares. Sin embargo, la mayoría fue hecha sobre sistemas de un solo grado de libertad. Una pregunta relevante es si en sistemas bipartitos con diferentes dinámicas el OTOC es capaz de distinguir estos escenarios, de la forma que sí lo hacen otras medidas de complejidad como la Entropía de Separabilidad de Wigner (WSE)[10].

Utilizando un sistema que consiste de dos mapas de gato acoplados y perturbados con diferentes dinámicas: ambos mapas hiperbólicos (caóticos) (HH), ambos elípticos (regular) (EE) y un caso mixto (no en el sentido de Kolmogorov, Arnold, Moser (KAM) donde coexisten órbitas periódicas y regiones caóticas en el mismo espacio de fase) donde uno de los mapas es hiperbólico y el otro elíptico (HE) [53], mostramos que el comportamiento del OTOC es comparable con la WSE, llegando a la conclusión que el OTOC es una buena medida de complejidad, donde tanto el crecimiento inicial como el valor al que satura dan información sobre la dinámica. Esta conexión, la establecemos a partir del Teorema OTOC-Entropía de Renyi (OTOC-RE), cuyo teorema estudiaremos en más detalle en el siguiente capítulo.

4.1 OTOCs y Entropía de Separabilidad de Wigner (WSE)

En la Ec. (4.1) hemos definido esos correladores de la forma comúnmente encontrada en la literatura, es decir, llevando a cabo el promedio del producto de conmutadores de dos operadores, uno de los cuales evoluciona con el tiempo en la forma de Heisenberg, sobre un estado con temperatura infinita, $\rho = \mathbb{I}/N$ (promedio térmico). Para nuestro propósito, donde investigamos el comportamiento para diferentes clases de dinámicas en cada subsistema, es preferible calcular el valor de expectación sobre un dado estado inicial, de la misma manera que hemos hecho anteriormente para calcular las entropías WSE y Entropía de Separabilidad Clásica (CSE) del espacio de fase [10]. Esto se consigue tomando $\langle \cdot \rangle = \text{Tr}(\rho \cdot)$, donde ρ es la matriz densidad de un estado inicial similar a un estado clásico, que tomamos como un estado coherente.

Por otro lado, existe libertad en la elección de los operadores \hat{A} y \hat{B} . Como hemos mencionado, podemos tomar \hat{X} y \hat{P} para asociarlos formalmente con un crecimiento exponencial dado por el exponente de Lyapunov; sin embargo, también consideraremos $\hat{B} = \rho(0)$, el operador de densidad del estado inicial. El mapa de gato está definido en el toro y, por lo tanto, utilizamos una aproximación de los operadores de posición y momento en el límite clásico que hace uso de los operadores de desplazamiento de Schwinger[54]

$$\hat{V} = \sum_{q \in \mathbb{Z}_N} |q+1\rangle\langle q|, \quad \hat{U} = \sum_{q \in \mathbb{Z}_N} |q\rangle\langle q| \exp\left(i \frac{2\pi q}{N}\right) \quad (4.2)$$

a partir de los cuales podemos escribir los operadores de posición y momento para cada subsistema, de la siguiente forma,

$$\hat{X} = \frac{\hat{U} - \hat{U}^\dagger}{2i}, \quad \hat{P} = \frac{\hat{V} - \hat{V}^\dagger}{2i} \quad (4.3)$$

Estos operadores se pueden extender rápidamente al caso del sistema bipartito con dos grados de libertad mediante el producto tensorial de operadores actuando sobre cada subsistema (etiquetados como 1 y 2)

$$\hat{X}^{2D} = \hat{X}^1 \otimes \hat{X}^2, \quad \hat{P}^{2D} = \hat{P}^1 \otimes \hat{P}^2 \quad (4.4)$$

Es importante mencionar que cuando los operadores \hat{A} y \hat{B} son Hermíticos, el OTOC definido en la Ec. (4.1) puede ser expresado como diferencia de correladores

$$C(t) = -2[C_4(t) - C_2(t)]/N \quad (4.5)$$

donde $C_2(t) = \text{Tr}[\hat{A}^2(t)\hat{B}^2]$ (correlador de 2 puntos) y $C_4(t) = \text{Tr}[\hat{A}(t)\hat{B}\hat{A}(t)\hat{B}]$ (correlador de 4 puntos). Además, cuando $\hat{B} = \rho(0)$ correspondiente a un estado puro, la operación $\text{Tr}(\rho \cdot)$ es equivalente a $\text{Tr}(\cdot)/2$, haciéndola similar a $N/2$ veces el valor de espectación sobre un estado con temperatura infinita,

$$\begin{aligned} \text{Tr}\left(\rho\left[\hat{A}, \hat{B}\right]\left[\hat{A}, \hat{B}\right]^\dagger\right) &= \text{Tr}\left(\rho\hat{A}\hat{B}^2\hat{A}\right) - \text{Tr}\left(\rho\hat{A}\hat{B}\hat{A}\hat{B}\right) - \text{Tr}\left(\rho\hat{B}\hat{A}\hat{B}\hat{A}\right) \\ &\quad + \text{Tr}\left(\rho\hat{B}\hat{A}^2\hat{B}\right) \end{aligned}$$

donde se asumió que \hat{A} y \hat{B} son hermíticos. Si hacemos $\hat{B} = \rho$, la expresión anterior se puede reducir aún más teniendo en cuenta que ρ y por consiguiente \hat{B} son idempotentes y usando la propiedad cíclica de la traza,

$$\begin{aligned} \text{Tr}\left(\rho\left[\hat{A}, \hat{B}\right]\left[\hat{A}, \hat{B}\right]^\dagger\right) &= \text{Tr}\left(\hat{B}\hat{A}\hat{B}\hat{A}\right) - \text{Tr}\left(\hat{B}\hat{A}\hat{B}\hat{A}\right) - \text{Tr}\left(\hat{B}\hat{A}\hat{B}\hat{A}\right) \\ &\quad + \text{Tr}\left(\rho\hat{B}^2\hat{A}^2\right) = -[C_4(t) - C_2(t)] \\ &= \frac{\text{Tr}\left(\left[\hat{A}, \hat{B}\right]\left[\hat{A}, \hat{B}\right]^\dagger\right)}{2} \end{aligned}$$

Ahora, explicaremos brevemente las definiciones y propiedades de las WSE y CSE. Un buen análogo a la distribución de Liouville en la mecánica clásica está dada por las distribuciones de Wigner $W(\mathbf{x})$ en el espacio de fase, definida en la Sec. 2.2.1.

Como trabajamos con dos mapas de gato acoplados, cada uno definido en su propio espacio de Hilbert, \mathcal{H}_1 y \mathcal{H}_2 , el espacio de Hilbert del sistema completo es $\mathcal{H} = \mathcal{H}_1 \otimes \mathcal{H}_2$. Por lo tanto, la descomposición de Schmidt del operador densidad del sistema completo está dada por

$$\hat{\rho} = \sum \sigma_n \hat{a}_n \otimes \hat{b}_n \quad (4.6)$$

donde $\{\hat{a}_n\}$ y $\{\hat{b}_n\}$ son bases ortonormales para los espacios de operadores de Hilbert-Schmidt $B(\mathcal{H}_1)$ y $B(\mathcal{H}_2)$ respectivamente. Teniendo en cuenta que la función de Wigner es el símbolo de Weyl-Wigner de la matriz densidad, su descomposición de Schmidt (valores singulares) es,

$$W(x) = \sum_n \sigma_n a_n(x_1) b_n(x_2) \quad (4.7)$$

donde $\{a_n\}$ y $\{b_n\}$ son ahora bases ortonormales para $L^2(\Omega_1)$ y $L^2(\Omega_2)$ (los cuales están asociados a la descomposición del espacio de Hilbert), tales que

$$a_n(x_1) = \text{Tr}[\hat{R}_{x_1}\hat{a}_n], \quad b_n(x_2) = \text{Tr}[\hat{R}_{x_2}\hat{b}_n] \quad (4.8)$$

donde $x_i = (q_i, p_i)$ son coordenadas en cada mapa.

La entropía WSE es definida en [12] como

$$h[W] = - \sum_n \tilde{\sigma}_n^2 \ln \tilde{\sigma}_n^2 \quad \text{con} \quad \tilde{\sigma}_n \equiv \frac{\sigma_n}{\sqrt{\int dx W^2(x)}} \quad (4.9)$$

La WSE $h[W]$ provee una medida de la separabilidad de la función de Wigner con respecto a una dada descomposición del espacio de fase. Una de las principales propiedades de la WSE es que su análogo clásico es la CSE (o entropía-s) $h[\rho_c]$ definida en la Ref [11], donde es usada una distribución clásica discretizada del espacio de fase en lugar de la función de Wigner $W(x)$. Esto permite poner en pie de igualdad el mundo clásico y cuántico. Es importante mencionar que para un estado cuántico puro $\hat{\rho} = |\psi\rangle\langle\psi|$, $h[W] = -2S_{vN}(\hat{\rho}_1) = -2S_{vN}(\hat{\rho}_2)$, donde $\hat{\rho}_1 = \text{Tr}_2(\hat{\rho})$ y $\hat{\rho}_2 = \text{Tr}_1(\hat{\rho})$ son las matrices densidad reducidas para el subsistema 1 y 2, mientras que S_{vN} es la entropía de von Neumann, la cual, en este contexto, cuantifica el entrelazamiento E de $|\psi\rangle$,

$$E(|\psi\rangle) = S_{vN}(\hat{\rho}_1) = S_{vN}(\hat{\rho}_2) \quad (4.10)$$

y por lo tanto, para estados puros la WSE es el doble de la *entropía de entrelazamiento* $E(|\psi\rangle)$,

$$h[W] = 2E(|\psi\rangle) \quad (4.11)$$

4.2 Resultados

Investigar el comportamiento del OTOC para diferentes dinámicas y compararlo con las medidas de complejidad previamente mencionadas, son los objetivos que nos hemos planteado en este capítulo. Para llevarlos a cabo, hemos investigado la evolución de los OTOCs de la misma manera que en la Ref. [10], esto es, hemos evaluado sus comportamientos para tres diferentes dinámicas. El estado inicial (puro) es contruido colocando un estado coherente en cada toro, ambos centrados en $(q, p) = (0,5, 0,5)$, siendo éste un punto fijo tanto para el mapa hiperbólico como elíptico. Primero, consideramos el caso doblemente elíptico (EE). En la Fig. 4.1 se muestra la evolución de dos OTOCs uno con $\hat{A} = \hat{X}^{2D}$ y $\hat{B} = \hat{P}^{2D}$ y el otro con el mismo operador \hat{A}

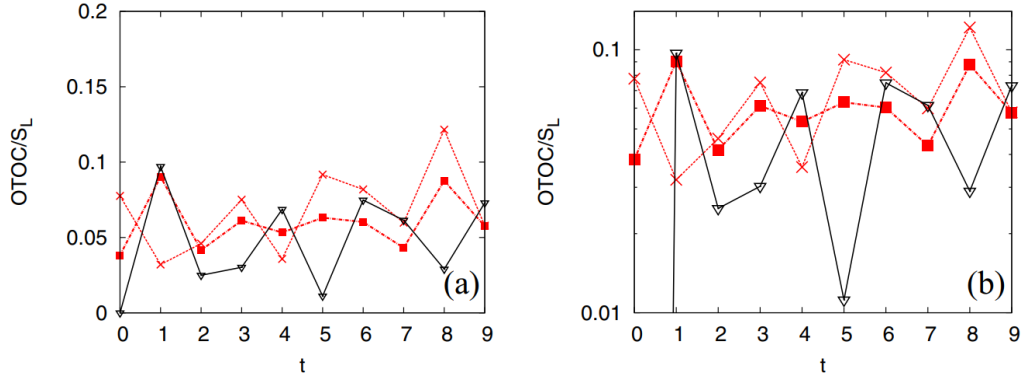


Figura 4.1: (a) Evolución de la entropía lineal S_L (línea sólida negra con triángulos hacia abajo) y OTOC reescalados para $\hat{A} = \hat{X}^{2D}$ con $\hat{B} = \hat{P}^{2D}$ (línea discontinua roja con cruces) y $\hat{B} = \hat{\rho}(0)$ (línea discontinua roja con cuadrados), en función del tiempo t (pasos de tiempo del mapa). Aquí $N = 2^6$, para el caso del mapa EE con el estado coherente inicial centrado en $(q, p) = (0, 5, 0, 5)$. (b) Versión log-lineal

pero tomando $\hat{B} = \hat{\rho}(0)$, como función del tiempo (discreto). También se puede ver la evolución de la entropía lineal $S_L = 1 - \text{Tr}(\rho_{1,2}^2)$, la cual es una aproximación lineal de la entropía de von Neumann S_{vN} . Se ve claramente el mismo comportamiento cualitativo, que refleja la falta de crecimiento de la complejidad debido a la naturaleza de la dinámica de ambos mapas. Se observan las mismas pequeñas oscilaciones en todas las medidas, lo que refleja rotaciones en las distribuciones que aún permanecen localizadas[10]. Es importante aclarar que las similitudes encontradas son en el comportamiento promedio. En la Fig. 4.1 ambos OTOCs han sido puesto en la misma escala que la entropía lineal S_L (y en todas las siguientes figuras) para poder compararlos adecuadamente. En la Fig. 4.1(b) se muestra la versión log-lineal, donde no se identifica un crecimiento inicial exponencial para este caso.

En el caso EE, si bien la dinámica no es ergódica, si el estado inicial es ubicado en otro punto del espacio de fase fuera de una órbita de periodo 1, este explora una mayor región del espacio de fase, lo cual se refleja en un crecimiento tanto del OTOC como de S_L como puede apreciarse en la Fig. 4.3, de forma análoga a lo que se observa en [10] para la WSE. Al igual que para la WSE, la Fig. 4.3(b) muestra que ni el OTOC ni la S_L presentan un crecimiento exponencial inicial. Además, si observamos la Fig. 4.2, la cual corresponde a la distribución de Wigner para este caso, vemos que alrededor de $t \approx 10$ comienzan a desarrollarse coherencias, reflejándose en que tanto el OTOC como la S_L frenen su crecimiento y saturan en promedio, en un

valor determinado. Las fluctuaciones presentes en el OTOC se explicarán más adelante en este capítulo.

En los casos anteriores, ambos mapas poseían una dinámica regular y observamos que tanto el OTOC como la S_L se comportaban cualitativamente similar, inclusive pudiendo detectar si el estado inicial estaba o no sobre una órbita de periodo 1. Ahora, incorporamos una dinámica caótica en uno de los mapas y por consiguiente tenemos el caso mixto HE. Para este escenario, los resultados son mostrados en la Fig. 5.3, donde nuevamente se observa cualitativamente un buen acuerdo entre la entropía lineal y el comportamiento de los OTOCs. El crecimiento es más lento para los correladores que para S_L en los primeros pasos de tiempo, pareciéndose más al caso de la entropía de von Neumann S_{vN} , como veremos más adelante. Al igual que en los casos doblemente elíptico, el crecimiento exponencial inicial está ausente como puede verse en la Fig. 4.4(b). Sin embargo, se observa que los OTOCs saturan al igual que la entropía, mostrando que los OTOCs detectan las principales características de este escenario con dinámica mixta, de la misma forma que se observó en la WSE.

Finalmente, consideramos el caso caso doblemente hiperbólico (HH) con un estado inicial localizado en $(q, p) = (0,5, 0,5)$ (Fig. 4.5), el cual también se ha sido considerado en la Ref [55] recientemente. Nuevamente, el acuerdo entre los OTOCs y la S_L es remarcable, en particular para el caso $\hat{B} = \hat{\rho}(0)$ es extremadamente bueno. En este caso y debido a la dinámica ergódica del sistema, el valor de saturación se alcanza en un tiempo mucho menor ($t \approx 4$) que en el caso HE ($t \approx 200$). Otra diferencia sustancial, es que si observamos la Fig. 4.5(b), podemos identificar un crecimiento inicial de tipo exponencial en total concordancia con estudios previos. Es importante resaltar, que en ambos casos, HH y HE, el OTOC y S_L , alcanzan el mismo valor de saturación, el cual además viene dado por la teoría de matrices aleatorias (RMT). Esto, nos brinda una conclusión importante, *Solo un grado de libertad hiperbólico es suficiente para alcanzar la máxima complejidad*, algo que también se observó en [10] con la WSE.

Esto nos lleva a formular la siguiente pregunta: ¿Cómo puede explicarse esta llamativa similitud entre dos cantidades aparentemente diferentes, una proveniente de un análisis global del espacio de fase y la otra de una correlación relacionada con una interpretación semiclásica basada en la dinámica local? Una posible respuesta podemos conseguirla a través del llamado teorema OTOC-RE [23, 24]. Este establece una equivalencia entre la suma de OTOCs (de hecho, la suma de los correlacionadores de cuatro puntos en los que se puede dividir la OTOC cuando los operadores son hermitianos) sobre una base completa de operadores de uno de los subsistemas (donde el operador que no evoluciona es el estado inicial $\hat{\rho}(0)$) y la exponencial de la segunda

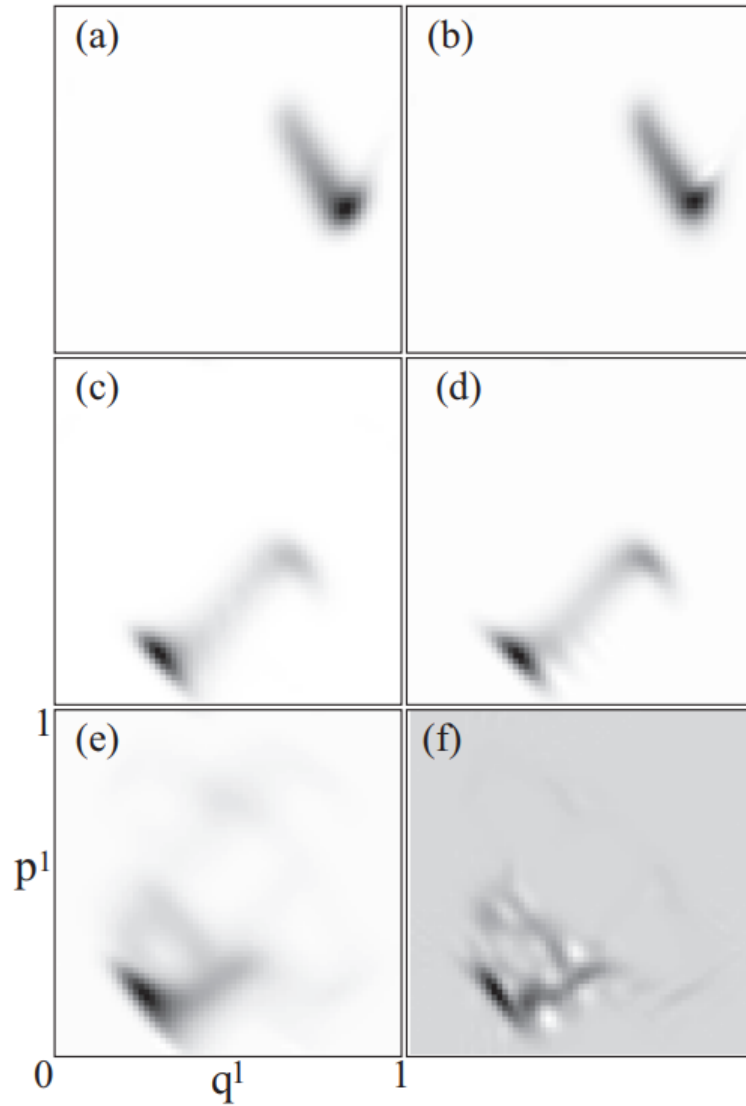


Figura 4.2: Distribuciones de Liouville y de Wigner a tiempo $t = 8$ ((a) y (b)), $t = 11$ ((c) y (d)) y $t = 50$ ((e) y (f)) para el caso EE con condiciones iniciales centradas en $(q, p) = (\pi/4, \pi/4)$. Imagen extraída de [10, 38]

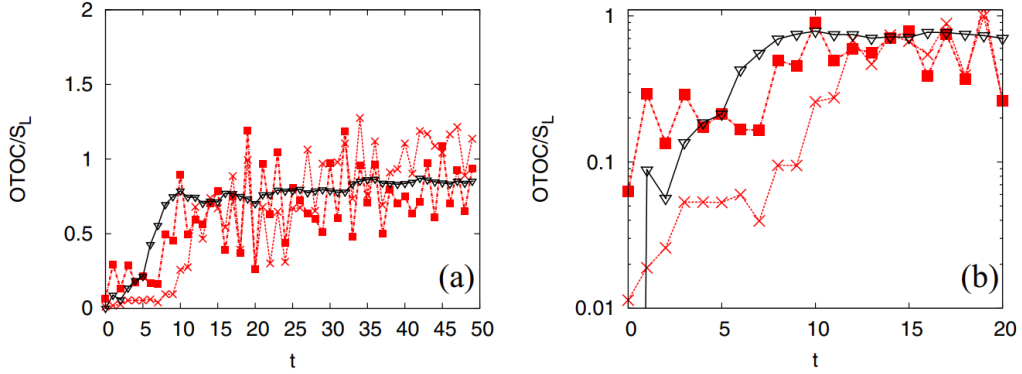


Figura 4.3: (a) Evolución de la entropía lineal S_L (línea sólida negra con triángulos hacia abajo) y OTOC reescalados para $\hat{A} = \hat{X}^{2D}$ con $\hat{B} = \hat{P}^{2D}$ (línea discontinua roja con cruces) y $\hat{B} = \hat{\rho}(0)$ (línea discontinua roja con cuadrados), en función del tiempo t (pasos de tiempo del mapa). Aquí $N = 2^6$, para el caso del mapa EE con el estado coherente inicial centrado en $(q, p) = (\pi/4, \pi/4)$. (b) Versión log-lineal

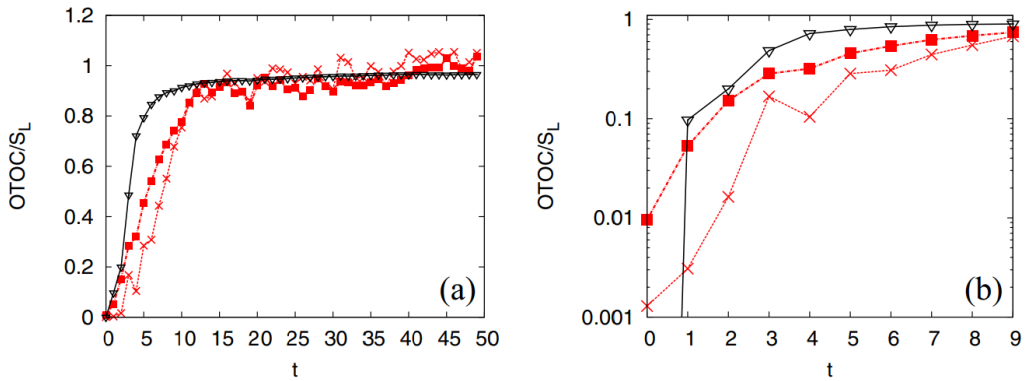


Figura 4.4: (a) Evolución de la entropía lineal S_L (línea sólida negra con triángulos hacia abajo) y OTOC reescalados para $\hat{A} = \hat{X}^{2D}$ con $\hat{B} = \hat{P}^{2D}$ (línea discontinua roja con cruces) y $\hat{B} = \hat{\rho}(0)$ (línea discontinua roja con cuadrados), en función del tiempo t (pasos de tiempo del mapa). Aquí $N = 2^6$, para el caso del mapa HE con el estado coherente inicial centrado en $(q, p) = (0, 5, 0, 5)$. (b) Versión log-lineal

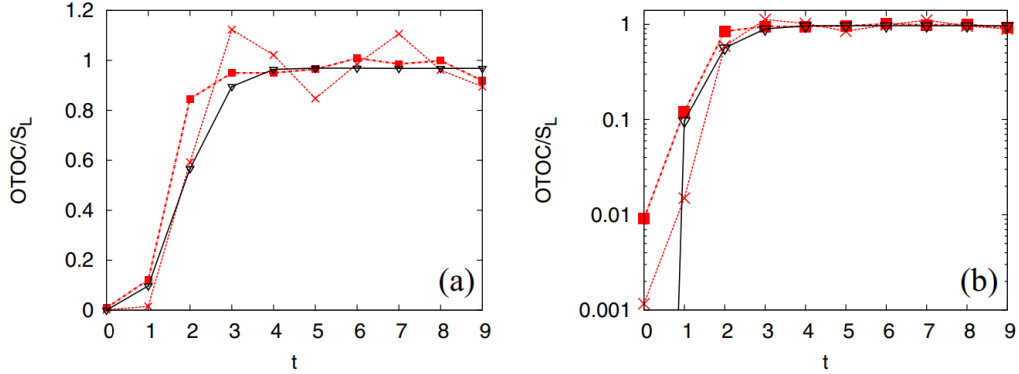


Figura 4.5: (a) Evolución de la entropía lineal S_L (línea sólida negra con triángulos hacia abajo) y OTOC reescalados para $\hat{A} = \hat{X}^{2D}$ con $\hat{B} = \hat{P}^{2D}$ (línea discontinua roja con cruces) y $\hat{B} = \hat{\rho}(0)$ (línea discontinua roja con cuadrados), en función del tiempo t (pasos de tiempo del mapa). Aquí $N = 2^6$, para el caso del mapa HH con el estado coherente inicial centrado en $(q, p) = (0, 5, 0, 5)$. (b) Versión log-lineal

entropía de Rényi. Este resultado es usualmente expresado en la forma

$$\exp\left(-S_1^{(2')}\right) = \sum_{\hat{M} \in 2} \left\langle \hat{M}(t) \hat{\rho}(0) \hat{M}(t) \hat{\rho}(0) \right\rangle \quad (4.12)$$

donde $S_1^{(2')} = -\log \text{Tr}_1(\hat{\rho}_1^2)$ es la segunda entropía de Rényi, la suma corre sobre una base completa de operadores del subespacio 2, y se toma el promedio térmico. Es fácil ver que $\exp\left(-S_1^{(2')}\right) = \text{Tr}_1(\hat{\rho}_1^2)$. En el OTOC Ec. (4.5), tenemos un término que refiere a un correlador de dos-puntos que en general puede ser considerado constante (ver, por ejemplo, [17, 18, 55] para el caso caótico). Por lo tanto, el OTOC es aproximadamente proporcional a $1 - \text{Tr}_1(\hat{\rho}_1^2)$, la cual es S_L . Típicamente, hay más oscilaciones en los OTOCs que en la entropía lineal debido a que se consideró solo un operador $\hat{A}(t)$ sobre ambos subespacios y no una base completa sobre uno de ellos, como el teorema OTOC-RE prescribe. La equivalencia expresada en este teorema es un indicador de un comportamiento promedio del cual nuestros cálculos son una fluctuación.

Con el fin de establecer un completo vínculo entre los OTOCs y la WSE, se muestra la evolución reescalada de la entropía de von Neumann para los cuatro escenarios descritos junto con la entropía lineal. El reescalado de la S_{vN} se realizó para una mejor comparación con la S_L (en los últimos dos casos se usó el valor de saturación dado por la teoría de matrices aleatorias

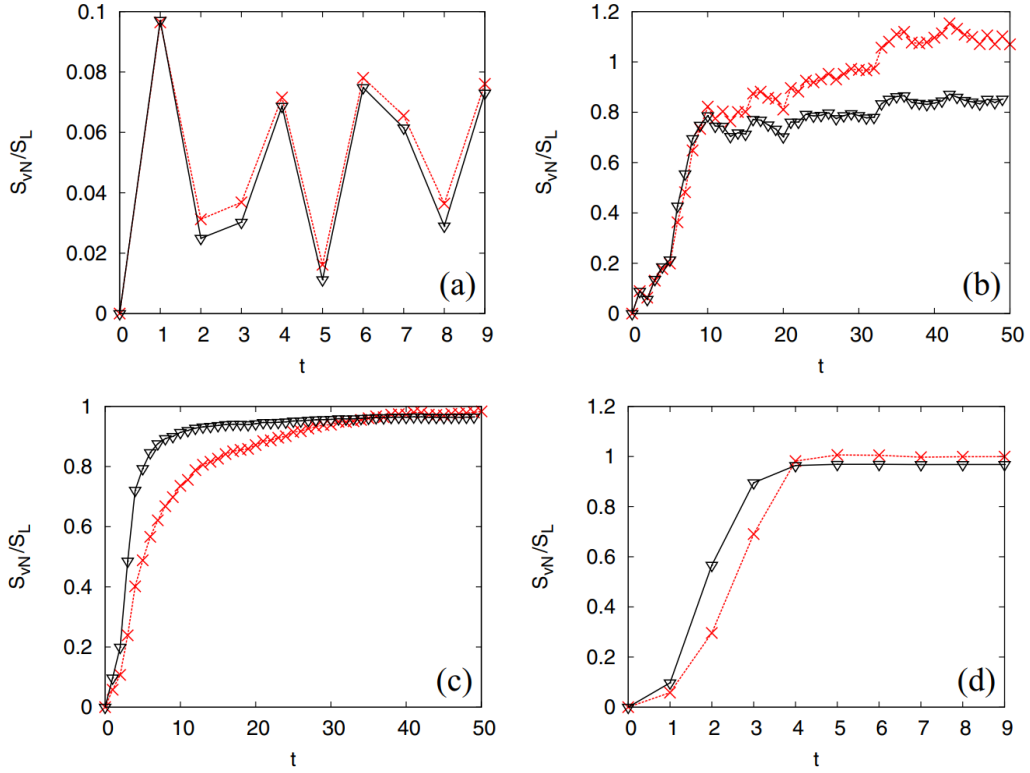


Figura 4.6: Comparación del comportamiento de la entropía de von Neumann reescalada S_{vN} (línea discontinua roja con cruces) con la entropía lineal S_L (línea sólida negra con triángulos hacia abajo) en función del tiempo t (pasos de tiempo del mapa): (a) el caso EE con el estado coherente inicial en $(q, p) = (0, 5, 0, 5)$, (b) el caso EE con $(q, p) = (\pi/4, \pi/4)$, (c) el caso HE con $(q, p) = (0, 5, 0, 5)$, y (d) el caso HH con $(q, p) = (0, 5, 0, 5)$. En todos los paneles $N = 2^6$.

(RMT)[56]). Queda claro que S_L se comporta de forma muy parecida a S_{vN} , a pesar de ser una aproximación lineal. Es importante mencionar que para el caso HE (Fig. 4.6(c)) el crecimiento inicial del OTOC es más cercano a S_{vN} .

4.3 Conclusión

En este capítulo se ha puesto particular foco en la investigación de OTOCs en un sistema bipartito formado por dos mapas del gato acoplados y perturbados con diferentes dinámicas, regulares y caóticos. En todos los casos se encontró que el comportamiento de los OTOCs (relacionado a medidas

locales de caos de forma semiclásica) es cualitativamente similar a la WSE. Esta última es una medida de complejidad definida *globalmente* en el espacio de fase que trata en pie de igualdad las distribuciones cuánticas y clásicas. Esta conexión es explicada mediante la equivalencia entre las entropías de von Neumann/Lineal y los OTOCs cuando uno de los operadores considerados es la matriz densidad inicial. Eligiendo un estado inicial puro, la WSE puede ser identificada con estas entropías tal como expresan las Ecs. (4.10) y (4.11). Por otra parte, el teorema OTOC-RE dado por la Ec. (4.12), vincula la entropía lineal S_L con el promedio de los correladores para cualquier base completas de operadores. Sin embargo, nuestros resultados muestran que realizando los cálculos para los operadores \hat{X}^{2D} y \hat{P}^{2D} y tomando los promedios sobre estados puros localizados en lugar de promedios térmicos, obtenemos una muy buena cocordancia entre el OTOC y la S_L . Esto nos lleva a conjeturar dos cosas, una que el teorema OTOC-RE es el responsable de esta conexión y dos, que no toda la base de operadores es necesaria para lograr una buena cocordancia, sino que creemos que existen operadores con más peso que otros en el promedio de OTOC que plantea el teorema.

Finalmente, uno de los principales resultados de este capítulo es que los OTOCs se comportan de forma diferente (crecimiento inicial y saturación) dependiendo del tipo de dinámica que posea el sistema, de la misma forma que hemos visto en [10] con la WSE. Esto en principio, nos da la pauta que el OTOC es un buen indicador de complejidad y nos permite distinguir el régimen dinámico del sistema.

Es importante mencionar que en sistemas de muchos cuerpos el escenario general posee componentes regulares y caóticas. Se ha visto a lo largo de este capítulo que un solo grado de libertad caótico es suficiente para que las medidas de complejidad alcancen el máximo predicho por la teoría de matrices aleatorias (RMT). Sin embargo, el crecimiento exponencial de los OTOCs para condiciones iniciales localizadas no está presente si solo hay un grado de libertad regular. En [19] se establece un límite para el crecimiento exponencial OTOC-Lyapunov en agujeros negros. En nuestros ejemplos observamos que cualquier simetría (constante del movimiento) implica un crecimiento no exponencial para la entropía. Las consecuencias de esto deben ser cuidadosamente exploradas.

Capítulo 5

Teorema OTOC-RE: OTOCs relevantes y la dinámica clásica subyacente

En el caso de trabajar con operadores Hermíticos vimos que el OTOC puede escribirse de acuerdo a la expresión Ec. (4.5), en la cual el correlador de 2 puntos es contante [17] y toda la dinámica del sistema es capturada en el correlador de 4 puntos,

$$C(t) = \left\langle \hat{M}(t)\hat{V}(0)\hat{M}(t)\hat{V}(0) \right\rangle \quad (5.1)$$

donde $\langle \cdot \rangle = \text{Tr}(\rho \cdot)/N$ y siendo ρ un estado inicial arbitrario. En muchos trabajos suele tomarse $\langle \cdot \rangle = \text{Tr}(\cdot)/N$ como el promedio térmico, algo que adoptaremos en los cálculos de este capítulo. Por último, $\hat{M}(t)$ y $\hat{V}(0)$ son operadores arbitrarios, donde el primero se evoluciona en la representación de Heisenberg, mientras que $\hat{V}(0)$ es un operador sin evolucionar.

El OTOC está relacionado conceptualmente al scrambling de información [20–22] y entrelazamiento cuántico [10]. El teorema OTOC-Renyi entropy (OTOC-RE), dado por la ecuación Ec. (4.12) [23, 24], el cual es el tema central de este capítulo, establece una equivalencia entre la entropía lineal S_L y el promedio de OTOCs de cuatro puntos dados por la Ec. (5.1) sobre una base completa de operadores \hat{M} de alguna partición arbitraria del sistema.

Valiéndonos nuevamente del sistema bipartito utilizado en el Capítulo 4 con sus diferentes dinámicas y utilizando tres bases distintas de operadores: Pauli o $SU(N)$, traslación y reflexión en el toro[57], investigamos si todos los términos presentes en la suma de la Ec. (4.12) son igualmente relevante, es decir, tienen la misma contribución a la entropía lineal. Nuestros resultados muestran que cuando llevamos a cabo dicha suma en la Ec. (4.12) con un conjunto de solo el 35 % o menos de los operadores, en cualquiera de las bases, reconstruimos el 80 % de la entropía lineal. Por otro lado, este conjunto de operadores relevantes está dado por aquellos que mejor capturan la dinámica del sistema. Además, para las bases de reflexión y traslación, las cuales son

fácilmente representables en un espacio de fase, los operadores relevantes muestran claramente la huella de la dinámica clásica subyacente.

5.1 Bases de Operadores

Base de Pauli. Para sistemas de qubits, la base típica elegida es $\{\sigma_0, \sigma_1, \sigma_2, \sigma_3\}$ donde $\sigma_0 = \mathbf{1}$ y el resto de las σ_i son 2×2 matrices de Pauli. Para dimensión $N = 2^k$, podemos extender esta base tomando al sistema completo como un producto directo de k qubits simples:

$$\left\{ \bigotimes_{t=1}^k \sigma_{j_t} \right\} \quad (5.2)$$

Base de Traslación y Reflexión. Los operadores traslación \hat{T}_ξ en el toro están descritos la cuerda de traslación $\xi = (\xi_p, \xi_q) = (r/N, s/N)$, con r y s índices enteros. Estos operadores de traslación unitarios son definidos en la Ref. [57] por su acción en el espacio de Hilbert $\hat{\mathcal{H}}_N$, tal que

$$\hat{T}_{\xi(r,s)} |q_n\rangle = e^{i\frac{2\pi}{N}r(n+\chi_q+\frac{s}{2})} |q_{n+s}\rangle \quad (5.3)$$

lo cual traslada el estado de posición en q_n por una cuerda ξ_q al estado en $q_{n+s} = q_n + \xi_q$. Análogamente, actuando en un estado de momento,

$$\hat{T}_{\xi(r,s)} |p_m\rangle = e^{-i\frac{2\pi}{N}s(m+\chi_p+\frac{r}{2})} |p_{m+r}\rangle \quad (5.4)$$

lo traslada del estado de momento en p_m por una cuerda ξ_p al estado en $p_{m+r} = p_m + \xi_p$.

Una base completa de N^2 operadores independientes de traslación es obtenida por cuerdas que realizan hasta una vuelta en el toro, esto es, para r y s pertenecientes al intervalo $[0, N - 1]$. Los elementos de matriz de los operadores de traslación \hat{T}_ξ en la representación de posición están dados por

$$\langle q_i | \hat{T}_{\xi(r,s)} | q_j \rangle = e^{i\frac{2\pi}{N}r(\frac{i+j}{2}+\chi_q)} \delta_{j,i+s}^{(N)} e^{-i\frac{2\pi}{N}(\frac{r}{2}+\chi_p)(j-i-s)}. \quad (5.5)$$

Para el caso de los operadores de reflexión \hat{R}_x , están descritos por el punto central $x = (x_p, x_q) = (a/N, b/N)$ con índices semi-enteros a y b . Nuevamente, los operadores \hat{R}_x son definidos en la Ref. [57] por la acción sobre el espacio de Hilbert $\hat{\mathcal{H}}_N$,

$$\hat{R}_{x(a,b)} |q_n\rangle = e^{i\frac{2\pi}{N}(2b-n)(a+\gamma_q)} |q_{2b-n}\rangle \quad (5.6)$$

el cual refleja el estado de posición q_n a través de x_q al estado de posición $q_{2b-n} = 2x_q - q_n$. También, para los estados de momento,

$$\hat{R}_{x(a,b)} |p_m\rangle = e^{i\frac{2\pi}{N}(2a-m)(b+\chi_p)} |p_{2a-m}\rangle \quad (5.7)$$

el operador refleja el estado en p_m a través del centro x_p al estado de momento en $p_{2a-m} = 2x_p - p_m$. Una base completa de N^2 operadores independientes de reflexión es obtenida con los índices semi-enteros a y b en el intervalo $[0, \frac{N-1}{2}]$. Esto significa que un cuarto del toro contiene la información completa para la base de reflexión [57].

Los elementos de matriz en la representación de posición son

$$\langle q_i | \hat{R}_{x(a,b)} | q_j \rangle = e^{i\frac{2\pi}{N}(j-i)(a+\chi_q)} \delta_{j,2b-i}^{(N)} e^{i\frac{2\pi}{N}a(2b-i-j)} \quad (5.8)$$

En ambos casos, hemos elegido los ángulos de Floquet (χ_q, χ_p) como cero.

5.2 Resultados

Por completitud, primero verificamos la validez del teorema OTOC-RE [Ec. (4.12)] para todas las dinámicas y bases de operadores propuestas. La Fig. 5.1(a) corresponde a la S_L y a la suma de todos los OTOCs como función del tiempo (pasos del mapa) para ambos mapas con dinámicas hiperbólicas (HH), mientras que en las Fig. 5.1(b) y Fig. 5.1(c) mostramos los casos (HE) y (EE), respectivamente. Consideramos un estado coherente localizado en el punto fijo $(q, p) = (0, 5, 0, 5)$ en cada toro. La Fig. 5.1(d) muestra el caso EE donde el estado coherente está localizado en $(q, p) = (\pi/4, \pi/4)$ (no es un punto fijo). El teorema claramente se verifica más allá de la dinámica y base elegida.

Hemos clasificado cada OTOC de la Ec. (4.12) de acuerdo a su contribución en la suma. En efecto, la relevancia está esencialmente dada por la correspondiente área bajo la curva hasta un tiempo t_0 . Procedimos de la siguiente manera: Para cada operador \hat{M} hemos calculado el área $A_M(t_0)$ como

$$A_M(t_0) = \int_0^{t_0} C_M(t) dt. \quad (5.9)$$

donde $C_M(t)$ es el OTOC

$$C_M(t) = \text{Tr}[\hat{M}(t)\hat{\rho}(0)\hat{M}^\dagger(t)\hat{\rho}(0)]. \quad (5.10)$$

Luego, hemos ordenado los operadores usando $A_M(t_0)$, la cual refleja su contribución al área total bajo la curva de $1 - S_L(t)$, dada por $A_S(t_0) =$

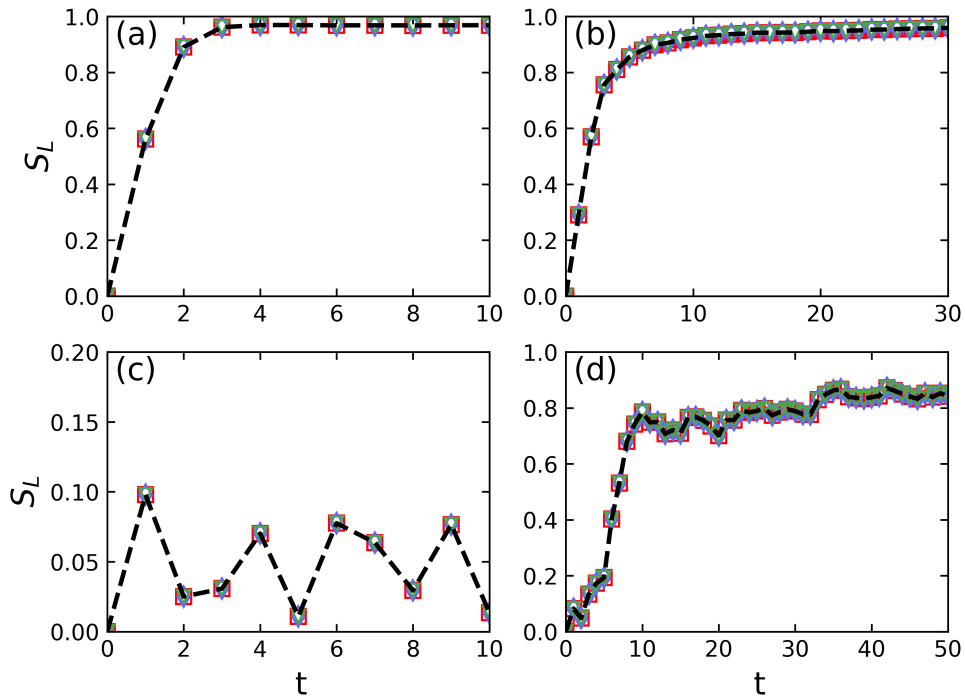


Figura 5.1: En todos los paneles, se muestra S_L (línea discontinua negra) [L.H.S de la Ec. (4.12)] y la suma completa de OTOCs (R.H.S de la Ec. (4.12)] para las tres bases diferentes descritas en el texto principal: Pauli o $SU(N)$ (cuadrados rojos), traslaciones (diamantes azules) y reflexiones (triángulos verdes hacia abajo). a) Casos HH y b) HE. c) y d) Casos EE con los estados coherentes en $(q, p) = (0, 5, 0, 5)$ y $(q, p) = (\pi/4, \pi/4)$, respectivamente.

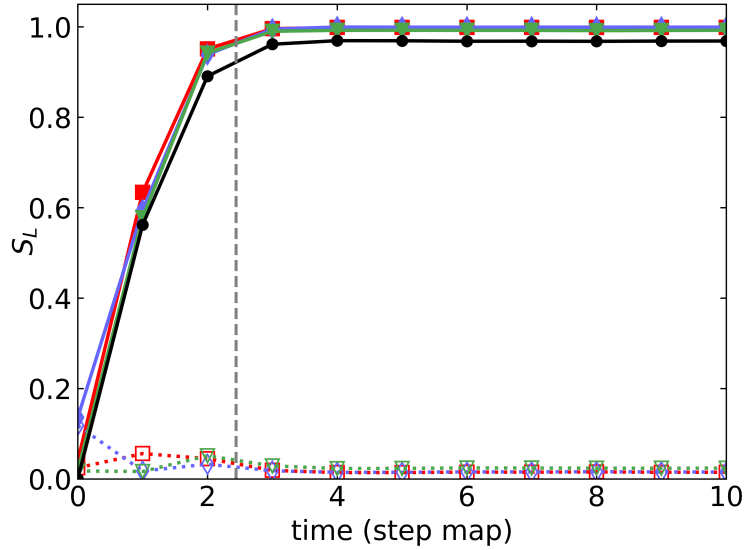


Figura 5.2: S_L (línea sólida negra con círculos sólidos) dada por el lado izquierdo de la Ec. (4.12) para el caso HH con estados coherentes situado en $(q, p) = (0,5, 0,5)$. Operadores Pauli (línea sólida roja con cuadrados sólidos) suma considerando los 263 términos más relevantes en el lado derecho de la Ec. (4.12). Bases de traslación (línea sólida azul con diamantes sólidos) y reflexión (línea sólida verde con triángulos sólidos hacia abajo) con 166 y 697 términos, respectivamente. Los símbolos vacíos con líneas discontinuas muestran la contribución de los términos restantes para las bases de Pauli (línea a trazos roja con cuadrados vacíos), traslación (línea a trazos azul con diamantes vacíos), y reflexión (línea a trazos verde con triángulos vacíos hacia abajo). $t_0 = 10$. Mostramos el valor de saturación teórico para la entropía por medio de una línea horizontal punteada y el tiempo de Ehrenfest por medio de una línea vertical punteada.

$\int_0^{t_0} 1 - S_L(t) dt$. Finalmente, determinamos un criterio de corte, el cual consiste en alcanzar el valor $0,8A_S(t_0)$ por la simple suma de áreas que contribuye cada OTOC de cada operador como $\sum_R A_M(t_0)$, donde R significa que la suma se lleva a cabo del más al menos relevante. Esto nos provee un número de OTOCs necesarios para alcanzar lo que nosotros nos referimos como el comportamiento efectivo de S_L . Primero consideramos el caso HH con un estado coherente en $(q, p) = (0,5, 0,5)$. Debido a la naturaleza caótica de la dinámica, ambos OTOCs y S_L crecen exponencialmente [53] en una fase inicial, por lo tanto, nos alcanza con integrar hasta $t_0 = 10$. En la Fig. 5.2 mostramos $S_L(t_0)$ (línea negra) y la suma parcial obtenida con los OTOCs más relevantes (símbolos sólidos) para cada base de operadores. Para la ba-

se de Pauli, solo 263 de un total de 4096 términos fueron necesarios para alcanzar el comportamiento efectivo de S_L . Mientras que para las bases de traslación y reflexión 166 y 697 términos fueron necesarios, respectivamente. El comportamiento efectivo de la entropía fue recuperado con menos del 20 % de los operadores. Adicionalmente, en la Fig. 5.2 mostramos la contribución de los restantes operadores (símbolos vacíos), la cual es marcadamente más pequeña que los relevantes. Es importante aclarar que en todas las figuras mostramos $1 - \sum_R C_M(t)$, lo que permite una comparación directa con S_L y entonces los valores correspondientes a los símbolos vacíos son restados de los símbolos sólidos para recuperar la entropía. Finalmente, es importante mencionar que el valor de saturación de la entropía ha sido teóricamente predicho con la teoría de matrices aleatorias (ver Ref [10] y sus referencias); mostramos esta con una línea a trazos horizontal. También podemos observar que esta saturación se alcanza aproximadamente en el tiempo de Ehrenfest, que se muestra con una línea vertical punteada. A continuación, examinamos el mapa HE donde se toma la base de operadores para el subsistema regular y se colocan estados coherentes en $(q, p) = (0, 5, 0, 5)$. En la Fig. 5.3 vemos que S_L crece más lentamente que en el caso anterior (hasta la saturación) debido al carácter mixto de la dinámica, lo que nos lleva a un tiempo de integración más largo ($t_0 = 40$). Para recuperar el comportamiento efectivo de S_L esta vez, necesitamos 199 operadores de Pauli, 110 operadores de traslación y 1285 operadores de reflexión, es decir, menos del 32 % de los operadores totales en el peor de los casos. También mostramos el valor de saturación de la entropía y el tiempo de Ehrenfest, pero en este caso el acuerdo no es tan bueno como en el caso anterior. Finalmente, consideramos la función de mapa EE con estados coherentes en $(q, p) = (0, 5, 0, 5)$ y luego en $(q, p) = (\pi/4, \pi/4)$. El primer caso se muestra en la Figura Fig. 5.4 ($t_0 = 10$), donde el comportamiento efectivo de S_L se recupera con solo 81 operadores en la base Pauli, 101 operadores en la base de traslación y 117 operadores en la base de reflexión. En este escenario dinámico, el estado coherente no explora todo el espacio de fases, sino que simplemente gira alrededor del punto fijo, lo que da una pista para explicar esta clara reducción en el número de operadores relevantes. En este caso hemos escalado la suma parcial de los OTOC más relevantes para una mejor comparación con S_L (la suma de los restantes se deja sin cambios). En la Fig. 5.5 mostramos los resultados al colocar los estados coherentes en $(q, p) = (\pi/4, \pi/4)$. Dado que estos no están en un punto fijo, la entropía crece hasta su saturación a un ritmo más lento que en el caso HH, lo que nos lleva a considerar un $t_0 = 30$. Recuperamos el comportamiento efectivo de S_L con 413 operadores en la base de Pauli, 103 en la base de traslación y 1450 en la base de reflexión, es decir, aproximadamente el 35 % de los operadores en el peor de los casos. Se muestran los valores de tiempo

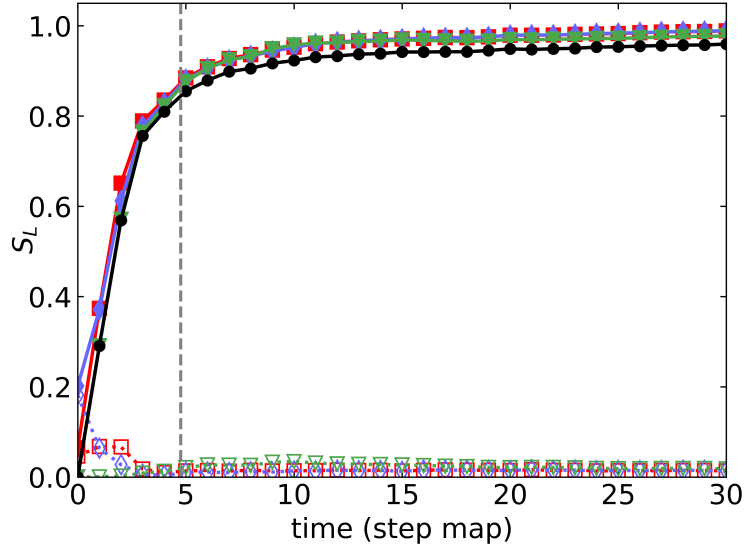


Figura 5.3: S_L (línea sólida negra con círculos sólidos) dada por el lado izquierdo de la Ec. (4.12) para el caso HE con estados coherentes situado en $(q, p) = (0,5, 0,5)$. Operadores Pauli (línea sólida roja con cuadrados sólidos) suma considerando los 199 términos más relevantes en el lado derecho de la Ec. (4.12). Bases de traslación (línea sólida azul con diamantes sólidos) y reflexión (línea sólida verde con triángulos sólidos hacia abajo) con 110 y 1285 términos, respectivamente. Los símbolos vacíos con líneas discontinuas muestran la contribución de los términos restantes para las bases de Pauli (línea a trazos roja con cuadrados vacíos), traslación (línea a trazos azul con diamantes vacíos), y reflexión (línea a trazos verde con triángulos vacíos hacia abajo). $t_0 = 40$. Mostramos el valor de saturación teórico para la entropía por medio de una línea horizontal punteada y el tiempo de Ehrenfest por medio de una línea vertical punteada.

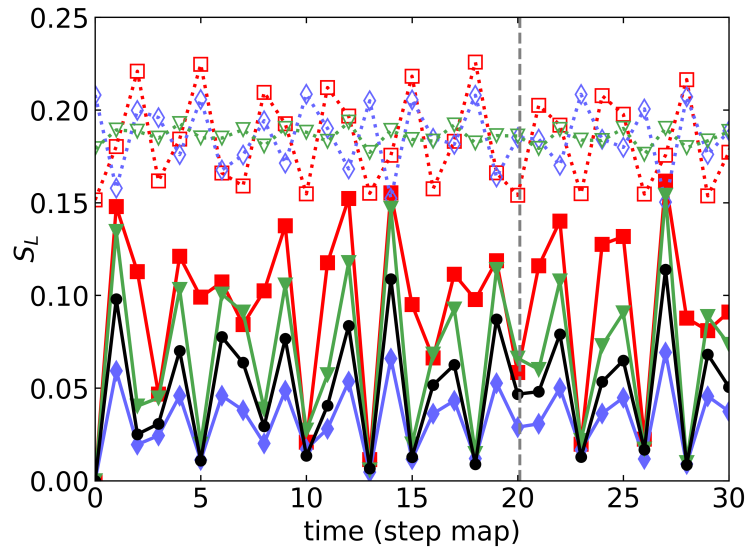


Figura 5.4: S_L (línea sólida negra con círculos sólidos) dada por el lado izquierdo de la Ec. (4.12) para el caso EE con estados coherentes situado en $(q, p) = (0, 5, 0, 5)$. Operadores Pauli (línea sólida roja con cuadrados sólidos) suma considerando los 81 términos más relevantes en el lado derecho de la Ec. (4.12). Bases de traslación (línea sólida azul con diamantes sólidos) y reflexión (línea sólida verde con triángulos sólidos hacia abajo) con 101 y 117 términos, respectivamente. Los símbolos vacíos con líneas discontinuas muestran la contribución de los términos restantes para las bases de Pauli (línea a trazos roja con cuadrados vacíos), traslación (línea a trazos azul con diamantes vacíos), y reflexión (línea a trazos verde con triángulos vacíos hacia abajo). $t_0 = 10$.

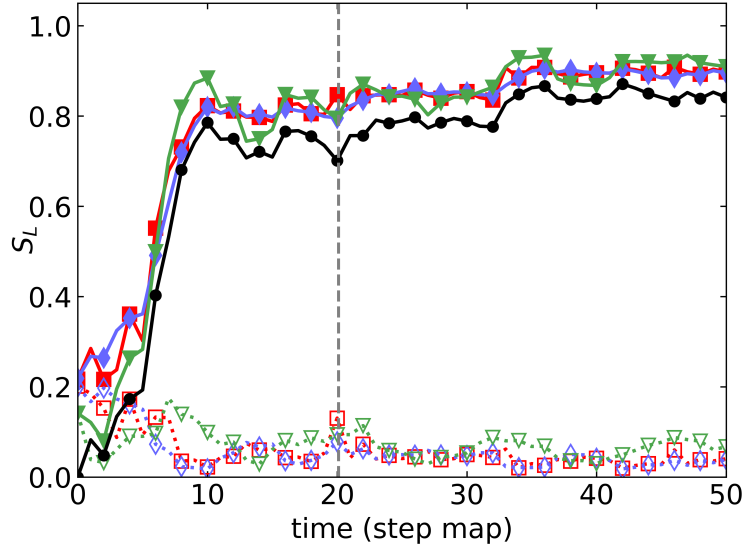


Figura 5.5: S_L (línea sólida negra con círculos sólidos) dada por el lado izquierdo de la Ec. (4.12) para el caso EE con estados coherentes situado en $(q, p) = (\pi/4, \pi/4)$. Operadores Pauli (línea sólida roja con cuadrados sólidos) suma considerando los 413 términos más relevantes en el lado derecho de la Ec. (4.12). Bases de traslación (línea sólida azul con diamantes sólidos) y reflexión (línea sólida verde con triángulos sólidos hacia abajo) con 103 y 1450 términos, respectivamente. Los símbolos vacíos con líneas discontinuas muestran la contribución de los términos restantes para las bases de Pauli (línea a trazos roja con cuadrados vacíos), traslación (línea a trazos azul con diamantes vacíos), y reflexión (línea a trazos verde con triángulos vacíos hacia abajo). $t_0 = 30$. Mostramos el valor de saturación teórico para la entropía por medio de una línea horizontal punteada y el tiempo de Ehrenfest por medio de una línea vertical punteada.

de saturación y Ehrenfest para mostrar la tasa de convergencia mucho más lenta en comparación con el caso HH. Mencionamos que no solo la suma, sino también cada una de las cantidades $1 - C_{M_R}(t)$ (donde \hat{M}_R representa a los operadores relevantes) aproximan muy bien a la entropía lineal (hasta la normalización); es decir, afirmamos que $S_L = 1 - e^{(-S_A^{(2)})} \approx 1 - C_{M_R}(t)$. Los operadores restantes tienen un comportamiento diferente.

Por otro lado, es interesante investigar si la cantidad de operadores relevantes cambia como función del tiempo de integración t_0 y cómo ocurre este cambio. Las Figs. 5.6 a 5.8 muestran la cantidad de operadores relevantes para las bases de Pauli, traslación y reflexión, respectivamente, para cada dinámica y diferentes tiempos de integración necesarios para lograr el comportamiento efectivo de S_L . Para todas las bases, observamos que si el sistema tiene al menos un grado de libertad hiperbólico, la cantidad de operadores crece rápidamente con el tiempo de integración. Si el sistema es completamente elíptico y los estados coherentes están ubicados en el punto fijo, la cantidad de operadores es esencialmente constante. Sin embargo, si los estados coherentes no están en una órbita periódica, la cantidad de operadores crece a una velocidad mucho más lenta que en los casos mixtos (HE y EH; hemos considerado ambos casos para comprender mejor las propiedades dinámicas) o totalmente hiperbólicos (HH), especialmente para la base de reflexión (ver Fig. 5.8). En el caso HH, si tomamos tiempos de integración largos, casi todos los operadores (no todos, ya que solo requerimos el comportamiento efectivo de S_L) serán relevantes y equivalentes, lo que nos recuerda la ergodicidad clásica subyacente en este escenario.

El aumento o no en la cantidad de operadores relevantes necesarios conforme aumentamos el tiempo de integración t_0 , como se muestran en las Figs. 5.6 a 5.8, es un claro indicador si estamos ante una dinámica caótica o no. Esto se debe a que en los casos donde nuestra distribución no se expanda por el espacio de fase, la cantidad de operadores necesarios se mantendrá estable, caso contrario, si tiende a ocupar todo el espacio de fase (ergódica) cada OTOC contribuirá menos y por consiguiente necesitaremos más operadores para describir la entropía lineal. Es decir, este crecimiento nos brinda pistas sobre la sensibilidad de los OTOC a la complejidad cuántica y proporcionándonos un indicador alternativo de ella.

Como última observación, de las Figs. 5.6 a 5.8 vemos que el número de operadores relevantes puede depender de la base. Un ejemplo extremo es el de la base de Kirkwood, cuyos operadores se definen por

$$K_{(ij)} = |q_i\rangle\langle p_j| \quad (5.11)$$

y para los que existe una clara asociación con las representaciones de fase, que tienen un significado clásico directo [18]. Para cualquier operador en esta

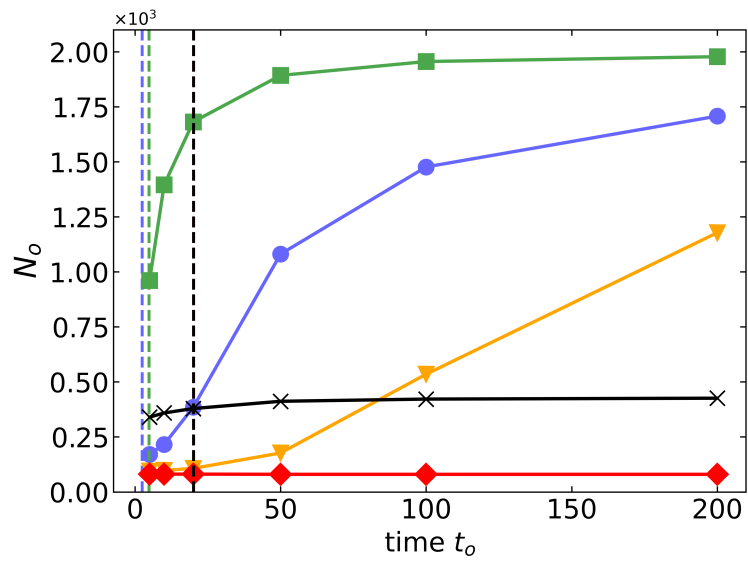


Figura 5.6: Número de operadores Pauli relevantes, para diferentes tiempos de integración t_0 y dinámicas. La línea azul con círculos representa el caso HH, la línea verde con cuadrados representa el caso EH, la línea naranja con triángulos hacia abajo representa el caso HE, y finalmente, la línea roja con diamantes y la línea negra con cruces representan los casos EE con estados coherentes en $(0,5,0,5)$ y $(\pi/4, \pi/4)$, respectivamente. Las líneas verticales punteadas indican el tiempo de Ehrenfest de cada dinámica siguiendo el código de colores indicados $N = 2^6$.

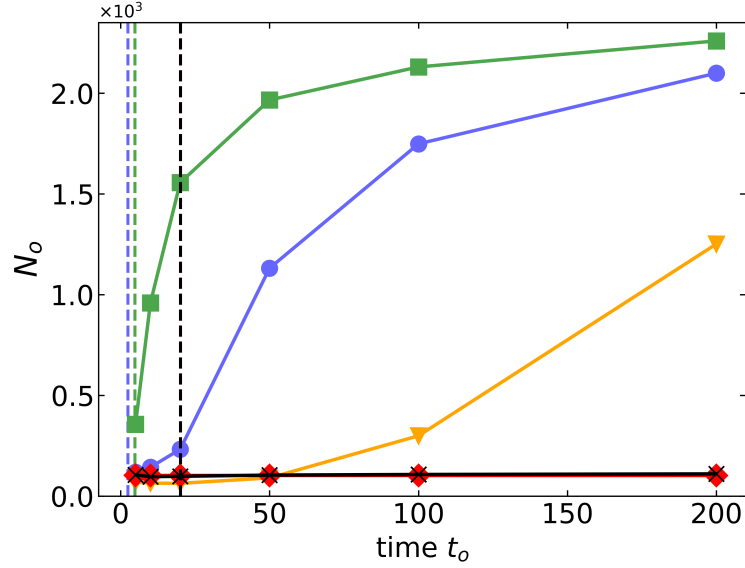


Figura 5.7: Número de operadores relevante de traslación para diferentes tiempos de integración t_0 y dinámicas. Las líneas verticales punteadas indican el tiempo de Ehrenfest de cada dinámica siguiendo el mismo código de color que en la Fig. 5.6. $N = 2^6$

base, es sencillo mostrar que

$$C_{K_{(ij)}} = \hat{\rho}_A^2(t) \quad (5.12)$$

Por lo tanto, todos ellos son igualmente relevantes para detectar la dinámica, por lo que se debe tener especial cuidado al seleccionar la base si uno quiere beneficiarse de la capacidad de los OTOC para caracterizar la complejidad cuántica. Todo el análisis previo nos ha llevado a buscar una explicación del significado físico del operador relevante en el momento de describir el comportamiento S_L o la complejidad cuántica en general. Para llevar a cabo esto, nos limitamos a los operadores de traslación y reflexión, ya que se pueden representar en el espacio de fase de cuerda y centro. En las Ecs. (5.5) y (5.8), identificamos cada uno de estos operadores con una pareja de índices, (r, s) para las traslaciones y (a, b) para las reflexiones, que están relacionados con la cuerda de traslación y el centro de reflexión, respectivamente. Estos índices se pueden representar en un diagrama bidimensional, lo que permite visualizar los diferentes operadores. Las Figs. 5.9 y 5.10 muestran los operadores de traslación y reflexión más relevantes para cada dinámica y diferentes tiempos de integración t_0 . Para las reflexiones, hemos elegido una dimensión del espacio de Hilbert impar de $N = 65$ para desplegar[57] la base completa

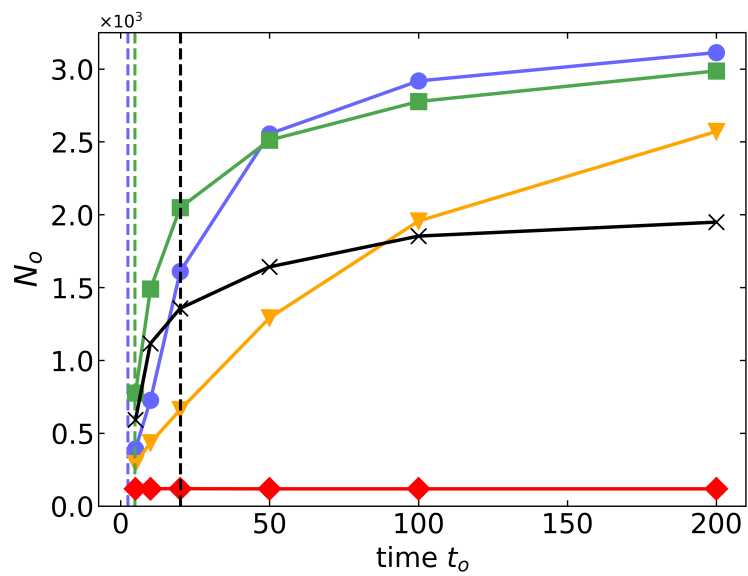


Figura 5.8: Número de operadores relevante de reflexión para diferentes tiempos de integración t_0 y dinámicas. Las líneas verticales punteadas indican el tiempo de Ehrenfest de cada dinámica siguiendo el mismo código de color que en la Fig. 5.6. En este caso hemos usado $N = 2^6 + 1$ como dimensión del espacio de Hilbert.

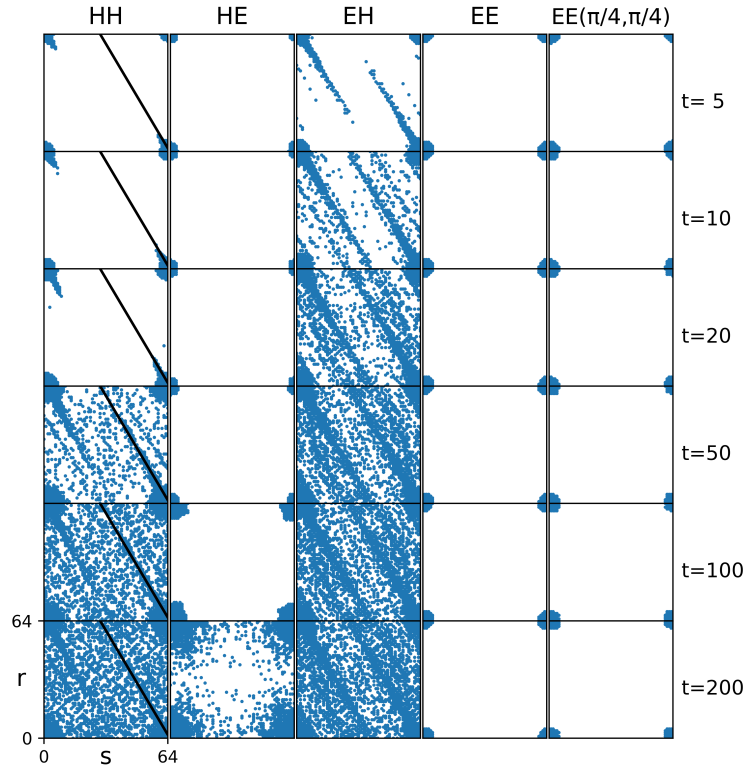


Figura 5.9: Operadores de traslación relevantes en el espacio de fase, para cada dinámica a medida que aumentamos el tiempo de integración t_0 . Cada punto (r, s) representa una cuerda de traslación, donde r indica la traslación en momento y s indica la traslación en posición. La línea negra sólida representa la dirección de la variedad inestable de nuestro mapa. $N = 2^6$.

desde el cuarto de toro con índices semi-enteros a la completa con índices enteros. Esto permite una visualización más clara de las estructuras clásicas en el espacio de fase [58]. En el caso HH, vemos que la relevancia de los operadores de traslación y reflexión crece a lo largo del conjunto inestable de nuestro mapa, indicado en las Figs. 5.9 y 5.10 con una línea negra sólida. El número de operadores relevantes crece con t_0 y finalmente se extiende a todo el espacio de fase. En el escenario HE, los operadores de traslación relevantes (ver Fig. 5.9) están agrupados alrededor del operador identidad (la cuerda es nula) porque estamos observando el grado de libertad elíptico. Sin embargo, el número de ellos aumenta con t_0 , lo que refleja la expansión del estado coherente debido a la influencia del mapa hiperbólico. Los operadores de reflexión relevantes están concentrados en el centro del espacio de fase donde se encuentra el estado coherente (ver Fig. 5.10), y cuando t_0

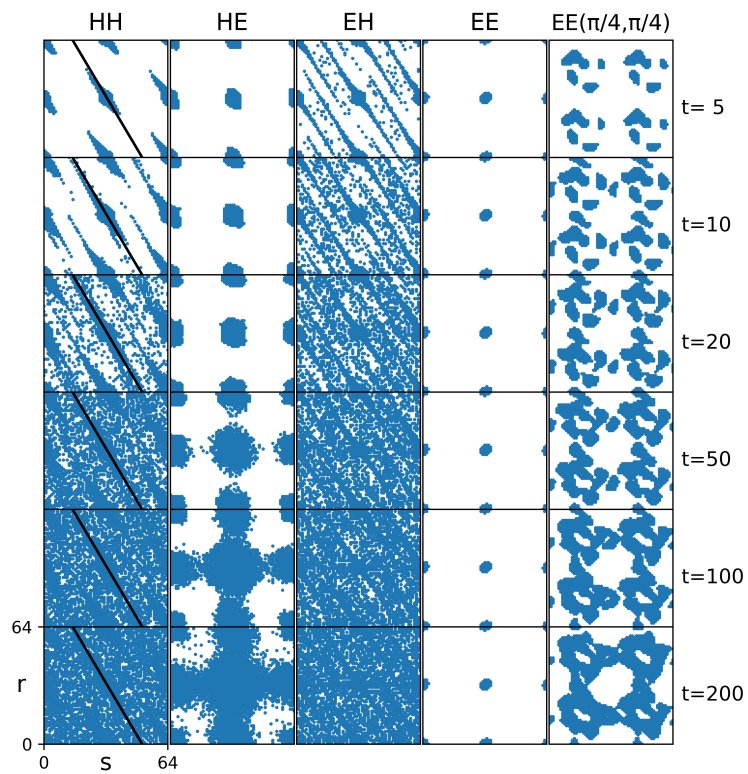


Figura 5.10: Operadores de reflexión relevantes en el espacio de fase, para cada dinámica a medida que aumentamos el tiempo de integración t_0 . Cada punto (a, b) representa un centro de reflexión, donde a indica su momento y b su posición. La línea negra sólida representa la dirección de la variedad inestable de nuestro mapa. En este caso hemos usado $N = 2^6 + 1$ como dimensión del espacio de Hilbert.

aumenta, se necesitan más operadores para describir la dinámica ampliando la distribución correspondiente. Una situación similar surge en el caso EH (ahora observamos el subsistema hiperbólico); es decir, el número de operadores relevantes crece y su distribución se extiende a lo largo de la dirección inestable para ambos, traslaciones y reflexiones. En el caso EE para el estado coherente en el punto periódico, las distribuciones permanecen localizadas y, de nuevo, los operadores de traslación que mejor capturan la dinámica son los que están más cerca de la identidad, mientras que los operadores de reflexión correspondientes están en el centro del espacio de fase. En ambos casos el número de operadores relevantes no cambia. Finalmente, si ubicamos los estados coherentes fuera del punto fijo, los operadores de traslación relevantes siguen estando más cerca de la identidad, pero los operadores de reflexión siguen la evolución de las distribuciones, como en la Ref.[10].

En todos estos casos, podemos observar que el conjunto de operadores relevantes sigue las huellas de la evolución dinámica clásica y esto proporciona una interpretación clara del criterio de relevancia desarrollado en este trabajo. Sin embargo, subrayamos que algunas bases de operadores son más sensibles que otras, siguiendo las huellas más de cerca y permitiendo revelar las estructuras clásicas y la complejidad cuántica de una manera más clara.

Como ya hemos visto en la ecuación (Ec. (5.12)), para la base de Kirkwood todos los OTOC son equivalentes en su contribución a la entropía lineal. Para un estado puro $\hat{\rho}$ con la base de operadores de traslación, el OTOC puede expresarse en términos de

$$\rho_\xi(t) = Tr(\hat{T}_\xi \hat{\rho}(t)),$$

como,

$$C_{T\xi(t)} = \rho_\xi(t)\rho_{-\xi}(t). \quad (5.13)$$

Mientras tanto, para la base de reflexión, el OTOC se puede expresar en términos de la función de Wigner.

$$W_x(t) = (2\pi\hbar) Tr(\hat{R}_x \hat{\rho}(t)),$$

como

$$C_{Rx(t)} = \frac{1}{(2\pi\hbar)^2} W_x^2(t). \quad (5.14)$$

Esto hace que el OTOC en la base de reflexión sea notoriamente sensible a las estructuras clásicas en el espacio de fases, proporcionando un vínculo muy claro con las medidas de complejidad [12].

5.3 Conclusiones

Recientemente, el caos cuántico y la física de altas energías se han relacionado estrechamente a través de una medida de caos, el OTOC. Un puente interesante hacia una interpretación más general como una medida de complejidad ha sido proporcionado desde la perspectiva de la información cuántica a través del teorema OTOC-RE que lo relaciona con la segunda entropía de Renyi[23, 24, 53].

En este trabajo, hemos profundizado en nuestro estudio de esta relación para un sistema bipartito paradigmático que cubre los principales tipos de dinámica, a saber, dos mapas de gato de Arnold acoplados y perturbados. Hemos estudiado el comportamiento de tres bases diferentes de operadores, Pauli, Traslación y Reflexión.

Hemos definido un criterio de relevancia para cada operador, basándose en su contribución correspondiente del OTOC a la entropía lineal S_L hasta el tiempo t_0 . Armados con esta herramienta, hemos encontrado que menos del 35 % de los operadores de estas bases ampliamente utilizadas son suficientes para alcanzar el comportamiento efectivo de S_L . Esto significa que, en general, no es necesario toda la base de operadores para caracterizar el sistema en términos de su complejidad, sino en su lugar una fracción mucho menor (subrayando que esto es dependiente de la base). Además, la forma en que escala el número de operadores relevantes como función del tiempo t_0 resultó ser un indicador alternativo de complejidad, en el mismo sentido en el que el aumento en el número de operaciones es una medida para la complejidad algorítmica.

Por último, para los operadores de traslación y reflexión, los cuales pueden representarse directamente en el espacio de fases, nuestro concepto de relevancia muestra que estos siguen las huellas cuánticas de la evolución clásica correspondiente (de manera más o menos cercana dependiendo de la base).

En el futuro, investigaremos esta relación más profundamente, teniendo en cuenta operadores genéricos de densidad.

Capítulo 6

Exponente de Lyapunov cuántico en sistemas disipativos

En los dos capítulos previos todos los resultados que se han obtenido fueron para sistemas cerrados, pero durante los últimos años ha habido un gran interés en el comportamiento del OTOC, definido en la Ec. (4.1), en sistemas abiertos [59]. Se ha encontrado que la interacción entre la disipación y el scrambling de información se manifiesta en el decaimiento del OTOC de cuatro puntos de operadores locales [60]. Debido a la pérdida de información inducida por el entorno, el OTOC se ha considerado incapaz de distinguir entre el scrambling y la decoherencia [61]. En cambio, se ha propuesto que la información mutua es un mejor cuantificador de estas contribuciones al flujo de información [62]. Recientemente, se ha demostrado que la interacción entre el scrambling de información y la decoherencia puede utilizarse para diferenciar entre los regímenes caóticos y regulares en cadenas disipativas de muchos espines [63], pero solo para el OTOC bipartito y en un entorno intrínsecamente cuántico. Por otro lado, dada la importancia del OTOC, se han desarrollado varios protocolos de medición, cuya robustez en entornos físicamente realistas sigue siendo un tema de investigación [64].

En el contexto de sistemas cuánticos abiertos con una clara contraparte clásica, ¿es el OTOC capaz de distinguir entre un comportamiento regular o caótico, como lo hace el exponente de Lyapunov clásico? En este capítulo, estudiamos el OTOC para sistemas genéricos de este tipo, entendidos como las versiones cuantizadas de sistemas dinámicos clásicos típicos (estudiados abrumadoramente en el área de la dinámica no lineal), al considerar el rotador pateado modificado (DMKRM por sus siglas en inglés). Para este sistema y los valores de los parámetros explorados, observamos que no hay crecimiento exponencial en los primeros tiempos. Sin embargo, a tiempos más largos ($t > 5$) el OTOC decae exponencialmente a una tasa que sigue estrechamente al exponente de Lyapunov, independientemente de los operadores o del estado inicial. Esto sugiere que la velocidad de decaimiento del OTOC captura

cualitativamente la misma información sobre la dinámica del sistema cuántico que el exponente de Lyapunov en los sistemas clásicos. Este decaimiento depende de la intensidad del forzante y de la disipación (los parámetros K y γ respectivamente) que establecen el grado de scrambling y de los efectos ambientales. La interacción entre estos dos procesos determina el régimen de decaimiento del OTOC, que está cuantitativamente relacionado con el gap espectral del operador de evolución cuántico. Vale la pena mencionar aquí que las propiedades estadísticas de los sistemas dinámicos a nivel clásico cambian a través de bifurcaciones locales, donde ni los exponentes de Lyapunov ni los vectores de Lyapunov covariantes proporcionan un buen criterio para determinar la estabilidad de los atractores. Sin embargo, el decaimiento de las correlaciones o el mixing, los cuales pueden estimarse a partir de series temporales largas, están relacionados con los autovalores del generador del semigrupo de operadores de transferencia [65].

6.1 Resultados

Hemos comparado el comportamiento del OTOC en varias zonas del espacio de parámetros (correspondientes a distintos regímenes dinámicos), junto con el *Inverse Participation Ratio* (IPR) (ampliamente utilizado como medida de complejidad cuántica) y el exponente de Lyapunov (clásico) el cual nos permite distinguir eficientemente el comportamiento caótico y regular. Usamos los operadores $\hat{A} = e^{i\hat{Q}}$ y $\hat{B} = \hat{P}$ en Ec. (4.1), donde \hat{Q} es el operador posición y \hat{P} el operador de momento. La evolución de \hat{B} es dada por Ec. (3.36) integrada entre t y $t + 1$, es decir, estamos viendo el estado del sistema entre sucesivas patadas de potencial. Como condición inicial, hemos usado un estado coherente centrado en $\langle p_0 \rangle = 0$ y $\langle q_0 \rangle = \pi$. En el caso clásico, evaluamos numéricamente la Ec. (3.33). Nuestros resultados han mostrado ser robustos ante el cambio de operadores \hat{A} , \hat{B} considerados en los cálculos (ver Apéndice). En la Fig. 6.1 observamos la evolución del OTOC hasta un tiempo de $t = 15$ para diferentes valores de K . En todos los casos hemos tomado un valor de $\hbar_{\text{eff}} = 0,031$ y $\gamma = 0,20$. Los resultados para otros valores de γ y \hbar_{eff} son presentados en el apéndice. El OTOC inicialmente crece muy rápido y luego decae exponencialmente (escala logarítmica en el recuadro). En sistemas caóticos cerrados el OTOC crece de forma exponencial a un ritmo dado por el exponente de Lyapunov de su contraparte clásica. Sin embargo, en la Fig. 6.2 vemos que la tasa de crecimiento del OTOC para nuestro sistema entre $t = 0$ y $t = 1$ no presenta ninguna relación con el máximo exponente de Lyapunov $\langle l_{\text{max}} \rangle_M$. Este último, se obtuvo promediando sobre M condiciones iniciales, (q_0, p_0) distribuidas con probabilidad uniforme

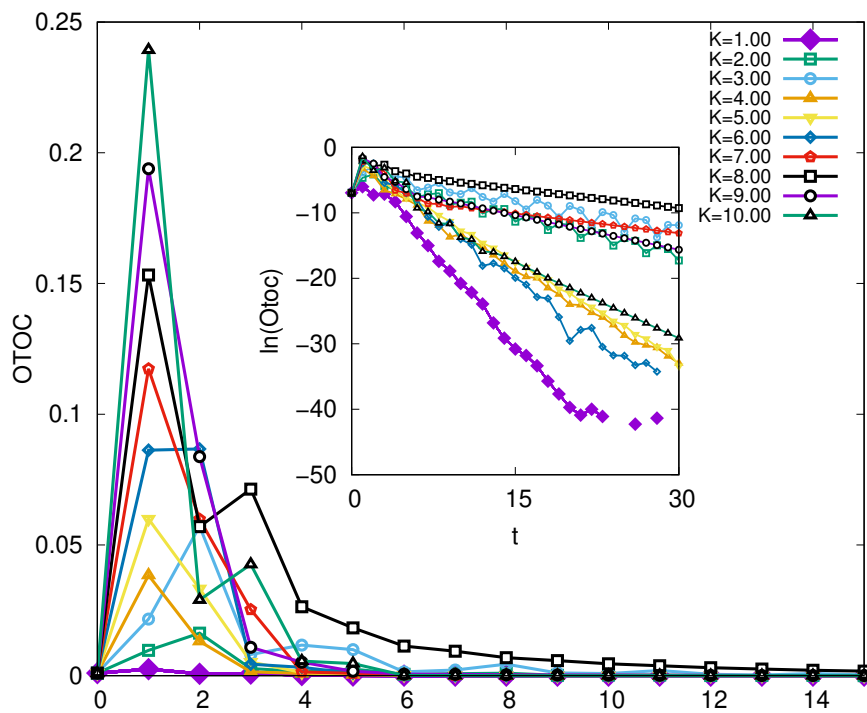


Figura 6.1: OTOC como función de t para diferentes valores de K representados por cada curva con símbolos (ver leyenda). El recuadro muestra la misma evolución en escala logarítmica. En todos los casos $\hbar_{\text{eff}} = 0,031$, $\gamma = 0,200$ y la dimensión del espacio de Hilbert es $N = 1024$.

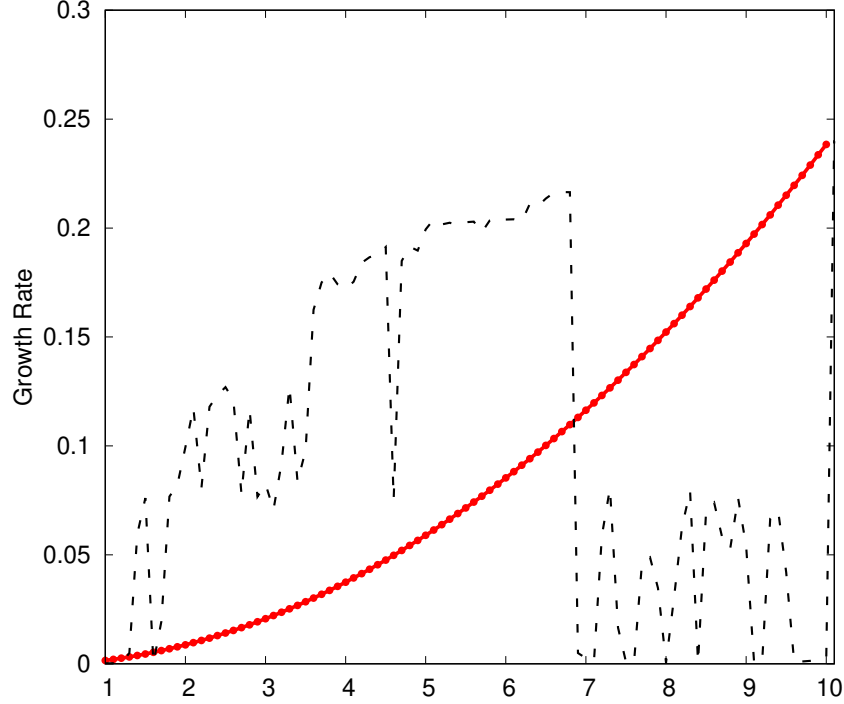


Figura 6.2: La línea continua roja con círculos muestra la tasa de crecimiento del OTOC de la Fig. 6.1 entre $t = 0$ y $t = 1$, como función de K . la línea discontinua negra representa el exponente de Lyapunov máximo promedio del sistema clásico como función del mismo parámetro (en todos los casos $\gamma = 0,20$).

en la región $[0, 2\pi] \times [-\pi, \pi]$. Aunque dada su naturaleza extremadamente rápida no podemos ser concluyentes sobre su comportamiento general.

Para la región de $t > 5$, donde ya se observa el comportamiento exponencial del OTOC, hemos calculado su tasa de decaimiento ajustando linealmente $\ln(\text{OTOC})$ para distintos valores de K entre 1 y 10 y lo comparamos con el exponente de Lyapunov promedio máximo $l_{max} = \langle l_{max}^{(i)} \rangle_M$ y el IPR definido como

$$\text{IPR} = \frac{(\sum \rho_{ii}^2)^{-1}}{N}$$

con ρ_{ii} siendo los elementos diagonales de la matriz densidad del estado estacionario en la base de momentos. Los resultados son mostrados en la Fig. 6.4 donde el exponente de Lyapunov y el IPR fueron cambiados de escala de acuerdo a $\tilde{l}_{max} = 0,55 l_{max} + 0,605$ y $\tilde{\text{IPR}} = 3,5 \text{IPR}$ para poder compararlos cualitativamente. La Línea horizontal en 0,605 corresponde al valor cero para

el exponente de Lyapunov, es decir, el límite entre los regímenes caóticos y regular.

Primero, se observa que para $K > 2$ un decaimiento más lento del OTOC corresponde a las regiones regulares ($\tilde{l}_{max} < 0,605$), mientras que lo contrario corresponde a las regiones caóticas ($\tilde{l}_{max} > 0,605$) de nuestro sistema. Sin embargo, para $K < 2$ vemos que el comportamiento del OTOC no se corresponde con el exponente de Lyapunov. Esto puede ser explicado debido a que la intensidad de la patada no es suficiente para que el sistema explore una porción significativa del espacio de fase y, por lo tanto, el OTOC no puede dar cuenta de un scrambling suficiente. Esto se ve claramente siguiendo la evolución de las funciones de Husimi para $K = 1,10$ mostradas en la Fig. 6.5. Para valores de $K > 2$, una mayor región del espacio de fase es explorada, lograndose así un mayor grado de scrambling en el sistema, siendo el OTOC ahora es capaz de capturar la interacción entre scrambling y disipación.

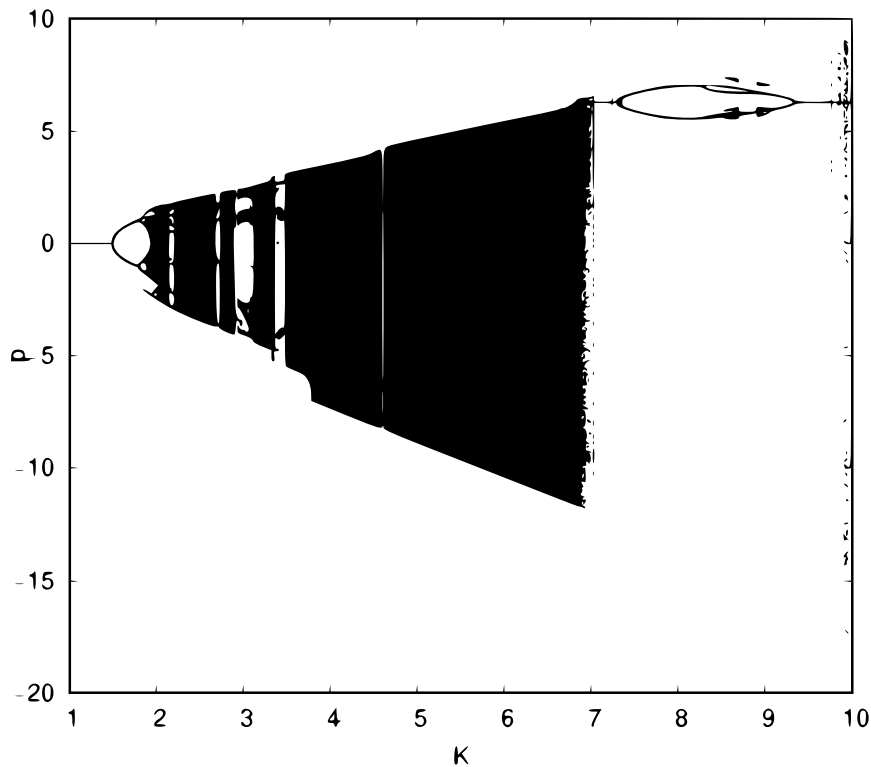


Figura 6.3: Diagrama de bifurcación para el sistema clásico dado por la Ec. (3.33) para $\gamma = 0,200$.

En la región de $2 < K < 7$ prevalecen las regiones caóticas, a excepción de algunas ventanas de regularidad, que se observan el diagrama de bifurcación de la Fig. 6.3. Las regiones regulares más extensas son fácilmente detectadas

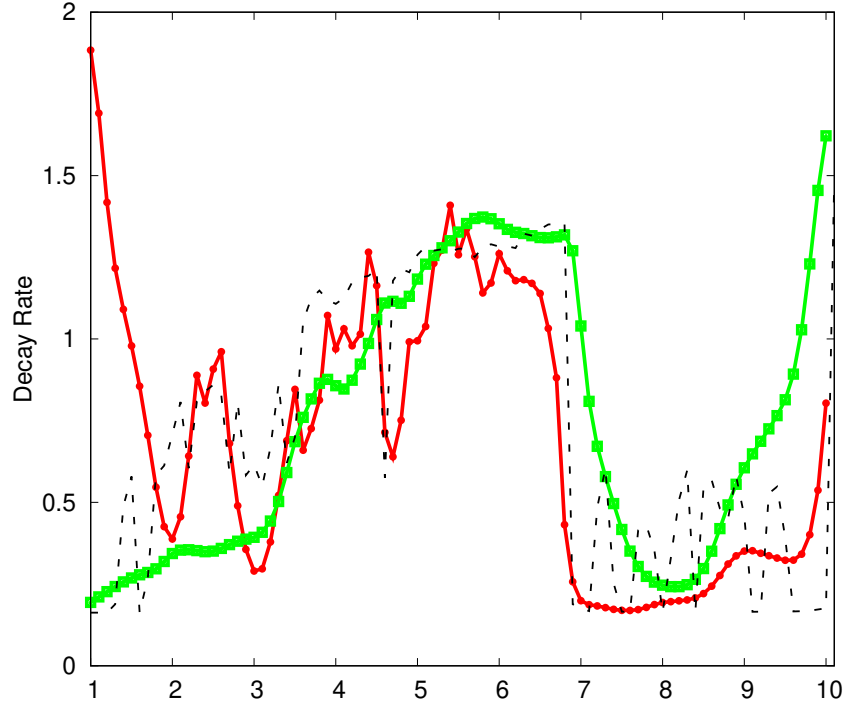


Figura 6.4: La línea continua roja con círculos muestra la tasa de decaimiento del OTOC de la Fig. 6.1 entre $t = 5$ y $t = 100$, como función de K . La línea continua con cuadrados corresponde a los valores de IPR y la línea discontinua negra al exponente de Lyapunov máximo promedio del sistema clásico (en todos los casos $\gamma = 0,200$).

por el OTOC como puede observarse por los cambios abruptos en la velocidad de decaimiento.

Por otro lado, para $K > 7$, el OTOC detecta muy bien el comienzo y fin de la región regular más grande, en total acuerdo con lo mostrado por el exponente de Lyapunov y el diagrama de bifurcaciones. En contraste, el IPR falla en reconocer ambos límites, reflejando una ventana regular efectivamente más chica. Esto se debe a que el IPR únicamente se basa en la distribución de equilibrio, siendo más sensibles a las dinámicas correspondientes a parámetros muy cercanos, algo que en [66] denominan *tuneleo paramétrico* y el cual no es objeto de estudio en este trabajo. Las consecuencias para nuestra comprensión de este fenómeno derivadas de esta discrepancia se explorarán en el futuro. Subrayamos aquí que el comportamiento del OTOC permanece esencialmente inalterado al considerar un estado térmico en lugar de uno coherente en los cálculos (véase el Apéndice B).

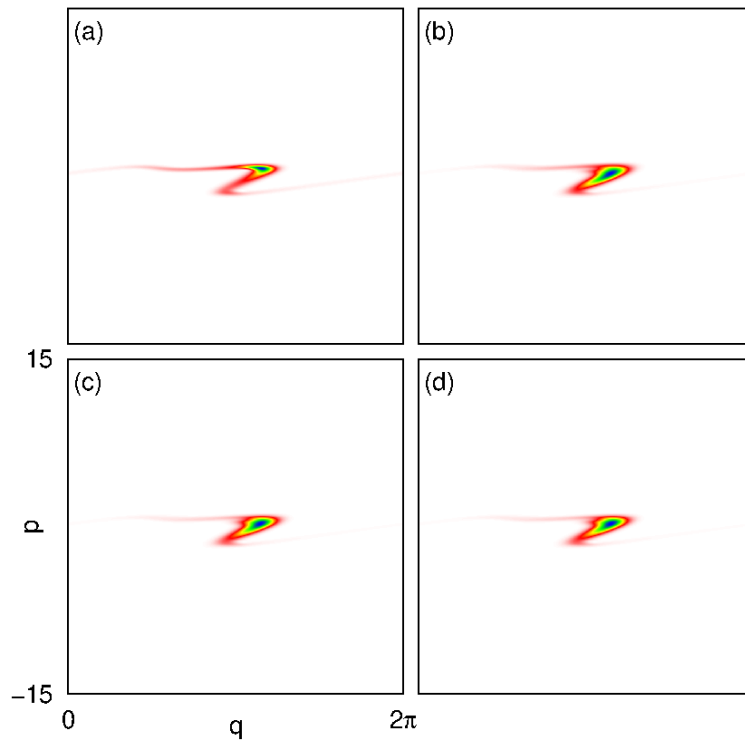


Figura 6.5: Representación en el espacio de fase de la evolución del estado inicial para los tiempos: a) $t = 1$, b) $t = 3$, c) $t = 8$ y d) $t = 20$. De menor a mayor en los valores de la distribución se muestran de blanco a multicolor. En este caso $K = 1,10$, $\hbar_{\text{eff}} = 0,031$, $\gamma = 0,200$ y la dimensión del espacio de Hilbert es $N = 1024$.

En el sistema clásico, el operador de Perron-Frobenius determina la evolución de la distribución de Liouville, mientras que en la contraparte cuántica esto se logra mediante el operador de Lindblad \mathcal{L} actuando sobre la matriz densidad $\rho_{t+1} = \exp(\mathcal{L})\rho_t = \Lambda\rho_t$. La dinámica del sistema en ambos escenarios, está determinada por el espectro de autovalores de dichos operadores. Sin importar las condiciones iniciales de las que partamos, a $t \rightarrow \infty$ el sistema llegará a un estado estacionario dado por el autovector con autovalor real $\lambda_0 = 1$. Los demás autovalores, al tratarse de un sistema disipativo, son reales o complejos, pero todos de módulo menor que uno, lo que significa que a tiempos largos, esos estados no estarán poblados. A nivel clásico, hemos utilizado el método de Ulam para obtener una aproximación del operador de Perron-Frobenius a partir de la discretización del sistema en celdas de tamaño $\hbar_{\text{eff}}^{(\text{PF})}$, como hemos explicado en la Sec. 2.3.1. En la Fig. 6.6 se muestran los 100 autovalores de mayor módulo tanto del operador de evolución cuántico como clásico para diferentes valores de K . Debido a que los recursos computacionales, memoria y tiempo de cálculo, son limitados, hemos elegido trabajar con $\hbar_{\text{eff}}^{(\text{PF})} = \hbar_{\text{eff}} = 0,150$.

Considerando la descomposición espectral del operador evolución, Ec. (3.53), el gap espectral está dado por λ_1 , el autovalor de mayor módulo y distinto de uno (λ_0), el cual está asociado al autoestado que más tiempo sobrevive, por lo tanto, esperamos sea el que determine el decaimiento del OTOC. Para observar esto, llevamos a cabo la descomposición espectral del OTOC, la cual puede verse en detalles en el Apéndice A. En la Ec. (6.1), vemos la dependencia del OTOC con los autovalores del superoperador Λ

$$C(t) = \sum_{i,j=0}^{N^2} (\lambda_i \lambda_j^*)^t a_i a_j^* d_{i,j} \quad (6.1)$$

donde

$$a_i = \text{Tr} \left(L_i^\dagger \hat{B}(0) \right)$$

$$d_{i,j} = \text{Tr} \left(\left[\hat{A}(0), R_i \right] \left[\hat{A}(0), R_j \right]^\dagger \rho_o \right)$$

Además, teniendo presente que en mapas disipativos $L_0 \propto \mathcal{I}$ y los operadores \hat{A} y \hat{B} sobre los que calculamos el OTOC son de traza nula, $a_0 = 0$ y por lo tanto, el OTOC no depende de λ_0 . Por otro lado, tomando que en general el módulo de λ_1 es mayor al de los otros autovalores, para el caso de $t \rightarrow \infty$, podemos solo quedarnos con los términos que involucran a λ_1 y de esa forma la dependencia temporal de $C(t) \propto |\lambda_1|^{2t}$.

En la Fig. 6.7 se muestra el decaimiento del OTOC en función de K junto con $f(\lambda_1) = -2 \ln(|\lambda_1|)$ tanto para el espectro cuántico como clásico. El acuerdo entre el decaimiento del OTOC y $f_q(\lambda_1)$ para el sistema cuántico es en general muy bueno, aun para valores bajos de K . Sin embargo, existen valores para los cuales las diferencias son notables, por ejemplo $K \approx 3,5$, debido principalmente a que en estos puntos del espacio de parámetros las regiones caóticas y regulares coexisten, como puede observarse en el diagrama de bifurcación de la Fig. 6.3. Esto nos da la pauta, que en la descomposición espectral del OTOC, Ec. (6.1), los términos correspondientes a autovalores de módulo menor a λ_1 tendrían incidencia en el decaimiento del OTOC. En el Apéndice A puede verse como es esta dependencia temporal observando los tres primeros autovalores del operador evolución.

Por otro lado, $f_c(\lambda_1)$ para el sistema clásico se comporta de manera muy diferente, lo que implica que el OTOC no está determinado de una manera simple por las resonancias de Ruelle-Pollicott. En [50] se mostró que las discrepancias entre los espectros clásicos y cuánticos pueden ser drásticamente reducidas con solo introducir en el sistema clásico un ruido Gaussiano ξ (con $\langle \xi \rangle = 0$ y $\langle \xi \rangle^2 = \hbar_{\text{eff}}$). Haciendo esto, el desacuerdo entre $f_c(\lambda_1)$, $f_q(\lambda_1)$ y el decaimiento del OTOC desaparece, recuperándose la correspondencia clásica - cuántica, como se observa en la Fig. 6.7.

6.2 Conclusión

Resumiendo, hemos observado que el OTOC en el modelo cuántico de rotador pateado modificado con disipación (DMKRM) exhibe un rápido crecimiento a tiempos cortos, seguido por un decaimiento exponencial a una velocidad que sigue muy de cerca al exponente de Lyapunov (en una escala adecuada) del DMKRM clásico. Aunque no sugerimos que el decaimiento pueda ser derivado cuantitativamente del exponente de Lyapunov, encontramos que ambas cantidades proveen una perspectiva similar a la hora de distinguir regímenes dinámicos del sistema. Este decaimiento depende de la disipación y de la intensidad del forzante γ y K , los cuales determinan la naturaleza caótica o regular de la dinámica. Por otra parte, el OTOC se muestra mucho más sensible al tipo de régimen dinámico que otras medidas de complejidad basadas en la distribución de autoestados, como IPR. Sin embargo, cuando las distribuciones no son capaces de explorar una región significativa del espacio de fase, el OTOC no es capaz de capturar el poco nivel de scrambling del sistema, y por consiguiente se convierte en un peor detector de complejidad como sucede para valores de $K < 2$ en nuestro modelo.

Por otro lado, el autovalor de mayor módulo λ_1 , determina en casi todo

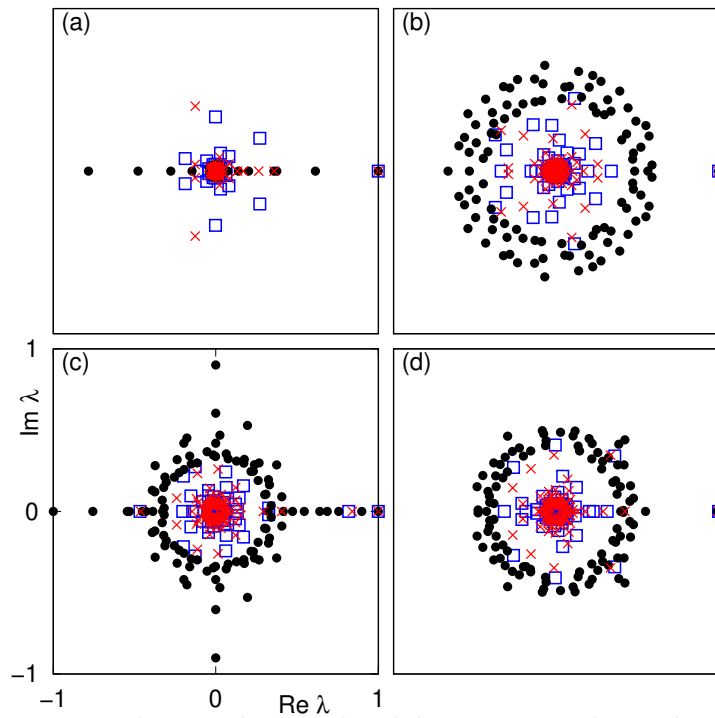


Figura 6.6: Los 100 autovalores más grandes del superoperador cuántico $\Lambda = \exp(\mathcal{L})$ y del operador Perron-Frobenius con y sin ruido Gaussiano, para (a) $K = 1,10$, (b) $K = 5,40$, (c) $K = 8,20$ y (d) $K = 10,00$. Los cuadrados azules corresponden al modelo cuántico, mientras que las cruces rojas y los puntos negros al sistema clásico con y sin ruido Gaussiano respectivamente. En todos los casos, $\hbar_{\text{eff}}^{(\text{PF})} = \hbar_{\text{eff}} = 0,150$, $\gamma = 0,200$ y la dimensión del espacio de Hilbert es $N = 512$.

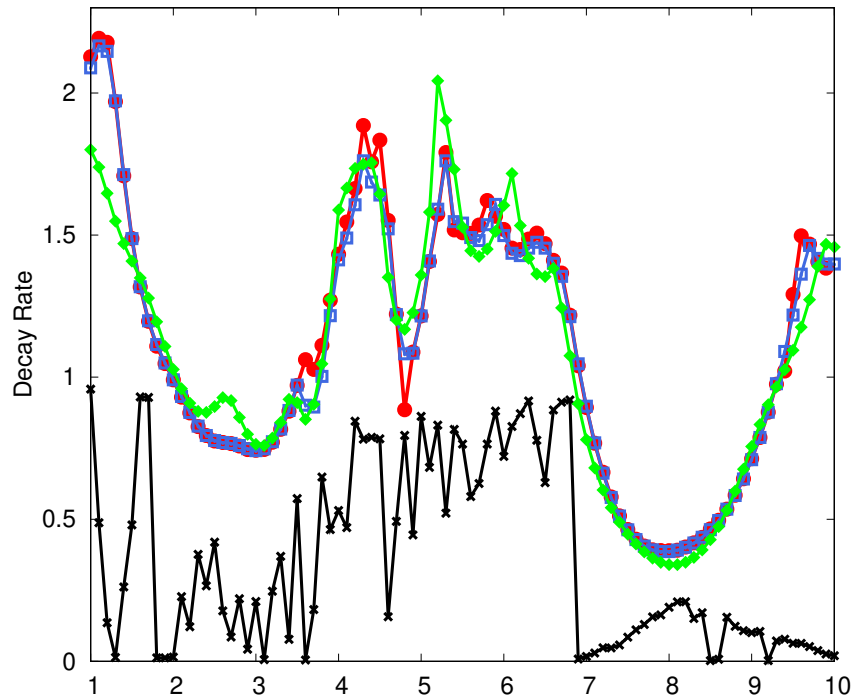


Figura 6.7: La línea sólida roja con círculos muestra la tasa de decaimiento del OTOC entre $t = 5$ y $t = 100$, como función de K . La línea sólida azul con cuadrados vacíos representa $-2 \ln(|\lambda_1|)$ para el autovalor λ_1 del operador de evolución cuántico, y la línea continua verde con diamantes y la negra con cruces corresponden a la misma cantidad pero del sistema clásico con y sin ruido Gaussiano, respectivamente. En todos los casos $\hbar_{\text{eff}}^{(\text{PF})} = \hbar_{\text{eff}} = 0,150$, $\gamma = 0,200$ y $N = 512$.

el rango de K la tasa con la que decae el OTOC, con excepción de algunos valores de K , los cuales serán analizados en más detalles en futuros trabajos. Es importante mencionar que para los sistemas clásicos, los cambios en el espectro de autovalores son un indicador de la pérdida o ganancia de estabilidad del atractor, por lo tanto, el OTOC podría ser un buen candidato para extender estos resultados al dominio cuántico. Finalmente, hemos observado que en estos sistemas cuánticos disipativos, la correspondencia clásica - cuántica se recupera en su totalidad, incorporando un ruido Gaussiano de tamaño \hbar_{eff} solo al sistema clásico[50, 67]

Capítulo 7

Conclusión

En los últimos años, hemos observado un interés creciente en los OTOCs, debido principalmente a que mostraron ser una buena medida para caracterizar la dinámica en sistemas de muchos cuerpos e incluso en física de altas energías y gravedad cuántica. Dentro de la comunidad de caos cuántico primó siempre la búsqueda de indicadores que permitan determinar la naturaleza de la dinámica de un sistema cuántico de la misma forma que lo hace el exponente de Lyapunov en la contraparte clásica y el OTOC se muestra en línea con esto. Otro punto importante que realza el interés en los OTOCs es a partir del teorema OTOC-RE, que establece una conexión entre estos y la segunda entropía de Renyi.

En cuanto a los OTOCs se han estudiado principalmente en sistemas de un solo grado de libertad, sin embargo, se conoce poco el comportamiento y qué información pueden aportar sobre la dinámica de sistemas multipartitos. En el Capítulo 4 estudiamos los OTOCs en un sistema bipartito formado por dos mapas de gato acoplados y perturbados con diferentes dinámicas, regulares o caóticas. En todos los casos se encontró que el comportamiento de los OTOCs (relacionado con medidas locales de caos de forma semiclassical) es cualitativamente similar a la WSE, la cual, es una medida de complejidad definida *globalmente* en el espacio de fase. Esta comparación la llevamos a cabo a partir de la relación que existe entre la WSE y la entropía de von Neumann para estados puros [10, 68] y la relación que nos brinda el Teorema OTOC-RE entre la entropía lineal y el OTOC. Teniendo en cuenta, además, el comportamiento similar entre la entropía lineal S_L y la de von Neumann S_{vN} mostrado en la Fig. 4.5, queda determinado el vínculo entre el OTOC y la WSE.

El principal resultado del Capítulo 4 es que el comportamiento del OTOC (crecimiento inicial y saturación) depende fuertemente del tipo de dinámica que posea el sistema. Se ha visto a lo largo de este capítulo que un solo grado de libertad caótico es suficiente para que las medidas de complejidad

alcancen el su máximo predicho por la teoría de matrices aleatorias (RMT). Sin embargo, el crecimiento exponencial del OTOC para condiciones iniciales localizadas no está presente si al menos uno de los grados de libertad posee una dinámica regular.

En el Capítulo 5 investigamos más en profundidad el Teorema OTOC-RE sobre el mismo sistema bipartito y para tres bases de operadores: Pauli, Traslación y Reflexión. Este teorema, recordemos, plantea una relación entre el promedio de OTOCs sobre una base completa de operadores y la segunda entropía de Renyi. Sin embargo, hemos encontrado que no todos los OTOCs contribuyen de la misma forma al promedio, por lo tanto, con una fracción mucho menor de la base de operadores logramos recuperar la entropía lineal. En particular, vimos que menos del 35% de los operadores de estas bases son suficientes para alcanzar el comportamiento efectivo de S_L y caracterizar el sistema en términos de su complejidad. Además, la forma en que escala el número de operadores relevantes como función del tiempo t_0 resultó ser un indicador alternativo de complejidad, en el mismo sentido en el que el aumento en el número de operaciones es una medida para la complejidad algorítmica.

Una pregunta importante que surgió es qué particularidad tienen estos operadores relevantes. La respuesta vino a través de la representación de los operadores de traslación y reflexión en el espacio de fase, donde claramente se observó que estos siguen las huellas cuánticas de la evolución clásica correspondiente, con más o menos cercanía dependiendo de la base elegida.

Con estos avances en la descripción de los OTOCs para sistemas bipartitos, continuamos nuestro estudio en sistemas abiertos disipativos. En el Capítulo 6, elegimos trabajar con el rotador pateado disipativo y modificado (DMKRM por sus siglas en inglés), el cual representa el movimiento unidimensional de una partícula sometida a un potencial periódico e instantáneo con fricción. Para este sistema que el OTOC exhibe un rápido crecimiento a tiempos cortos, seguido por un decaimiento exponencial a una tasa que sigue muy de cerca al exponente de Lyapunov (rescalado) de su contraparte clásica. Con los estudios llevados a cabo hasta ahora, no podemos afirmar que podamos extraer el exponente de Lyapunov de la tasa de decaimiento del OTOC, pero sí observamos que ambas medidas proveen una perspectiva similar a la hora de distinguir regímenes dinámicos del sistema, por tal motivo, nos referimos a él como un exponente Lyapunov cuántico.

Por otra parte, el OTOC se muestra mucho más sensible al tipo de régimen dinámico que otra medida de complejidad basada en la distribución de autoestados, como el IPR. Sin embargo, cuando la distribución no es capaz de explorar una región del espacio de fase significativa, como pasa en nuestro sistema cuando $K < 2$, el OTOC no es un buen detector de complejidad.

Todo esto apunta al hecho de que captar la interacción entre scrambling y disipación es esencial a la hora de caracterizar la complejidad de los sistemas cuánticos disipativos. Otro resultado interesante que observamos en este sistema, es que el autovalor con mayor módulo del operador evolución determina la tasa de decaimiento del OTOC. Si además, tenemos en cuenta que los cambios en el espectro de autovalores clásico indican la pérdida o ganancia de estabilidad del atractor, el OTOC podría ser una buena manera de extender estos resultados al dominio cuántico.

Para finalizar, a lo largo de este trabajo, estudiamos el OTOC tanto para sistemas cerrados bipartitos, como sistemas abiertos disipativos. En ambos casos, encontramos que este correlador, es capaz de distinguir si estamos ante una dinámica caótica o regular, de la misma forma que lo hacen otras medidas de complejidad. Para el caso de los sistemas cerrados, la dinámica es capturada en el crecimiento y saturación del OTOC, es decir, es importante tanto comportamiento a tiempos cortos como largo, sin embargo, en los sistemas disipativos, esto queda codificado principalmente en el comportamiento a tiempos largos, donde el rol del espectro de autovalores juega un papel importante en la pérdida de correlaciones.

Apéndice A

Descomposición espectral del OTOC

Como hemos visto anteriormente, el OTOC se define como,

$$C(t) = \left\langle \left[\hat{A}(0)\hat{B}(t) \right] \left[\hat{A}(0)\hat{B}(t) \right]^\dagger \right\rangle = \text{Tr} \left(\left[\hat{A}(0)\hat{B}(t) \right] \left[\hat{A}(0)\hat{B}(t) \right]^\dagger \rho_o \right) \quad (\text{A.1})$$

donde ρ_o es el estado inicial. Expandiendo el producto de conmutadores y sin hacer ninguna suposición sobre los operadores involucrados, obtenemos cuatro términos distintos:

$$C_1 = \hat{A}(0)\hat{B}(t)\hat{B}^\dagger(t)\hat{A}^\dagger(0) \quad (\text{A.2})$$

$$C_2 = \hat{A}(0)\hat{B}(t)\hat{A}^\dagger(0)\hat{B}^\dagger(t) \quad (\text{A.3})$$

$$C_3 = \hat{B}(t)\hat{A}(0)\hat{B}^\dagger(t)\hat{A}^\dagger(0) \quad (\text{A.4})$$

$$C_4 = \hat{B}(t)\hat{A}(0)\hat{A}^\dagger(0)\hat{B}^\dagger(t) \quad (\text{A.5})$$

por lo tanto, el OTOC es,

$$C(t) = \text{Tr}(C_1\rho_o) - \text{Tr}(C_2\rho_o) - \text{Tr}(C_3\rho_o) + \text{Tr}(C_4\rho_o) \quad (\text{A.6})$$

Para el desarrollo siguiente, centrémonos en uno de esos términos, por ejemplo, C_2 . Usando la descomposición espectral del operador evolución dada por la Ec. (3.53) y la definición de producto interno $\langle\langle A|B \rangle\rangle = \text{Tr}(A^\dagger B)$, podemos escribir la evolución de los operadores $\hat{B}(t)$ y $\hat{B}^\dagger(t)$ como,

$$\begin{aligned} \hat{B}(t) &= \Lambda^t \hat{B}(0) = \sum \lambda_i^t \text{Tr} \left(L_i^\dagger \hat{B}(0) \right) R_i \\ \hat{B}^\dagger(t) &= \left(\Lambda^t \hat{B}(0) \right)^\dagger = \sum \left(\lambda_i^t \text{Tr} \left(L_i^\dagger \hat{B}(0) \right) \right)^* R_i^\dagger = \sum (\lambda_i^*)^t \text{Tr} \left(L_i^\dagger \hat{B}(0) \right)^* R_i^\dagger \end{aligned}$$

Esto nos permite escribir la descomposición espectral del término C_2 como

$$C_2 = \sum_{i,j} (\lambda_i \lambda_j^*)^t \text{Tr} \left(L_i^\dagger \hat{B}(0) \right) \text{Tr} \left(L_j^\dagger \hat{B}(0) \right)^* (A R_i A^\dagger R_j^\dagger)$$

Repitiendo esto para los demás términos $C_i(t)$, obtenemos:

$$\begin{aligned}
C_1 &= \sum_{i,j} (\lambda_i \lambda_j^*)^t \text{Tr} \left(L_i^\dagger \hat{B}(0) \right) \text{Tr} \left(L_j^\dagger \hat{B}(0) \right)^* (AR_i R_j^\dagger A^\dagger) \\
C_2 &= \sum_{i,j} (\lambda_i \lambda_j^*)^t \text{Tr} \left(L_i^\dagger \hat{B}(0) \right) \text{Tr} \left(L_j^\dagger \hat{B}(0) \right)^* (AR_i A^\dagger R_j^\dagger) \\
C_3 &= \sum_{i,j} (\lambda_i \lambda_j^*)^t \text{Tr} \left(L_i^\dagger \hat{B}(0) \right) \text{Tr} \left(L_j^\dagger \hat{B}(0) \right)^* (R_i AR_j^\dagger A^\dagger) \\
C_4 &= \sum_{i,j} (\lambda_i \lambda_j^*)^t \text{Tr} \left(L_i^\dagger \hat{B}(0) \right) \text{Tr} \left(L_j^\dagger \hat{B}(0) \right)^* (R_i AA^\dagger R_j^\dagger)
\end{aligned}$$

Por lo tanto, $C(t)$ nos queda:

$$C(t) = \sum_{i,j} (\lambda_i \lambda_j^*)^t \text{Tr} \left(L_i^\dagger \hat{B}(0) \right) \text{Tr} \left(L_j^\dagger \hat{B}(0) \right)^* \text{Tr} \left(\left[\hat{A}, R_i \right] \left[\hat{A}, R_j \right]^\dagger \rho_o \right) \quad (\text{A.7})$$

Cada una de las trazas que aparecen en la Ec. (A.7) las renombramos como,

$$\begin{aligned}
a_i &= \text{Tr} \left(L_i^\dagger \hat{B}(0) \right) \\
d_{i,j} &= \text{Tr} \left(\left[\hat{A}, R_i \right] \left[\hat{A}, R_j \right]^\dagger \rho_o \right)
\end{aligned}$$

Esto nos conduce a una expresión simplificada de la descomposición espectral del OTOC,

$$C(t) = \sum_{i,j} (\lambda_i \lambda_j^*)^t a_i a_j^* d_{i,j} \quad (\text{A.8})$$

De la Ec. (A.8) vemos que el comportamiento a tiempos largos del OTOC dependerá de como sean los principales autovalores del operador evolución. A continuación analizamos algunos casos particulares de estos autovalores y como inciden en la dependencia temporal del OTOC,

$$\underline{\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{C} \text{ con } \lambda_2 = \lambda_1^*}$$

$$C(t) \approx (|\lambda_1|)^{2t} (|a_1|^2 d_{1,1} + |a_2|^2 d_{2,2} + 2|a_1 a_2^* d_{1,2}| \cos(2\omega t + \eta)) \quad (\text{A.9})$$

$$\underline{\lambda_1 \in \mathbb{R} \text{ y } \lambda_2, \lambda_3 \in \mathbb{C} \text{ con } \lambda_2 = \lambda_3^*}$$

$$C(t) \approx (|\lambda_1|)^{2t} \left(|a_1|^2 d_{1,1} + \left| \frac{\lambda_2}{\lambda_1} \right|^t |z_3| \cos(\omega t + \eta_3) \right) \quad (\text{A.10})$$

$\lambda_1 \in \mathbb{R}$ **con** $|\lambda_{i \neq 1}| |\lambda_1|$

$$C(t) \approx (|\lambda_1|)^{2t} |a_1|^2 d_{1,1} \quad (\text{A.11})$$

Apéndice B

Resultados adicionales

En este apéndice, proveemos resultados adicionales que sustentan nuestros hallazgos. Específicamente, mostramos que la tasa de decaimientos del *out-of-time-ordered correlator* (OTOC) está fuertemente relacionado tanto al gap espectral como al exponente de Lyapunov de su contraparte clásica. También mostramos que este ritmo de decaimiento es esencialmente independiente del estado inicial del sistema y de la elección de los operadores \hat{A} y \hat{B} en Ec. (4.1).

B.1 Diferentes parámetros de disipación γ

Previamente, consideramos $\gamma = 0,20$ y $\hbar_{\text{eff}} = 0,031$, valores en los cuales el sistema muestra una rica diversidad de comportamiento dinámico como función de K y con un costo computacional razonable. También es el caso para $\gamma = 0,29$ y $\hbar_{\text{eff}} = 0,068$, como se muestra en la Fig. B.1, puede verificarse una correlación similar entre el decaimiento del OTOC y el exponente de Lyapunov. Como puede observarse, un valor de \hbar_{eff} más grande incrementa la diferencia entre las medidas clásicas y cuánticas. Sin embargo, la correspondencia se recupera introduciendo un ruido Gaussiano de tamaño \hbar_{eff} en el sistema clásico, como mostramos en la Fig. 6.7.

B.2 Independencia del estado inicial

En el texto principal de este capítulo hemos presentado los resultados para el caso particular de un estado inicial coherente situado en $(q, p) = (\pi, 0)$, sin embargo, estos son independientes de esta ubicación. Repetimos los cálculos para un estado inicial también coherente pero situado en $(q, p) = (0, 2\pi)$. En la Fig. B.2 ($\gamma = 0,290$ y $\hbar_{\text{eff}} = 0,137$) puede observarse los resultados para ambos casos. Por otra parte, si tomamos un estado inicial térmico $\rho = \mathbb{I}/N$, el decaimiento del OTOC es esencialmente el mismo, esto puede observarse

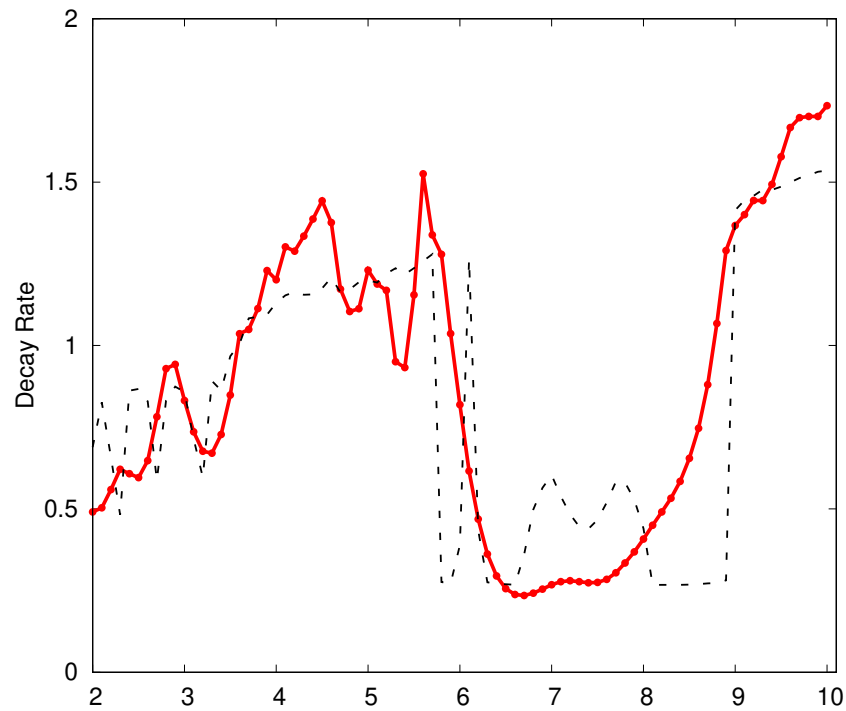


Figura B.1: La línea continua roja con círculos muestra la tasa de decaimiento del OTOC entre $t = 5$ y $t = 100$, como función de K , para un estado inicial coherente en $(q, p) = (\pi, 0)$. La línea negra discontinua representa el exponente de Lyapunov promedio máximo como una función de los mismos parámetros del sistema clásico. En todos los casos $\hbar_{\text{eff}} = 0,068$, $\gamma = 0,290$ y $N = 1024$.

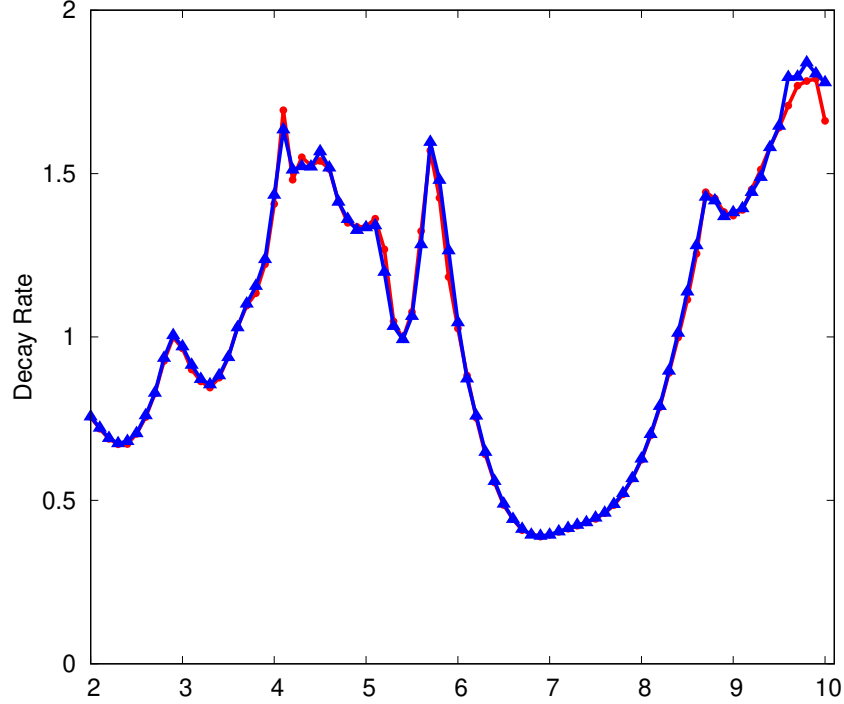


Figura B.2: La línea continua roja con círculos muestra la tasa de decaimiento del OTOC entre $t = 5$ y $t = 100$, como función de K , para un estado inicial coherente en $(q, p) = (\pi, 0)$. La línea azul continua con triángulos corresponde al estado inicial coherente localizado en $(q, p) = (0, 2\pi)$. En todos los casos hemos tomado $\hbar_{\text{eff}} = 0,137$, $\gamma = 0,290$ y $N = 1024$.

en la Fig. B.3. A la vez que subrayamos esta sorprendente coincidencia, nos gustaría señalar que existen algunas diferencias muy pequeñas en torno a $K = 3,50$ entre los casos del estado coherente y térmico, este último coincide perfectamente con los valores de la tasa de decaimiento extraídos del gap espectral. Suponemos que estas pequeñas diferencias se deben a que, en esta región del espacio de parámetros, el atractor se aproxima a través de un ciclo límite simple de período 3, lo que se traduce en un comportamiento espectral más complejo. En futuros trabajos, exploraremos con más detalles que rol juegan la dinámica y el estado inicial en la determinación de qué términos debemos considerar importantes en la descomposición espectral del OTOC (Ec. (A.8)).

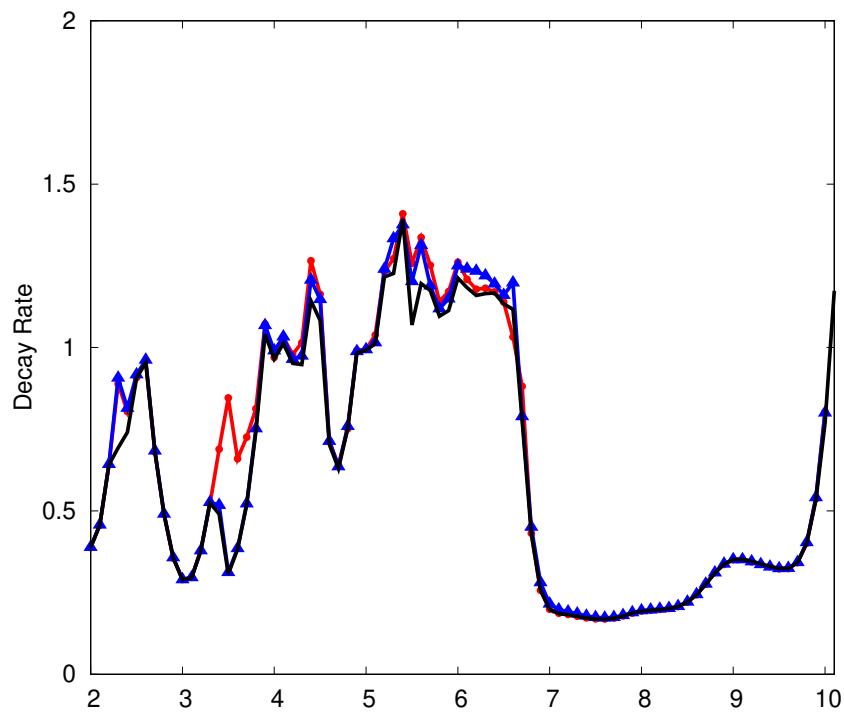


Figura B.3: La línea continua roja con círculos muestra la tasa de decaimiento del OTOC entre $t = 5$ y $t = 100$, como función de K , para un estado inicial coherente en $(q, p) = (\pi, 0)$. La línea azul continua con triángulos corresponde al estado inicial térmico. La línea continua negra representa $-2 \ln(|\lambda_1|)$. En todos los casos $\hbar_{\text{eff}} = 0,031$, $\gamma = 0,200$ y $N = 1024$.

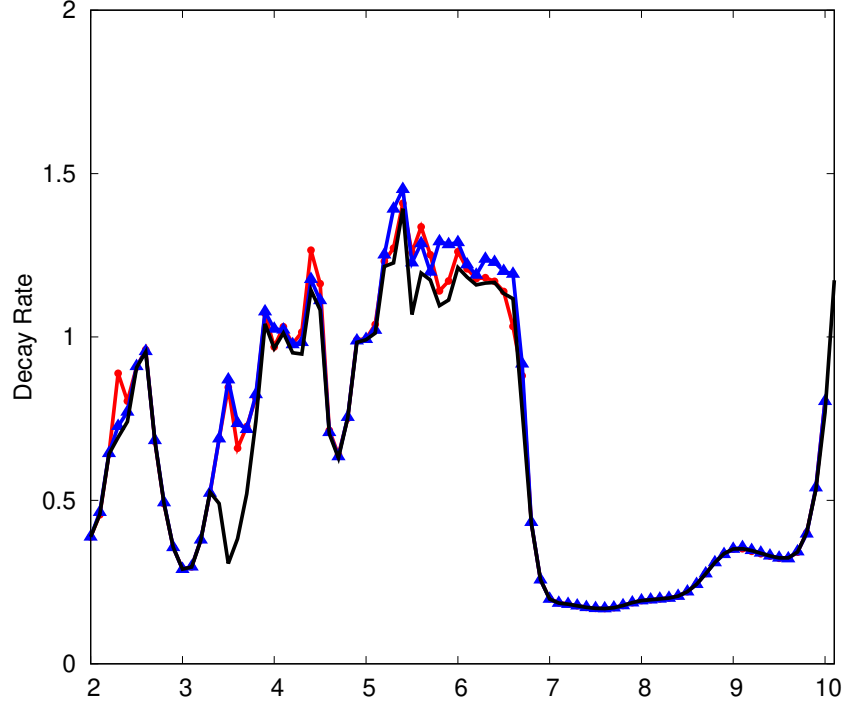


Figura B.4: La línea continua roja con círculos muestra la tasa de decaimiento del OTOC entre $t = 5$ y $t = 100$, como función de K , con $\hat{A} = e^{i\hat{Q}}$ y $\hat{B} = \hat{P}$. La línea azul continua con triángulos corresponde a $\hat{A} = e^{i\hat{Q}}$ y $\hat{B} = e^{i\hat{Q}}P$. La línea continua negra representa $-2 \ln(|\lambda_1|)$. En ambos casos, consideramos un estado inicial coherente en $(q, p) = (0, 2\pi)$ y $\hbar_{\text{eff}} = 0,031$, $\gamma = 0,200$, y $N = 1024$.

B.3 Independencia de la elección de los operadores

Finalmente, en la Fig. B.4, se muestran los resultados para dos conjuntos de operadores \hat{A} y \hat{B} en la Ec. (4.1). En el primer caso, elegimos $\hat{A} = e^{i\hat{Q}}$ y $\hat{B} = \hat{P}$, y en el segundo caso, los cambiamos por $\hat{A} = e^{i\hat{Q}}$ y $\hat{B} = e^{i\hat{Q}}P$. Nuevamente, observamos que la tasa de decaimiento del OTOC es el mismo para ambos conjuntos de operadores, permitiéndonos obtener información equivalente acerca de la dinámica del sistema.

Bibliografia

- [1] Michael Berry. Quantum chaology, not quantum chaos. *Physica Scripta*, 40(3):335, 1989.
- [2] Brack Matthias and K Bhaduri Rajat. Semiclassical physics, 1997.
- [3] Martin C Gutzwiller. *Chaos in classical and quantum mechanics*, volume 1. Springer Science & Business Media, 2013.
- [4] D. Castelvecchi. Clash of the physics laws. *Nature*, 543:597, 2017.
- [5] F. Borgonovi, F.M. Izrailev, L.F. Santos, and V.G. Zelevinsky. Quantum chaos and thermalization in isolated systems of interacting particles. *Physics Reports*, 626:1 – 58, 2016.
- [6] Arjendu K. Pattanayak. Lyapunov exponents, entropy production, and decoherence. *Phys. Rev. Lett.*, 83:4526–4529, 1999.
- [7] C. Neill et al. Ergodic dynamics and thermalization in an isolated quantum system. *Nature Physics*, 12:1037, 2016.
- [8] M. Lombardi and A. Matzkin. Entanglement and chaos in the kicked top. *Phys. Rev. E*, 83:016207, 2011.
- [9] Giulio Casati, Italo Guarneri, and Jose Reslen. Classical dynamics of quantum entanglement. *Phys. Rev. E*, 85:036208, 2012.
- [10] P. D. Bergamasco, G. G. Carlo, and A. M. F. Rivas. Quantum and classical complexity in coupled maps. *Physical Review E*, 96(6):062144, 2017.
- [11] T. Prosen. Complexity and nonseparability of classical liouvillian dynamics. *Physical Review E*, 83(3):031124, 2011.
- [12] G. Benenti, G. G. Carlo, and T. Prosen. Wigner separability entropy and complexity of quantum dynamics. *Physical Review E*, 85(5):051129, 2012.

- [13] Fausto Borgonovi, Felix M Izrailev, and Lea F Santos. Timescales in the quench dynamics of many-body quantum systems: Participation ratio versus out-of-time ordered correlator. *Physical Review E*, 99(5):052143, 2019.
- [14] B. Yan, L. Cincio, and W. H. Zurek. Information scrambling and loschmidt echo. *Physical review letters*, 124(16):160603, 2020.
- [15] A. I. Larkin and Y. N. Ovchinnikov. Quasiclassical method in the theory of superconductivity. *Sov. Phys. JETP*, 28(6):1200–1205, 1969.
- [16] Efim B Rozenbaum, Sriram Ganeshan, and Victor Galitski. Lyapunov exponent and out-of-time-ordered correlator’s growth rate in a chaotic system. *Physical review letters*, 118(8):086801, 2017.
- [17] I. García-Mata, M. Saraceno, R. A. Jalabert, A. J. Roncaglia, and D. A. Wisniacki. Chaos signatures in the short and long time behavior of the out-of-time ordered correlator. *Physical review letters*, 121(21):210601, 2018.
- [18] A. Lakshminarayan. Out-of-time-ordered correlator in the quantum baker’s map and truncated unitary matrices. *Physical Review E*, 99(1):012201, 2019.
- [19] J. Maldacena, S. H. Shenker, and J. High Energy Phys D. Stanford. A bound on chaos. *Journal of High Energy Physics*, 106(8):1–17, 2016.
- [20] Silvia Pappalardi, Angelo Russomanno, Bojan Žunkovič, Fernando Iemini, Alessandro Silva, and Rosario Fazio. Scrambling and entanglement spreading in long-range spin chains. *Physical Review B*, 98(13):134303, 2018.
- [21] Michele Campisi and John Goold. Thermodynamics of quantum information scrambling. *Physical Review E*, 95(6):062127, 2017.
- [22] Brian Swingle. Unscrambling the physics of out-of-time-order correlators. *Nature Physics*, 14(10):988–990, 2018.
- [23] Pavan Hosur, Xiao-Liang Qi, Daniel A Roberts, and Beni Yoshida. Chaos in quantum channels. *Journal of High Energy Physics*, 2016(2):1–49, 2016.
- [24] Ruihua Fan, Pengfei Zhang, Huitao Shen, and Hui Zhai. Out-of-time-order correlation for many-body localization. *Science bulletin*, 62(10):707–711, 2017.

- [25] Hilda A Cerdeira, K Furuya, and BA Huberman. Lyapunov exponent for quantum dissipative systems. *Physical review letters*, 61(22):2511, 1988.
- [26] Edward Ott. *Chaos in dynamical systems*. Cambridge university press, 2002.
- [27] Olimpia Lombardi. El problema de la ergodicidad en la mecánica estadística (the problem of ergodicity in statistical mechanics). *Critica: Revista Hispanoamericana de Filosofía*, pages 3–41, 2003.
- [28] William K Wootters. A wigner-function formulation of finite-state quantum mechanics. *Annals of Physics*, 176(1):1–21, 1987.
- [29] César Miquel, Juan Pablo Paz, and Marcos Saraceno. Quantum computers in phase space. *Physical Review A*, 65(6):062309, 2002.
- [30] Alfredo M. Ozorio de Almeida. The weyl representation in classical and quantum mechanics. *Physics Reports*, 295:265 – 342, 1998.
- [31] A.M.F. Rivas and A.M. Ozorio de Almeida. The weyl representation on the torus. *Annals of Physics*, 276:223 – 256, 1999.
- [32] Stanislaw M Ulam. *A collection of mathematical problems*, volume 8. Interscience Publishers, 1960.
- [33] Stefan Klus, Péter Koltai, and Christof Schütte. On the numerical approximation of the perron-frobenius and koopman operator. *arXiv preprint arXiv:1512.05997*, 2015.
- [34] M Basilio De Matos and A M Ozorio De Almeida. Quantization of anosov maps. *Annals of Physics*, 237(1):46–65, 1995.
- [35] Arnd Bäcker. Numerical aspects of eigenvalue and eigenfunction computations for chaotic quantum systems. In Mirko Degli Esposti and Sandro Graffi, editors, *The Mathematical Aspects of Quantum Maps*, pages 91–144, Berlin, Heidelberg, 2003. Springer Berlin Heidelberg.
- [36] Dmitri V Anosov. Roughness of geodesic flows on compact riemannian manifolds of negative curvature. In *Hamiltonian Dynamical Systems*, pages 483–485. CRC Press, 2020.
- [37] JP Keating and F Mezzadri. Pseudo-symmetries of anosov maps and spectral statistics. *Nonlinearity*, 13(3):747, 2000.

- [38] Pablo D. Bergamasco. Ergodicidad clásica y complejidad cuántica. Master's thesis, Facultad de Ciencias Exactas y Naturales. Universidad de Buenos Aires, 2019.
- [39] Jean-Pierre Gazeau. *Coherent states in quantum physics*. Wiley, 2009.
- [40] Nandor L Balazs and André Voros. The quantized baker's transformation. *Annals of Physics*, 190(1):1–31, 1989.
- [41] Jeffery Hein and Peter Johnson. Quantum cat map on a torus. ., 2011.
- [42] JP Keating. The cat maps: quantum mechanics and classical motion. *Nonlinearity*, 4(2):309, 1991.
- [43] JH Hannay and Michael V Berry. Quantization of linear maps on a torus-fresnel diffraction by a periodic grating. *Physica D: Nonlinear Phenomena*, 1(3):267–290, 1980.
- [44] Waclaw Sierpinski. *Elementary Theory of Numbers: Second English Edition (edited by A. Schinzel)*. Elsevier, 1988.
- [45] M Rademacher. Lectures on elementary number theory. *Blaisdale Publ. Co., New York*, 1964.
- [46] Serge Lang. Algebraic number theory. addison-wesley. *Reading*, 1970.
- [47] M Basilio Dematos and AM Ozorio Dealmeida. Quantization of anosov maps. *Annals of Physics*, 237(1):46–65, 1995.
- [48] Gabriel G Carlo, Giuliano Benenti, Giulio Casati, and Dima L Shepelyansky. Quantum ratchets in dissipative chaotic systems. *Physical review letters*, 94(16):164101, 2005.
- [49] H.P. Breuer and F. Petruccione. *The Theory of Open Quantum Systems*. Oxford University Press, 2002.
- [50] Gabriel G Carlo, Leonardo Ermann, and Alejandro MF Rivas. Effects of chaotic dynamics on quantum friction. *Physical Review E*, 99(4):042214, 2019.
- [51] R Graham. Global and local dissipation in a quantum map. *Zeitschrift für Physik B Condensed Matter*, 59(1):75–90, 1985.
- [52] T Dittrich and R Graham. Long time behavior in the quantized standard map with dissipation. *Annals of Physics*, 200(2):363–421, 1990.

- [53] Pablo D Bergamasco, Gabriel G Carlo, and Alejandro MF Rivas. Out-of-time ordered correlators, complexity, and entropy in bipartite systems. *Physical Review Research*, 1(3):033044, 2019.
- [54] Julian Schwinger. Unitary operator bases. *Proceedings of the National Academy of Sciences*, 46(4):570–579, 1960.
- [55] R. Prakash and A. Lakshminarayan. Scrambling in strongly chaotic weakly coupled bipartite systems: Universality beyond the ehrenfest timescale. *Physical Review B*, 101(12):121108, 2020.
- [56] Jayendra N Bandyopadhyay and Arul Lakshminarayan. Bounds on quantum entanglement from random matrix theory. *Phys. Rev. Lett.*, 89(quant-ph/0203117):060402, 2002.
- [57] AMF Rivas and AM Ozorio De Almeida. The weyl representation on the torus. *Annals of Physics*, 276(2):223–256, 1999.
- [58] Alejandro MF Rivas. Semiclassical scar functions in phase space. *Journal of Physics A: Mathematical and Theoretical*, 40(36):11057, 2007.
- [59] José Raúl González Alonso, Nicole Yunger Halpern, and Justin Dressel. Out-of-time-ordered-correlator quasiprobabilities robustly witness scrambling. *Physical review letters*, 122(4):040404, 2019.
- [60] Yong-Liang Zhang, Yichen Huang, Xie Chen, et al. Information scrambling in chaotic systems with dissipation. *Physical Review B*, 99(1):014303, 2019.
- [61] Akram Touil and Sebastian Deffner. Quantum scrambling and the growth of mutual information. *Quantum Science and Technology*, 5(3):035005, 2020.
- [62] Akram Touil and Sebastian Deffner. Information scrambling versus decoherence—two competing sinks for entropy. *PRX Quantum*, 2(1):010306, 2021.
- [63] Paolo Zanardi and Namit Anand. Information scrambling and chaos in open quantum systems. *Physical Review A*, 103(6):062214, 2021.
- [64] Brian Swingle and Nicole Yunger Halpern. Resilience of scrambling measurements. *Physical Review A*, 97(6):062113, 2018.

- [65] Alexis Tantet, Valerio Lucarini, and Henk A Dijkstra. Resonances in a chaotic attractor crisis of the lorenz flow. *Journal of Statistical Physics*, 170:584–616, 2018.
- [66] Leonardo Ermann and Gabriel G Carlo. Quantum parameter space of dissipative directed transport. *Physical Review E*, 91(1):010903, 2015.
- [67] Gabriel G Carlo. Quantum isoperiodic stable structures and directed transport. *Physical Review Letters*, 108(21):210605, 2012.
- [68] Giuliano Benenti, Gabriel G. Carlo, and Toma ž Prosen. Wigner separability entropy and complexity of quantum dynamics. *Phys. Rev. E*, 85:051129, 2012.