

E. N. E. A. Biblioteca	
ARCHIVO PUBLICACIONES	
NO 1	AÑO 1956

NO SE PRESTA

REPUBLICA ARGENTINA

PUBLICACIONES
DE LA

COMISION NACIONAL DE LA ENERGIA ATOMICA

Serie de Publicaciones Internas

Nº 1

CALCULO DEL FACTOR DE
UTILIZACION TERMICA

Por Vera Winitzky de Spinadel y Carlos Domingo

Buenos Aires

1956

CALCULO DE FACTOR DE UTILIZACION TERMICA

Vera Winitzky de Spinadel y
Carlos Domingo

El factor f de utilización térmica es:

$$f = \frac{M_U}{\sum M_v} = \frac{\text{número de neutrones térmicos absorbidos en el combustible}}{\text{número de neutrones térmicos absorbidos}} \quad (1)$$

Definimos:

$$S = 1 + \frac{M_{v_1}}{M_U} + \frac{M_{v_2}}{M_U} + \dots \quad (2)$$

donde los subíndices $v_1, v_2, \dots$ corresponden a los medios absorbentes distintos del combustible. Evidentemente

$$n_{v_i} = \sum_{a_{v_i}} \bar{\Phi}_i$$

donde $\sum$ es la sección eficaz macroscópica de absorción en el medio i y $\bar{\Phi}_i$ el flujo medio en el medio i

De la expresión de S se deduce que, multiplicando el flujo de todos los medios por una constante, el valor de S y por lo tanto el de f , no varían. Así que en el cálculo de S podemos tomar uno de los flujos como arbitrario y considerar los valores de los demás flujos relativos al primero.

En lo que sigue, consideraremos el caso en que los diversos medios: combustible, moderador, absorbente, "gaps" de aire, etc., forman capas cilíndricas concéntricas y que el largo de los cilindros es suficiente como para despreciar las perturbaciones en las puntas.

Consideraremos además que la capa exterior es moderadora y en ella se producen los neutrones térmicos con una densidad de fuente Q constante.

En el cálculo de f , usando la notación matricial de Schmid (1), se halla una relación entre el flujo y la corriente de la cara externa de la capa y el flujo y la corriente de la cara interna de la misma capa. Consideraremos un sector de 1 radián y de altura igual a la unidad, y a él le aplicaremos la ecuación de difusión.

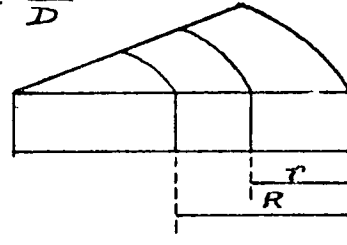
Usaremos las notaciones:

- $\Phi(\rho)$: flujo a la distancia ρ del eje
- $\bar{\Phi}$: flujo en la cara externa de una capa
- φ : flujo en la cara interna de una capa
- $I(\rho)$: corriente total a la distancia ρ en un sector de 1 radián
- $I(\rho) = \rho J(\rho)$ $J(\rho)$: corriente de neutrones
- I : valor de $I(\rho)$ en la cara externa
- i : valor de $I(\rho)$ en la cara interna

R : radio exterior de la capa
 r : radio interior de la capa
 D : constante de difusión; $x^2 = \frac{z^2}{D}$

Usaremos los siguientes subíndices:

n : capa absorbente cualquiera
 z : medio central
 d : capa difusora no absorbente
 u : medio combustible
 m : medio moderador
 v : vacío



K : medio refrigerante moderador

1) Medio absorbente cualquiera, no moderador

En este caso, la ecuación de difusión es:

$$\nabla^2 \phi(\rho) - x^2 \phi(\rho) = 0 \quad (3)$$

que puesta en coordenadas cilíndricas nos lleva a la solución:

$$\phi(\rho) = A I_0(x\rho) - B K_0(x\rho) \quad (4)$$

Recordando que: $J = D \cdot \text{grad } \phi$, y que $I = \rho J$, resulta:

$$D^{-1} I(\rho) = A \rho x I_1(x\rho) + B \rho x K_1(x\rho) \quad (5)$$

En la notación matricial, estas dos ecuaciones se escriben:

$$\begin{pmatrix} \phi(\rho) \\ D^{-1} I(\rho) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} I_0(x\rho) & -K_0(x\rho) \\ \rho x I_1(x\rho) & \rho x K_1(x\rho) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A \\ B \end{pmatrix} = T(\rho) \begin{pmatrix} A \\ B \end{pmatrix} \quad (6)$$

Esta matriz $T(\rho)$ se puede invertir ya que su determinante:

$$\rho(x) [I_0(x\rho) K_1(x\rho) + K_0(x\rho) I_1(x\rho)] = 1 \quad (7)$$

La inversa es:

$$T^{-1}(\rho) = \begin{pmatrix} \rho x K_1(x\rho) & K_0(x\rho) \\ -\rho x I_1(x\rho) & I_0(x\rho) \end{pmatrix} \quad (8)$$

$$\begin{pmatrix} A \\ B \end{pmatrix} = T^{-1}(\rho) \begin{pmatrix} \phi(\rho) \\ D^{-1} I(\rho) \end{pmatrix} \quad (9)$$

Aplicando esta ecuación a la cara interna:

$$\begin{pmatrix} A \\ B \end{pmatrix} = T^{-1}(r) \begin{pmatrix} \phi(r) \\ D^{-1} I(r) \end{pmatrix}$$

Aplicando la (6) a la cara externa y sustituyendo el valor de $\begin{pmatrix} A \\ B \end{pmatrix}$

hallado:

$$\begin{pmatrix} \phi \\ D^{-1}I \end{pmatrix} = T(R) T^{-1}(r) \begin{pmatrix} \varphi \\ D^{-1}i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} I_0(xR) & -K_0(xR) \\ R x I_1(xR) & R x K_1(xR) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} r x K_1(xr) & K_0(xr) \\ -r x I_1(xr) & I_0(xr) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \varphi \\ D^{-1}i \end{pmatrix}$$

Llamando:

$$\left. \begin{aligned} \alpha &= x r [I_0(xR) K_1(xr) + K_0(xR) I_1(xr)] \\ \beta &= D^{-1} [I_0(xR) K_0(xr) - K_0(xR) I_0(xr)] \\ \gamma &= D R r x^2 [I_1(xR) K_1(xr) - K_1(xR) I_1(xr)] \\ \delta &= R x [I_1(xR) K_0(xr) + K_1(xR) I_0(xr)] \end{aligned} \right\} \quad (10)$$

queda:

$$\begin{pmatrix} \phi_n \\ I_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \varphi_n \\ i_n \end{pmatrix} \quad (11)$$

Es evidente que todos los valores del flujo y la corriente están determinadas a menos de un factor multiplicativo arbitrario.

2) Medio central

Nos interesa conocer la relación entre ϕ e I

$$\frac{\phi_z}{I_z} = \frac{\alpha \varphi + \beta i}{\gamma \varphi + \delta i} \text{ y cuando } r \rightarrow 0 \text{ resulta:}$$

$$\frac{\phi_z}{I_z} = \frac{1}{D_z R_z x_z} \frac{I_0(x R_z)}{I_1(x R_z)} \quad (12)$$

3) Medio difusor no absorbente, no moderador

En un medio no absorbente $\Sigma = 0$ la ecuación de difusión queda:

$$\nabla^2 \phi(\rho) = 0$$

cuya solución en coordenadas cilíndricas es:

$$\begin{aligned} \phi(\rho) &= B \ln \rho + C \\ J(\rho) &= \frac{D}{\rho} B \\ I(\rho) &= B \cdot D \end{aligned}$$

que en notación matricial:

$$\begin{pmatrix} \phi(\rho) \\ D^{-1} I(\rho) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \ln \rho & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} B \\ C \end{pmatrix}$$

La matriz anterior es invertible y su inversa es:

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -\ln r \end{pmatrix}$$

Por ello, para la cara interior del medio, podemos escribir

$$\begin{pmatrix} B \\ C \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -\ln r \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \varphi \\ D_i^{-1} \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} \phi \\ D^{-1} I \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \ln R & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -\ln r \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \varphi \\ D_i^{-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & \ln \frac{R}{r} \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \varphi \\ D^{-1} \end{pmatrix}$$

Llamando:

$$\alpha_d = 1 \quad ; \quad \beta_d = \frac{1}{D} \ln \frac{R}{r} \quad ; \quad \gamma_d = 0 \quad ; \quad \delta_d = 1$$

Tenemos la fórmula análoga a la (11)

(13)

$$\begin{pmatrix} \phi \\ I \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha_d & \beta_d \\ \gamma_d & \delta_d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \varphi \\ i \end{pmatrix}$$

4) Medio combustible

Este caso se calcula de acuerdo con la fórmula (11). Aquí pondremos una condición que nos permitirá fijar la constante arbitraria mencionada en 1). El número de neutrones absorbido en el uranio en el sector de un ra dí an es:

$$n_u = I_u - i_u$$

(14)

Elegimos la constante arbitraria en tal forma que

$$n_u = 1$$

(15)

La ventaja de tomarla así es que entonces tenemos, de acuerdo con (1) y (2):

$$f = \frac{1}{S} = \frac{1}{\text{neutrones absorbidos}}$$

$\therefore S \cdot n^{\circ}$ de neutrones térmicos absorbidos en total =

= n° de neutrones térmicos producidos

(16)

5) Medio moderador

Si Q es la densidad de fuente supuesta constante, la ecuación de difu sión es:

$$\nabla^2 \phi(r) - \kappa^2 \phi(r) + \frac{Q}{D} = 0$$

que en coordenadas cilíndricas tiene la solución:

$$\begin{aligned}\phi(\rho) &= A I_0(x\rho) - B K_0(x\rho) + \frac{Q}{x^2 D} \\ D^{-1} I(\rho) &= A \rho x I_1(x\rho) + B \rho x K_1(x\rho) \\ \begin{pmatrix} \phi(\rho) - \frac{Q}{x^2 D} \\ D^{-1} I(\rho) \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} I_0(x\rho) & -K_0(x\rho) \\ \rho x I_1(x\rho) & \rho x K_1(x\rho) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A \\ B \end{pmatrix} = T(\rho) \begin{pmatrix} A \\ B \end{pmatrix}\end{aligned}$$

e introduciendo la notación (10) resulta:

$$\begin{aligned}\begin{pmatrix} \phi - \frac{Q}{x^2 D} \\ I \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \varphi - \frac{Q}{x^2 D} \\ i \end{pmatrix} \\ I &= \gamma \left(\varphi - \frac{Q}{x^2 D} \right) + \delta i\end{aligned}\quad (17)$$

pues la corriente que sale de la celda es cero. De la anterior resulta:

$$Q = x^2 D \left[\varphi + \frac{\delta}{\gamma} i \right]$$

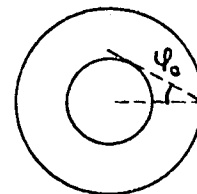
De acuerdo con el significado de S en (16):

$$\begin{aligned}S &= \frac{\pi (R^2 - r^2)}{2\pi} Q \\ S &= \left(\frac{R^2 - r^2}{2} \right) x^2 D \left[\varphi_m + \frac{\delta_m}{\gamma_m} i_m \right]\end{aligned}\quad (18)$$

6) Medio vacío

Si una de las capas cilíndricas está vacía, la teoría de difusión no es aplicable, debiéndose usar hipótesis más refinadas, como veremos más adelante. (1) Las condiciones de contorno de Mercier (2) equivalen a poner en:

$$\begin{pmatrix} \phi_v \\ I_v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha_v & \beta_v \\ \gamma_v & \delta_v \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \varphi_v \\ i_v \end{pmatrix}$$



$$\alpha_v = 1 \quad ; \quad \beta_v = 2N \quad ; \quad \gamma_v = 0 \quad ; \quad \delta_v = 1$$

donde:

$$N = 1 - \frac{2\varphi_0}{\pi} - \frac{\sin 2\varphi_0}{\pi}$$

(1) Ver apéndice 2

7) Medio refrigerante moderador

En el caso de existir más de una capa moderadora, supondremos una distribución homogénea de fuentes de neutrones térmicos proporcional a la densidad de fuente Q . Sea k el factor de proporcionalidad. En ese caso la solución de la ecuación de difusión es:

$$\begin{aligned}\phi_K &= \alpha_K \varphi_K + \beta_K i_K + \frac{k Q}{\Sigma_K^2 D_K} (1 - \alpha_K) \\ I_K &= \gamma_K \varphi_K + \delta_K i_K - \frac{k Q}{\Sigma_K^2 D_K} \gamma_K\end{aligned}$$

ó sea:

$$\begin{pmatrix} \phi_K - \frac{k Q}{\Sigma_K^2 D_K} \\ I_K \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha_K & \beta_K \\ \gamma_K & \delta_K \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \varphi_K - \frac{k Q}{\Sigma_K^2 D_K} \\ i_K \end{pmatrix}$$

El valor de S resulta:

$$S = \frac{Q \cdot \pi \cdot (R^2 - r^2)}{2 \pi} + \frac{k \cdot Q \cdot \pi (R_K^2 - r_K^2)}{2 \pi}$$

y reemplazando el valor de k y el de Q obtenemos f (')

Procedimiento de cálculo

Comenzamos asignando un valor arbitrario c a la corriente en la cara exterior del medio central: $I_z = c$. Mediante la (12) calculamos ϕ_z . Si el medio central fuera el vacío pondríamos $\phi_z = c$; $I_z = 0$ (esta última fórmula expresa que en el vacío no se pierden ni se generan neutrones térmicos). Si el medio central fuera el combustible pondríamos: $I_o = \eta_o = 1$ de acuerdo con (14) y (15).

La ϕ_z e I_z obtenidas son iguales a la φ_e y i_e del medio concéntrico siguiente. Podemos pues, mediante la (11), (13) ó (17), calcular el ϕ e I correspondientes. Cuando llegamos a la capa combustible imponemos la condición (15), que nos permite despejar c . Seguimos así desde las capas interiores a las exteriores hasta obtener φ_m e i_m . Mediante la (18) calculamos S y con la (2) despejamos f .

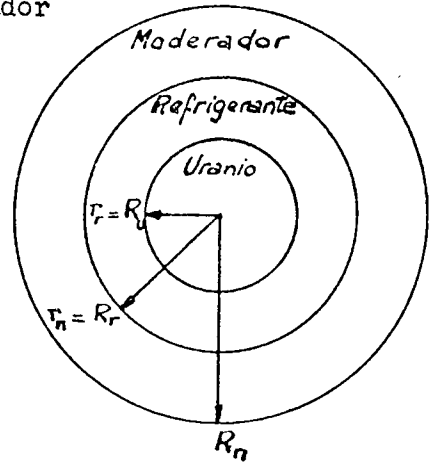
(') Ver apéndice 1

EJEMPLOS DE APLICACION

a) refrigerante no absorbente, no moderador

$$\frac{1}{f} = \frac{2 \epsilon_m}{\alpha_u^2 D_u R_u^2} G_o (\alpha_u R_u) +$$

$$+ \frac{\epsilon_m}{D_r} \ln \frac{R_r}{R_u} + \eta_m$$



b) refrigerante absorbente, no moderador

$$\frac{1}{f} = \frac{2 \alpha_r \epsilon_m}{\alpha_u^2 D_u R_u} E(\alpha_r R_r; \alpha_r R_u) G_o(\alpha_u R_u) + \frac{\epsilon_m}{D_r} F_o(\alpha_r R_r; \alpha_r R_u)$$

$$+ \frac{2 \alpha_r^2 D_r R_r \eta_m}{\alpha_u^2 D_u R_u} F_1(\alpha_r R_r; \alpha_r R_u) G_o(\alpha_u R_u) +$$

$$+ \alpha_r R_r \eta_m E(\alpha_r R_u; \alpha_r R_r).$$

c) refrigerante absorbente moderador

$$\frac{1}{f} = \frac{2 \alpha_r \epsilon_m}{\alpha_u^2 D_u R_u} E(\alpha_r R_r; \alpha_r R_u) G_o(\alpha_u R_u) +$$

$$+ \frac{\epsilon_m k Q}{\alpha_r^2 D_r} [1 - \alpha_r R_u E(\alpha_r R_r; \alpha_r R_u)] + \frac{\epsilon_m}{D_r} F_o(\alpha_r R_r; \alpha_r R_u)$$

$$+ \frac{2 \alpha_r^2 D_r R_r}{\alpha_u^2 D_u R_u} \eta_m F_1(\alpha_r R_r; \alpha_r R_u) G_o(\alpha_u R_u) +$$

$$+ \alpha_r R_r \eta_m E(\alpha_r R_u; \alpha_r R_r) - \eta_m k Q R_r R_u G_1(\alpha_r R_r; \alpha_r R_u)$$

(ver Apéndice Nº 1)

donde:

$$G_o (x_u R_u) \equiv \frac{x_u R_u}{2} \frac{I_o (x_u R_u)}{I_1 (x_u R_u)}$$

$$E (x; y) \equiv I_o (x) K(y) + K_o (x) I_1(y)$$

$$F_o (x; y) \equiv I_o (x) K(y) - K_o (x) I_o(y)$$

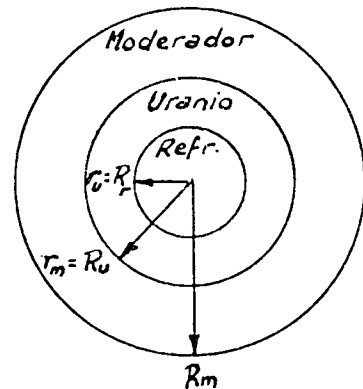
$$F_1 (x; y) \equiv I_1 (x) K_1(y) - K_1 (x) I_1(y)$$

$$\mathcal{E}_m \equiv \frac{1}{2} (R_m^2 - R_r^2) x_m^2 D_m$$

$$\eta_m \equiv \frac{1}{2} (R_m^2 - R_r^2) \frac{x_m}{R_r} \frac{E (x_m R_r; x_m R_m)}{F_1 (x_m R_m; x_m R_r)}$$

d) refrigerante no absorbente no moderador

$$\frac{1}{f} = \frac{\gamma_m}{x_u \cdot D_u \cdot R_u} G_1 (x_u R_u; x_u R_r) + \omega_m$$



e) refrigerante absorbente no moderador

$$\begin{aligned} \frac{1}{f} = & \frac{x_m^2 D_m (R_m^2 - R_r^2)}{x_u^2 D_u R_u^2 N} \cdot \frac{E (x_u R_u; x_u R_r)}{E (x_u R_r; x_u R_r)} G_o (x_r R_r) + \\ & + \frac{2 \omega_m G_o (x_r R_r)}{x_u R_u W} \cdot \frac{F_1 (x_u R_u; x_u R_r)}{E (x_u R_r; x_u R_r)} + \\ & + \frac{x_r^2 D_r R_r \omega_m}{x_u^2 D_u R_u W} \cdot \frac{E (x_u R_r; x_u R_u)}{E (x_u R_r; x_u R_r)} + \end{aligned}$$

$$+ \frac{\mathcal{L}_m^2 D_m (R_m^2 - R_u^2) R_r \mathcal{L}_r^2 D_r}{2 \mathcal{L}_u^3 D_u^2 R_u^2 W} \cdot \frac{F_0(\mathcal{L}_u R_u; \mathcal{L}_u R_r)}{E(\mathcal{L}_u R_r; \mathcal{L}_u R_r)}$$

donde: $G_r(\mathcal{L}_u R_u; \mathcal{L}_u R_r) = \frac{E(\mathcal{L}_u R_u; \mathcal{L}_u R_r)}{F_1(\mathcal{L}_u R_u; \mathcal{L}_u R_r)}$

$$V_m = \frac{\mathcal{L}_m^2 D_m}{2} (R_m^2 - R_u^2)$$

$$w_m = \frac{(R_m^2 - R_u^2) \mathcal{L}_m}{2 R_u} \cdot \frac{E(\mathcal{L}_m R_u; \mathcal{L}_m R_m)}{F_1(\mathcal{L}_m R_m; \mathcal{L}_m R_u)}$$

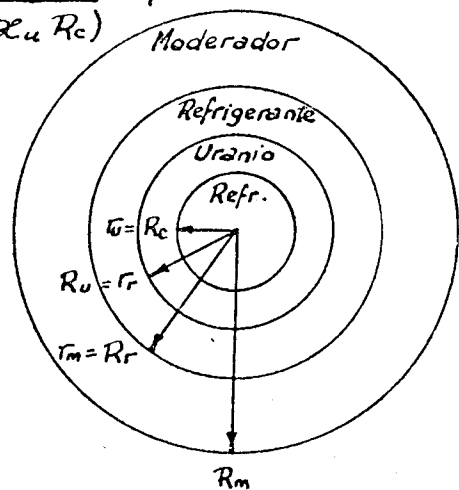
$$W = \frac{2}{\mathcal{L}_u R_u} \frac{F_1(\mathcal{L}_u R_u; \mathcal{L}_u R_r)}{E(\mathcal{L}_u R_r; \mathcal{L}_u R_r)} G_o(\mathcal{L}_r R_r) -$$

$$- \frac{\mathcal{L}_r^2 D_r R_r^2}{\mathcal{L}_u^2 D_u R_u^2} + \frac{\mathcal{L}_r^2 D_r R_r}{\mathcal{L}_u^2 D_u R_u} \cdot \frac{E(\mathcal{L}_u R_r; \mathcal{L}_u R_u)}{E(\mathcal{L}_r R_r; \mathcal{L}_r R_r)}$$

f) refrigerante no absorbente no moderador

$$\frac{1}{f} = \frac{\varepsilon_m}{\mathcal{L}_u D_u R_u} \frac{E(\mathcal{L}_u R_u; \mathcal{L}_u R_c)}{F_1(\mathcal{L}_u R_u; \mathcal{L}_u R_c)} +$$

$$+ \frac{\varepsilon_m}{D_r} \ln \frac{R_r}{R_u} + \eta_m$$



g) refrigerante absorbente no moderador

$$\begin{aligned}
 \frac{1}{f} = & \frac{\epsilon_m \alpha_r}{D_u \alpha_u} \cdot \frac{E(\alpha_r R_r; \alpha_r R_u) E(\alpha_u R_u; \alpha_u R_c)}{F_1(\alpha_u R_u; \alpha_u R_c)} + \\
 & + \frac{\epsilon_m}{\alpha_u D_u D_r R_c} \cdot \frac{F_0(\alpha_r R_r; \alpha_r R_u) E(\alpha_u R_c; \alpha_u R_u)}{F_1(\alpha_u R_u; \alpha_u R_c)} + \\
 & + \frac{\eta_m D_r \alpha_r^2 R_r}{D_u \alpha_u} \cdot \frac{F_1(\alpha_r R_r; \alpha_r R_u) E(\alpha_u R_u; \alpha_u R_c)}{F_1(\alpha_u R_u; \alpha_u R_c)} + \\
 & + \eta_m \frac{\alpha_r R_r}{D_u \alpha_u R_u} \cdot \frac{E(\alpha_r R_u; \alpha_r R_r) E(\alpha_u R_c; \alpha_u R_u)}{F_1(\alpha_u R_u; \alpha_u R_c)}
 \end{aligned}$$

APENDICE Nº 1

En el caso que valga la fórmula:

$$Q_r = kQ = \xi_r \sum_{s_r} \bar{\phi}_r \quad (5)$$

p.158 Glasstone-Edlund

se puede calcular Q_r tomando como:

$$\bar{\phi}_r = \frac{1}{\pi(R_r^2 - r^2)} \int_r^{R_r} \phi(r) 2\pi r dr = \frac{2}{R_r^2 - r^2} \int_r^{R_r} r \phi(r) dr$$

donde:
$$\phi_r(r) = a I_0(x_r r) - b K_0(x_r r) + \frac{Q_r}{x_r^2} D_r$$

que es la solución de la ecuación de difusión:

$$\nabla^2 \phi_r(r) - x_r^2 \phi_r(r) + \frac{1}{D_r} Q_r = 0$$

Las constantes a y b se determinan con las condiciones:

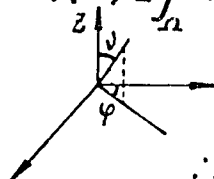
$$\phi_r = \phi_u = a I_0(x_r r) - b K_0(x_r r) + \frac{Q_r}{x_r^2} D_r$$

$$L_r = L_u = a x_r r I_1(x_r r) - b x_r r K_1(x_r r)$$

APENDICE Nº 2

El método de Mercier tiene en cuenta el hecho que hay neutrones provenientes del moderador, que pueden atravesar el "gap" de aire sin llegar al uranio. Si $n(\vec{r}, \nu, \varphi)$ es el número de neutrones que por unidad de tiempo, en la posición definida por $\vec{r}$ atraviesan la unidad de superficie normal a la dirección definida por φ y ν y tienen la dirección dentro, del ángulo sólido definido por φ y $\varphi + d\varphi$; ν y $\nu + d\nu$ del flujo total es:

$$n(\vec{r}) = \int_{\Omega} n(\vec{r}, \nu, \varphi) d\Omega$$



donde:
$$d\Omega = \frac{dS}{r^2} = \frac{r \cdot d\varphi \cdot r \cdot \text{sen } \nu \cdot d\nu}{r^2} = \text{sen } \nu \cdot d\nu \cdot d\varphi$$

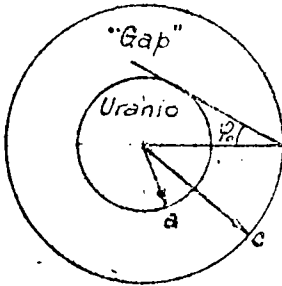
$$\therefore n(\vec{r}) = \int_0^{2\pi} \int_0^\pi n(\vec{r}, \nu, \varphi) \text{sen } \nu \cdot d\nu \cdot d\varphi$$

la corriente neta resulta:

$$g(\vec{r}) = \int_{\Omega} n(\vec{r}, v, \varphi) \cdot \sin v \cos \varphi \cdot d\Omega$$

El flujo total de neutrones en la cara interna del grafito y en la externa del uranio son distintos:

$$n(c) \neq n(a).$$



suponiendo simetría radial, vale para las corrientes:

$$a \cdot g(a) = c \cdot g(c)$$

Para calcular $g(a)$, tenemos en cuenta la corriente de neutrones que salen del uranio/cm², suponiendo la celda unitaria infinitamente larga:

$$g(a) = 2 \int_0^\pi \sin^2 v \cdot dv \left[\int_0^{\pi/2} n(a, v, \varphi) \cos \varphi \, d\varphi + \frac{c}{a} \int_{\pi/2}^\pi n(c, v, \varphi) \cos \varphi \, d\varphi \right]$$

Es preciso suponer una expresión para $n(\vec{r}, v, \varphi)$. Para ello, lo desarrollamos en esféricos armónicos y tomamos la primer armónica:

$$n(\vec{r}, v, \varphi) = \frac{1}{4\pi} [n(r) + 3g(r) \sin v \cos \varphi]$$

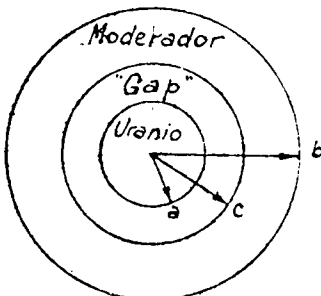
y reemplazando en la expresión de $g(a)$:

$$n(c) - n(a) = -2N g(a)$$

donde:

$$N = 1 - \frac{2\varphi_0}{\pi} - \frac{\sin \varphi_0}{\pi}$$

Si se toma la ecuación de difusión, reemplazando las condiciones de contorno usuales por las de Mercier:



$$D_0 \nabla^2 n_0(r) - \Sigma_0 n_0(r) = 0 \text{ (combustible)}$$

$$D_1 \nabla^2 n_1(r) - \Sigma_1 n_1(r) + q = 0 \text{ (moderador)}$$

$$g(b) = 0$$

$$a \cdot g(a) = c \cdot g(c).$$

$$n_r(c) - n_o(a) = -2N g(a) = 2ND_o \left[\frac{dn(a)}{dr} \right]_{r=a}$$

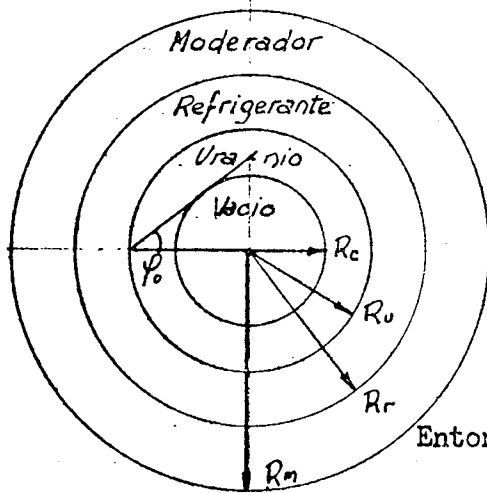
resulta:

$$\frac{1}{f} = \frac{(b^2 - c^2) \epsilon_0}{a^2 \epsilon_0} \left[\frac{x_0 a}{2} \cdot \frac{I_0(x_0 a)}{I_1(x_0 a)} \right] + \frac{(b^2 - c^2) \epsilon_1}{2c} \left[\frac{I_1(x, b) K_0(x, c) + K_1(x, b) I_0(x, c)}{I_1(x, b) K_1(x, c) - K_1(x, b) I_1(x, c)} \right] + \left(\frac{b^2 - c^2}{a} \right) \epsilon_1 N$$

fórmula que coincide con la dada por Newmarch (3).-

APENDICE Nº 3

Sea por ejemplo el caso de una barra con agujero central



$$\psi_v = c \quad ; \quad j_v = 0$$

$$\begin{pmatrix} \phi_v \\ J_v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha_v & \beta_v \\ \gamma_v & \delta_v \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\therefore \phi_v = \alpha_v c$$

$$J_v = \gamma_v c$$

Entonces:

$$n_v = J_v - j_v = J_v = \gamma_v c = 1$$

$$\therefore c = \frac{1}{\gamma_v}$$

Como:

$$T_v = \begin{pmatrix} 1 & 2N \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

donde:

$$N = 1 - \frac{2\phi_0}{\pi} - \frac{\sin 2\phi_0}{\pi}$$

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} \phi_m \\ j_m \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} \phi_v \\ J_v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2N \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \phi_v \\ j_v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \phi_v - 2N j_v \\ j_v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \phi_v - 2N J_v \\ J_v \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \alpha_v \\ \gamma_v \\ 1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

$$\phi_m = \frac{\alpha_v}{\gamma_v} - 2N \quad ; \quad j_m = 1$$

$$S = \frac{1}{f} = \epsilon_m \phi_m + \eta_m j_m$$

$$\begin{aligned}
 &= \frac{1}{2} (R_m^2 - R_r^2) x_m^2 D_m \frac{R_c x_u [I_0(x_u R_u) K_1(x_u R_c) + K_0(x_u R_c) I_1(x_u R_c)]}{D_u x_u^2 R_u R_c [I_1(x_u R_u) K_1(x_u R_c) - K_1(x_u R_u) I_1(x_u R_c)]} \\
 &+ N(R_m^2 - R_r^2) x_m^2 D_m + \frac{1}{2} \frac{x_m}{R_r} (R_m^2 - R_r^2) \frac{I_0(x_m R_r) K_1(x_m R_m) + K_0(x_m R_r) I_1(x_m R_m)}{I_1(x_m R_m) K_1(x_m R_r) - K_1(x_m R_m) I_1(x_m R_r)} \\
 &= \frac{R_m^2 - R_r^2}{R_r^2} \frac{\Sigma a_m}{\Sigma a_u} \frac{x_u R_u}{2} \frac{I_0(x_u R_u) K_1(x_u R_c) + K_0(x_u R_u) I_1(x_u R_c)}{I_1(x_u R_u) K_1(x_u R_c) - K_1(x_u R_u) I_1(x_u R_c)} + \\
 &+ \left(1 - \frac{2\varphi_0}{\pi} - \frac{\text{sen } 2\varphi_0}{\pi}\right) (R_m^2 - R_r^2) x_m^2 D_m + \\
 &+ \frac{x_m^2 R_m - x_m^2 R_r}{2 x_m R_r} \frac{I_0(x_m R_r) K_1(x_m R_r) + K_0(x_m R_r) I_1(x_m R_r)}{I_1(x_m R_m) K_1(x_m R_r) - K_1(x_m R_m) I_1(x_m R_r)}
 \end{aligned}$$

Datos: $R_c = 0,75 \text{ cm}$; $R_u = 2 \text{ cm}$; $R_r = 5 \text{ cm}$; $R_m = 15 \text{ cm}$.

$$\Sigma a_m = 0,0003457, \Sigma a_u = 0,3553, x_u R_u = 1,62, x_u R_c = 0,6075$$

$$\text{sen } \varphi_0 = \frac{2}{5} = 0,4 \therefore \varphi_0 = 0,390 \therefore \text{sen } 2\varphi_0 = 0,86153.$$

$$N = 1 - \frac{0,390 \times 2}{3,1416} - \frac{0,86153}{3,1416} = 0,47749.$$

$$x_m R_r = 0,02015 \times 5 = 0,1075$$

$$x_m R_m = 0,02015 \times 15 = 0,3225$$

$$D_m = \frac{\Sigma a_m}{x_m^2} = \frac{\lambda_r}{3} = \frac{1}{3 \Sigma_s (1 - \bar{\mu}_0)} = \frac{1}{3 \frac{0,603 \times 10^{23}}{12} \cdot 1,72 \left(1 - \frac{2}{3 \times 12}\right)} = 0,8167$$

Sustituyendo:

$$\frac{1}{f} = \frac{200}{4} \cdot \frac{0,0003457}{0,3553} \cdot 1,92762 + 0,47749 \cdot 200 \cdot 0,00046225 + 0,8167 +$$

$$+ 1,0233 = 0,093777 + 0,036052 + 1,0233 = 1,1531$$

$$f = 0,8672$$

Si se aplica, en cambio, la fórmula del caso $f)$, despreciando el último término, por ser $D_b \gg D_m$ resulta:

$$\frac{1}{f} = 1,0383$$

$$f = 0,9631$$

Bibliografia

- (1) " Calculation in Heterogeneous Nuclear Reactors by Matrix Formalism", P. Schmid, Journ. Nuclear Energy, I, pp. 101-109, 1954.
 - (2) "Conditions de Continuité à travers une gaine d'air dans une Ceulle cylindrique de Hauteur infinie", Service Physique Mathématique Nov. 1953.
 - (3) "A Modification to the Diffusion Theory of the Thermal Fine Structure in a Reactor to account for the Effect of Air Channels" D. Newmarch, J. Nuclear Energy, 2, pp. 52-58, 1955.
 - (4) "Thermal Utilization for large thermal Reactors", R.W. Houston, Nucleonics, 13, N° 4, p. 70, 1955.
 - (5) "The Elements of Nuclear Reactor Theory" Glasstone & Edlund
-