

CNEA-AC 11/83

PMTM/A-47

01.83. 25.

REPUBLICA ARGENTINA  
COMISION NACIONAL DE ENERGIA ATOMICA  
Dependiente de la Presidencia de la Nación  
GERENCIA DE DESARROLLO

ELEMENTOS DE TEORIA DE PLASTICIDAD  
PRINCIPIOS FUNDAMENTALES

Alfredo R. SAENZ LOPEZ y A.O. Lucaioli

Buenos Aires  
1983

## TEMA II: TEORIA DE LAMINACION

### II.1. PRINCIPIOS FUNDAMENTALES

Alfredo R. Sáenz López  
Alberto O. Lucaioli

- II.1.A Estado de Tensiones
- II.1.B Estado de Deformaciones
- II.1.C Relaciones Tensión-Deformación en el Rango Elástico
- II.1.D Relaciones Tensión-Deformación en el Rango Plástico
- II.1.E Ensayos Mecánicos

## II.1.A. ESTADO DE TENSIONES

- A.1 Objeto
- A.2 Introducción al estado de tensiones
- A.3 Estado de tensiones en un punto
- A.4 Tensiones en un plano oblicuo
- A.5 Cuádrlica de tensiones - Tensiones principales
- A.6 Ecuación cúbica - Invariantes del estado de tensiones
- A.7 Representación gráfica del estado de tensiones en el punto -  
Método de Mohr
- A.8 Tensiones tangenciales principales
- A.9 Casos particulares de estados de tensiones
- A.10 Componentes hidrostática y desviadora del estado general  
de tensiones
- A.11 Tensión efectiva o equivalente

### A.1. OBJETO

Los procesos de conformado de metales se llevan a cabo en condiciones de carga tales que en general provocan estados complejos de tensiones. Es por ello importante definir las componentes de tensiones, clasificarlas con respecto a algún sistema de referencia, desarrollar el equilibrio de tensiones en un punto, etc. por cuanto todo ello se aplica a la mecánica de los cuerpos deformables plásticamente.

### A.2. INTRODUCCION AL ESTADO DE TENSIONES

Desde el punto de vista de la mecánica del continuo, la primera hipótesis simplificativa que debe tenerse en cuenta, es que se suponen sólidos perfectos, es decir isótropos y homogéneos. Ambos términos se definen:

**Isótropo:** En cualquier punto del cuerpo sus propiedades son iguales en todas direcciones.

**Homogéneo:** Las propiedades son iguales en todos los puntos del cuerpo.

Un cuerpo puede estar sometido a la acción de fuerzas, siendo éstas de volumen o de superficie. Las fuerzas magnéticas, gravitacionales, centrífugas, térmicas, etc., son ejemplos de las de volumen. Aquí se trabajará sólo con las de superficie. La fuerza aplicada por unidad de superficie se designa "tensión".

### A.3. ESTADO DE TENSIONES EN UN PUNTO

Supóngase un cuerpo ubicado en un sistema de referencia  $x, y, z$ , sobre el que actúan fuerzas exteriores (figura 1). Como consecuencia de estas fuerzas aplicadas, cada uno de los puntos del cuerpo estará soportando o transmitiendo esfuerzos.

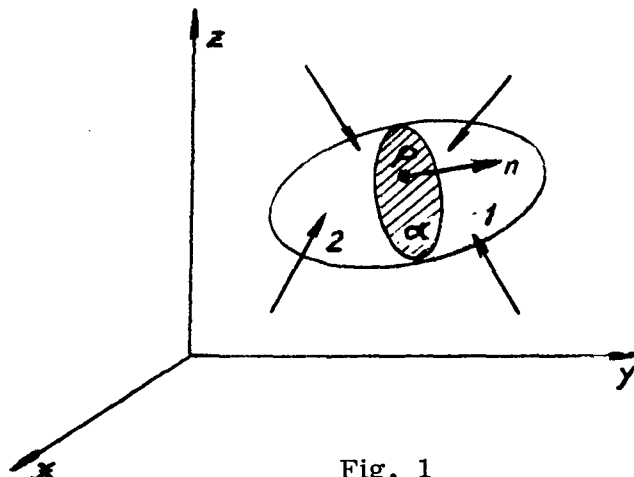


Fig. 1

Un punto P cualquiera estará sometido a un estado de tensiones que se quiere determinar. Para ello, se corta al cuerpo con un plano  $\alpha$  cualquiera (identificado por los cosenos directores de su normal) que pase por P. Al quitar la parte 1 del cuerpo, los esfuerzos que se transmitían a través del plano  $\alpha$ , pueden ser representados por fuerzas distribuidas en el mismo. Si se considera un entorno de área  $\delta A$  alrededor de P, sobre éste actuará una fuerza  $\delta F$ , y en el límite se tendrá:

$$\lim_{\delta A \rightarrow 0} \frac{\delta F}{\delta A} = \overline{\sigma}_{nr}$$

$\overline{\sigma}_{nr}$  es la tensión resultante en el punto P, sobre el plano que pasa por él.

En lo que sigue se adoptará la siguiente convención: El primer subíndice indicará el plano que pasa por P. El segundo subíndice, la dirección de la recta de acción de la tensión considerada.

Por lo general, la dirección r formará un cierto ángulo con n, y en este caso resulta útil descomponer a  $\overline{\sigma}_{nr}$  en una componente de tensión según n, y otra yacente en el plano (figura 2 a).

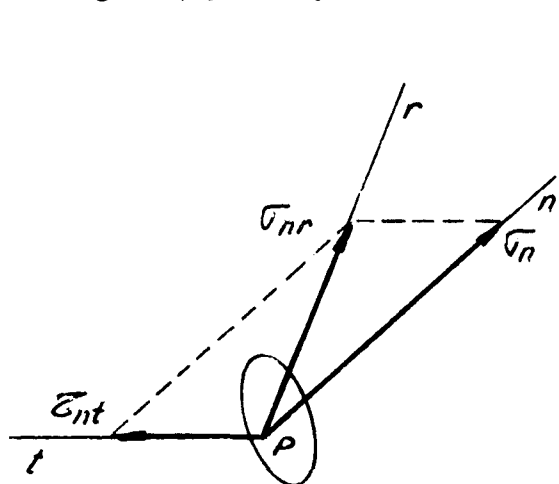


Figura 2 a

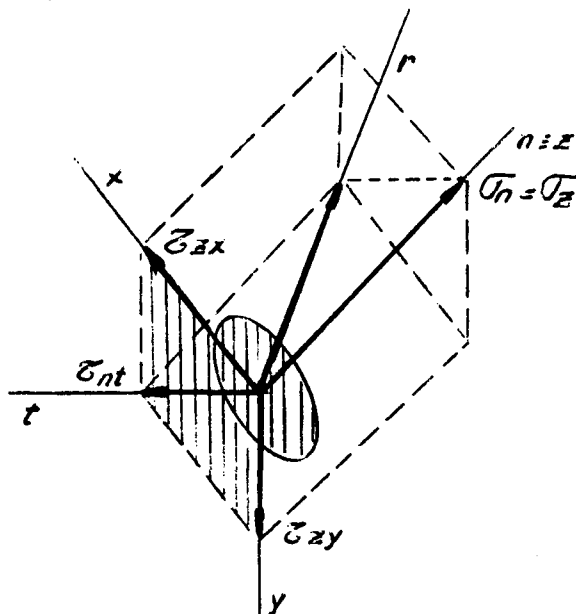


Figura 2 b

Siguiendo la convención ya establecida para los subíndices, la componente normal se indicaría con  $\overline{\sigma}_{nn}$ , pero cuando los subíndices se repiten se escribirá directamente  $\overline{\sigma}_n$ . Las componentes tangenciales se notarán con  $\overline{\sigma}_{nt}$ , siendo t su recta de acción sobre  $\alpha$ . Existen al respecto otras convenciones.

$\overline{\sigma}_{nt}$  puede a su vez descomponerse en dos componentes paralelas a los ejes x e y (figura 2 b), si se toma una terna arbitraria x, y, z tal que  $n \equiv z$  y el plano xy coincida con  $\alpha$ .

Para definir el estado de tensiones en el punto P se consideran en el mismo tres planos cuyas normales corresponden a los ejes x, y, z (figura 3).

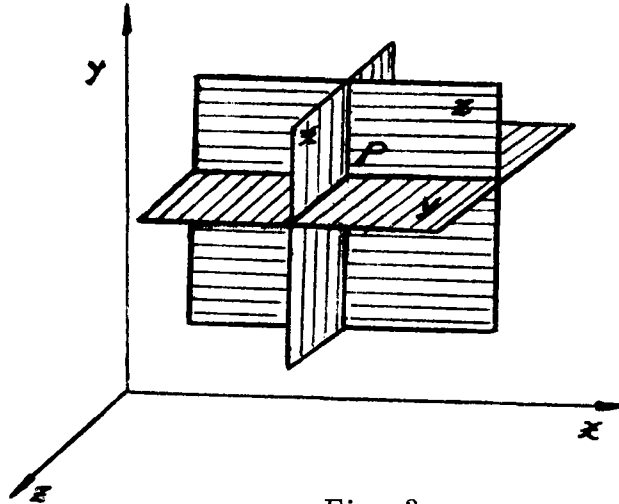


Fig. 3

Sobre cada uno de estos planos actuarán tensiones resultantes  $T_{xr}$ ,  $T_{yr}$  y  $T_{zr}$  para las orientaciones tanto positivas como negativas de los ejes. Estas tensiones resultantes sobre los planos coordenados pueden descomponerse en una componente normal y dos tangenciales según los ejes de referencia. En la figura 4 se muestra dicha descomposición para ambas caras del plano x.

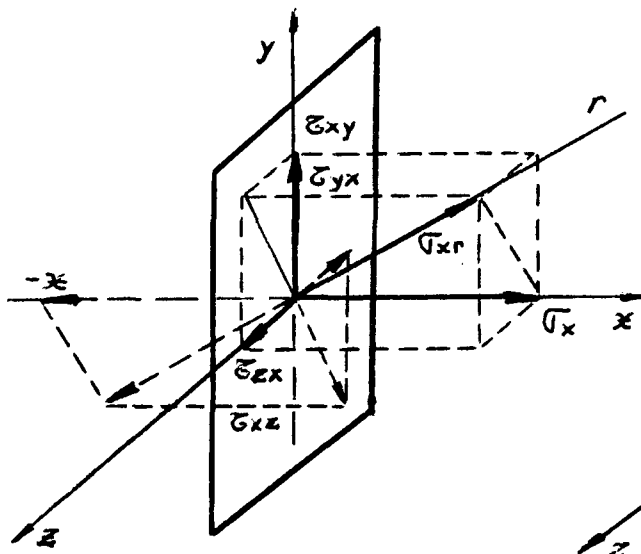


Fig. 4

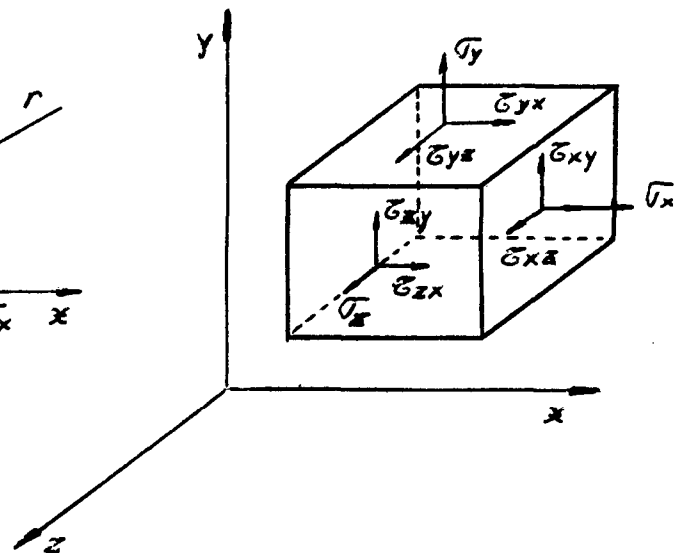


Fig. 5

À los efectos de visualizar las componentes de tensión actuantes en los planos coordenados, se dibuja un cubo elemental en cuyas caras actúan 6 tensiones normales (de tracción o compresión) y 12 tensiones tangenciales (figura 5).

De las 18 componentes de tensión, sólo 6 son suficientes para conocer el estado de tensiones en el punto. En efecto, si el punto está en equilibrio las tensiones de igual dirección que actúan en caras opuestas deben ser de

igual magnitud y signo contrario, y las tensiones tangenciales cuyas direcciones convergen en las aristas deben ser también de igual magnitud. De esta manera, al aplicar las ecuaciones de equilibrio estático (Sumatoria de fuerzas y sumatoria de momentos igual a cero), las 18 componentes de tensión quedan reducidas a 6. Por lo tanto el estado de tensiones en un punto queda definido por las tres tensiones normales  $\bar{\sigma}_x$ ,  $\bar{\sigma}_y$ ,  $\bar{\sigma}_z$  y las tres tensiones tangenciales  $\bar{\tau}_{xy}$ ,  $\bar{\tau}_{yz}$ ,  $\bar{\tau}_{zx}$ .

#### A.4. TENSIONES EN UN PLANO OBLICUO

Aquí se analizará el siguiente problema: Conocido el estado de tensiones en un punto, se pretende averiguar cuanto vale  $\bar{\sigma}_{nr}$  para un plano oblicuo cualquiera (que pasa por P) identificado por sus cosenos directores que se designarán respectivamente

$$\cos(\hat{x}\hat{n}) = l_{xn} \quad \cos(\hat{y}\hat{n}) = l_{yn} \quad \cos(\hat{z}\hat{n}) = l_{zn}$$

El plano  $\gamma$  cortará al cubo dando un tetraedro irregular OABC (figura 6). Se pueden hallar las componentes cartesianas de  $\bar{\sigma}_{nr}$  planteando las ecuaciones de equilibrio de fuerzas respecto de los ejes x, y, z (figura 7).

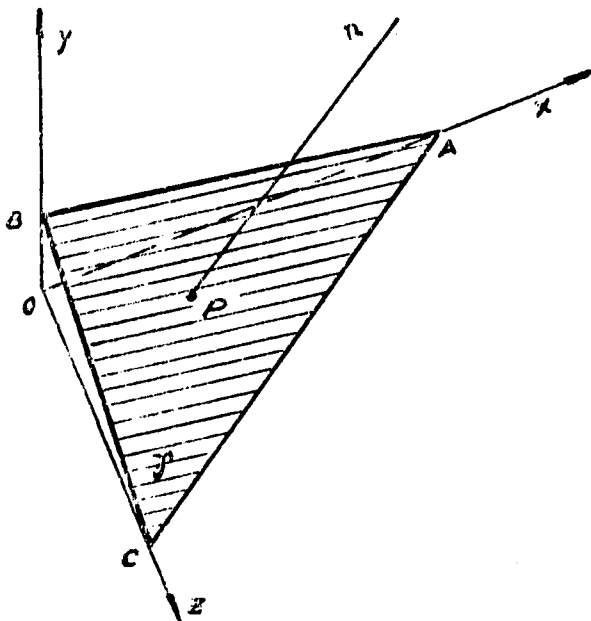


Fig. 6

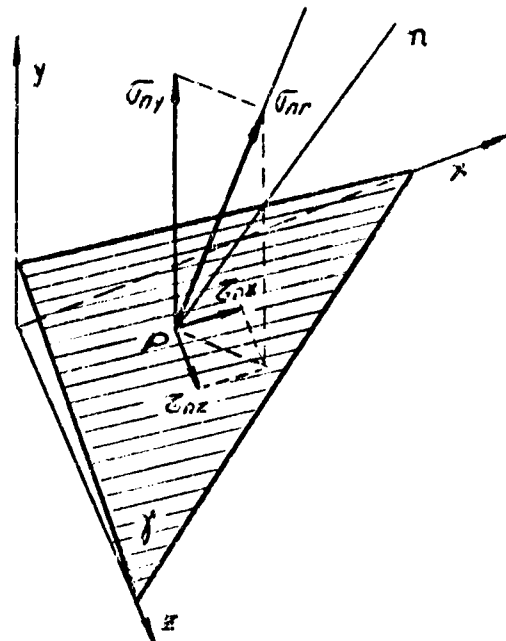


Fig. 7

$$\bar{\sigma}_{nx} \Delta = \bar{\sigma}_x \Delta_x + \bar{\tau}_{yx} \Delta_y + \bar{\tau}_{zx} \Delta_z$$

donde  $\Delta$  = Area de la cara  $\gamma$

$\Delta_x, \Delta_y, \Delta_z$  = Areas de las caras x, y, z respectivamente.

Como:

$$\frac{\Delta_x}{\Delta} = l_{xn} \quad \frac{\Delta_y}{\Delta} = l_{yn} \quad \frac{\Delta_z}{\Delta} = l_{zn}$$

$$\sigma_{nx} = \sigma_x l_{xn} + \tau_{yx} l_{yn} + \tau_{zx} l_{zn}$$

$$\sigma_{ny} = \tau_{xy} l_{xn} + \sigma_y l_{yn} + \tau_{zy} l_{zn}$$

$$\sigma_{nz} = \tau_{xz} l_{xn} + \tau_{yz} l_{yn} + \sigma_z l_{zn}$$

Conocidas sus componentes cartesianas,  $\sigma_{nr}$  resultará:

$$\sigma_{nr}^2 = \sigma_{nx}^2 + \sigma_{ny}^2 + \sigma_{nz}^2$$

Para un estado de tensiones dado, resulta claro que  $\sigma_{nr}$  depende de la orientación del plano oblicuo  $\delta$ , puesto que  $\sigma_{nx}$ ,  $\sigma_{ny}$  y  $\sigma_{nz}$  son funciones de los cosenos directores de la normal que identifica al plano en cuestión.

Como se explicara en A.3, puede descomponerse a  $\sigma_{nr}$  en una tensión normal al plano  $\delta$ ,  $\sigma_n$ , y otra tensión tangencial  $\tau_{nt}$  (figura 8).

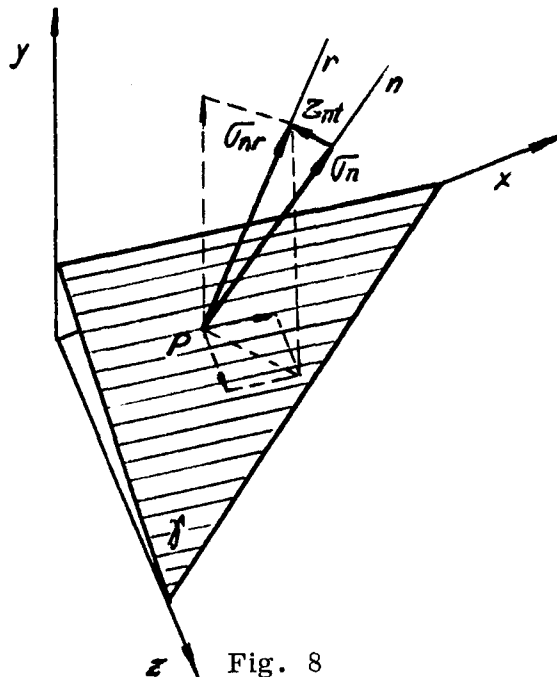


Fig. 8

El valor de  $\sigma_n$  puede hallarse proyectando las componentes cartesianas,  $\sigma_{nx}$ ,  $\sigma_{ny}$  y  $\sigma_{nz}$  de  $\sigma_{nr}$  en la dirección n, y luego sumando sus proyecciones, resulta

$$\sigma_n = \sigma_{nx} l_{xn} + \sigma_{ny} l_{yn} + \sigma_{nz} l_{zn}$$

Reemplazando  $\sigma_{nx}$ ,  $\sigma_{ny}$  y  $\sigma_{nz}$  por sus valores dados en 2, se obtiene finalmente

$$\sigma_n = \sigma_x l_{xn}^2 + \sigma_y l_{yn}^2 + \sigma_z l_{zn}^2 + 2(\tau_{xy} l_{xn} l_{yn} + \tau_{yz} l_{yn} l_{zn} + \tau_{zx} l_{zn} l_{xn}) \quad (4)$$

$\tau_{nt}$  puede obtenerse ahora de:

$$\sigma_{nr}^2 = \sigma_n^2 + \tau_{nt}^2 \quad (5)$$

(5)

## A.5. CUADRICA DE TENSIONES - TENSIONES PRINCIPALES

La ecuación 4, que permite determinar los valores de  $\sigma_n$  en función de los cosenos directores de la normal al plano oblicuo considerado, es una superficie en un espacio de cosenos directores. A los efectos de analizarla es útil introducir el siguiente cambio de variables:

$$X = \frac{l_{xn}}{\sqrt{|\sigma_n|}} \quad Y = \frac{l_{yn}}{\sqrt{|\sigma_n|}} \quad Z = \frac{l_{zn}}{\sqrt{|\sigma_n|}} \quad (6)$$

con lo que se obtiene:

$$\pm 1 = \sigma_x X^2 + \sigma_y Y^2 + \sigma_z Z^2 + 2(\tau_{xy} XY + \tau_{yz} YZ + \tau_{zx} ZX) \quad (7)$$

Esta expresión así obtenida pone en evidencia que dicha superficie es una cuádrlica. Una propiedad de las cuádrlicas es que hay una terna de direcciones, llamadas "direcciones principales", en las que se anulan los términos bilineales. De manera que, en la cuádrlica de tensiones que corresponde a la ecuación 4, habrá tres direcciones en las que se anulan las componentes tangenciales.

A las tensiones normales correspondientes a esas tres direcciones se las llama "tensiones principales", y se las identifica genéricamente con  $\bar{\sigma}_p$  (para  $p = 1, 2$  ó  $3$ ).

## A.6. ECUACION CUBICA - INVARIANTES DEL ESTADO DE TENSIONES

Interesa en este punto determinar el valor de las tensiones principales, como así también las direcciones en que actúan respecto de la terna de referencia.

Supóngase que el plano  $\delta$  de las figuras 7 y 8 sea un plano principal (o sea un plano donde actúa una tensión principal). En ese caso  $\bar{\sigma}_{nr}$  coincide con  $\bar{\sigma}_n$  (no hay componente de corte) y cuando ello ocurre se la designa  $\bar{\sigma}_p$  (vale decir  $r \equiv n \equiv p$ ).

Las componentes cartesianas de  $\bar{\sigma}_p$  serán:

$$\bar{\sigma}_{px} = \bar{\sigma}_p l_{xp} \quad \bar{\sigma}_{py} = \bar{\sigma}_p l_{yp} \quad \bar{\sigma}_{pz} = \bar{\sigma}_p l_{zp} \quad (8)$$

Si en las ecuaciones de equilibrio 2 se reemplazan  $\bar{\sigma}_{nx}$ ,  $\bar{\sigma}_{ny}$  y  $\bar{\sigma}_{nz}$  por los valores hallados en 8 se obtiene:

$$\bar{\sigma}_p l_{xp} = \bar{\sigma}_x l_{xp} + \bar{\sigma}_{yx} l_{yp} + \bar{\sigma}_{zx} l_{zp}$$

$$\bar{\sigma}_p l_{yp} = \bar{\sigma}_{xy} l_{xp} + \bar{\sigma}_y l_{yp} + \bar{\sigma}_{zy} l_{zp} \quad (9)$$

$$\bar{\sigma}_p l_{zp} = \bar{\sigma}_{xz} l_{xp} + \bar{\sigma}_{yz} l_{yp} + \bar{\sigma}_z l_{zp}$$

que reordenadas dan:

$$\begin{aligned} (\bar{\sigma}_x - \bar{\sigma}_p) l_{xp} + \bar{\sigma}_{yx} l_{yp} + \bar{\sigma}_{zx} l_{zp} &= 0 \\ \bar{\sigma}_{xy} l_{xp} + (\bar{\sigma}_y - \bar{\sigma}_p) l_{yp} + \bar{\sigma}_{zy} l_{zp} &= 0 \\ \bar{\sigma}_{xz} l_{xp} + \bar{\sigma}_{yz} l_{yp} + (\bar{\sigma}_z - \bar{\sigma}_p) l_{zp} &= 0 \end{aligned} \quad (10)$$

Un sistema de  $n$  ecuaciones lineales homogéneas con  $n$  incógnitas tiene sólo solución trivial si el determinante de los coeficientes de las incógnitas es distinto de cero. Si este determinante es nulo, el sistema tiene además soluciones no triviales. Puesto que, como se vió al analizar la ecuación 4, existen tres direcciones principales mutuamente ortogonales que son soluciones del sistema 10, los tres cosenos directores de cada una de esas direcciones no pueden ser simultáneamente nulos. La solución se encuentra entonces anulando el determinante de los coeficientes de  $l_{xp}$ ,  $l_{yp}$  y  $l_{zp}$ .  
~~de~~ la ordenación de dicho desarrollo resulta:

$$\begin{aligned} &\bar{\sigma}_p^3 - (\bar{\sigma}_x + \bar{\sigma}_y + \bar{\sigma}_z) \bar{\sigma}_p^2 + (\bar{\sigma}_x \bar{\sigma}_y + \bar{\sigma}_y \bar{\sigma}_z + \bar{\sigma}_z \bar{\sigma}_x - \bar{\sigma}_{xy}^2 - \bar{\sigma}_{yz}^2 - \bar{\sigma}_{zx}^2) \bar{\sigma}_p - \\ &- (\bar{\sigma}_x \bar{\sigma}_y \bar{\sigma}_z + 2 \bar{\sigma}_{xy} \bar{\sigma}_{yz} \bar{\sigma}_{zx} - \bar{\sigma}_x \bar{\sigma}_{yz}^2 - \bar{\sigma}_y \bar{\sigma}_{zx}^2 - \bar{\sigma}_z \bar{\sigma}_{xy}^2) = 0 \end{aligned} \quad (11)$$

Las tres raíces de la ecuación 11 corresponden a las tensiones principales. Una vez determinadas éstas, pueden hallarse las direcciones en que actúan respecto de la terna de referencia dando solución al sistema 10 conjuntamente con la condición  $l_{xp}^2 + l_{yp}^2 + l_{zp}^2 = 1$ , para cada una de las tensiones principales.

Como el estado de tensiones en el punto P es independiente de la terna de referencia elegida, las soluciones de la 11 serán las mismas cualquiera sea la terna adoptada para definir dicho estado.

Una consecuencia importante que surge de ello, es que los coeficientes de la ecuación cúbica no sufrirán alteraciones si se cambia el sistema de coordenadas de referencia, es decir, serán "invariantes del estado de tensiones".

En función de una terna  $x, y, z$ , o de los ejes principales, los invariantes serán respectivamente:

$$I_1 = \bar{\sigma}_x + \bar{\sigma}_y + \bar{\sigma}_z = \bar{\sigma}_1 + \bar{\sigma}_2 + \bar{\sigma}_3$$

$$I_2 = \bar{\sigma}_x \bar{\sigma}_y + \bar{\sigma}_y \bar{\sigma}_z + \bar{\sigma}_z \bar{\sigma}_x - \bar{\epsilon}_{xy}^2 - \bar{\epsilon}_{yz}^2 - \bar{\epsilon}_{zx}^2 = \bar{\sigma}_1 \bar{\sigma}_2 + \bar{\sigma}_2 \bar{\sigma}_3 + \bar{\sigma}_3 \bar{\sigma}_1 \quad (12)$$

$$I_3 = \bar{\sigma}_x \bar{\sigma}_y \bar{\sigma}_z + 2 \bar{\epsilon}_{xy} \bar{\epsilon}_{yz} \bar{\epsilon}_{zx} - \bar{\sigma}_x \bar{\epsilon}_{yz}^2 - \bar{\sigma}_y \bar{\epsilon}_{zx}^2 - \bar{\sigma}_z \bar{\epsilon}_{xy}^2 = \bar{\sigma}_1 \bar{\sigma}_2 \bar{\sigma}_3$$

En su forma más general la ecuación 11 puede escribirse ahora:

$$\bar{\sigma}_\rho^3 - I_1 \bar{\sigma}_\rho^2 + I_2 \bar{\sigma}_\rho - I_3 = 0 \quad (13)$$

#### A.7. REPRESENTACION GRAFICA DEL ESTADO DE TENSIONES EN EL PUNTO. METODO DE MOHR.

Se verá aquí un método gráfico de representar el estado de tensiones de un punto.

Para los estados tridimensionales de tensiones es posible determinar  $\bar{\sigma}_n$  y  $\bar{\epsilon}_{nt}$  en un plano  $\alpha$  cuya orientación respecto de los ejes principales se conocen, como así también la magnitud de las tensiones principales. Obsérvese que éste es el mismo problema planteado analíticamente en A.4 cuya solución gráfica es posible si la terna de referencia es la principal. En efecto, cuando el sistema de referencia está dado por los ejes principales, las ecuaciones 2, 3 y 4 quedan respectivamente:

$$\begin{aligned} \bar{\sigma}_{n1} &= \bar{\sigma}_1 l_{1n} \\ \bar{\sigma}_{n2} &= \bar{\sigma}_2 l_{2n} \\ \bar{\sigma}_{n3} &= \bar{\sigma}_3 l_{3n} \end{aligned} \quad (2')$$

$$\bar{\sigma}_{nr}^2 = \bar{\sigma}_{n1}^2 + \bar{\sigma}_{n2}^2 + \bar{\sigma}_{n3}^2 \quad (3')$$

$$\bar{\sigma}_n = \bar{\sigma}_1 l_{1n}^2 + \bar{\sigma}_2 l_{2n}^2 + \bar{\sigma}_3 l_{3n}^2 \quad (4')$$

Con 3', 2' y 4', el valor  $\bar{\epsilon}_{nt}$  de la 5 resulta:

$$\bar{\epsilon}_{nt}^2 = \bar{\sigma}_1^2 l_{1n}^2 + \bar{\sigma}_2^2 l_{2n}^2 + \bar{\sigma}_3^2 l_{3n}^2 - (\bar{\sigma}_1 l_{1n} + \bar{\sigma}_2 l_{2n} + \bar{\sigma}_3 l_{3n})^2 \quad (5)$$

Las ecuaciones 4' y 5' constituyen la solución analítica del problema.

Para encontrar la solución gráfica, de la condición:

$$l_{1n}^2 + l_{2n}^2 + l_{3n}^2 = 1 \quad (14)$$

se despeja el valor de  $l_{2n}^2$  y reemplazando en 4' y 5' respectivamente,

resulta:

$$l_{3n}^2 = \frac{\sigma_n + l_{1n}^2 (\sigma_2 - \sigma_1) - \sigma_2}{\sigma_3 - \sigma_2} \quad (4'')$$

$$\zeta_{nt}^2 = l_{1n}^2 (\sigma_1^2 - \sigma_2^2) + l_{3n}^2 (\sigma_3^2 - \sigma_2^2) + \sigma_2^2 - [l_{1n}^2 (\sigma_1 - \sigma_2) + \sigma_2 + l_{3n}^2 (\sigma_3 - \sigma_2)]^2 \quad (5'')$$

Eliminando  $l_{3n}$  entre 4'' y 5'':

$$l_{1n}^2 = \frac{\zeta_{nt}^2 + (\sigma_2 - \sigma_n)(\sigma_3 - \sigma_n)}{(\sigma_2 - \sigma_1)(\sigma_3 - \sigma_1)}$$

Análogamente puede obtenerse:

$$l_{2n}^2 = \frac{\zeta_{nt}^2 + (\sigma_3 - \sigma_n)(\sigma_1 - \sigma_n)}{(\sigma_3 - \sigma_2)(\sigma_1 - \sigma_2)}$$

$$l_{3n}^2 = \frac{\zeta_{nt}^2 + (\sigma_1 - \sigma_n)(\sigma_2 - \sigma_n)}{(\sigma_1 - \sigma_3)(\sigma_2 - \sigma_3)}$$

Estas tres últimas ecuaciones se pueden escribir en la forma:

$$\left(\sigma_n - \frac{\sigma_2 + \sigma_3}{2}\right)^2 + \zeta_{nt}^2 = l_{1n}^2 (\sigma_1 - \sigma_2)(\sigma_1 - \sigma_3) + \left(\frac{\sigma_2 - \sigma_3}{2}\right)^2 \quad (15 a)$$

$$\left(\sigma_n - \frac{\sigma_3 + \sigma_1}{2}\right)^2 + \zeta_{nt}^2 = l_{2n}^2 (\sigma_2 - \sigma_3)(\sigma_2 - \sigma_1) + \left(\frac{\sigma_3 - \sigma_1}{2}\right)^2 \quad (15 b)$$

$$\left(\sigma_n - \frac{\sigma_1 + \sigma_2}{2}\right)^2 + \zeta_{nt}^2 = l_{3n}^2 (\sigma_3 - \sigma_1)(\sigma_3 - \sigma_2) + \left(\frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2}\right)^2 \quad (15 c)$$

En un sistema de ejes ortogonales  $\sigma_n - \zeta_{nt}$ , cada una de las ecuaciones anteriores constituye una familia de circunferencias con centro sobre el eje de abscisas, cuyos radios varían en función de los respectivos cosenos directores entre los valores extremos.

Se dan a continuación en la siguiente tabla, los centros de cada familia como así también sus radios máximos y mínimos conjuntamente con los valores de los respectivos arcos. Para este análisis se ha tomado convencionalmente:

$$\sigma_1 > \sigma_2 > \sigma_3$$

EQUACION N°	CENTROS			RADIOS				
	NOTACION	COORDENADAS		EQUACION	MINIMO		MAXIMO	
		ABSCISA	ORDE- NADA		MODULO	ARCO	MODULO	ARCO
15a	$C_{1n}$	$\frac{\sigma_2 + \sqrt{3}}{2}$	0	$\sqrt{\frac{1}{2n} (\sigma_1 - \sigma_2)(\sigma_1 - \sigma_3) + \left(\frac{\sigma_2 - \sqrt{3}}{2}\right)^2}$	$\left  \frac{\sigma_2 - \sqrt{3}}{2} \right $	$90^\circ$	$\left  \sigma_1 - \frac{\sigma_2 + \sqrt{3}}{2} \right $	$0^\circ$
15b	$C_{2n}$	$\frac{\sigma_3 + \sqrt{1}}{2}$	0	$\sqrt{\frac{1}{2n} (\sigma_2 - \sqrt{3})(\sigma_2 - \sigma_1) + \left(\frac{\sigma_3 - \sqrt{1}}{2}\right)^2}$	$\left  \sigma_2 - \frac{\sigma_1 + \sqrt{3}}{2} \right $	$0^\circ$	$\left  \frac{\sigma_3 - \sqrt{1}}{2} \right $	$90^\circ$
15c	$C_{3n}$	$\frac{\sigma_1 + \sqrt{2}}{2}$	0	$\sqrt{\frac{1}{3n} (\sigma_3 - \sigma_1)(\sigma_3 - \sigma_2) + \left(\frac{\sigma_1 - \sqrt{2}}{2}\right)^2}$	$\left  \frac{\sigma_1 - \sqrt{2}}{2} \right $	$90^\circ$	$\left  \sigma_3 - \frac{\sigma_1 + \sqrt{2}}{2} \right $	$0^\circ$

En la figura 9 están representadas las circunferencias máxima y mínima de la familia centrada en  $C_{1n}$  que corresponden a la ecuación 15a.

En la figura 10 están superpuestas en un mismo dibujo las circunferencias máximas y mínimas de las tres familias dadas por 15a, b y c.

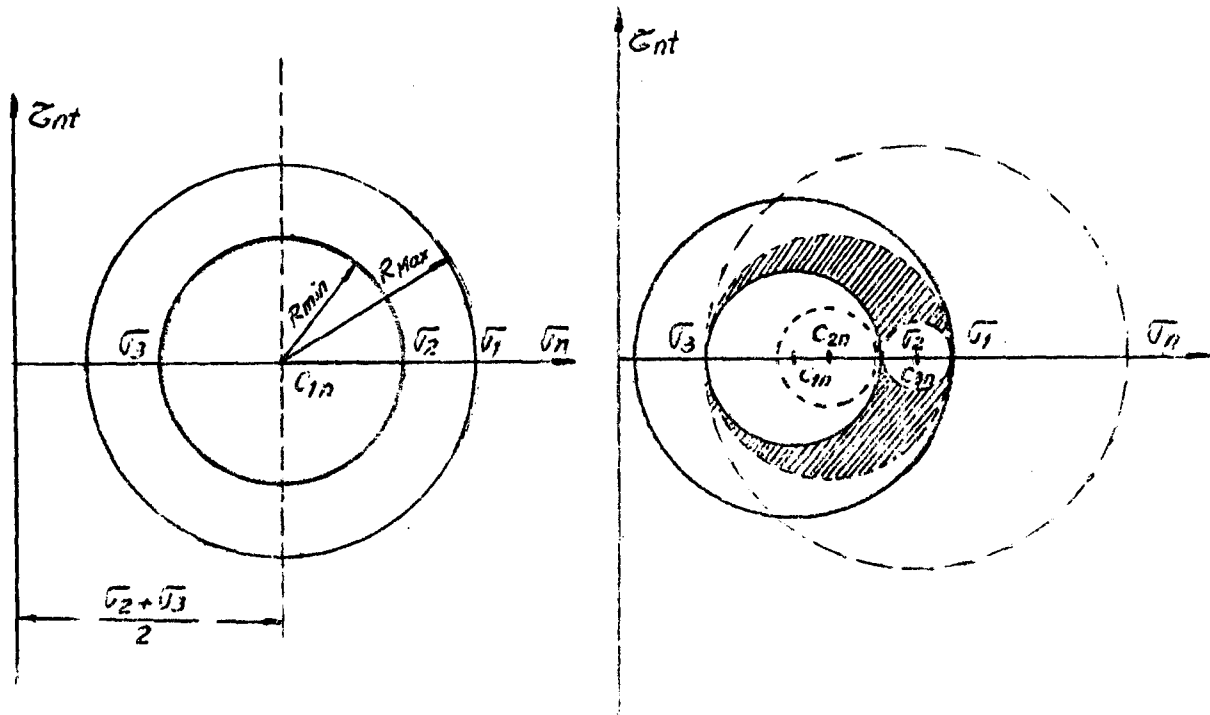


Fig. 9

Fig. 10

Dado un plano cualquiera que pase por el punto P, sus cosenos directores deberán cumplir con 14. A cada coseno director le corresponderá una circunferencia de su respectiva familia. Puesto que  $\bar{\sigma}_n$  (y por lo tanto  $\bar{\sigma}_n$  y  $\bar{C}_{nt}$ ) para el plano en cuestión es única, las tres circunferencias deben cortarse en un punto del plano  $\bar{\sigma}_n - \bar{C}_{nt}$ . El único lugar en que ello puede ocurrir es la zona común a las tres coronas, que queda comprendida entre las circunferencias que corresponden a  $\lambda_{1n} = \lambda_{2n} = \lambda_{3n} = 90^\circ$  (zona rayada de la figura 10).

Obsérvese que los puntos sobre cada una de estas circunferencias límites corresponden a las tensiones normal y tangencial sobre planos de los haces que pasan respectivamente por los ejes principales 1, 2 y 3.

Dado entonces un plano que pase por P y conocidos los ángulos que éste forma con los ejes principales, con los valores de sus cosenos directores pueden calcularse los radios con las ecuaciones 15a, b y c. Con centros en  $C_{1n}$ ,  $C_{2n}$  y  $C_{3n}$  se trazan las circunferencias de radios así determinados y las coordenadas del punto donde ellas se intersecan corresponden a  $\bar{\sigma}_n$  y  $\bar{C}_{nt}$  del plano dado.

Se demostrará que si por  $\bar{\sigma}_1$  se levanta una normal y a

partir de ella se traza el ángulo  $\hat{1n}$ , la intersección de esta recta con las circunferencias correspondientes a  $2n = 90^\circ$  y  $3n = 90^\circ$  (puntos  $A_2$  y  $A_3$ ) pertenecen a la circunferencia de centro  $C_{1n}$  y radio correspondiente al  $l_{1n}$  dado (figura 11 a).

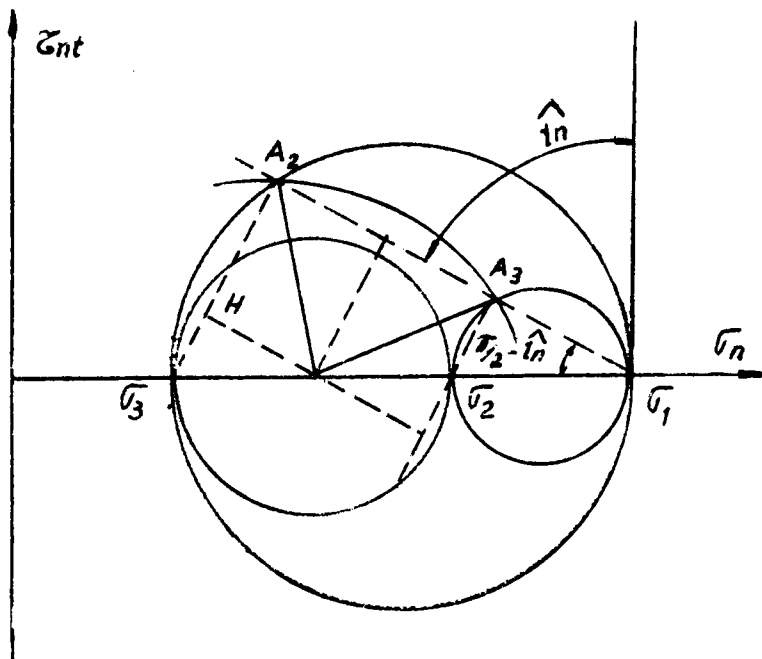


Fig. 11 a

Este método constituye la solución gráfica del problema y evita el cálculo de los radios. En efecto, en la figura 11 a los ángulos en  $A_2$  y  $A_3$  son rectos y  $A_2C_{1n} = A_3C_{1n}$

$$\overline{A_2C_{1n}}^2 = \overline{C_{1n}H}^2 + \overline{HA_2}^2$$

$$\overline{C_{1n}H} = \frac{\sigma_2 - \sigma_3}{2} \cos(90^\circ - \hat{1n}) = \frac{\sigma_2 - \sigma_3}{2} \sqrt{1 - l_{1n}^2}$$

$$\overline{HA_2} = \overline{A_2\sigma_3} - \overline{H\sigma_3} = (\sigma_1 - \sigma_3) l_{1n} - \frac{\sigma_2 - \sigma_3}{2} l_{1n}$$

Reemplazando  $\overline{C_{1n}H}$  y  $\overline{HA_2}$  en la expresión de  $\overline{A_2C_{1n}}$  resulta:

$$A_2 C_{1n} = \sqrt{l_{1n}^2 (\sigma_1 - \sigma_2) (\sigma_1 - \sigma_3) + \left(\frac{\sigma_2 - \sigma_3}{2}\right)^2}$$

que es el radio de la ecuación 15a. Análogamente pueden obtenerse los radios para los valores de los ángulos  $2n$  y  $3n$  del plano dado.

En la práctica, entonces, la construcción se realiza de la siguiente manera (figura 11 b):

- (a) En un sistema de coordenadas  $\sigma_n - \zeta_{nt}$ , se toma sobre el eje

- correspondiente los valores de las tensiones principales.
- (b) Con centro en  $C_{1n}$  se traza la circunferencia de radio  $R_{1n} = \frac{1}{2}(\sigma_2 - \sigma_3)$   
 Con centro en  $C_{2n}$  se traza la circunferencia de radio  $R_{2n} = \frac{1}{2}(\sigma_1 - \sigma_3)$   
 Con centro en  $C_{3n}$  se traza la circunferencia de radio  $R_{3n} = \frac{1}{2}(\sigma_1 - \sigma_2)$   
 Cada punto del área común de los tres círculos corresponde a  $\tau_n$  y  $\sigma_{nt}$  para los planos de las diversas orientaciones del espacio que pasan por el punto P.
- (c) Se levanta una normal a  $\bar{\nu}_n$  por  $\bar{\nu}_1$ , y a partir de ella se toma un ángulo  $\hat{1}n$ . El nuevo lado del ángulo cortará a las circunferencias de las familias  $\hat{2}n$  y  $\hat{3}n$  en  $A_2$  y  $A_3$ . Con centro en  $C_{1n}$  se traza el arco de circunferencia que pasa por  $A_2$  y  $A_3$ . Como se vió, el radio del arco así trazado satisface el valor de  $R_{1n}$  para el  $\hat{1}n$  dado.

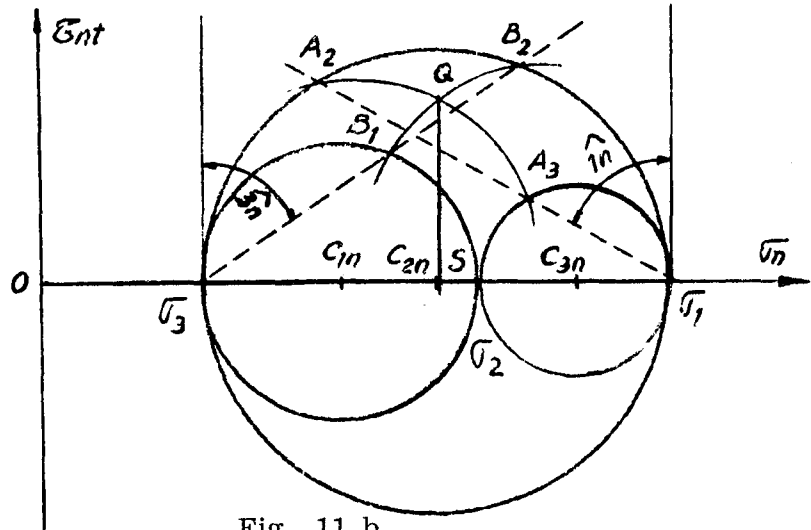


Fig. 11 b

- (d) En forma similar, por  $\bar{\nu}_3$  se levanta una perpendicular y se toma el ángulo  $\hat{3}n$  que cortará en  $B_1$  y  $B_2$  a las circunferencias de las familias  $\hat{1}n$  y  $\hat{2}n$ . Con centro en  $C_{3n}$  se traza el arco de circunferencia que pasa por  $B_1$  y  $B_2$ .
- (e) La intersección de los arcos da el punto Q. La ordenada  $\overline{QS}$  será el valor de  $\tau_{nt}$  y la abscisa  $\overline{OS}$  el valor de  $\bar{\nu}_n$

Si por  $\bar{\nu}_2$  se traza el ángulo  $\hat{2}n$  con la normal hasta cortar a las circunferencias  $\hat{1}n$  y  $\hat{2}n$ , el arco con centro en  $C_{2n}$  deberá pasar por Q. En efecto, como la ecuación 14 liga a los tres cosenos directores sólo es necesario conocer dos ángulos para poder realizar la construcción.

### A.8. TENSIONES TANGENCIALES PRINCIPALES

En la figura 12 se observan tres valores particulares de las tensiones tangenciales. Corresponden a las "tensiones tangenciales principales", que valen respectivamente:

$$\tau_{1-3} = \frac{\sigma_1 - \sigma_3}{2} \quad \tau_{2-3} = \frac{\sigma_2 - \sigma_3}{2} \quad \tau_{1-2} = \frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2} \quad (16)$$

Habiendo adoptado la convención:  $\sigma_1 > \sigma_2 > \sigma_3$ , resulta  $\tau_{1-3}$  la "tensión tangencial máxima". Los ángulos de los planos en que actúan serán respectivamente:  $\hat{1}n = \hat{3}n = 45^\circ$  y  $2n = 90^\circ$ . Análogamente,  $\tau_{2-3}$  y  $\tau_{1-2}$  actúan en planos ubicados a  $45^\circ$  con los respectivos ejes principales.

Obsérvese que para cada par de tensiones principales hay dos planos de tensiones de corte principales que bisectan las direcciones principales.

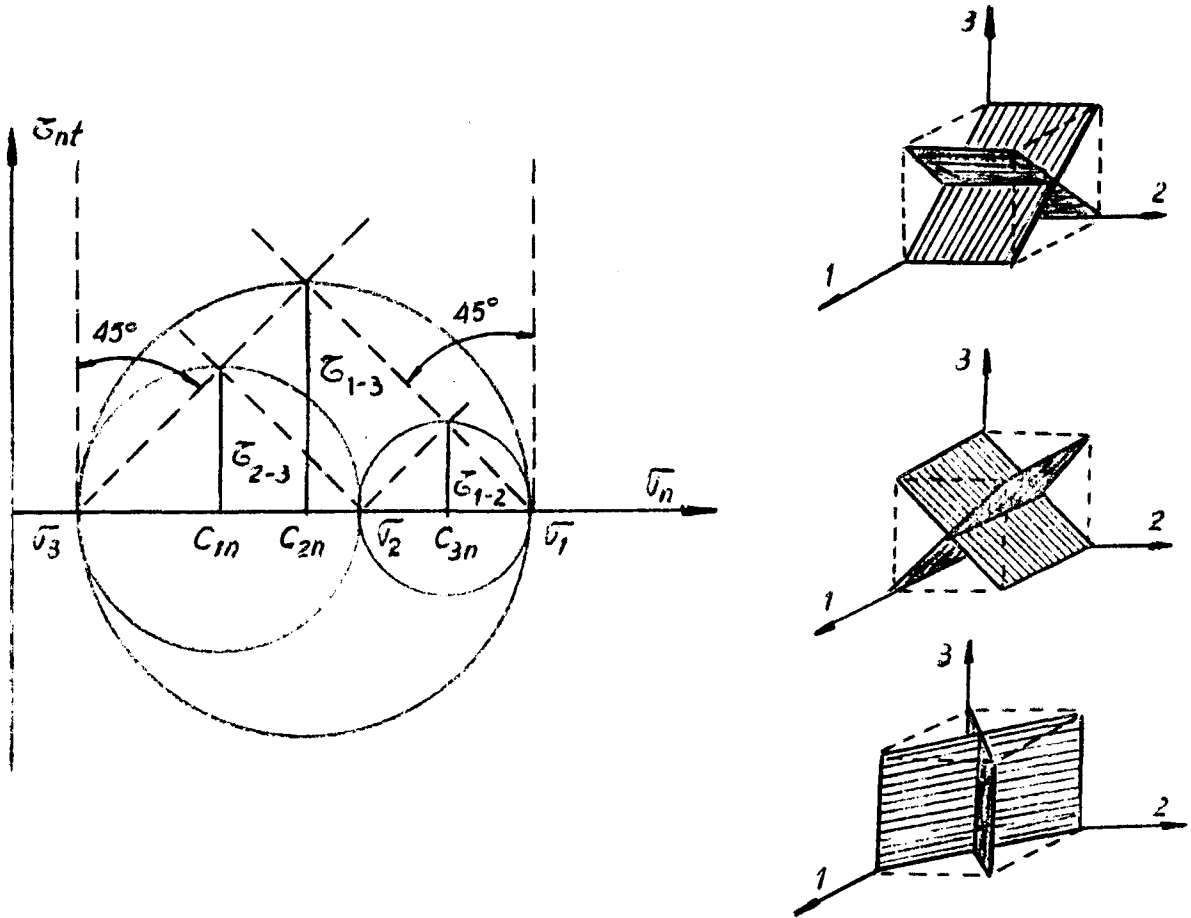


Fig. 12

A.9. CASOS PARTICULARES DE ESTADOS DE TENSIONES

- (a) El más simple de todos corresponde a "Tracción o compresión uniaxial o simple". Las figuras 13 a y b muestran respectivamente esos estados y sus círculos de Mohr correspondientes.

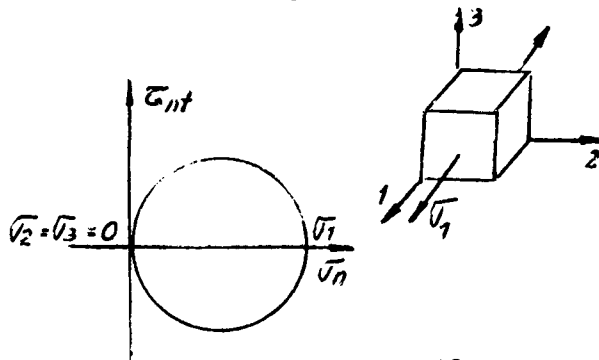


Fig. 13 a

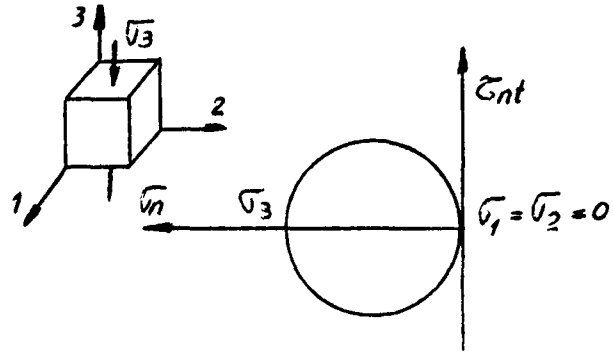


Fig. 13 b

(b) El estado de "corte puro", obtenido por torsión de una barra cilíndrica, y su equivalente producido por una tracción y una compresión de igual magnitud, se muestran en las figuras 14 a y b.

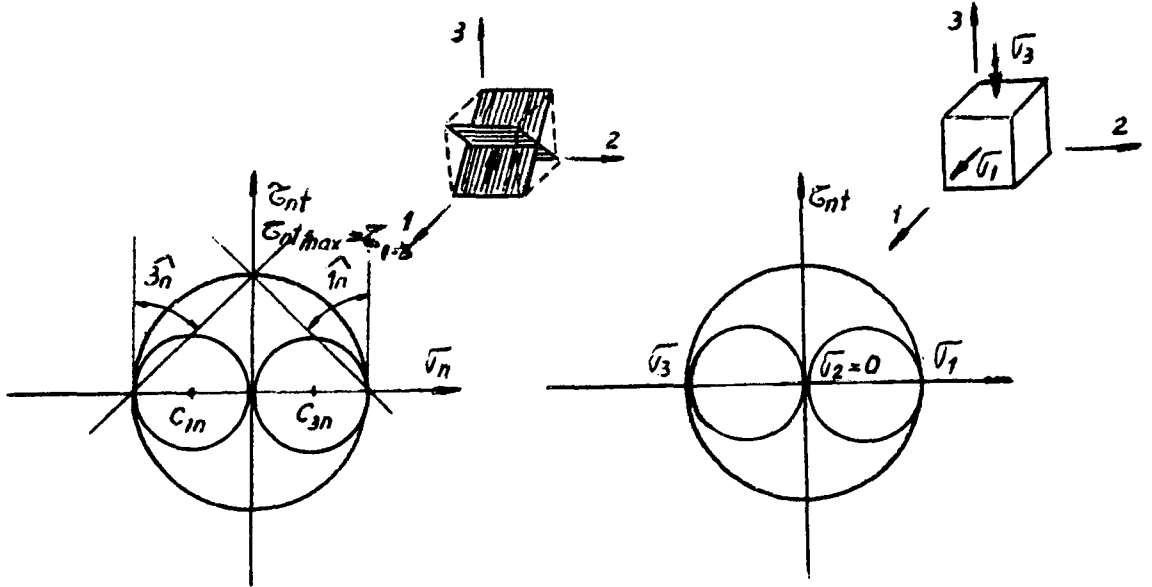


Fig. 14 a

Fig. 14 b

(c) El estado "cilíndrico" de tensiones, dado por  $\sigma_2 = \sigma_3 \neq \sigma_1$  del cual son casos particulares los estados uniaxiales de tracción y compresión, se ilustran en la figura 15.

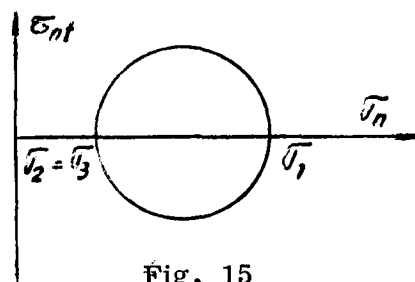


Fig. 15

- (d) El estado "esférico" de tensiones es tal que  $\bar{\sigma}_1 = \bar{\sigma}_2 = \bar{\sigma}_3$  y su representación gráfica por el método de Mohr está dada por un punto en el eje de abscisas (figura 16).

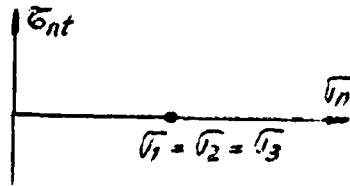


Fig. 16

- (e) El estado de "tensión plana", dado por  $\bar{\sigma}_1 \neq 0$ ,  $\bar{\sigma}_2 \neq 0$  y  $\bar{\sigma}_3 = 0$  se ilustra en la figura 17.

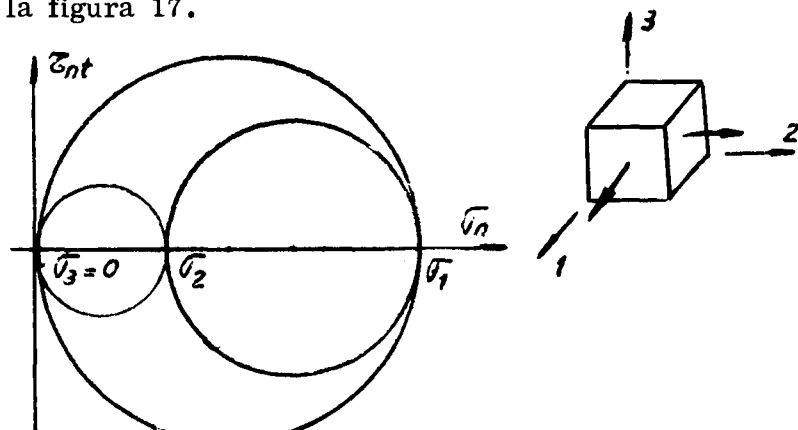


Fig. 17

#### A.10. COMPONENTES HIDROSTATICA Y DESVIADORA DEL ESTADO DE TENSIONES

Un estado general de tensiones se puede considerar como la suma de dos estados llamados "esférico" y "desviador". Esta descomposición se puede visualizar en un espacio de tensiones principales llamado "espacio de Westergaard" (figura 18 a), donde  $O\bar{\sigma}_1$ ,  $O\bar{\sigma}_2$  y  $O\bar{\sigma}_3$  son ejes generales de tensiones principales. La recta  $h$  es tal que está igualmente inclinada con respecto a los tres ejes (los tres cosenos directores son iguales a  $1/\sqrt{3}$ ) y por lo tanto es el lugar geométrico de todos los estados hidrostáticos. Si  $OP$  es un estado general de tensiones cuyas componentes son  $\overline{OP}_1 = \bar{\sigma}_1$ ,  $\overline{P_1M} = \bar{\sigma}_2$ ,  $\overline{MP} = \bar{\sigma}_3$ , entonces  $\overline{ON}$  será el estado hidrostático y  $\overline{NP}$  el desviador respectivamente de  $\overline{OP}$ .

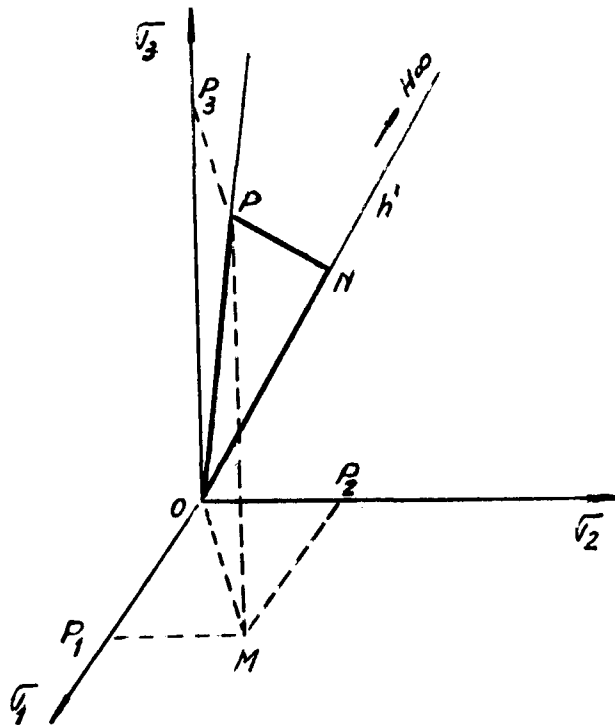


Fig. 18 a

Siendo las componentes cartesianas del estado general  $\overline{OP}$ ,  $\sigma_1$ ,  $\sigma_2$  y  $\sigma_3$ , el módulo de  $\overline{ON}$  resulta:

$$|\overline{ON}| = \frac{1}{\sqrt{3}} \sigma_1 + \frac{1}{\sqrt{3}} \sigma_2 + \frac{1}{\sqrt{3}} \sigma_3 = \frac{1}{\sqrt{3}} (\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3)$$

y sus componentes cartesianas serán iguales y de valor:

$$\frac{1}{3} (\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3) = \frac{I_1}{3} = \sigma_m \quad (17)$$

$\sigma_m$  es la tensión hidrostática o tensión media. Siendo un invariante resulta:

$$\sigma_m = \frac{\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3}{3} = \frac{\sigma_x + \sigma_y + \sigma_z}{3} = -\rho_h \quad (18)$$

Las componentes cartesianas de  $\overline{NP}$ , que es el estado desviador, son las diferencias entre las respectivas componentes del estado general y el esférico:

$$\begin{aligned} \sigma_1' &= \sigma_1 - \sigma_m = \frac{2\sigma_1 - \sigma_2 - \sigma_3}{3} \\ \sigma_2' &= \sigma_2 - \sigma_m = \frac{2\sigma_2 - \sigma_3 - \sigma_1}{3} \\ \sigma_3' &= \sigma_3 - \sigma_m = \frac{2\sigma_3 - \sigma_1 - \sigma_2}{3} \end{aligned} \tag{19 a}$$

Para una terna genérica x, y, z, el estado desviador queda dado por:

$$\begin{aligned} \sigma_x' &= \sigma_x - \sigma_m = \frac{2\sigma_x - \sigma_y - \sigma_z}{3} \\ \sigma_y' &= \sigma_y - \sigma_m = \frac{2\sigma_y - \sigma_z - \sigma_x}{3} \\ \sigma_z' &= \sigma_z - \sigma_m = \frac{2\sigma_z - \sigma_x - \sigma_y}{3} \end{aligned} \tag{19 b}$$

En la representación de Mohr, obtener de un estado general el estado desviador, equivale a correr el eje de ordenadas una cantidad  $\sigma_m$  (figura 18 b). Esta descomposición es importante para el estudio de los criterios de fluencia y el comportamiento plástico.

En la figura 18 c se ha representado esta descomposición de tensiones en el punto, y en la 18 b su equivalente en el diagrama de Mohr.

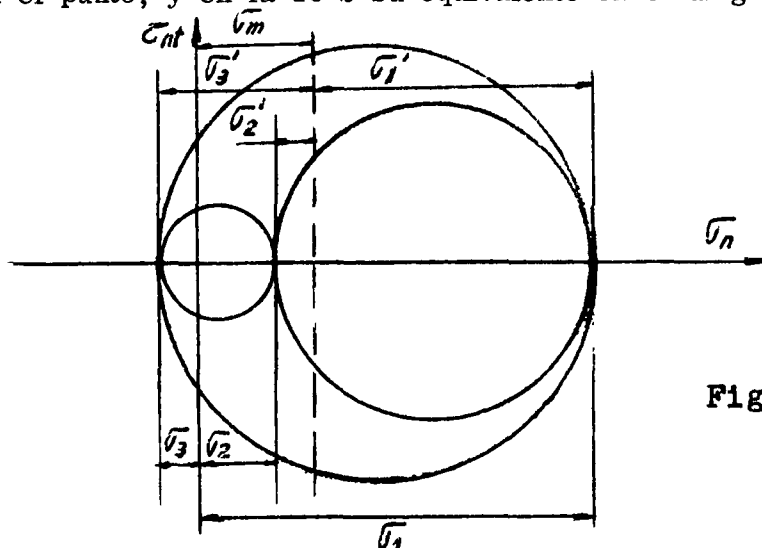


Fig. 18b

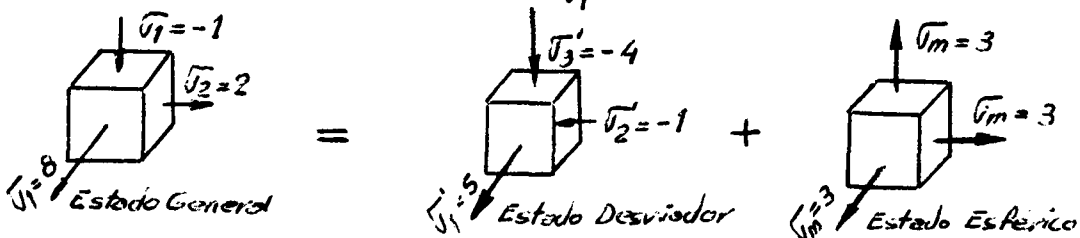


Fig. 18c

Los invariantes del estado esférico pueden obtenerse reemplazando la 18 en las expresiones 12, resultando:

$$\begin{aligned} I_1'' &= 3\bar{\sigma}_m = I_1 \\ I_2'' &= 3\bar{\sigma}_m^2 = \frac{I_1^2}{3} \\ I_3'' &= \bar{\sigma}_m^3 = \frac{I_1^3}{27} \end{aligned} \quad (20)$$

Análogamente si los valores de las ecuaciones 19 se introducen en la 12, se obtienen los invariantes desviadores:

$$\begin{aligned} I_1' &= 0 \\ I_2' &= I_2 - I_1^2 = -\frac{1}{6} [(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2] \\ I_3' &= I_3 - \frac{I_1 I_2}{3} - \frac{2}{27} I_1^3 \end{aligned} \quad (21)$$

#### A.11. TENSION EFECTIVA O EQUIVALENTE

Se define a la tensión efectiva,  $\bar{\sigma}$ , de la siguiente manera

$$\bar{\sigma} = \sqrt{\frac{1}{2} [(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2]} \quad (22a)$$

Comparando la 22a con la expresión del segundo invariante desviador  $I_2'$  se obtiene:

$$\bar{\sigma} = (I_1'^2 - 3I_2')^{1/2} \quad (22b)$$

lo que implica que  $\bar{\sigma}$  es también un invariante del estado de tensiones. Este nuevo invariante permite comparar comportamientos plásticos bajo distintos estados de tensiones reduciéndolos a estados equivalentes.

Obsérvese que para estados uniaxiales,  $\bar{\sigma}$  se reduce a la tensión uniaxial.

Para una terna x, y, z, genérica, de la ecuación 22b se obtiene:

$$\bar{\sigma} = \sqrt{\frac{1}{2} [(\sigma_x - \sigma_y)^2 + (\sigma_y - \sigma_z)^2 + (\sigma_z - \sigma_x)^2] + 3(\sigma_{xy}^2 + \sigma_{yz}^2 + \sigma_{zx}^2)}$$

## II.1.B. ESTADO DE DEFORMACIONES

- B.1 Objeto
- B.2 Introducción al estado de deformaciones: Desplazamientos y Deformaciones
- B.3 Estado de deformaciones
- B.4 Componentes infinitesimales de deformación finita
- B.5 Velocidades de deformación
- B.6 Deformación efectiva o equivalente
- B.7 Deformaciones finitas. Deformaciones logarítmicas

### B.1. OBJETO

De una manera análoga a como se efectuará el estudio del estado de tensiones, se realizará el de deformaciones. Como no interesan desde este punto de vista los movimientos cinemáticos rígidos, se obtendrán como paso previo al estudio teneral de deformaciones, las componentes de deformación pura e irrotacional a partir de un desplazamiento general.

Se introducirá además el concepto de deformaciones logarítmicas.

### B.2. INTRODUCCION AL ESTADO DE DEFORMACIONES: DESPLAZAMIENTOS Y DEFORMACIONES

Un cuerpo sometido a fuerzas exteriores alterará su estado de movimiento y/o se deformará. Para precisar estas condiciones se consideran en el cuerpo de la figura 19 dos puntos O y P separados por una distancia  $l_0$ .

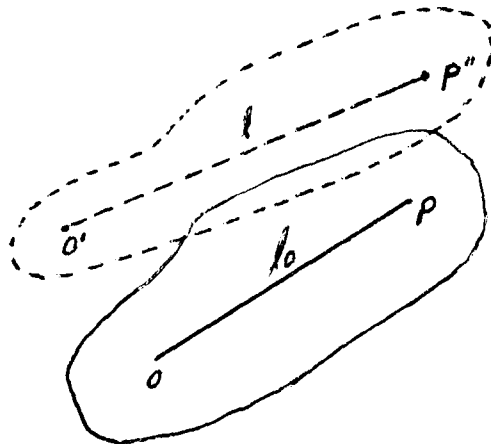


Fig. 19

Por efecto de las fuerzas aplicadas, los puntos pasarán a ocupar posiciones tales como O' y P' siendo ahora su distancia  $l$ . Llamaremos OO' al desplazamiento del punto O y PP' al desplazamiento del punto P. Puede haber ocurrido que:

- (a)  $l = l_0$ , en este caso el cuerpo sólo se ha movido pero no se ha deformado. Si O'P' es paralelo a OP sólo se produjo un movimiento traslatorio. Si O'P' no se mantiene paralelo a OP el movimiento habrá sido rototraslatorio o de rotación.
- (b)  $l \neq l_0$ , se ha producido un desplazamiento relativo de P con respecto a O. Se dice que el cuerpo se encuentra sometido a un estado general de deformación. En el caso particular de que segmentos rectos y paralelos se mantengan como tales antes y después de la deformación, ésta se dice homogénea. Interesa especialmente esta última dado que si así no ocurriera las expresiones analíticas

que describen el estado de deformaciones resultan tan complejas que dejan de tener utilidad práctica.

### B.3. ESTADO DE DEFORMACIONES

Supóngase tener un cuerpo sometido a un sistema de fuerzas exteriores que le producen un estado general de deformación y movimiento. Los puntos de dicho cuerpo se refieren a un sistema coordenado cartesiano de origen  $O$ . Sea  $P$  un punto del cuerpo infinitamente próximo a  $O$  con coordenadas  $P(x;y;z)$  y  $\vec{r}$  su vector posición (siendo su módulo la distancia  $OP$  en la figura 20 a).

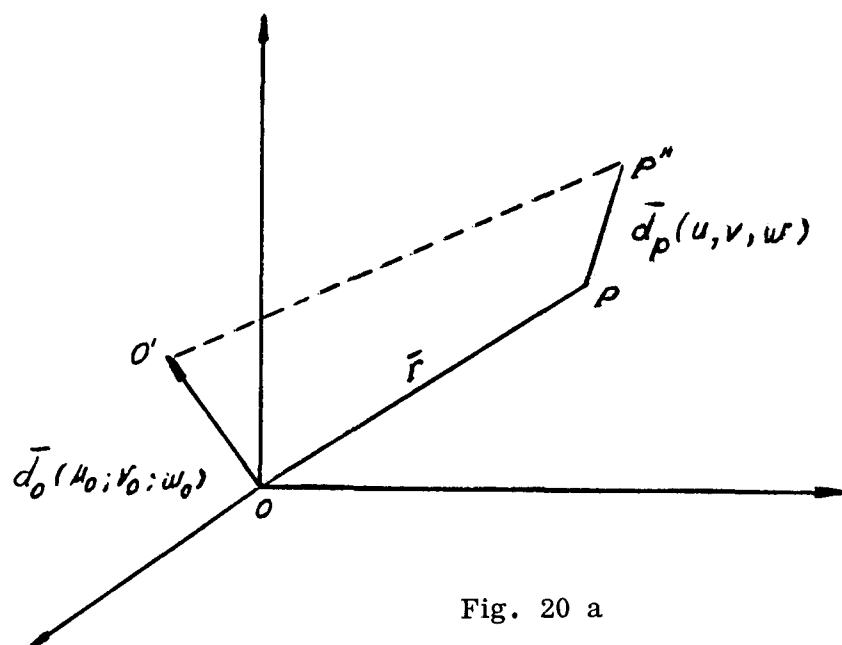


Fig. 20 a

Como consecuencia del desplazamiento,  $P(x;y;z)$  pasa a  $P''(x'';y'';z'')$  y  $O(0;0;0)$  pasa a  $O'(x_0;y_0;z_0)$ , siendo sus vectores desplazamiento respectivamente  $\vec{d}_p$  y  $\vec{d}_o$ . Las componentes cartesianas de los desplazamientos absolutos de los puntos considerados son, si el medio es contínuo, funciones contínuas de  $x$ ,  $y$ ,  $z$ :

$$\begin{aligned} u &= u(x;y;z) \\ v &= v(x;y;z) \\ w &= w(x;y;z) \end{aligned}$$

Así las componentes de  $\vec{d}_o$  serán  $(u_0;v_0;w_0)$  y las de  $\vec{d}_p$ ,  $(u;v;w)$  respectivamente. Siendo  $u$ ,  $v$  y  $w$  funciones contínuas pueden desarrollarse en serie de McLaurin alrededor del punto  $O$ . Por lo tanto las componentes cartesianas del desplazamiento  $\vec{d}_p$  son:

$$\mu = \mu_0 + \left(\frac{\partial \mu}{\partial x}\right)_0 x + \left(\frac{\partial \mu}{\partial y}\right)_0 y + \left(\frac{\partial \mu}{\partial z}\right)_0 z$$

$$v = v_0 + \left(\frac{\partial v}{\partial x}\right)_0 x + \left(\frac{\partial v}{\partial y}\right)_0 y + \left(\frac{\partial v}{\partial z}\right)_0 z$$

$$w = w_0 + \left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)_0 x + \left(\frac{\partial w}{\partial y}\right)_0 y + \left(\frac{\partial w}{\partial z}\right)_0 z$$

Como P está infinitamente próximo a O, pueden despreciarse los términos de mayor orden del desarrollo en serie, con lo que las componentes de los desplazamientos son así funciones lineales de las coordenadas x,y,z (Condición que implica que las deformaciones son homogéneas). Esta hipótesis es válida para deformaciones menores que el 1%, que es el límite que los ingenieros utilizan en sus consideraciones.

Puesto que interesa la deformación y no los movimientos cinemáticos rígidos, se comenzará quitando la traslación del movimiento de O y P, lo que puede hacerse considerando al vector desplazamiento relativo de P respecto de O, es decir  $\bar{d}_r = \bar{d}_p - \bar{d}_o$ . Esto equivale a trasladar el origen de coordenadas con el punto O, o bien aplicar al punto P el vector desplazamiento relativo (figura 20 b).

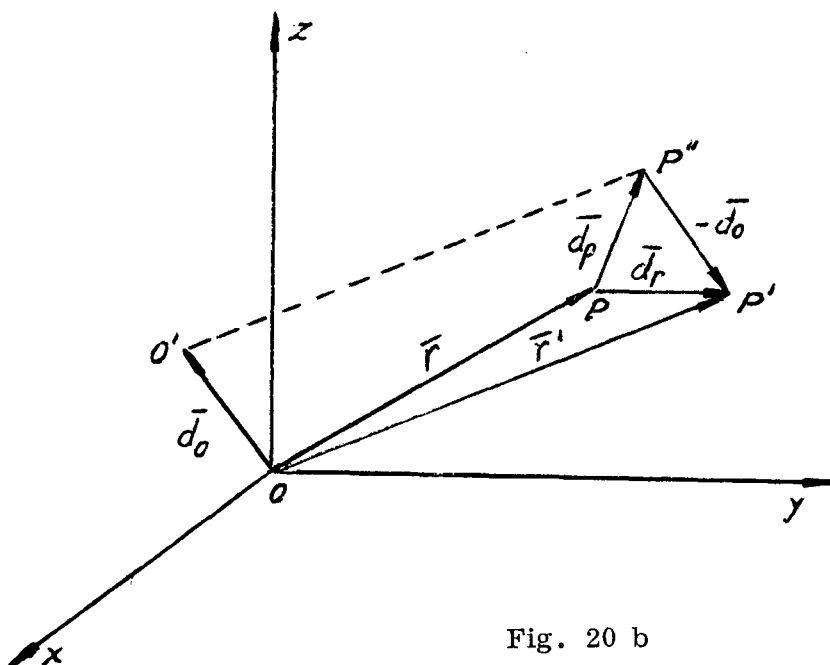


Fig. 20 b

Las componentes cartesianas del desplazamiento relativo son

ahora:

$$\mu - \mu_0 = \left(\frac{\partial \mu}{\partial x}\right)_0 x + \left(\frac{\partial \mu}{\partial y}\right)_0 y + \left(\frac{\partial \mu}{\partial z}\right)_0 z$$

$$v - v_0 = \left(\frac{\partial v}{\partial x}\right)_0 x + \left(\frac{\partial v}{\partial y}\right)_0 y + \left(\frac{\partial v}{\partial z}\right)_0 z$$

$$w - w_0 = \left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)_0 x + \left(\frac{\partial w}{\partial y}\right)_0 y + \left(\frac{\partial w}{\partial z}\right)_0 z$$

y las componentes del desplazamiento relativo unitario son:

$$\frac{\mu - \mu_0}{r} = \frac{\partial \mu}{\partial x} l_{xr} + \frac{\partial \mu}{\partial y} l_{yr} + \frac{\partial \mu}{\partial z} l_{zr}$$

$$\frac{v - v_0}{r} = \frac{\partial v}{\partial x} l_{xr} + \frac{\partial v}{\partial y} l_{yr} + \frac{\partial v}{\partial z} l_{zr}$$

$$\frac{w - w_0}{r} = \frac{\partial w}{\partial x} l_{xr} + \frac{\partial w}{\partial y} l_{yr} + \frac{\partial w}{\partial z} l_{zr}$$

siendo:

$$l_{xr} = \frac{x}{r} \quad ; \quad l_{yr} = \frac{y}{r} \quad ; \quad l_{zr} = \frac{z}{r}$$

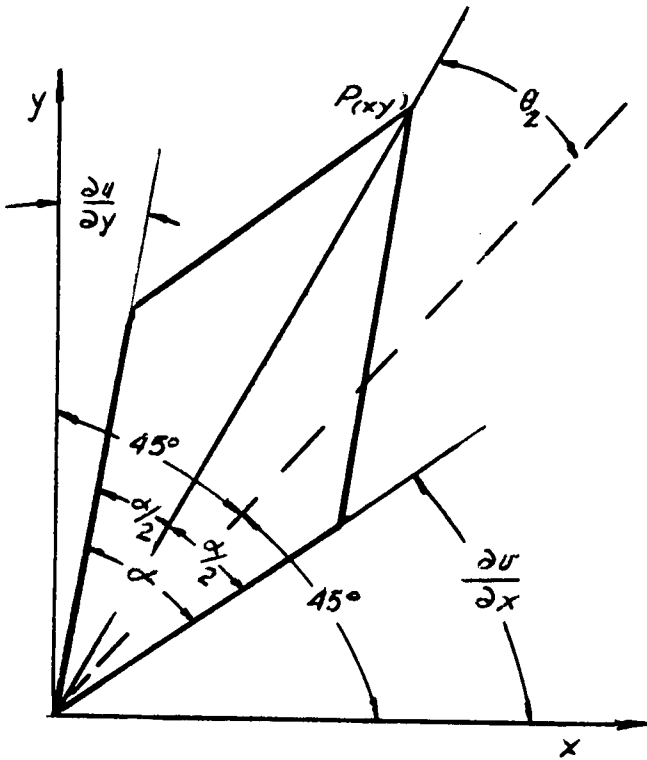
En virtud de haberse supuesto que la deformación es homogénea se han suprimido los subíndices "0" en los segundos miembros, pues al ser funciones lineales las derivadas son constantes e iguales en cualquier punto.

En forma matricial se puede escribir:

$$\begin{pmatrix} \frac{\mu - \mu_0}{r} \\ \frac{v - v_0}{r} \\ \frac{w - w_0}{r} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial \mu}{\partial x} & \frac{\partial \mu}{\partial y} & \frac{\partial \mu}{\partial z} \\ \frac{\partial v}{\partial x} & \frac{\partial v}{\partial y} & \frac{\partial v}{\partial z} \\ \frac{\partial w}{\partial x} & \frac{\partial w}{\partial y} & \frac{\partial w}{\partial z} \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} l_{xr} \\ l_{yr} \\ l_{zr} \end{pmatrix} \quad (23)$$

$\frac{\partial \mu}{\partial x}$  es una componente cartesiana de deformación lineal, y despreciando pequeñas cantidades de mayor orden, representa el cambio por unidad de longitud de un elemento de línea en la dirección x. Así en la figura 21 el punto  $B_x$  de abscisa x antes de la deformación, pasará después de ella a la posición  $B'_x$  de abscisa  $x + \frac{\partial \mu}{\partial x} x = (1 + \frac{\partial \mu}{\partial x}) x$





$$\alpha = \frac{\pi}{2} - \frac{\partial u}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial x}$$

$$\frac{\alpha}{2} = \frac{\pi}{4} - \frac{1}{2} \frac{\partial u}{\partial y} - \frac{1}{2} \frac{\partial v}{\partial x}$$

Si la diagonal se gira un ángulo  $\Theta_z$  para llevarla a  $45^\circ$  de los ejes:

$$\theta_z = \frac{\pi}{4} - \frac{\alpha}{2} - \frac{\partial u}{\partial y}$$

$$\theta_z = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} \right)$$

Fig. 22

La expresión 24 entonces puede visualizarse en el plano xy de la siguiente manera:

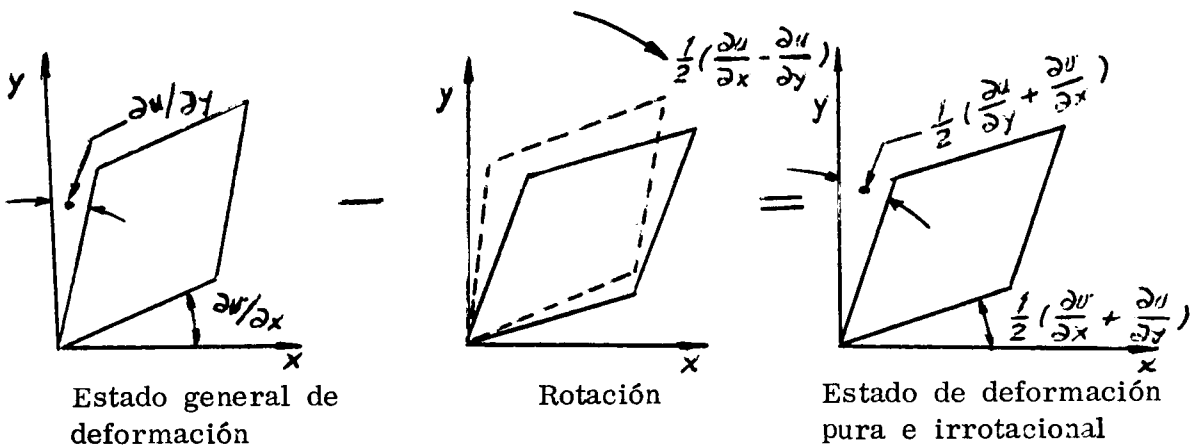


Fig. 23

Llamando:

$$\begin{aligned}
 e_x &= \frac{\partial u}{\partial x} & \gamma_{yx} &= \gamma_{xy} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) \\
 e_y &= \frac{\partial v}{\partial y} & \gamma_{zx} &= \gamma_{xz} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} \right) \\
 e_z &= \frac{\partial w}{\partial z} & \gamma_{yz} &= \gamma_{zy} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} \right)
 \end{aligned} \quad (25)$$

las ecuaciones que expresan las componentes cartesianas del vector desplazamiento unitario relativo irrotacional como funciones de r quedan:

$$\begin{aligned}
 e_{rx} &= e_x l_{xr} + \gamma_{yx} l_{yr} + \gamma_{zx} l_{zr} \\
 e_{ry} &= \gamma_{xy} l_{xr} + e_y l_{yr} + \gamma_{yz} l_{zr} \\
 e_{rz} &= \gamma_{xz} l_{xr} + \gamma_{yz} l_{yr} + e_z l_{zr}
 \end{aligned} \quad (26)$$

Si a la matriz de deformación pura o irrotacional se la llama D, puede escribirse:

$$D = \begin{vmatrix} e_x & \gamma_{yx} & \gamma_{zx} \\ \gamma_{xy} & e_y & \gamma_{zy} \\ \gamma_{xz} & \gamma_{yz} & e_z \end{vmatrix} \quad (27)$$

Comparando las ecuaciones 26 con las de las componentes cartesianas de  $\bar{U}_{rr}$  (ecuaciones 2), se hace evidente que existe analogía matemática entre las expresiones de los estados de tensiones y deformaciones.

Así es posible determinar una expresión equivalente a la 4 para una deformación en una determinada dirección r, cuando se conocen los seis elementos de la matriz de deformación pura e irrotacional:

$$e_r = e_x l_{xr}^2 + e_y l_{yr}^2 + e_z l_{zr}^2 + 2(\gamma_{xy} l_{xr} l_{yr} + \gamma_{yz} l_{yr} l_{zr} + \gamma_{zx} l_{zr} l_{xr}) \quad (28)$$

Con un cambio de variables similar al efectuado en A.5 se obtiene una ecuación equivalente a la 7, que demuestra que la 28 es una "cuádrica de deformaciones". Existirán entonces tres direcciones principales en las que actúan las respectivas deformaciones principales cuyas magnitudes se obtienen resolviendo una ecuación cúbica análoga a la 11:

$$e_p^3 - e_p^2(e_x + e_y + e_z) + e_p(e_x e_y + e_y e_z + e_z e_x - \gamma_{xy}^2 - \gamma_{yz}^2 - \gamma_{zx}^2) - (e_x e_y e_z - 2\gamma_{xy} \gamma_{yz} \gamma_{zx} - e_x \gamma_{yz}^2 - e_y \gamma_{zx}^2 - e_z \gamma_{xy}^2) = 0 \quad (29)$$

Los coeficientes de esta ecuación son invariantes del estado de deformaciones, y así como el primer invariante del estado general de tensiones está relacionado con la tensión esférica (ecuación 17) el primer invariante del estado de deformación pura está relacionado con la deformación volumétrica. En efecto:

$$J_1 = 3 \cdot e_m \quad e_1 + e_2 + e_3$$

$$\Delta = \frac{\Delta V}{V} = \frac{l_1(1+e_1) \cdot l_2(1+e_2) \cdot l_3(1+e_3) - l_1 l_2 l_3}{l_1 l_2 l_3} \quad (30)$$

desarrollando y despreciando términos de mayor orden:

$$\Delta = e_1 + e_2 + e_3 \quad (31)$$

Por lo tanto comparando 30 y 31:

$$J_1 = \Delta \quad (32)$$

También el estado de deformaciones puede representarse gráficamente por el método de Mohr. Su realización práctica es en todo similar a la efectuada en la figura 11 b, sólo que en este caso los ejes coordenados serán  $\gamma_{rt}$  y  $e_r$ .

Por último, el estado general de deformación pura e irrotacional, puede descomponerse en la suma de un estado esférico más un estado desviador.

#### B.4. COMPONENTES INFINITESIMALES DE DEFORMACION FINITA

Las relaciones obtenidas hasta aquí se han desarrollado para deformaciones infinitesimales totales. Esas expresiones son también válidas para el caso de tratarse de "incrementos infinitesimales de deformaciones finitas". La matriz respectiva se indica con  $d\epsilon_{ij}$  y sus componentes son:

$$d\epsilon_{ij} = \begin{vmatrix} d\epsilon_x & d\gamma_{yx} & d\gamma_{zx} \\ d\gamma_{xy} & d\epsilon_y & d\gamma_{zy} \\ d\gamma_{xc} & d\gamma_{yz} & d\epsilon_z \end{vmatrix}$$

Cuando las deformaciones son plásticas, la deformación es distorsional pura, es decir, sin cambio volumétrico y por lo tanto:

$$d\epsilon_x + d\epsilon_y + d\epsilon_z = 0 \quad (33)$$

### B.5. VELOCIDADES DE DEFORMACION

Las velocidades de deformación están dadas por la variación de las deformaciones con el tiempo. Se utilizan en la solución de problemas en lo que existe un flujo de material, ya sea estacionario o no. En general se define:

$$\dot{\epsilon}_{ij} = \frac{d\epsilon_{ij}}{dt} \quad (34)$$

### B.6. DEFORMACION EFECTIVA O EQUIVALENTE

Se define también para el estado de deformaciones la "deformación efectiva" o "equivalente", dada por:

$$d\bar{\epsilon} = \sqrt{\frac{2}{9}[(d\epsilon_1 - d\epsilon_2)^2 + (d\epsilon_2 - d\epsilon_3)^2 + (d\epsilon_3 - d\epsilon_1)^2]} \quad (35a)$$

Esta expresión es un invariante del estado de deformaciones, lo cual puede verse al relacionarla con el segundo invariante desviador de deformaciones, como se hiciera con la ecuación 22b:

$$d\bar{\epsilon} = \frac{2}{3} [J_1^2 - 3J_2]^{1/2} \quad (35b)$$

Para una terna genérica, de la 35b se obtiene:

$$d\bar{\epsilon} = \sqrt{\frac{2}{9}[(d\epsilon_x - d\epsilon_y)^2 + (d\epsilon_y - d\epsilon_z)^2 + (d\epsilon_z - d\epsilon_x)^2] + \frac{4}{3}(d\gamma_{xy}^2 + d\gamma_{yz}^2 + d\gamma_{zx}^2)} \quad (35c)$$

### B.7. DEFORMACIONES FINITAS - DEFORMACIONES LOGARITMICAS

Las relaciones desarrolladas en los puntos anteriores, pierden exactitud a medida que las deformaciones incrementan su módulo, dado que ya no pueden introducirse ciertas simplificaciones en los desarrollos. Así, por ejemplo, para obtener la expresión 31, si las deformaciones fueran finitas, no podrían desprejarse los términos de segundo orden, y el primer invariante no representaría entonces la variación volumétrica  $\Delta$ . Este hecho indujo a Ludwik a proponer una nueva definición de las deformaciones, las "deformaciones logarítmicas" tales que no sean afectadas por aquella discrepancia. Se define a la deformación logarítmica:

$$\epsilon_x = \int_{x_0}^x \frac{dx}{x} = \ln \frac{x}{x_0} \quad (36)$$

y siendo la deformación convencional referida a la longitud inicial (y no a la instantánea):

$$e_x = \frac{\delta x}{x_0} = \frac{x - x_0}{x_0} = \frac{x}{x_0} - 1 \quad (37)$$

Por lo tanto:

$$E_x = \ln \frac{x}{x_0} = \ln(1 + e_x) \quad (38)$$

En el punto B.4 ya se indicó que cuando las deformaciones son plásticas, hay constancia de volumen, por lo tanto:

$$V = V_0 (1 + e_1) \cdot (1 + e_2) \cdot (1 + e_3) = V_0 \\ (1 + e_1) \cdot (1 + e_2) \cdot (1 + e_3) = 1$$

y aplicando logaritmos:

$$\ln(1 + e_1) + \ln(1 + e_2) + \ln(1 + e_3) = 0 \quad (39)$$

De acuerdo a la 38, la 39 puede escribirse ahora:

$$E_1 + E_2 + E_3 = 0 \quad (40)$$

y la 40 queda formalmente como la 31.

Como en la mayoría de los procesos de conformado de metales se introducen deformaciones por compresión (negativas), algunos autores, con el único fin de independizarse del signo de la deformación, reservan la fórmula general 38 para los casos de deformación por tracción, y toman para el caso de compresión la expresión equivalente:

$$E_x = \ln \frac{1}{1 - e_x} \quad (41)$$

La figura 24 muestra la diferencia entre ambas definiciones de deformaciones. En abscisas se ha representado  $x/x_0$  y en ordenadas  $e_x = x/x_0 - 1$  y  $E_x = \ln(x/x_0)$ .

Las dos deformaciones dan valores prácticamente iguales hasta valores de alrededor de 0.1.

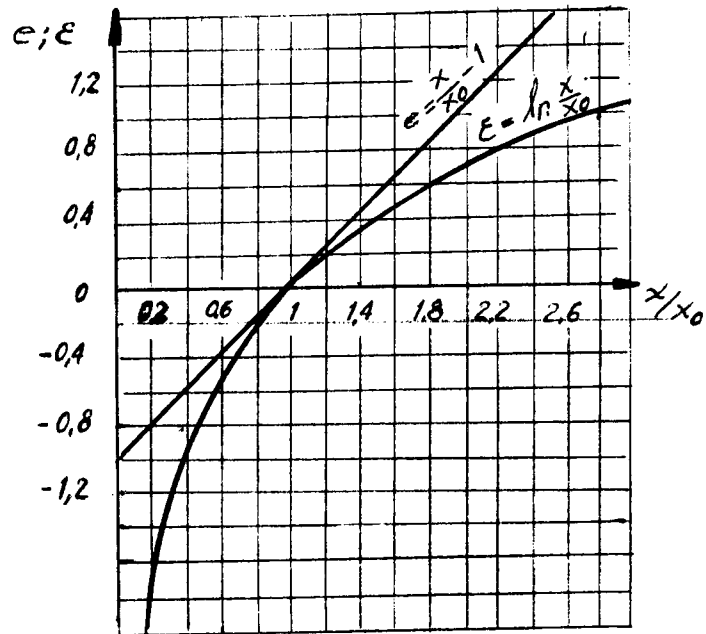


Fig. 24

Las deformaciones logarítmicas, cuando la deformación es uniforme, tienen la ventaja de ser aditivas.

$$\mathcal{E}_x = \ln \frac{x_1}{x_0} + \ln \frac{x_2}{x_1} + \dots + \ln \frac{x_n}{x_{n-1}} = \ln \frac{x_n}{x_0}$$

## II.1.C. RELACIONES TENSION-DEFORMACION EN EL RANGO ELASTICO

- C.1 Objeto
- C.2 Elementos necesarios para elaborar una teoría de elasticidad
- C.3 Ecuaciones de equilibrio
- C.4 Ecuaciones de compatibilidad
- C.5 Condiciones de borde
- C.6 Relaciones tensión-deformación en el rango elástico
  - 6.a. Cambio de volumen en el rango elástico
  - 6.b. Constantes elásticas
  - 6.c. Relaciones tensión-deformación en componentes esféricas y desviadoras en el rango elástico
  - 6.d. Círculo de Mohr en elasticidad.
- C.7 Energía elástica de dilatación y de distorsión
- C.8 Función tensión y función de Airy

### C.1. OBJETO

Reseñar las condiciones necesarias para dar solución analítica a los problemas que se plantean dentro del campo elástico, indicando el tipo de relaciones existentes entre tensiones y deformaciones.

### C.2. ELEMENTOS NECESARIOS PARA ELABORAR UNA TEORIA DE ELASTICIDAD

Los elementos necesarios para dar solución analítica a los problemas que se plantean en el campo elástico son:

1. Ecuaciones de equilibrio.
2. Ecuaciones de compatibilidad.
3. Condiciones de borde.
4. Relaciones tensión-deformación en el rango elástico.

Se analizarán cada una de ellas.

### C.3. ECUACIONES DE EQUILIBRIO

Son las ecuaciones de equilibrio estático. En un cuerpo continuo sometido a la acción de fuerzas exteriores, las tensiones variarán en forma continua. La figura 25 ilustra las tensiones que actúan en un elemento del cuerpo en la dirección x.

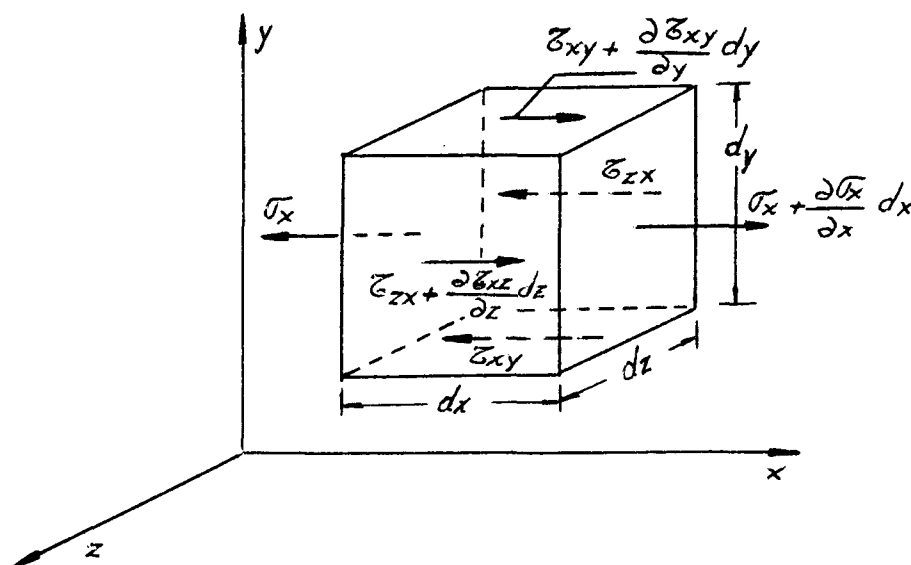


Fig. 25

El elemento estará en equilibrio si se cumplen las condiciones:

$$\sum F_x = 0 \qquad \sum F_y = 0 \qquad \sum F_z = 0$$

El análisis de la primera ecuación conduce a:

$$(\bar{\sigma}_x + \frac{\partial \bar{\sigma}_x}{\partial x} dx) dy dz + (\bar{\tau}_{zx} + \frac{\partial \bar{\tau}_{zx}}{\partial z} dz) dx dy + (\bar{\tau}_{yx} + \frac{\partial \bar{\tau}_{yx}}{\partial y} dy) dx dz - \bar{\sigma}_x dy dz - \bar{\tau}_{zx} dy dx - \bar{\tau}_{yx} dx dz = 0$$

y simplificando:

$$\frac{\partial \bar{\sigma}_x}{\partial x} + \frac{\partial \bar{\tau}_{yx}}{\partial y} + \frac{\partial \bar{\tau}_{zx}}{\partial z} = 0$$

Si además de las tensiones surgidas como consecuencia de la aplicación de fuerzas exteriores, existieran fuerzas de volumen, y si a la componente según la dirección x de estas fuerzas se la designara X, se tiene:

$$\frac{\partial \bar{\sigma}_x}{\partial x} + \frac{\partial \bar{\tau}_{yx}}{\partial y} + \frac{\partial \bar{\tau}_{zx}}{\partial z} + X = 0 \quad (42a)$$

Procediendo en forma análoga para las otras dos direcciones:

$$\frac{\partial \bar{\tau}_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \bar{\sigma}_y}{\partial y} + \frac{\partial \bar{\tau}_{zy}}{\partial z} + Y = 0 \quad (42b)$$

$$\frac{\partial \bar{\tau}_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial \bar{\tau}_{yz}}{\partial y} + \frac{\partial \bar{\sigma}_z}{\partial z} + Z = 0 \quad (42c)$$

Las expresiones 42 son las "ecuaciones de equilibrio". Aseguran que las tensiones varían en forma continua debiendo satisfacerse por lo tanto en todos los puntos del cuerpo.

Si bien las tensiones surgen como consecuencia de la aplicación de cargas, las ecuaciones de equilibrio no dan en general una relación directa entre las tensiones y las cargas externas, salvo en la superficie donde las últimas están aplicadas (ver punto C.5).

#### C.4. ECUACIONES DE COMPATIBILIDAD

Describen la geometría de las deformaciones y aseguran la interdependencia de las mismas. Por ejemplo, para un  $e_x$  y  $e_y$  dados,  $\gamma_{xy}$  no puede tener un valor cualquiera, sino que debe estar vinculado a aquéllos de alguna manera. Las ecuaciones que dan la interrelación entre las deformaciones son las de compatibilidad.

Derivando dos veces  $e_x$  y  $e_y$  (ecuaciones 25) respectivamente:

$$\frac{\partial^2 e_x}{\partial y^2} = \frac{\partial^3 u}{\partial x \partial y^2}$$

$$\frac{\partial^2 e_y}{\partial x^2} = \frac{\partial^3 v}{\partial y \partial x^2}$$

y sumando estas dos expresiones se obtiene:

$$\frac{\partial^2 e_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 e_y}{\partial x^2} = \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} \left( \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) = 2 \frac{\partial^2 \gamma_{xy}}{\partial x \partial y} \quad (43a)$$

En forma semejante

$$\frac{\partial^2 e_y}{\partial z^2} + \frac{\partial^2 e_z}{\partial y^2} = 2 \frac{\partial^2 \gamma_{yz}}{\partial y \partial z} \quad (43b)$$

$$\frac{\partial^2 e_z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 e_x}{\partial z^2} = 2 \frac{\partial^2 \gamma_{xz}}{\partial x \partial z} \quad (43c)$$

También por las derivaciones parciales de las ecuaciones 25, como se indica a continuación, se obtiene:

$$\frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial \gamma_{zx}}{\partial y} + \frac{\partial \gamma_{xy}}{\partial z} - \frac{\partial \gamma_{yz}}{\partial x} \right) = \frac{\partial^2 e_x}{\partial y \partial z} \quad (43d)$$

$$\frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{\partial \gamma_{xy}}{\partial z} + \frac{\partial \gamma_{yz}}{\partial x} - \frac{\partial \gamma_{zx}}{\partial y} \right) = \frac{\partial^2 e_y}{\partial z \partial x} \quad (43e)$$

$$\frac{\partial}{\partial z} \left( \frac{\partial \gamma_{yz}}{\partial x} + \frac{\partial \gamma_{zx}}{\partial y} - \frac{\partial \gamma_{xy}}{\partial z} \right) = \frac{\partial^2 e_z}{\partial x \partial y} \quad (43f)$$

Si las deformaciones satisfacen estas ecuaciones 43, las mismas son compatibles entre sí y la continuidad del medio se mantiene.

### C.5. CONDICIONES DE BORDE

Son las condiciones impuestas de esfuerzos o deformaciones externas a las que el cuerpo está sometido.

Si la condición de borde dada es un sistema de cargas, pueden determinarse entonces las tensiones actuantes en la superficie, y tal como se dijo en C.3, la solución analítica hallada para la distribución de tensiones deberá ser tal que en dicha superficie coincida con las aplicadas.

Si la condición de borde es de desplazamientos o deformaciones, la distribución de deformaciones encontrada deberá también en el borde cumplir con las ecuaciones de compatibilidad.

### C.6. RELACIONES TENSION-DEFORMACION EN EL RANGO ELASTICO

En el campo elástico, si además de la recuperación de las deformaciones, existe proporcionalidad entre tensiones y deformaciones, se cumple:

Tensión = constante x deformación

Para el caso particular de una tensión aplicada en la dirección x, la "ley de Hooke" se expresa:

$$e_x = \frac{1}{E} \sigma_x \quad (44)$$

donde E es el módulo de Young.

Simultáneamente con  $e_x$ , y por efecto de  $\sigma_x$  se producen deformaciones de signo contrario a  $e_x$  en las direcciones transversales z e y. La relación entre las deformaciones transversales  $e_z$  y  $e_y$ , y la longitudinal  $e_x$ , está dada por el "módulo de Poisson":

$$\nu = - \frac{e_y}{e_x} = - \frac{e_z}{e_x} \quad \therefore \quad e_y = e_z = -\nu e_x \quad (45)$$

Reemplazando  $e_x$  por su valor dado en 44:

$$e_y = e_z = -\nu \frac{\sigma_x}{E} \quad (46)$$

Si se trata de un estado triaxial, la tensión  $\bar{\sigma}_y$  producirá deformaciones:

$$e_y = \frac{\bar{\sigma}_y}{E} \quad \text{y} \quad e_x = e_z = -\frac{\nu}{E} \bar{\sigma}_y$$

y la tensión  $\bar{\sigma}_z$ :

$$e_z = \frac{\bar{\sigma}_z}{E} \quad \text{y} \quad e_x = e_y = -\frac{\nu}{E} \bar{\sigma}_z$$

La aplicación del principio de superposición de estados conduce a que las deformaciones totales según cada uno de los ejes sea:

$$e_x = \frac{1}{E} [\sigma_x - \nu(\sigma_y + \sigma_z)] \quad (47a)$$

$$e_y = \frac{1}{E} [\sigma_y - \nu(\sigma_z + \sigma_x)] \quad (47b)$$

$$e_z = \frac{1}{E} [\sigma_z - \nu(\sigma_x + \sigma_y)] \quad (47c)$$

También existe proporcionalidad entre las tensiones y las deformaciones tangenciales:

$$\gamma_{xy} = \frac{\tau_{xy}}{2G} \quad (48a)$$

$$\gamma_{xz} = \frac{\tau_{xz}}{2G} \quad (48b)$$

$$\gamma_{yz} = \frac{\tau_{yz}}{2G} \quad (48c)$$

donde G es el "módulo de elasticidad por corte".

### C.6.a. CAMBIO DE VOLUMEN EN EL RANGO ELASTICO

Sumando las tres ecuaciones 47 se obtiene la variación de volumen elástico,  $\Delta$  (ver punto B.3, ecuación 31):

$$\Delta = e_x + e_y + e_z = \frac{1-2\nu}{E} (\sigma_x + \sigma_y + \sigma_z) \quad (49)$$

Para un estado hidrostático de tensiones, la dilatación volumétrica,  $\Delta$  vale:

$$\Delta = \frac{1}{K} \sigma_m \quad (50)$$

donde K es el "módulo volumétrico".

### C.6.b. CONSTANTES ELASTICAS

Observando las ecuaciones 44, 45, 48 y 50 se aprecian cuatro constantes elásticas propias de los materiales isótropos y homogéneos. Estas constantes están relacionadas entre sí, Por ejemplo, si la suma entre paréntesis de la 49 se reemplaza, de acuerdo con la 18 por  $3\bar{\sigma}_m$ :

$$\Delta = \frac{1-2\nu}{E} \cdot 3\bar{\sigma}_m \quad (51)$$

y comparando 50 y 51:

$$K = \frac{E}{3(1-2\nu)} \quad (52)$$

También puede expresarse G en función de E y  $\nu$ . En efecto, si las ecuaciones 47 se expresan en función de una terna principal y se resta 47b de 47a:

$$e_1 - e_2 = \frac{1}{E} [(\sigma_1 - \sigma_2) - \nu(\sigma_2 - \sigma_1)] = \frac{1+\nu}{E} (\sigma_1 - \sigma_2)$$

como  $\sigma_1 - \sigma_2 = 2 \tau_{1-2}$  y análogamente  $e_1 - e_2 = 2 \gamma'_{1-2}$

$$\therefore 2 \gamma'_{1-2} = \frac{1+\nu}{E} \tau_{1-2}$$

Siendo  $\tau_{1-2} = 2G\gamma'_{1-2}$  se tiene reemplazando en lo anterior:

$$G = \frac{E}{2(1+\nu)} \quad (53)$$

Pueden además obtenerse a partir de la 52 y 53 las siguientes relaciones

$$\nu = \frac{3K-2G}{6K+2G} \quad (54)$$

$$E = \frac{9KG}{3K+G} \quad (55)$$

Del análisis de las ecuaciones 52, 53, 54 y 55, surge que de las cuatro constantes elásticas que allí aparecen, sólo dos son independientes.

#### C.6.c. RELACIONES TENSION-DEFORMACION EN COMPONENTES ESFERICAS Y DESVIADORAS EN EL RANGO ELASTICO

Si en 47a se reemplaza  $(\sigma_y + \sigma_z)$  por su valor en función de  $\bar{\sigma}_m$  obtenido en la 18 y se reordena:

$$e_x = \frac{\sigma_x}{E} (1+\nu) - \frac{\nu}{E} 3\bar{\sigma}_m \quad (56)$$

Sumando y restando al segundo miembro  $\left(\frac{1+\nu}{E}\right) \bar{\sigma}_m$  :

$$e_x = \frac{1+\nu}{E} \sigma_x' - \frac{3\nu}{E} \bar{\sigma}_m + \frac{1+\nu}{E} \bar{\sigma}_m$$

$$e_x = \frac{1+\nu}{E} \sigma_x' + \frac{1-2\nu}{E} \bar{\sigma}_m$$

como

$$\frac{1+\nu}{E} = \frac{1}{2G} \quad \text{y} \quad \frac{1-2\nu}{E} = \frac{1}{3K}$$

$$e_x = \frac{\sigma_x'}{2G} + \frac{\bar{\sigma}_m}{3K}$$

En igual forma podrán expresarse  $e_y$  y  $e_z$ .

Como las deformaciones y tensiones de corte son desviadoras, su relación está dada por las ecuaciones 48:

#### C.6.d. CIRCULO DE MOHR EN ELASTICIDAD

Si se escribe la ecuación 56 en función de la terna principal:

$$e_1 = \frac{1+\nu}{E} \sigma_1 - \frac{\nu}{E} 3\bar{\sigma}_m$$

y si ahora se reemplaza  $\frac{1+\nu}{E}$  por su valor según 53, así como también  $\nu$  y E por 54 y 55 respectivamente, se obtiene:

$$e_1 = \frac{\sigma_1}{2G} - \frac{3K-2G}{6KG} \bar{\sigma}_m \quad (57)$$

$$e_1 = \frac{1}{2G} \left( \sigma_1 - \frac{3K-2G}{3K} \bar{\sigma}_m \right)$$

En el círculo de Mohr de la figura 26 se aprecia que para la medición de deformaciones, se ha tomado un nuevo origen  $O'$ , a una distancia  $\frac{3K-2G}{3K} \bar{\sigma}_m$  del anterior. Además hay un cambio de escala dado por el valor  $1/2G$ .

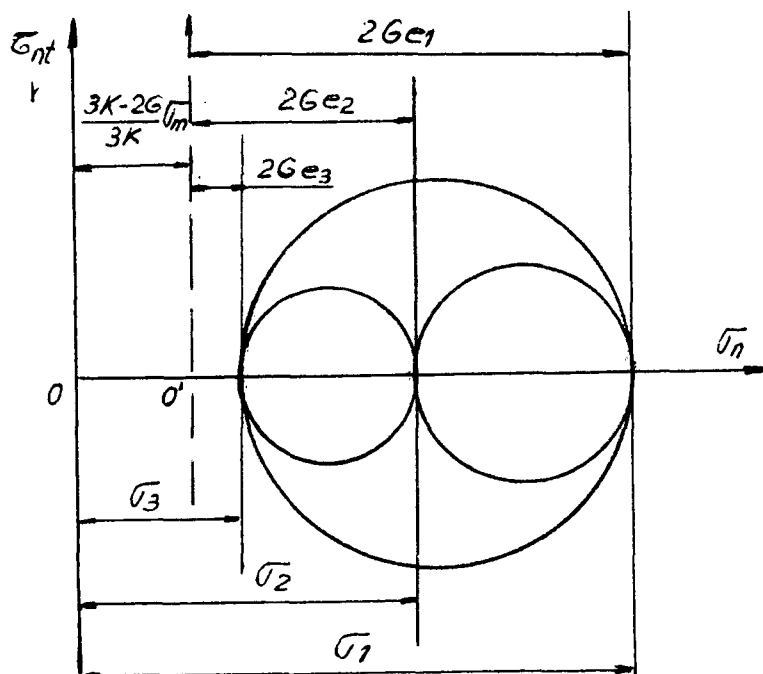


Fig. 26

## C.7. ENERGIA ELASTICA DE DILATACION Y DE DISTORSION

En general, la energía de deformación por unidad de volumen es:

$$u = \int_{e_0}^{e_1} \sigma de \quad (58)$$

En el campo elástico, al ser lineal la ley que vincula  $\sigma$  con  $e$ , la energía específica de deformación elástica para el caso de tensión uniaxial vale:

$$u = \frac{1}{2} \sigma_1 e_1 \quad (59)$$

Si bien es cierto que en este caso existen deformaciones transversales  $e_2$  y  $e_3$ , las mismas no contribuyen al trabajo total por cuanto según las direcciones 2 y 3 no hay esfuerzos aplicados.

Para un estado triaxial, el principio de superposición conduce:

$$u = \frac{1}{2} (\sigma_1 e_1 + \sigma_2 e_2 + \sigma_3 e_3) \quad (60)$$

Si las deformaciones  $e_1$ ,  $e_2$  y  $e_3$  se reemplazan por las ecuaciones 47a, b y c expresadas para una terna principal, y se agrupan términos:

$$u = \frac{1}{2E} (\sigma_1^2 + \sigma_2^2 + \sigma_3^2) - \frac{\nu}{E} (\sigma_1 \sigma_2 + \sigma_2 \sigma_3 + \sigma_3 \sigma_1)$$

Teniendo ahora en cuenta las expresiones 54 y 55 se obtiene:

$$u = \frac{1}{12G} [(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2] + \frac{1}{18K} (\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3)^2 \quad (61a)$$

Como:

$$\begin{aligned} \sigma_1 - \sigma_2 &= 2 \tau_{1-2} \\ \sigma_2 - \sigma_3 &= 2 \tau_{2-3} \\ \sigma_3 - \sigma_1 &= 2 \tau_{1-3} \\ \sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3 &= 3 \sigma_m \end{aligned}$$

la 61a puede escribirse:

$$u = \frac{1}{3G} (\tau_{1-2}^2 + \tau_{2-3}^2 + \tau_{3-1}^2) + \frac{\sigma_m^2}{2K} \quad (61b)$$

El primer sumando de la 61a o 61b constituye el "trabajo de distorsión", y el segundo la "resiliencia volumétrica".

La "energía elástica de dilatación" está dada por:

$$u = \frac{1}{18K} (\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3)^2 = \frac{1}{2K} \sigma_m^2 \quad (62)$$

y la "energía de distorsión elástica":

$$u = \frac{1}{12G} [(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2] = \frac{1}{3G} (\tau_{1-2}^2 + \tau_{2-3}^2 + \tau_{3-1}^2) \quad (63)$$

### C.8. FUNCION TENSION Y FUNCION DE AIRY

En general, dar solución a los problemas en elasticidad, involucra encontrar una distribución de tensiones que satisfagan las ecuaciones de equilibrio, las relaciones de compatibilidad y las condiciones de borde.

Para estados triaxiales, Maxwell propone tres funciones de posición independientes  $\phi_1, \phi_2, \phi_3$  que expresen las componentes de tensión, tal que cumplan las condiciones enunciadas:

$$\begin{aligned} \sigma_x &= \frac{\partial^2 \phi_3}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \phi_2}{\partial z^2} & \tau_{xy} &= -\frac{\partial^2 \phi_3}{\partial x \partial y} \\ \sigma_y &= \frac{\partial^2 \phi_1}{\partial z^2} + \frac{\partial^2 \phi_3}{\partial x^2} & \tau_{yz} &= -\frac{\partial^2 \phi_1}{\partial y \partial z} \\ \sigma_z &= \frac{\partial^2 \phi_2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \phi_1}{\partial y^2} & \tau_{zx} &= -\frac{\partial^2 \phi_2}{\partial z \partial x} \end{aligned} \quad (64)$$

Para el caso bidimensional, Airy encontró que existe siempre una función  $\phi_{xy}$  que permite determinar las tensiones en cualquier punto:

$$\sigma_x = \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} \quad \sigma_y = \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} \quad \tau_{xy} = -\frac{\partial^2 \phi}{\partial x \partial y} \quad (65)$$

Es fácil comprobar que estas ecuaciones satisfacen a las condiciones de equilibrio dadas por las ecuaciones 42, reducidas al caso plano. Para verificar las condiciones de compatibilidad es necesario expresar la ecuación 43a en función de las tensiones. Para ello se derivan 47a, b y c (previamente reducidas al caso plano) y se reemplazan en 43a, dando:

$$\frac{\partial^2 \sigma_x}{\partial y^2} - \gamma \frac{\partial^2 \sigma_y}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \sigma_y}{\partial x^2} - \gamma \frac{\partial^2 \sigma_x}{\partial x^2} = 2(1 + \gamma) \frac{\partial^2 \tau_{xy}}{\partial x \partial y} \quad (66)$$

Si las correspondientes derivadas de 65 se reemplazan en 66 se obtiene:

$$\frac{\partial^4 \phi}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4 \phi}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 \phi}{\partial y^4} = 0 \quad (67)$$

En esta forma, si es posible encontrar una función que satisfaga la ecuación 67 entonces las tensiones estarán dadas por 65, siempre que se cumplan además las condiciones de borde.

En general, no es fácil encontrar la función  $\phi_{xy}$ , y sólo algunos problemas se han resuelto por este método.

## II.1.D. RELACIONES TENSION-DEFORMACION EN EL RANGO PLASTICO

- D.1 Objeto
- D.2 Elementos necesarios para elaborar una teoría de plasticidad
- D.3 Criterios de fluencia
  - 3.a. Criterio de Von Mises
  - 3.b. Criterio de Tresca
  - 3.c. Representación del criterio de Von Mises en el espacio de tensiones principales
  - 3.d. Representación del criterio de Tresca en el espacio de tensiones principales
  - 3.e. Los criterios de fluencia en el caso de tensión plana
- D.4 Endurecimiento por deformación
- D.5 Relaciones tensión-deformación en el rango plástico
- D.6 Teoría de Prandtl- Reuss
- D.7 Teoría de Levy-Mises
- D.8 Teorías de deformaciones totales
- D.9 Condición de fluencia plana
- D.10 Modelos reológicos y ecuaciones empíricas tensión-deformación

## D.1 OBJETO

Reseñar las condiciones necesarias para dar solución a los problemas que se plantean dentro del campo plástico.

Como es necesario predecir cuando se abandona el campo elástico (o se inicia la fluencia plástica), a las condiciones del punto C.2 se agregan los criterios de fluencia. Por otra parte, siendo el fenómeno de deformación plástica de naturaleza distinta que la deformación elástica, las leyes que vinculan las tensiones con las deformaciones en el campo plástico resultan también diferentes que las relaciones elásticas.

## D.2. ELEMENTOS NECESARIOS PARA ELABORAR UNA TEORIA DE PLASTICIDAD

Para elaborar una teoría de plasticidad son necesarios además de los cuatro elementos vistos en C.2, los dos siguientes:

- 5 Un criterio de fluencia, que indique cuándo se pasa de la zona elástica al campo plástico
- 6 Relaciones tensión-deformación en la zona plástica

Según el estado de tensiones y la geometría del cuerpo, habrá fluencia total o parte del cuerpo fluirá y el resto permanecerá en la zona elástica. Esto hace que las ecuaciones de compatibilidad y las relaciones tensión-deformación sean difíciles de obtener, existiendo sólo soluciones de algunos problemas muy particulares. La razón es la diferencia en las magnitudes de las deformaciones y los desplazamientos entre las zonas elásticas y plásticas adyacentes.

## D.3. CRITERIOS DE FLUENCIA

"Un Criterio de Fluencia" es una hipótesis con respecto al límite de elasticidad, bajo cualquier posible combinación de tensiones.

Se tratará de llegar a criterios que predigan cuando se iniciará la fluencia bajo estados complejos de tensiones, dada sólo la tensión de fluencia en tensión simple determinable experimentalmente. Para ello tendremos en cuenta que:

- (a) Se ha observado experimentalmente que dentro del rango de presiones y temperaturas industriales, las presiones hidrostáticas no provocan fluencia, y más aún, las componentes hidrostáticas de estados complejos de tensiones no afectan al punto en el cual tiene lugar la fluencia.  
Cualquier criterio entonces, deberá ser tal que:

$$\sigma_m = \frac{\sigma_x + \sigma_y + \sigma_z}{3} = \frac{\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3}{3} = \frac{I_1}{3}$$

no provoque fluencia, lo que permite enunciar que ésta tendrá lugar cuando alguna función escalar de las diferencias de las tensiones principales alcance un valor crítico.

$$f(\sigma_1 - \sigma_2 ; \sigma_2 - \sigma_3 ; \sigma_3 - \sigma_1) = \text{constante}$$

Esto equivale a decir que el límite de elasticidad puede expresarse como una función del tamaño absoluto de los círculos de Mohr, independientemente de su posición a lo largo del eje  $\bar{\sigma}_n$ . Como se vió en A.10, para iguales estados desviadores, los círculos son iguales en tamaño, pudiendo estar desplazados a lo largo del eje de abscisas en cantidades que dependen del estado esférico aplicado.

- (b) La fluencia deberá ser independiente de las direcciones de los ejes elegidos para definir el sistema, y siendo el material isotrópico, estará sólo relacionada con las intensidades de las tensiones aplicadas. Por lo tanto, la fluencia deberá ser una función de los invariantes del estado de tensiones, por ejemplo los coeficientes de la ecuación cúbica (13), pero si además es independiente de  $\bar{\sigma}_m$  como se vió en (a), entonces podrá ser una función de  $I'_2$  e  $I'_3$  puesto que  $I'_1 = 0$ .
- (c) También se supondrá que no hay efecto Bauschinger, lo que implica que si una combinación de valores de  $\bar{\sigma}_x, \bar{\sigma}_y, \bar{\sigma}_z, \bar{\tau}_{xy}, \bar{\tau}_{yz}, \bar{\tau}_{zx}$  produce fluencia, otro estado de tensiones con los mismos módulos de las componentes pero de signo contrario también la producirá.

En el espacio de tensiones principales de la figura 18a (punto A. 10) se vió que si  $\bar{OP}$  es un estado general de tensiones,  $\bar{ON}$  es su estado esférico y  $\bar{NP}$  el desviador. El plano que pasa por N y es normal a h, llamado "plano desviador", contendrá a  $\bar{NP}$ , y puesto que las presiones hidrostáticas no tienen efecto sobre la fluencia, será la magnitud de  $\bar{NP}$  yaciendo en el plano desviador, la que la determina.

En general, todos los estados de tensiones que interesan a los efectos de la fluencia, ya serán en planos similares normales a h. La figura 27 muestra al plano desviador que contiene a  $\bar{NP}$ . La fluencia tendrá lugar cuando  $\bar{NP}$  alcance un cierto valor limitado por el lugar de los puntos de fluencia, constituido por la intersección del plano desviador con la superficie de fluencia. La función de fluencia será una superficie cilíndrica de sección transversal constante, porque es independiente de las componentes hidrostáticas de presión, y por lo tanto de la posición del plano desviador a lo largo de h. Un criterio de fluencia deberá definir la forma de la sección transversal de dicho cilindro.

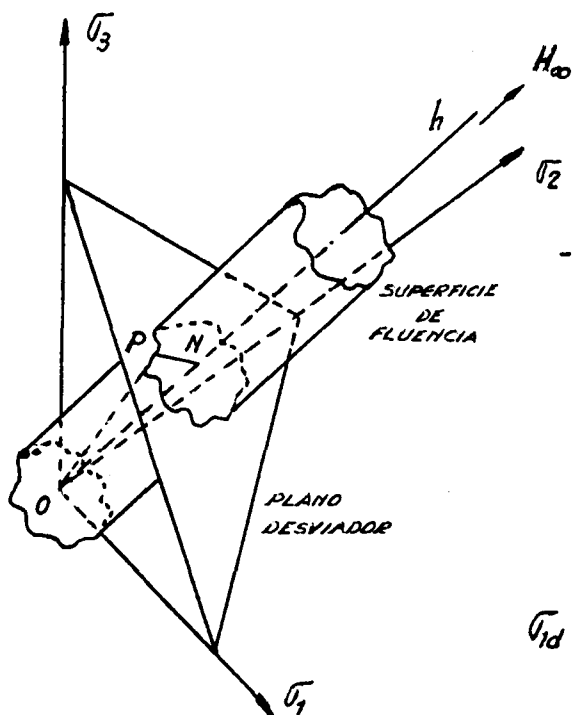


Fig. 27

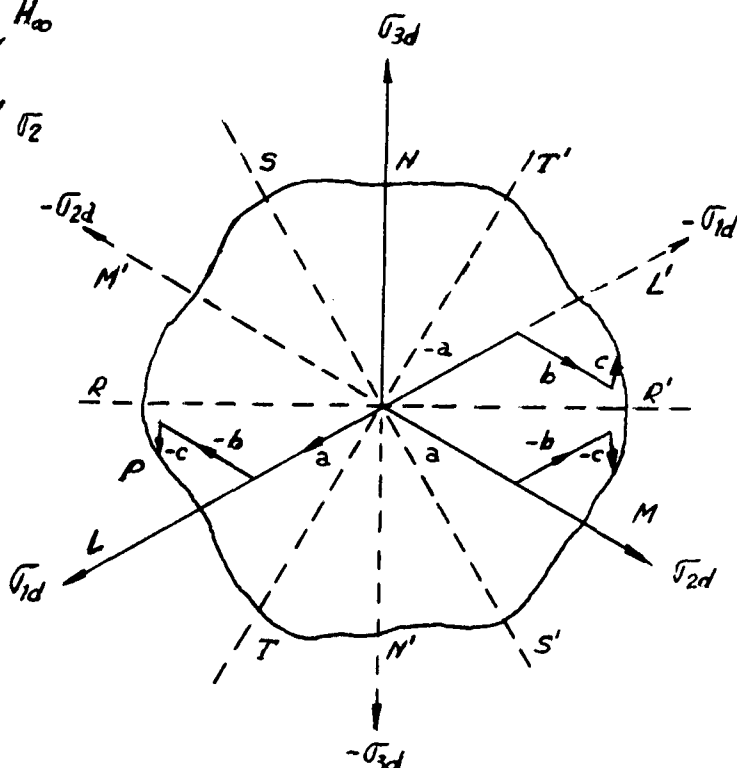


Fig. 28

La proyección de los ejes principales sobre el plano desviador desde  $H_\infty$  constituyen tres ejes a  $120^\circ$ . Si se incluyen las partes negativas de los ejes principales (en líneas de trazos), el área del plano aparece dividida en seis sectores iguales.

La figura 28 muestra al plano desviador llevado al plano de la hoja. Para un material isotrópico con igual tensión de fluencia en tracción y compresión si:  $\sigma_{1d} = a$ ,  $\sigma_{2d} = -b$  y  $\sigma_{3d} = -c$ , provocan fluencia, entonces cualquier otra combinación de estas componentes, también la provocarán. Por lo tanto, hay simetría no sólo con respecto a la proyección de los ejes principales  $LL'$ ,  $MM'$ ,  $NN'$ , sino también con respecto a  $RR'$ ,  $SS'$ ,  $TT'$ . De manera que es suficiente considerar un sector de  $30^\circ$  para investigar todos los estados posibles.

## D.3.a. CRITERIO DE VON MISES

Según este criterio la fluencia se inicia cuando alcanza un valor constante la siguiente función:

$$(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2 = \text{constante} \quad (68)$$

Como se aprecia, las diferencias entre las tres tensiones principales, o lo que es lo mismo, los tamaños absolutos de las tres circunferencias en la representación de Mohr permiten evaluar si un estado de tensiones dado produce o no fluencia.

Un criterio será correcto si es válido para cualquier combinación de tensiones, por lo tanto la constante de 68 puede determinarse a partir de estados de tensión simples. Es común identificar a las constantes con la tensión de fluencia a la tracción  $Y$ , o la tensión de fluencia al corte  $k$ , para un estado de corte puro.

En la fluencia en tracción simple (figura 29 a):

$$\sigma_1 = Y \quad \sigma_2 = \sigma_3 = 0$$

y para el corte puro (figura 29 b):

$$\sigma_1 = -\sigma_3 = k \quad \sigma_2 = 0$$

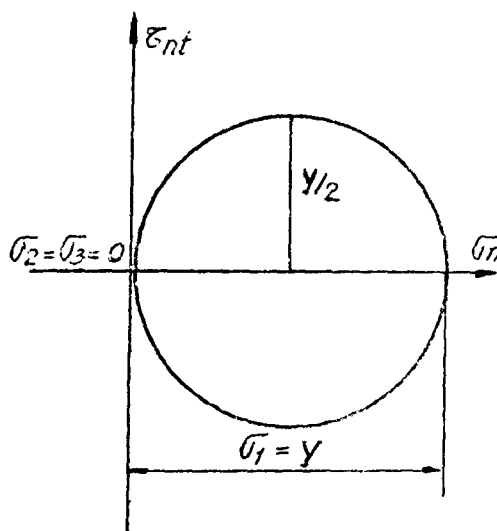


Fig. 29 a

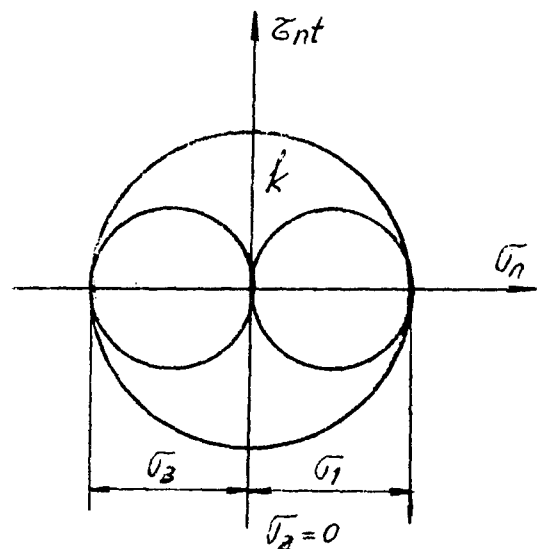


Fig. 29 b

Por lo que la expresión 68 se transforma respectivamente en cada caso:

$$(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2 = 2 Y^2 \quad (68a)$$

y

$$(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2 = 6 k^2 \quad (68b)$$

Por lo tanto:

$$k = \frac{2}{\sqrt{3}} \frac{Y}{2} = 1.155 \frac{Y}{2}$$

lo que indica que según este criterio, la tensión de fluencia en corte puro  $k$  es 1.155 veces mayor que la máxima tensión de corte elástica  $Y/2$  en tracción simple.

Si se compara la ecuación 68 con la 63 (Punto C.7), se comprende la interpretación que algunos autores hacen del criterio de Von Mises cuando lo enuncian diciendo que: "La fluencia se inicia cuando la energía elástica de distorsión alcanza un valor crítico".

Cuando se compara la 68a con la expresión de  $\bar{\sigma}$  (ecuación 22a) surge de inmediato que la tensión efectiva para el estado uniaxial de tracción coincide con el valor de la tensión de fluencia:

$$\bar{\sigma} = Y$$

#### D.3.b. CRITERIO DE TRESCA

"La fluencia tiene lugar cuando el mayor de los valores absolutos de cualquiera de las tres tensiones principales de corte alcanza una cierta magnitud".

Es decir, que la fluencia debe ocurrir cuando la mayor de las tres magnitudes  $|\sigma_1 - \sigma_2|$ ,  $|\sigma_2 - \sigma_3|$ ,  $|\sigma_3 - \sigma_1|$  alcanza un valor crítico y para un material dado, constante.

A diferencia del criterio de Von Mises, se desprecia en éste el valor de la tensión principal intermedia, o lo que es lo mismo, sólo se tiene en cuenta el tamaño absoluto de la circunferencia mayor en la representación de Mohr.

Si para un estado general de tensiones la mayor de las tensiones de corte inducida es:  $\frac{\sigma_3 - \sigma_1}{2}$ , entonces el criterio de Tresca queda expresado por:

$$|\sigma_3 - \sigma_1| = \text{constante} \quad (69)$$

Si se determina el valor de la constante por tracción simple (figura 29 a):

$$|\sigma_3 - \sigma_1| = Y \quad (69a)$$

y en corte puro (figura 29 b):

$$|\sigma_3 - \sigma_1| = 2k \quad (69b)$$

Por lo tanto :  $K = Y/2$

lo que indica que según este criterio, la tensión de fluencia en corte puro es igual que la máxima tensión de corte elástica en tracción simple, mientras que para Von Mises aquélla es un 15.5% mayor que ésta.

### D.3.c. REPRESENTACION DEL CRITERIO DE VON MISES EN EL ESPACIO DE TENSIONES PRINCIPALES

En la figura 18 a (punto A.10) y en la 27 se ve que:

$$\overline{NP}^2 = \overline{OP}^2 - \overline{ON}^2$$

donde:  $\overline{OP}^2 = \sigma_1^2 + \sigma_2^2 + \sigma_3^2$

y  $\overline{ON}^2 = \left(\frac{1}{\sqrt{3}}\sigma_1 + \frac{1}{\sqrt{3}}\sigma_2 + \frac{1}{\sqrt{3}}\sigma_3\right)^2 = \frac{1}{3}(\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3)^2$

Reemplazando:

$$\overline{NP}^2 = \frac{1}{3}[(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2] \quad (70)$$

Comparando la ecuación del criterio de Von Mises (ecuación 68 a) con la 70, y la 22 a (Punto A.11):

$$\overline{NP}^2 = \frac{1}{3}[(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2] = \frac{2}{3} Y^2 = \frac{2}{3} \overline{\sigma}^2$$

luego

$$\overline{NP} = \frac{1}{\sqrt{3}} \sqrt{(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2} = \sqrt{\frac{2}{3}} Y = \sqrt{\frac{2}{3}} \overline{\sigma}$$

De manera entonces que cuando la magnitud  $NP = \sqrt{\frac{2}{3}} \overline{\sigma}$  alcanza el valor  $\sqrt{\frac{2}{3}} Y$ , el punto P se encuentra sobre el lugar de fluencia, que es una circunferencia en el plano desviador puesto que este análisis se ha efectuado independientemente de la orientación de  $\overline{NP}$  en dicho plano (figura 30a).

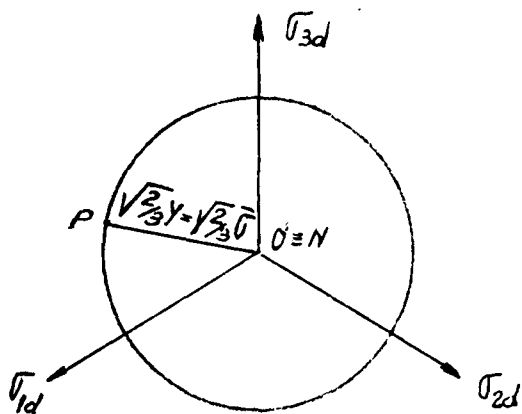


Fig. 30 a

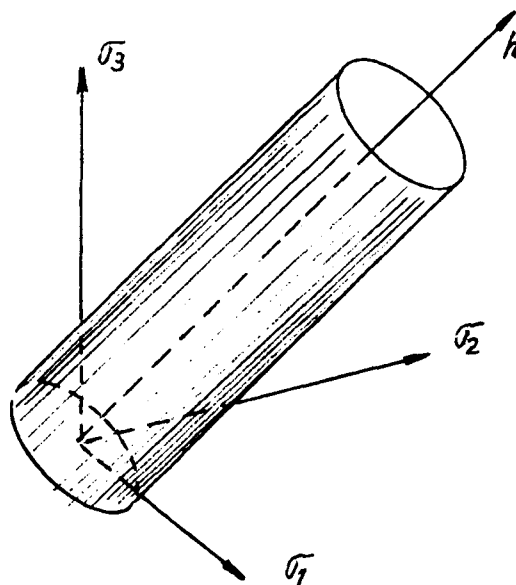


Fig. 30 b

Dado que la traza de la superficie de fluencia en el plano desviador es una circunferencia, y las tensiones hidrostáticas no producen fluencia, dicha superficie resulta un cilindro de generatrices paralelas a  $h$  (figura 30 b).

Los estados de tensiones tales que representados en el espacio de tensiones principales caen dentro del cilindro no producen fluencia, mientras que sí la provocan aquellos estados que quedan fuera de dicha superficie.

#### D.3.d. REPRESENTACION DEL CRITERIO DE TRESCA EN EL ESPACIO DE TENSIONES PRINCIPALES

Un punto tal como el  $P$  de la figura 31 representa un estado de tensiones en el cual  $\sigma_2 \geq \sigma_3 \geq \sigma_1$ .

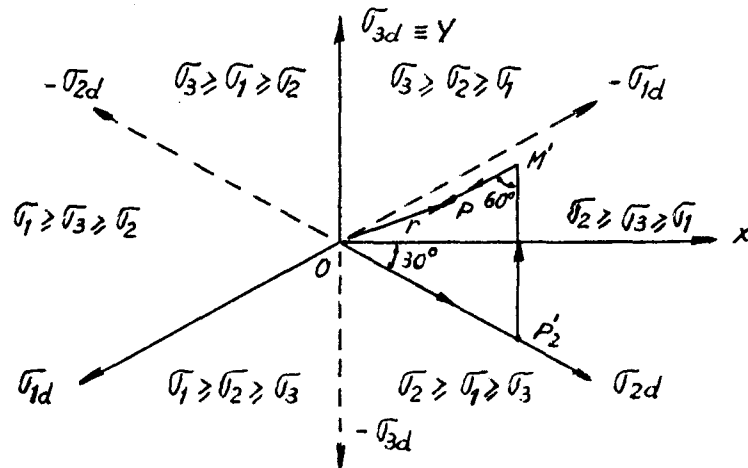


Fig. 31

$$\text{Sean } \overline{OP}'_2 = \sigma_{2d} = \sqrt{\frac{2}{3}} \sigma_2 ; P'_2 M' = \sigma_{3d} = \sqrt{\frac{2}{3}} \sigma_3 \text{ y } M'P = \sigma_{1d} = \sqrt{\frac{2}{3}} \sigma_1$$

las proyecciones sobre el plano desviador de las componentes  $\sigma_2$ ,  $\sigma_3$  y  $\sigma_1$  del estado general  $\overline{OP}$ .

Si se toman  $O\sigma_{3d} \equiv y$ , y al eje  $x$  coincidiendo con la bisectriz del sector de los estados de tensiones tales que:  $\sigma_2 \geq \sigma_3 \geq \sigma_1$  entonces la abscisa  $x$  de  $\overline{OP}$  es:  $x = \overline{OP}'_2 \cos.30^\circ - M'P \cos.30^\circ$

$$x = \frac{\sigma_2 - \sigma_1}{\sqrt{2}} \quad (71)$$

Comparando esta ecuación con 69a, se obtiene:

$$x = \frac{Y}{\sqrt{2}}$$

Vale decir que el criterio de Tresca en este sector (figura 32a) queda representado por una línea paralela al eje  $O\sigma_{3d}$ , a una distancia

$$x = \frac{Y}{\sqrt{2}}$$

Haciendo el mismo análisis para las otras cinco posibilidades de relaciones de tensiones, se obtiene el hexágono indicado en dicha figura.

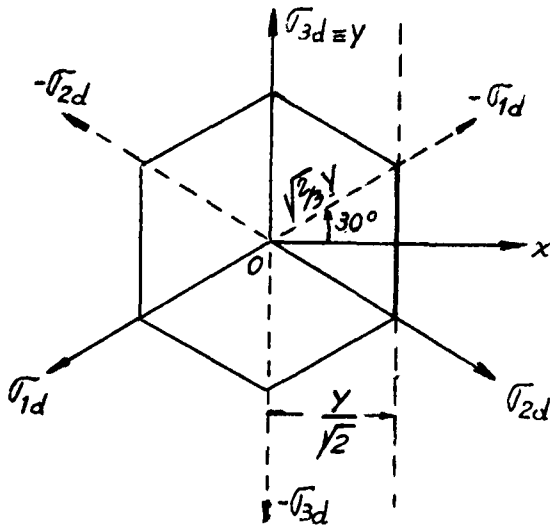


Fig. 32 a

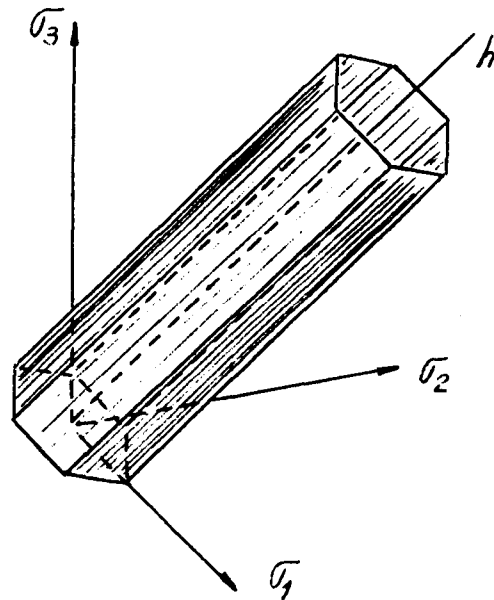


Fig. 32 b

Puesto que en el plano desviador, el criterio está dado por un hexágono regular, en el espacio de tensiones principales será una superficie cilíndrica de sección hexagonal con generatrices paralelas a la recta  $h$  (figura 32 b).

Del análisis de la figura 32 a se desprende que el hexágono de Tresca queda inscrito en la circunferencia de Von Mises cuyo radio vale  $\sqrt{2/3} Y$ . Se observa que ambos criterios coinciden para estados uniaxiales y tienen su máxima diferencia para estados de corte puro tal como se indicara en el punto D.3.b.

#### D.3.e. LOS CRITERIOS DE FLUENCIA EN EL CASO DE TENSION PLANA

En el caso de tensión plana,  $\sigma_3 = 0$ , los criterios de fluencia pueden representarse con  $\sigma_1$  y  $\sigma_2$  como ejes coordenados. Los lugares de los puntos de fluencia representados en la figura 33 son la intersección del cilindro de Von Mises y del cilindro hexagonal de Tresca con el plano  $\sigma_3 = 0$ .

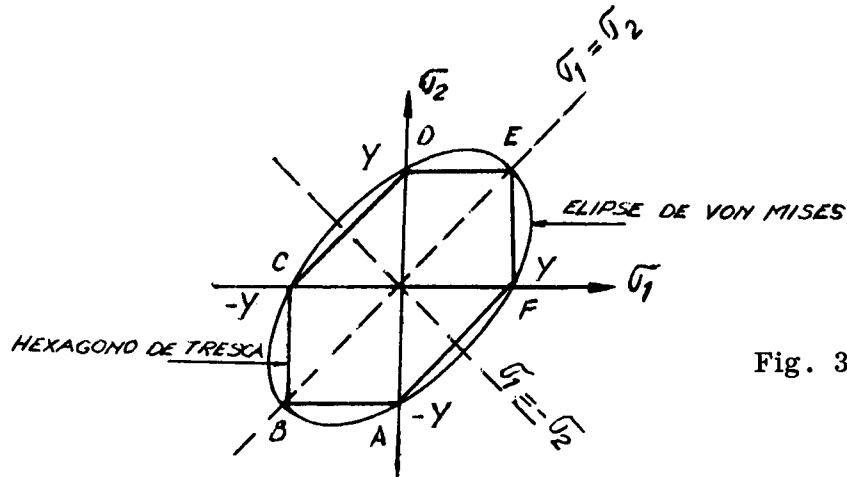


Fig. 33

La ecuación de la elipse de Von Mises se obtiene de la 68a al hacer  $\sigma_3 = 0$ .

$$(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2 = 2Y^2$$

Si  $\sigma_3 = 0$ :

$$\sigma_1^2 + \sigma_2^2 - \sigma_1 \sigma_2 = Y^2$$

cuyo eje mayor es  $2\sqrt{2}Y$  y su eje menor  $2\sqrt{\frac{2}{3}}Y$ , siendo estos ejes las bisectrices de los ángulos entre los ejes  $\sigma_1$  y  $\sigma_2$ .

El hexágono irregular de Tresca, cuyos límites de intersección se muestran en la figura 33 se obtiene de las condiciones:

$$\begin{aligned} |\sigma_1 - \sigma_2| &= Y && \text{líneas AF y CD} \\ |\sigma_2 - \sigma_3| &= Y & \quad |\sigma_2| &= Y && \text{líneas AB y ED} \\ |\sigma_3 - \sigma_1| &= Y & \quad |\sigma_1| &= Y && \text{líneas BC y EF} \end{aligned}$$

#### D.4. ENDURECIMIENTO POR DEFORMACION

Si se analiza un ensayo de tracción, se observa que el material, luego de superar la fluencia, ofrece mayor resistencia. Es decir, para producir nuevas deformaciones es necesario incrementar las tensiones. Se dice que el material "endurece por deformación". Si se interrumpe el ensayo y luego se lo reinicia, aparecen nuevas condiciones de fluencia mayores que la anterior.

Suponiendo que el endurecimiento es igual en todas direcciones y aceptando el criterio de Von Mises, los sucesivos lugares de fluencia son círculos concéntricos con el original de radio  $\sqrt{\frac{2}{3}}Y$ . En la figura 34 se pasará por ejemplo de la condición Y a la condición C, siendo necesaria una tensión efectiva mayor.

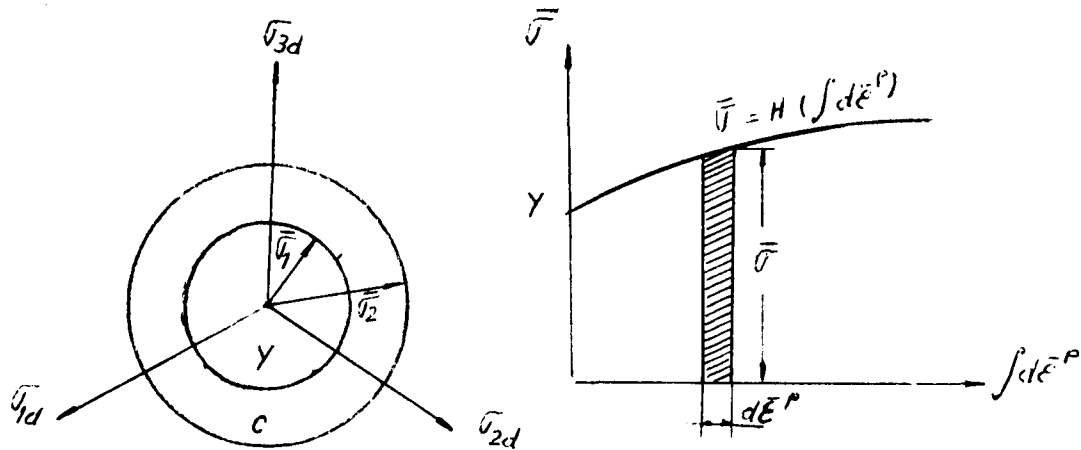


Fig. 34

Hay dos hipótesis para evaluar la tensión de fluencia instantánea:

- (a) Endurecimiento por deformación:  
Se supone que el valor instantáneo de la tensión efectiva es función únicamente de la deformación plástica previa:

$$\bar{\sigma} = H \left( \int d\bar{\epsilon}^p \right)$$

H estará dada por la suma de los incrementos de deformación y no por la deformación total. En la misma figura 34 está graficada esa función. Para grandes deformaciones la curva se hace asintótica, lo que permite considerar que un material muy deformado no endurecerá más por deformación.

- (b) Endurecimiento por trabajado:  
Se supone que el valor instantáneo de la tensión de fluencia es función únicamente del trabajo efectuado por unidad de volumen:

$$\bar{\sigma} = F(u_p)$$

#### D.5. RELACIONES TENSION-DEFORMACION EN EL RANGO PLASTICO

En el campo plástico no existen relaciones simples entre tensiones y deformaciones como en el campo elástico.

Las teorías de plasticidad formuladas hasta el presente son de "deformaciones incrementales" o de "deformaciones totales".

Las teorías incrementales predicen la proporcionalidad entre el

estado actual de tensiones y los incrementos de deformación. Las teorías de deformaciones totales relacionan la deformación total con el estado instantáneo de tensiones (similarmente a como ocurre en el campo elástico)

La deformación elástica, siendo reversible, depende sólo del estado inicial y final de tensiones. No ocurre así con las deformaciones plásticas que al ser irreversibles no sólo dependen del estado final de carga, sino también del camino por el cual se arribó a él.

Las dos teorías incrementales que se verán son las de Prandtl Reuss y Levy Mises. Ambas fueron inicialmente formuladas para materiales sin endurecimiento. Cuando se desea tener en cuenta el endurecimiento por trabajado, el mismo debe intercalarse en las ecuaciones, previamente obtenida en forma experimental la relación  $\bar{\sigma} - \bar{\epsilon}$ .

Prager enunció otra teoría de deformación incremental, pero su complejidad matemática la ha hecho muy poco usada.

#### D.6. TEORIA DE PRANDTL-REUSS

Supone que los incrementos de deformación plástica (se indican con  $d\epsilon^p$ ) son en cualquier instante proporcionales a las respectivas tensiones desviadoras instantáneas:

$$\frac{d\epsilon_x^p}{\sigma_x'} = \frac{d\epsilon_y^p}{\sigma_y'} = \frac{d\epsilon_z^p}{\sigma_z'} = \frac{d\gamma_{xy}^p}{\tau_{xy}} = \frac{d\gamma_{yz}^p}{\tau_{yz}} = \frac{d\gamma_{zx}^p}{\tau_{zx}} = d\lambda \quad (72)$$

d  $\lambda$  es el valor de proporcionalidad instantánea no negativa que varía punto a punto e instante a instante.

Estas ecuaciones son válidas sólo cuando coinciden los ejes principales de deformaciones y tensiones instantáneos.

La teoría considera al incremento de deformación total, como la suma del incremento elástico más el plástico.

$$d\epsilon_x = d\epsilon_x^e + d\epsilon_x^p \quad (73)$$

Teniendo en cuenta la 47a,  $d\epsilon_x^e$  vale:

$$d\epsilon_x^e = \frac{1}{E} [d\sigma_x - \nu(d\sigma_y + d\sigma_z)] \quad (74)$$

Como la base de la teoría es suponer que el incremento de deformación plástica es proporcional al estado actual de tensiones y no a los incrementos, de acuerdo a la 72 se tiene:

$$d\mathcal{E}_x^p = \sigma_x' \cdot d\lambda$$

y como se vió en A.10:

$$\begin{aligned} \sigma_x' &= \frac{2\sigma_x - \sigma_y - \sigma_z}{3} \\ d\mathcal{E}_x^p &= \frac{2}{3} d\lambda \left[ \sigma_x - \frac{1}{2}(\sigma_y + \sigma_z) \right] \end{aligned} \quad (75)$$

Reemplazando las ecuaciones 74 y 75 en la 73:

$$d\mathcal{E}_x = \frac{1}{E} [d\sigma_x - \nu(d\sigma_y + d\sigma_z)] + \frac{2}{3} d\lambda \left[ \sigma_x - \frac{1}{2}(\sigma_y + \sigma_z) \right] \quad (76a)$$

En igual forma pueden obtenerse  $d\mathcal{E}_y$  y  $d\mathcal{E}_z$ :

$$d\mathcal{E}_y = \frac{1}{E} [d\sigma_y - \nu(d\sigma_z + d\sigma_x)] + \frac{2}{3} d\lambda \left[ \sigma_y - \frac{1}{2}(\sigma_z + \sigma_x) \right] \quad (76b)$$

$$d\mathcal{E}_z = \frac{1}{E} [d\sigma_z - \nu(d\sigma_x + d\sigma_y)] + \frac{2}{3} d\lambda \left[ \sigma_z - \frac{1}{2}(\sigma_x + \sigma_y) \right] \quad (76c)$$

Los incrementos de deformación tangencial están dados por:

$$d\gamma_{xy} = \frac{d\mathcal{E}_{xy}}{2G} + d\lambda \mathcal{E}_{xy} \quad (77a)$$

$$d\gamma_{yz} = \frac{d\mathcal{E}_{yz}}{2G} + d\lambda \mathcal{E}_{yz} \quad (77b)$$

$$d\gamma_{zx} = \frac{d\mathcal{E}_{zx}}{2G} + d\lambda \mathcal{E}_{zx} \quad (77c)$$

Si el material endurece por deformación, la 72 puede escribirse en función de la tensión y deformación efectivas para tener en cuenta este efecto. Para simplificar se considera la 72 referida a los ejes principales. Por una propiedad de las proporciones:

$$\frac{(d\mathcal{E}_1^p - d\mathcal{E}_2^p)^2}{(\sigma_1 - \sigma_2)^2} = \frac{(d\mathcal{E}_2^p - d\mathcal{E}_3^p)^2}{(\sigma_2 - \sigma_3)^2} = \frac{(d\mathcal{E}_3^p - d\mathcal{E}_1^p)^2}{(\sigma_3 - \sigma_1)^2} = d\lambda^2$$

También la suma de los numeradores sobre la suma de los denominadores mantiene la proporción  $d\lambda^2$  y si se saca la raíz cuadrada de esta suma, el numerador es  $\sqrt{9/2} d\bar{\mathcal{E}}^p$  (ver ecuación 35a, punto B.5) y el denominador  $\sqrt{2} \bar{\sigma}$  (ver ecuación 22a, punto A.11), por lo tanto:

$$\frac{3}{2} \frac{d\bar{\mathcal{E}}^p}{\bar{\sigma}} = d\lambda \quad (78)$$

Como por 72c:

$$d\lambda = \frac{d\mathcal{E}_x^p}{\sigma_x'}$$

comparando esta última con 78:

$$d\epsilon_x^p = \frac{3}{2} \frac{d\bar{\epsilon}^p}{\bar{\sigma}} \sigma_x' \quad (79a)$$

Análogamente:

$$d\epsilon_y^p = \frac{3}{2} \frac{d\bar{\epsilon}^p}{\bar{\sigma}} \sigma_y' \quad (79b)$$

$$d\epsilon_z^p = \frac{3}{2} \frac{d\bar{\epsilon}^p}{\bar{\sigma}} \sigma_z' \quad (79c)$$

$$d\gamma_{xy}^p = \frac{3}{2} \frac{d\bar{\epsilon}^p}{\bar{\sigma}} \tau_{xy} \quad (79d)$$

$$d\gamma_{yz}^p = \frac{3}{2} \frac{d\bar{\epsilon}^p}{\bar{\sigma}} \tau_{yz} \quad (79e)$$

$$d\gamma_{zx}^p = \frac{3}{2} \frac{d\bar{\epsilon}^p}{\bar{\sigma}} \tau_{zx} \quad (79f)$$

#### D.7. TEORIA DE LEVY-MISES

Si bien históricamente precedió a la de Prandtl-Reuss, didácticamente conviene enunciarla "a posteriori". La teoría de Prandtl-Reuss vista en el punto anterior considera un sólido elasto-plástico. Teniendo en cuenta que las deformaciones elásticas alcanzan a un 0.5% como máximo, pueden ser despreciadas frente a grandes deformaciones plásticas. Esta es la idea de Levy-Mises, que constituye de hecho una simplificación de la expresión 73, que se transforma ahora:

$$d\epsilon_x = d\epsilon_x^p \quad (80)$$

Las expresiones 72 y 76 toman ahora para Levy-Mises la forma:

$$\frac{d\epsilon_x}{\sigma_x'} = \frac{d\epsilon_y}{\sigma_y'} = \frac{d\epsilon_z}{\sigma_z'} = \frac{d\gamma_{xy}}{\tau_{xy}} = \frac{d\gamma_{yz}}{\tau_{yz}} = \frac{d\gamma_{zx}}{\tau_{zx}} = d\lambda \quad (81)$$

$$d\epsilon_x = \frac{2}{3} d\lambda \left[ \sigma_x - \frac{1}{2} (\sigma_y + \sigma_z) \right] \quad (82a)$$

$$d\epsilon_y = \frac{2}{3} d\lambda \left[ \sigma_y - \frac{1}{2} (\sigma_z + \sigma_x) \right] \quad (82b)$$

$$d\epsilon_z = \frac{2}{3} d\lambda \left[ \sigma_z - \frac{1}{2} (\sigma_x + \sigma_y) \right] \quad (82c)$$

$$d\gamma_{xy} = d\lambda \tau_{xy} \quad (82d)$$

$$d\gamma'_{yz} = d\lambda \tau_{yz} \quad (82e)$$

$$d\gamma'_{zx} = d\lambda \tau_{zx} \quad (82f)$$

y las ecuaciones 79 quedan:

$$d\epsilon_x = \frac{3}{2} \frac{d\bar{\epsilon}}{\bar{\sigma}} \sigma'_x \quad (83a)$$

$$d\epsilon_y = \frac{3}{2} \frac{d\bar{\epsilon}}{\bar{\sigma}} \sigma'_y \quad (83b)$$

$$d\epsilon_z = \frac{3}{2} \frac{d\bar{\epsilon}}{\bar{\sigma}} \sigma'_z \quad (83c)$$

$$d\gamma'_{xy} = \frac{3}{2} \frac{d\bar{\epsilon}}{\bar{\sigma}} \tau_{xy} \quad (83d)$$

$$d\gamma'_{yz} = \frac{3}{2} \frac{d\bar{\epsilon}}{\bar{\sigma}} \tau_{yz} \quad (83e)$$

$$d\gamma'_{zx} = \frac{3}{2} \frac{d\bar{\epsilon}}{\bar{\sigma}} \tau_{zx} \quad (83f)$$

#### D.8. TEORIAS DE DEFORMACIONES TOTALES

En contraposición con las teorías anteriores, Hencky supone que las componentes de la deformación plástica total son proporcionales a las componentes desviadoras de tensión:

$$\epsilon_x^P = \phi \sigma'_x$$

$\phi$  es una cantidad escalar positiva durante la carga y cero en la descarga.

Swainger también formuló una teoría de deformación total, pero al igual que con la de Hencky, la observación experimental demuestra que conducen a errores muy groseros.

#### D.9. CONDICION DE FLUENCIA PLANA

Es un caso particular del estado de deformaciones, tal que:

$\epsilon_z = \gamma'_{zx} = \gamma'_{yz} = 0$  y  $\epsilon_x, \epsilon_y, \gamma'_{xy}$  distintos a cero e independientes del eje z.

Supóngase el siguiente estado de fluencia plana referido a una terna principal:  $\epsilon_1$  y  $\epsilon_3$  distintos de cero e independientes de la dirección 2, y  $\epsilon_2 = 0$ .

Si la ecuación 82 se toma respecto de esa terna principal, puede escribirse:

$$d\varepsilon_2 = \frac{2}{3} d\lambda \left[ \sigma_2 - \frac{1}{2}(\sigma_3 + \sigma_1) \right] = 0$$

$$\sigma_2 = \frac{1}{2}(\sigma_3 + \sigma_1) \quad (84)$$

En la dirección cuya deformación normal es nula, la tensión es igual a la semisuma de las otras dos. Reemplazando en la ecuación 68a el valor de  $\sigma_3$  obtenido en 84, y teniendo en cuenta que para el criterio de Von Mises  $\bar{\sigma} = Y$ , la expresión de éste para deformación plana resulta:

$$\sigma_1 - \sigma_3 = \frac{2}{\sqrt{3}} Y = \frac{2}{\sqrt{3}} \bar{\sigma} \quad (85)$$

mientras que según Tresca, se tiene:

$$\sigma_1 - \sigma_3 = Y \quad (86)$$

En general, los metales frágiles se acercan al valor del criterio de Tresca, mientras que los dúctiles se comportan más de acuerdo al de Von Mises. Analizando las ecuaciones 85 y 86, surge la ventaja de adoptar un criterio único para fluencia plana dado por:

$$\sigma_1 - \sigma_3 = \beta Y$$

donde  $1 \leq \beta \leq 1.155$ , y el error máximo posible es de aproximadamente 8%.

#### D.10. MODELOS REOLOGICOS Y ECUACIONES EMPIRICAS TENSION-DEFORMACION

Para dar solución a los problemas de deformación, suele recurrirse a modelos tensión-deformación idealizados. Los más importantes son:

- (a) Perfectamente elásticos: La pendiente de la recta es el valor del módulo de Young (figura 35 a).
- (b) Rígido, perfectamente plástico: Se comporta como rígido hasta la fluencia, luego es perfectamente plástico (no endurece por deformación, figura 35 b).
- (c) Rígido-plástico con endurecimiento lineal: Rígido hasta la fluencia, luego endurece con una variación lineal. La pendiente H mide el grado de endurecimiento (figura 35 c).
- (d) Elasto-perfectamente plástico: Elástico hasta la fluencia, luego es perfectamente plástico (figura 35 d).
- (e) Elasto-plástico con endurecimiento lineal: es el más completo de los expuestos. Hasta la fluencia es elástico y luego endurece linealmente (figura 35 e).

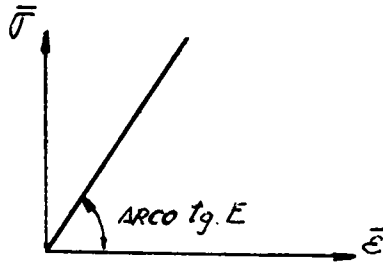


Fig. 35 a

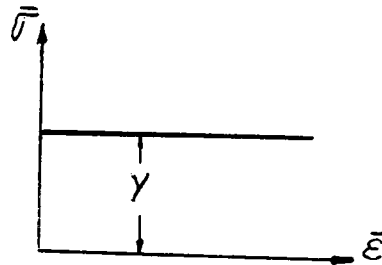


Fig. 35 b

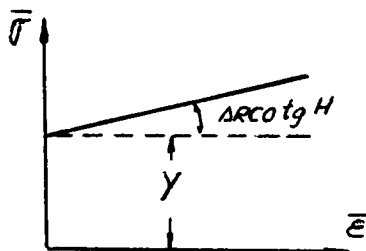


Fig. 35 c

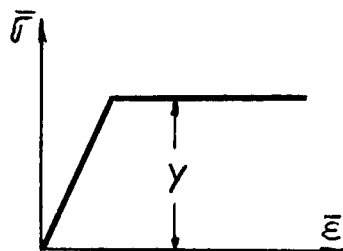


Fig. 35 d

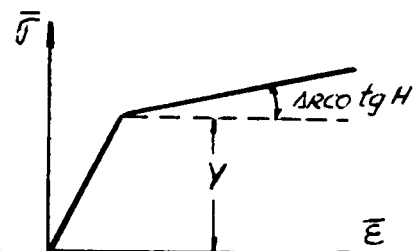


Fig. 35 e

A los efectos de interpretar resultados experimentales y para la resolución de problemas plásticos, es cómodo establecer funciones para las curvas tensión-deformación reales. Existen varias propuestas que se adaptan en mayor o menor grado según los materiales:

- (a) Adoptar el modelo plástico endurecible, usando dos ecuaciones (figura 36)

1. hasta la fluencia  $\bar{\sigma} = E \bar{\epsilon}$
2. desde la fluencia  $\bar{\sigma} = H \bar{\epsilon}$

- (b) Ludwick propuso:  $\bar{\sigma} = Y + H\bar{\epsilon}^{-m}$

La figura 37 grafica esta ecuación para  $m = 1$  y  $0 < m < 1$ .

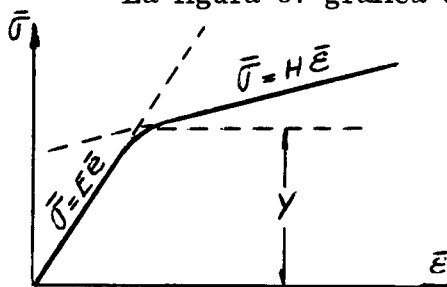


Fig. 36

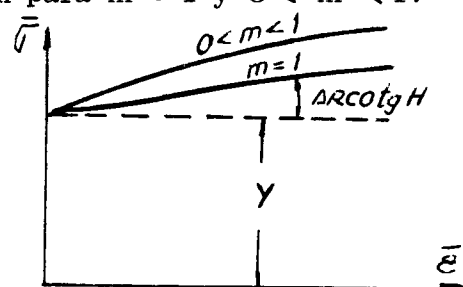


Fig. 37

(c) Swift enuncia

$$\bar{\sigma} = C(A + \bar{\epsilon})^n \quad \text{para } 0 \leq n \leq 1$$

(d) La expresión de Hollomon que constituye una simplificación de la de Swift:

$$\bar{\sigma} = C\bar{\epsilon}^n$$

(e) Voce plantea una ecuación muy buena, pero muy compleja matemáticamente:

$$\bar{\sigma} = A + (B - A)(1 - e^{-n\bar{\epsilon}})$$

(f) El mismo inconveniente tiene la ecuación debida a Prager:

$$\bar{\sigma} = Y \operatorname{tg} h\left(E \frac{\bar{\epsilon}}{Y}\right)$$

## II.1.E. ENSAYOS MECANICOS

- E.1 Objeto
- E.2 Introducción
- E.3 Ensayo de tracción
  - 3.a. El ensayo de tracción y el problema de la inestabilidad plástica
  - 3.b. Evaluación de la tensión y deformación efectivas después de la estricción
  - 3.c. Determinación del punto de inestabilidad plástica en el diagrama tensión-deformación efectiva
  - 3.d. Efecto de la presión hidrostática sobre la inestabilidad plástica
- E.4 Ensayo de compresión
- E.5 4.a. Inestabilidad plástica en compresión
  - 4.b. Consecuencia de la fricción en compresión
  - 4.c. Ensayos especiales de compresión
  - 4.d. Compresión en fluencia plana
- E.5 Ensayo de torsión
- E.6 Los ensayos mecánicos y sus posibilidades para la determinación de las características mecánicas "en Caliente"

### E.1. OBJETO

La finalidad de los ensayos en la problemática del trabajado mecánico, radica en la necesidad de determinar las características mecánicas de un material a través de la curva  $\bar{\sigma} - \bar{\epsilon}$ . Con ello se procura relacionar los estados simples de tensiones con los estados complejos propios de los procesos de conformado. No obstante esto, existen circunstancias (fricción, trabajo redundante, recristalización, etc.) por las cuales muchas veces se recurre a ensayos simulativos que tratan de reproducir las condiciones reales del proceso.

### E.2. INTRODUCCION

En este punto se revisan los ensayos más comunes; tracción, compresión y torsión, relacionándolos e indicando los inconvenientes que presentan: inestabilidad plástica y fricción. Como la mayoría de los procesos de trabajado de metales se efectúan por compresión, en E.4.c y E.4.e se describen algunos ensayos especiales.

Por otra parte, si bien la velocidad de deformación no influye en forma considerable sobre la resistencia cuando el proceso es "en frío", no ocurre lo mismo cuando la deformación se produce "en caliente". Por esta razón en el punto E.6 se analizan las ventajas y desventajas de los diversos ensayos para la determinación de las características mecánicas en caliente.

### E.3. ENSAYO DE TRACCION

La ejecución de un ensayo de tracción generalmente implica la medición de las cargas aplicadas y de la variación de longitud, obteniéndose el diagrama carga-elongación ( $P - \Delta l$ ), figura 38 a).

$$\text{elongación} = \Delta l = l - l_0$$

donde  $l$  es la longitud instantánea y  $l_0$  el valor de la longitud inicial de referencia.

De este diagrama se pasa al de tensión-deformación convencional ( $\bar{\sigma}_c - e$ , figura 38 b), modificando las escalas. La escala de cargas se divide por la sección inicial  $S_0$  y la de elongaciones por el largo inicial  $l_0$ .

$$\bar{\sigma}_c = \frac{P}{S_0} \quad (88)$$

$$e = \frac{\Delta l}{l_0} \quad (89)$$

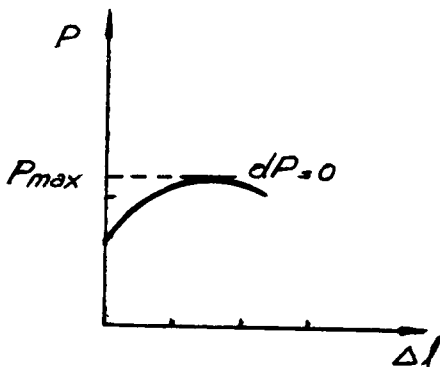


Fig. 38 a

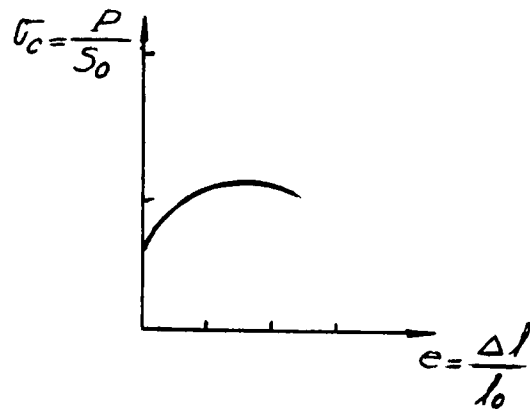


Fig. 38 b

La tensión efectiva puede obtenerse con la expresión 22 a teniendo en cuenta que el estado de tensiones que corresponde a tracción es:

$$\sigma_1 > 0 \text{ y } \sigma_2 = \sigma_3 = 0 \text{ (figura 39 a).}$$

$$\bar{\sigma} = \sqrt{\frac{1}{2} [(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2]} = \sigma_1$$

luego 
$$\bar{\sigma} = \sigma_1 = \frac{P}{S} \quad (90)$$

donde S es la sección instantánea.

Teniendo en cuenta que en rango plástico hay constancia de volumen se puede escribir:

$$S \cdot l = S_0 \cdot l_0 \quad S = S_0 \frac{l_0}{l}$$

reemplazando en 90:

$$\bar{\sigma} = \sigma_1 = \frac{P}{S_0} \cdot \frac{l}{l_0} = \frac{P}{S_0} \frac{l_0 + \Delta l}{l_0} = \frac{P}{S_0} \left(1 + \frac{\Delta l}{l_0}\right) \quad (91)$$

y teniendo en cuenta 88 y 89:

$$\bar{\sigma} = \sigma_c (1 + e) \quad (92)$$

La ecuación 91 permite obtener  $\bar{\sigma}$  en función de las magnitudes medidas al realizar el ensayo y la geometría inicial de la probeta. La expresión 92 muestra que para igual alargamiento, la tensión efectiva

es mayor que la convencional ( $\bar{\sigma} > \sigma_c$ ).

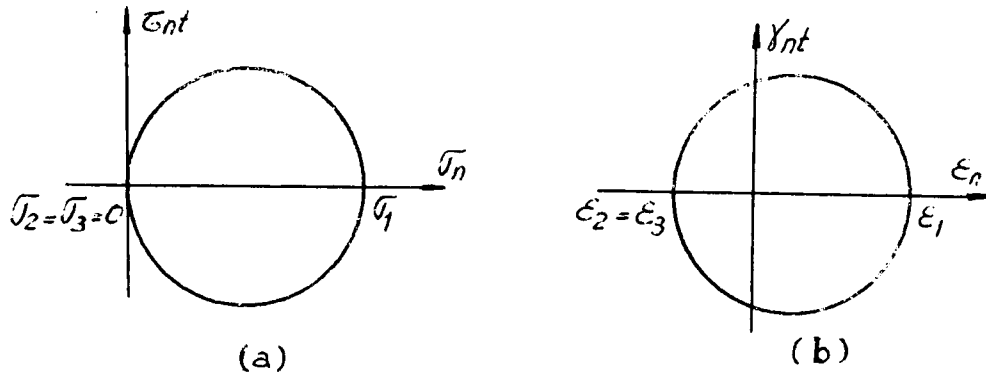


Fig. 39

Para hallar la deformación efectiva se recurre a la expresión:

$$\bar{\epsilon} = \sqrt{\frac{2}{9} [(\epsilon_1 - \epsilon_2)^2 + (\epsilon_2 - \epsilon_3)^2 + (\epsilon_3 - \epsilon_1)^2]} \quad (93)$$

En los casos en que la aproximación de Levy-Mises es suficiente (punto D.7, ecuación 80):

$$d\epsilon_1 = d\lambda \frac{2\sigma_1 - \sigma_2 - \sigma_3}{3}$$

$$d\epsilon_2 = d\lambda \frac{2\sigma_2 - \sigma_3 - \sigma_1}{3}$$

$$d\epsilon_3 = d\lambda \frac{2\sigma_3 - \sigma_1 - \sigma_2}{3}$$

y siendo  $\sigma_3 = \sigma_2 = 0$

$$d\epsilon_1 = \frac{2}{3} d\lambda \sigma_1$$

$$d\epsilon_2 = -\frac{1}{3} d\lambda \sigma_1$$

$$d\epsilon_3 = -\frac{1}{3} d\lambda \sigma_1$$

$$\therefore -\epsilon_2 = -\epsilon_3 = \frac{1}{2} \epsilon_1 \quad (94)$$

El círculo de Mohr de deformaciones se aprecia en la figura 39 b. Reemplazando los valores de  $\epsilon_2$  y  $\epsilon_3$  en función de  $\epsilon_1$  en la 93:

$$\bar{\epsilon} = \epsilon_1 = \int_{l_0}^l \frac{d\ell}{\ell} = \ln \frac{\ell}{l_0} = \ln \left( \frac{l_0 + \Delta \ell}{l_0} \right) = \ln \left( 1 + \frac{\Delta \ell}{l_0} \right) = \ln(1 + e) \quad (95)$$

Esta última ecuación permite (en forma similar que la expresión 91 para  $\bar{\sigma}$ ) calcular  $\bar{\epsilon}$  en función de la longitud inicial e instantánea de la probeta.

Si se tiene en cuenta la teoría de Prandtl-Reuss (punto D.6, ecua-

ción 76), las deformaciones plásticas estarán dadas por:

$$\bar{\epsilon}^P = \bar{\epsilon} - \bar{\epsilon}^e$$

$$\bar{\epsilon}^e = \ln \frac{l}{l_0} = \frac{\bar{\sigma}}{E}$$

En lo que sigue se despreciarán las deformaciones elásticas aceptándose en consecuencia la teoría de Levy-Mises (ecuación 94).

La figura 40 muestra las curvas convencional ( $\bar{\sigma}_c - e$ ) y efectiva ( $\bar{\sigma} - \bar{\epsilon}$ ) para el ensayo de tracción. El punto A' es el correspondiente del A sobre la curva tensión-deformación efectiva y lo mismo ocurre con B', C', etc.

Las máquinas de ensayo modernas poseen dispositivos que permiten obtener directamente las curvas tensión-deformación real.

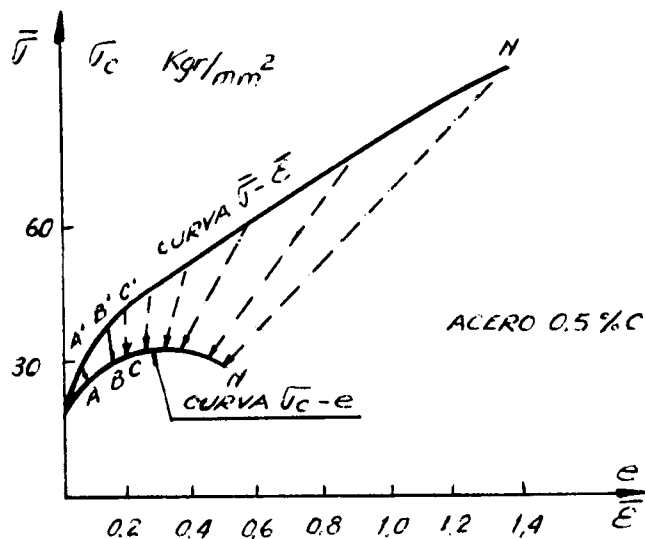


Fig.40

### E.3.a. EL ENSAYO DE TRACCION Y EL PROBLEMA DE LA INESTABILIDAD PLASTICA

Por lo visto hasta aquí parecería sencillo obtener la curva tensión-deformación efectiva a partir del ensayo de tracción. Sin embargo, la aparición de la estricción con deformaciones relativamente bajas impone una seria limitación. En efecto, a partir de allí las deformaciones se localizan en el "cuello" y aparece un estado triaxial de tensiones que dificulta la evaluación de  $\bar{\sigma}$  y  $\bar{\epsilon}$ , ya que dejan de tener validez las fórmulas 93 y 94.

En la curva  $P - \Delta l$ , para deformaciones que dependen del material (en los aceros de bajo carbono recocidos entre el 20 y el 30% convencional), la estricción se produce para el valor de la carga máxima, vale decir cuando  $dP = 0$  (Figura 38 a). Como  $P = \bar{\sigma} \cdot S$ :

$$\frac{dP}{d\bar{\epsilon}} = \frac{d\bar{\sigma}}{d\bar{\epsilon}} \cdot S + \frac{dS}{d\bar{\epsilon}} \cdot \bar{\sigma} = 0$$

$$\frac{d\bar{\sigma}}{d\bar{\epsilon}} \cdot S = - \frac{dS}{d\bar{\epsilon}} \bar{\sigma}$$

La ecuación anterior permite interpretar que la estricción se produce cuando la velocidad instantánea de incremento de fuerza, necesaria para producir mayor deformación debida al endurecimiento, se hace igual a la velocidad instantánea de variación de fuerza que la sección debe resistir por disminución de área.

### E.3.b. EVALUACION DE LA TENSION Y DEFORMACION EFECTIVAS DESPUES DE LA ESTRICCION

Se ha visto que luego de la estricción el estado de tensiones deja de ser uniaxial y por lo tanto deben hallarse otras expresiones que permitan calcular  $\bar{\sigma}$  y  $\bar{\epsilon}$ . Para resolver este problema puede utilizarse el trabajo de Bridgman o el de Davidenkov y Spiridonova.

Puesto que se produce un estado triaxial,  $\bar{\sigma}$  deja de ser la tensión axial y para una probeta cilíndrica pasará a ser una función:

$$\bar{\sigma} = \bar{\sigma}(\sigma_r; \sigma_\theta; \sigma_z)$$

Además como,  $\sigma_r$ ;  $\sigma_\theta$ ;  $\sigma_z$ , no se mantienen constantes en la sección transversal mínima, la solución debe darse en función de parámetros medibles tales como: la tensión axial media  $(\bar{\sigma}_z)_{\text{prom}}$  y la geometría de la estricción.

El análisis de Bridgman involucra las siguientes hipótesis:

- El perfil de la estricción es circular de radio R (figura 41 a).
- La sección del cuello se mantiene circular de radio a (fig. 41 a).
- Se supone válido el criterio de Von Mises.
- Las deformaciones en la sección transversal mínima se mantienen

constantes.

Planteado el equilibrio de fuerzas en dirección radial (Fig. 41 b):

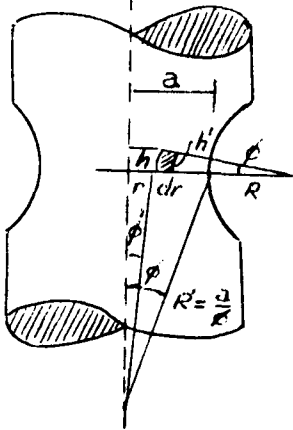


Fig. 41 a

$$h = R\phi - \frac{a}{\phi} (\cos\phi' - \cos\phi)$$

$$h' = R\phi + \frac{a}{\phi} [\cos(\phi' + d\phi') - \cos\phi] \quad \bar{\sigma}_z + \frac{\partial \bar{\sigma}_z}{\partial z} h$$

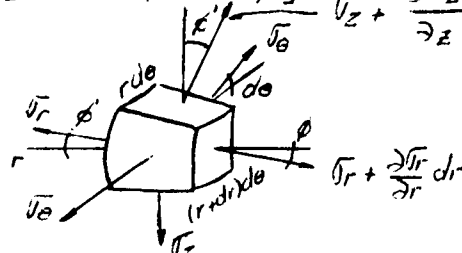


Fig. 41 b

$$\begin{aligned} & (\bar{\sigma}_z + h \frac{\partial \bar{\sigma}_z}{\partial z}) \sin\phi' (r + \frac{\partial r}{2}) d\theta \cdot dr + (\bar{\sigma}_r + \frac{\partial \bar{\sigma}_r}{\partial r} dr) (r + dr) d\theta \cdot h' - \\ & - \bar{\sigma}_r \cdot h \cdot r \cdot d\theta - (\bar{\sigma}_\theta \sin\theta) h \cdot dr = 0 \end{aligned}$$

Reemplazando h y h' en función de los datos de la geometría de la estricción (figura 41 a) y despreciando infinitésimos de orden superior:

$$\bar{\sigma}_z \frac{r^2}{a} - \bar{\sigma}_r \left( \frac{3}{2} \frac{r^2}{a} - \frac{a}{2} - R \right) - \bar{\sigma}_\theta \left[ R + \frac{1}{2} \left( \frac{a^2 - r^2}{a} \right) \right] + r \frac{d\bar{\sigma}_r}{dr} \left[ R + \frac{1}{2} \left( \frac{a^2 - r^2}{a} \right) \right] = 0$$

Como por simetría es  $d\epsilon_r = d\epsilon_\theta$ , aplicando Levy-Mises resulta

$$\bar{\sigma}_r = \bar{\sigma}_\theta \quad \text{por lo que:}$$

$$(\bar{\sigma}_z - \bar{\sigma}_r) \cdot \frac{r}{a} + \frac{d\bar{\sigma}_r}{dr} \left[ R + \frac{1}{2} \left( \frac{a^2 - r^2}{a} \right) \right] = 0 \quad (96)$$

Tratándose de un estado cilíndrico ( $\bar{\sigma}_r = \bar{\sigma}_\theta \neq \bar{\sigma}_z$ ), la ecuación 22 a queda:

$$\bar{\sigma} = \bar{\sigma}_z - \bar{\sigma}_r \quad (97)$$

luego, si se reemplaza en la ecuación 96, se separan variables y se ordena:

$$d\bar{\sigma}_r = 2\bar{\sigma} \frac{r dr}{r^2 - 2aR - a^2}$$

Integrando e introduciendo la condición de borde en la superficie:  $r = a; \bar{\sigma}_r = 0$ :

$$\bar{\sigma}_r = \bar{\sigma} \ln \left( \frac{a^2 + 2aR - r^2}{2aR} \right)$$

De acuerdo con la ecuación 97 resulta:

$$\bar{\sigma}_z = \bar{\sigma} + \bar{\sigma}_r = \bar{\sigma} \left[ 1 + \ln \left( \frac{a^2 + 2aR - r^2}{2aR} \right) \right] \quad (98)$$

expresión que vincula  $\bar{\sigma}$  con  $\bar{\sigma}_z$ . Como  $\bar{\sigma}_z$  no es medible porque varía en la sección se recurre a:

$$P = \pi \cdot a^2 (\bar{\sigma}_Z)_{prom} = 2\pi \int_0^a \sigma_Z \cdot r \cdot dr \quad (99)$$

Reemplazando la expresión 98 en la 99, integrando y despejando  $\bar{\sigma}$ :

$$\bar{\sigma} = \frac{(\sigma_Z)_{prom}}{\left(1 + \frac{2R}{a}\right) \ln\left(1 + \frac{a}{2R}\right)} = \frac{P}{\pi a^2} C_B \quad (100)$$

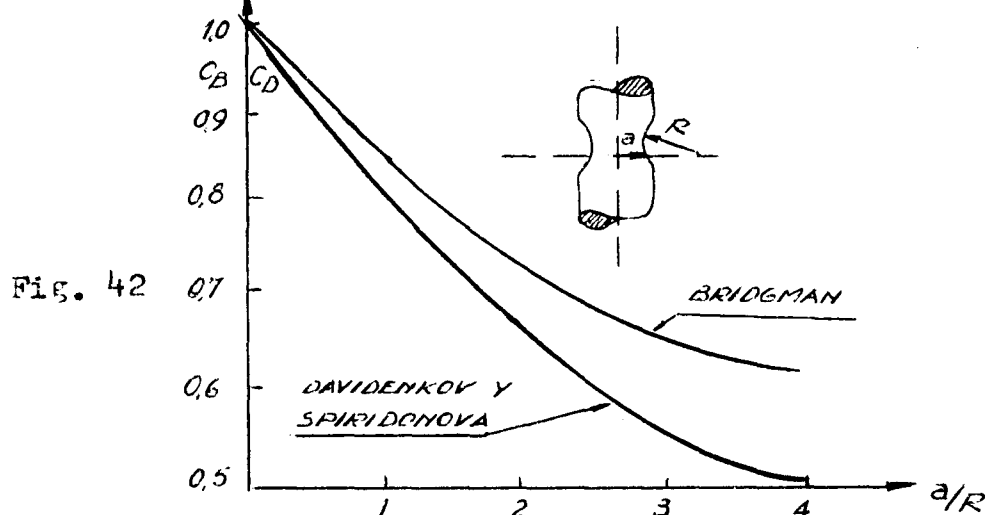
donde:

$$C_B = \left[ \left(1 + \frac{2R}{a}\right) \ln\left(1 + \frac{a}{2R}\right) \right]^{-1} \quad (101)$$

La evaluación de la ecuación 100 implica la medición de los radios de la sección y perfil instantáneos de la estricción. En 1946 Davidenkov y Spiridonova modificaron ligeramente el factor de corrección de Bridgman, obteniendo:

$$C_D = \left(1 + \frac{a}{4R}\right)^{-1} \quad (102)$$

luego  $\bar{\sigma} = \frac{P}{\pi a^2} C_D$



Como se aprecia en la figura 42 los valores de  $C_B$  y  $C_D$  (ecuaciones 101 y 102) difieren cada vez más a medida que aumenta  $a/R$ , o sea cuando la estricción se hace más localizada.

El mismo Bridgman en 1950, determinó el coeficiente de corrección para probetas planas:

$$C'_B = \left\{ \left(1 + \frac{2R}{a}\right)^{1/2} \ln \left[ 1 + \frac{a}{R} + \left(\frac{2a}{R}\right)^{1/2} \left(1 + \frac{a}{2R}\right)^{1/2} \right] - 1 \right\}^{-1}$$

La determinación de la deformación efectiva se efectúa teniendo en cuenta que cuando se produce la estricción, las deformaciones dejan de estar uniformemente distribuidas a lo largo de la longitud de referencia para localizarse en el cuello.

Si se toma la región infinitesimal de diámetro mínimo (figs. 43a y

b) donde se producen las mayores deformaciones, por constancia de volumen:  $\pi \cdot a^2 \cdot l = \text{constante}$

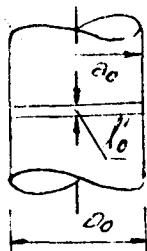


Fig. 43 a

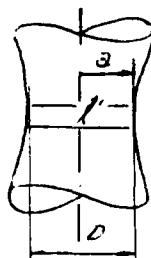


Fig. 43 b

diferenciando la última expresión:

$$2a l' da + a^2 dl' = 0 \quad ; \quad \frac{dl'}{l'} = -2 \frac{da}{a}$$

integrando:

$$\ln \frac{l'}{l_0} = -2 \ln \frac{a}{a_0} = 2 \ln \frac{a_0}{a} = 2 \ln \frac{D_0}{D}$$

siendo

$$\bar{\epsilon} = \sqrt{\frac{2}{9} [(\epsilon_r - \epsilon_\theta)^2 + (\epsilon_\theta - \epsilon_z)^2 + (\epsilon_z - \epsilon_r)^2]}$$

y teniendo en cuenta que es válida la ecuación 94, puesto que la sección se mantiene circular.

$$\bar{\epsilon} = \epsilon_z = 2 \ln \frac{D_0}{D}$$

### E.3.c. DETERMINACION DEL PUNTO DE INESTABILIDAD PLASTICA EN EL DIAGRAMA TENSION-DEFORMACION EFECTIVA

Para determinar donde se produce este punto de inestabilidad plástica en el diagrama tensión-deformación real, que en tracción coincide con el tensión-deformación efectiva, como se vió, se supondrán despreciables las deformaciones elásticas.

La carga es de acuerdo a la expresión 90:

$$P = \bar{\sigma} \cdot S$$

luego:

$$dP = \bar{\sigma} \cdot dS + S \cdot d\bar{\sigma}$$

Como para el punto de inestabilidad plástica es  $dP = 0$  :

$$-\frac{dS}{S} = \frac{d\bar{\sigma}}{\bar{\sigma}} \quad (103)$$

Por constancia de volumen:

$$S_0 \cdot l_0 = S \cdot l = \text{constante}$$

$$S \cdot dl + l \cdot dS = 0$$

$$-\frac{dS}{S} = \frac{dl}{l} \quad (104)$$

Reemplazando 104 en 103:  $\frac{d\bar{l}}{\bar{l}} = \frac{d\bar{J}}{\bar{J}}$

y como al diferenciar la expresión 95:

$$\frac{d\bar{l}}{\bar{l}} = d\bar{\epsilon}$$

resulta:

$$\frac{d\bar{J}}{d\bar{\epsilon}} = \bar{J} \quad (105)$$

que es la condición de inestabilidad plástica, como muestran las figs. 44a y b.

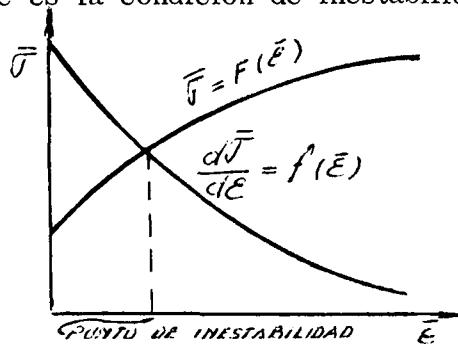


Fig. 44 a

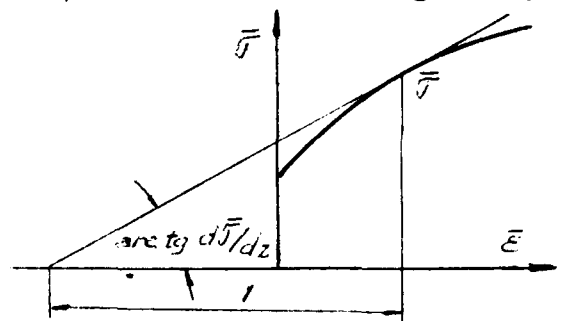


Fig. 44 b

Para aquellos materiales a los que se adapta el modelo de Hollomon (ecuación 87, punto D.10), de la condición 105 surge una importante conclusión. En efecto, reemplazando la expresión de Hollomon en 105:

$$\frac{d\bar{J}}{d\bar{\epsilon}} = C \cdot n \cdot \bar{\epsilon}^{n-1} = \bar{J} = C \bar{\epsilon}^n \therefore n = \bar{\epsilon}$$

De manera que cuanto mayor sea  $n$ , mayor será  $\bar{\epsilon}$  hasta la estricción, o lo que es lo mismo, cuanto mayor sea  $n$  mayor será la deformabilidad de un material antes de producirse la estricción.

En la Tabla I se citan valores de  $C$  y  $n$  para algunos materiales.

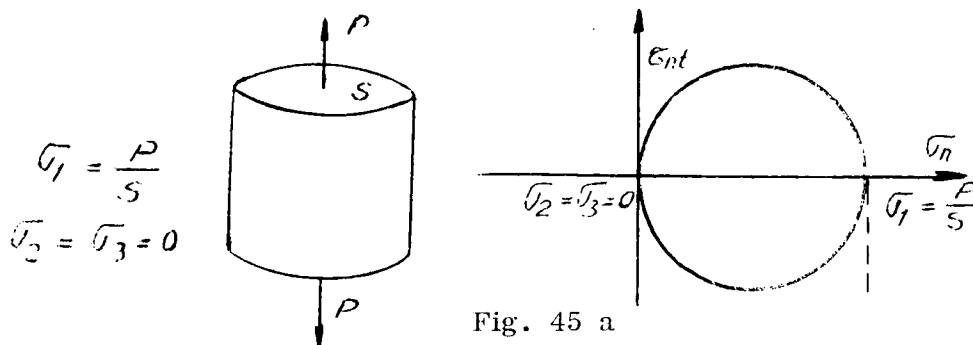
TABLA I

CONSTANTES DE LAS CURVAS TENSION-DEFORMACION (Thomsen-Yang-Kobayashi, "Mech.of Plastic Deformation", p.87)		
MATERIAL	C	n
	Kgr/mm <sup>2</sup>	
Acero 0.05%C	54	0.26
Acero 0.6%C. Templ. y rev. a 540°C	160	0.10
Acero 0.6%C. Templ. y rev. a 700°C	125	0.19
S.A.E. 1010 recocido	70	0.20
S.A.E. 1112 recocido	77	0.19
S.A.E. 1112 trabajado	77	0.08
S.A.E. 4135 recocido	103	0.17
S.A.E. 4135 trabajado (Rc 18)	112	0.14
S.A.E. 4135 trat.term. (Rc 26)	142	0.09
S.A.E. 4135 trat. term. (Rc 35)	170	0.06
S.A.E. 4330 recocido	66	0.15
Al. 6961 recocido	21	0.20
Al. 6061 envejecido	42	0.05
Cobre recocido	32	0.54
Al. 2024 sol.	73.5	0.09
Latón 70/30 recocido	91	0.49

NOTA: determinados a 20°C y  $\dot{\epsilon} = 1\%/seg.$

### E.3.d. EFECTO DE LA PRESION HIDROSTATICA SOBRE LA INESTABILIDAD PLASTICA

El hecho de superponer a una tracción pura una compresión hidrostática ( $-p_h$ ), corre el punto de inestabilidad plástica hacia mayores deformaciones. En efecto, en tracción pura se tiene (figura 45 a):



Si se le superpone una compresión hidrostática de magnitud  $p_h$  (fig. 45 b):

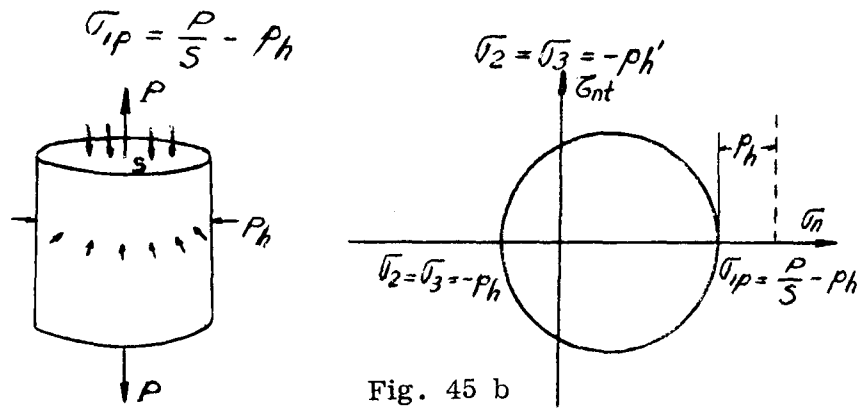


Fig. 45 b

luego:

$$\bar{\sigma}_{ip} S = P - p_h \cdot S = P_T$$

donde  $P_T$  es la carga axial total sobre la superficie  $S$ . En el punto de inestabilidad plástica se cumplirá entonces  $dP_T = 0$ :

$$dP_T = S \cdot d\bar{\sigma}_{ip} + \bar{\sigma}_{ip} dS = 0$$

$$\frac{d\bar{\sigma}_{ip}}{\bar{\sigma}_{ip}} = - \frac{dS}{S}$$

que de acuerdo con 104 resulta:

$$\frac{d\bar{\sigma}_{ip}}{\bar{\sigma}_{ip}} = d\bar{\epsilon} \quad (106)$$

Puesto que se trata de estados cilíndricos de igual  $\bar{\sigma}$  (sus círculos de Mohr son de igual magnitud, sólo que corridos a lo largo del eje  $\bar{\sigma}_n$ ), resulta al reemplazar ambos estados de tensiones en la ecuación 22 a:

$$\bar{\sigma} = \bar{\sigma}_{ip} + p_h = \bar{\sigma}_1$$

luego:  $\bar{\sigma}_{ip} = \bar{\sigma} - p_h$

reemplazando esta expresión en 106:

$$\frac{d(\bar{\sigma} - p_h)}{\bar{\sigma} - p_h} = d\bar{\epsilon}$$

$$\frac{d\bar{\sigma}}{d\bar{\epsilon}} = \bar{\sigma} - p_h \quad (107)$$

La interpretación gráfica de la ecuación 107 se aprecia en las figuras 46 a y b.

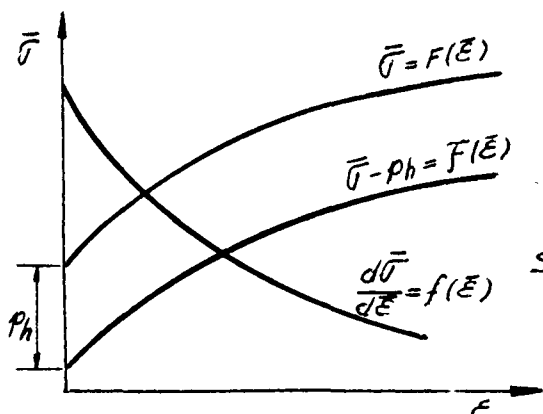


Fig. 46 a

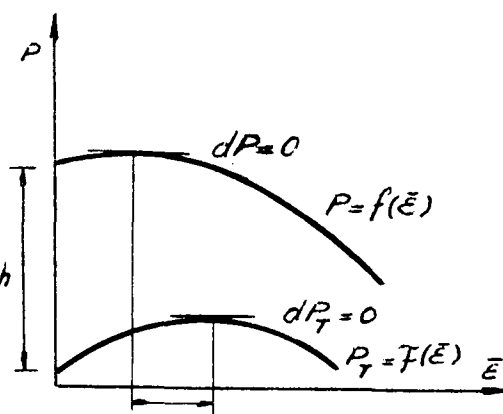


Fig. 46 b

En definitiva, si bien a bajas presiones (menores de 1000 atm.) la presión hidrostática no modifica los valores de fluencia (Punto D.3), corre el punto de inestabilidad plástica, punto que como se vió, es uno de los grandes problemas que se presentan en el trabajado cuando hay esfuerzos de tracción.

E.4. ENSAYO DE COMPRESION

Se iniciará el análisis del ensayo de compresión de manera similar a como se efectuara con el de tracción.

Así, del diagrama carga-acortamiento (P - Δh), se pasa al convencional dividiendo la carga instantánea por la sección inicial y los correspondientes acortamientos por la altura inicial.

$$\sigma_c = \frac{P}{S_0} \tag{108}$$

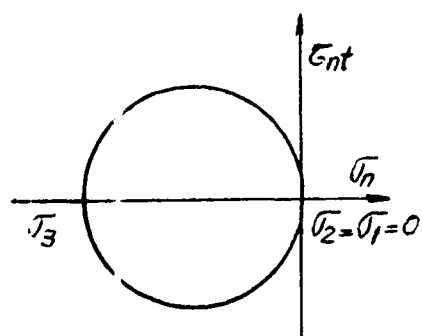


Fig. 47 a

$$e = \frac{\Delta h}{h_0} \tag{109}$$

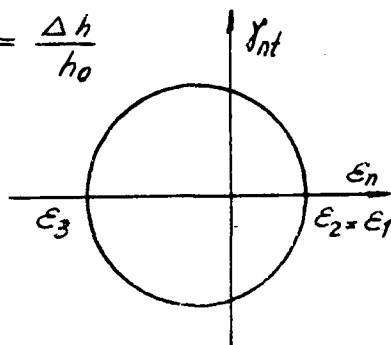


Fig. 47 b

La tensión efectiva se obtiene reemplazando  $\sigma_1 = \sigma_2 = 0$  y  $\sigma_3 < 0$  (figura 47 a) en la ecuación 22 a:

$$\bar{\sigma} = \sigma_3 = \frac{P}{S} \tag{110}$$

Por constancia de volumen:

$$S = S_0 \frac{h_0}{h}$$

y reemplazando en 110:

$$\bar{\sigma} = \frac{P}{S_0} \cdot \frac{h}{h_0} = \frac{P}{S_0} \left( \frac{h_0 - \Delta h}{h_0} \right) = \frac{P}{S_0} \left( 1 - \frac{\Delta h}{h_0} \right) \quad (111)$$

Teniendo en cuenta 108 y 109:

$$\bar{\sigma} = \sigma_c (1 - e) \quad (112)$$

La ecuación 111 permite obtener  $\bar{\sigma}$  en función de las magnitudes medidas al realizar el ensayo y la geometría inicial de la probeta. La expresión 112 muestra que para igual acortamiento la tensión efectiva es menor que la convencional ( $\bar{\sigma} < \sigma_c$ ).

Procediendo en forma análoga a como se planteó en tracción en el punto E.3, se obtiene para  $\bar{\epsilon}$  (figura 47 b):

$$\bar{\epsilon} = \epsilon_3 = \int_{h_0}^h \frac{dh}{h} = \ln \frac{h}{h_0} = - \ln \left( \frac{1}{1 - \frac{\Delta h}{h_0}} \right) = - \ln \left( \frac{1}{1 - e} \right) \quad (113)$$

Con esta última ecuación se puede calcular  $\bar{\epsilon}$  en función de la altura inicial e instantánea de la probeta.

Si se deseara considerar las deformaciones elásticas, aplicando la teoría de Prandtl-Reuss (Punto D.6, ecuación 76), las deformaciones plásticas resultarían:

$$\bar{\epsilon}^p = \bar{\epsilon} - \bar{\epsilon}^e = \ln \frac{h}{h_0} - \frac{\sigma_c}{E}$$

En la figura 48 se han superpuesto las curvas convencional ( $\sigma_c - e$ ) y efectiva ( $\bar{\sigma} - \bar{\epsilon}$ ) para el ensayo de compresión

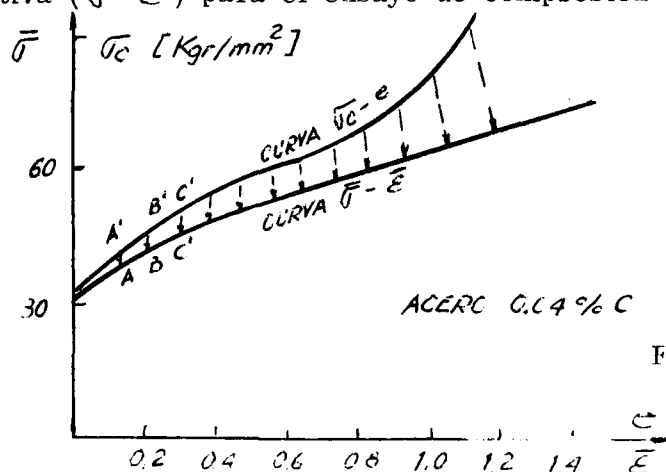


Fig. 48

A pesar de su aparente sencillez, el ensayo de compresión tiene dos inconvenientes fundamentales:

- (a) La inestabilidad plástica, asociada a la geometría de la probeta, conocida como "pandeo". A diferencia de la estricción en tracción, el pandeo puede evitarse con una geometría adecuada.
- (b) La fricción desarrollada entre probeta y mordazas hace que el ensayo no sea uniaxial y que las deformaciones sean inhomogéneas, restándole validez a las fórmulas vistas.

#### E.4.a. INESTABILIDAD PLÁSTICA EN COMPRESION

Se define a la relación de esbeltez:

$$\lambda = \frac{h}{i} \quad (114)$$

donde  $h$  es la altura de la probeta e  $i$  el radio de giro de su sección transversal  $S$  (fig. 49):

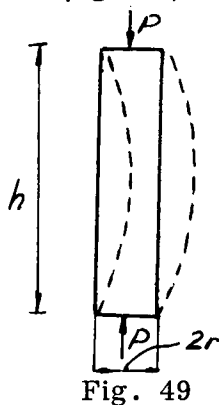


Fig. 49

$$i = \sqrt{\frac{J}{S}} \quad (115)$$

siendo  $J$  el momento de inercia de la sección.

Para el rango plástico, la condición de pandeo se expresa por una ecuación análoga a la de Euler en rango elástico:

$$P_{cp} = \frac{\pi^2 J E'}{h^2}$$

siendo  $P_{cp}$  la fuerza crítica de pandeo y  $E'$  la pendiente instantánea de la curva  $\bar{\sigma}-\bar{\epsilon}$ .

Reemplazando  $J$  por su valor extraído en 115 queda:

$$P_{cp} = \frac{\pi^2 S i^2 E'}{h^2}$$

y la tensión crítica de pandeo ( $\bar{\sigma}_{cp}$ ) teniendo en cuenta la 114, resulta:

$$\frac{P_{cp}}{S} = \bar{\sigma}_{cp} = \frac{\pi^2 E'}{\lambda^2} \quad (116)$$

Para que no se produzca pandeo la tensión aplicada ( $\bar{\sigma}_{ap}$ ) debe ser menor que la tensión crítica de pandeo:

$$\bar{\sigma}_{ap} < \bar{\sigma}_{cp} = \frac{\pi^2 E'}{\lambda^2} \quad (117)$$

Si el material sigue el modelo de Hollomon:

$$\bar{\sigma} = C \bar{\epsilon}^n \quad (118)$$

entonces: 
$$E' = \frac{d\bar{\sigma}}{d\bar{\epsilon}} = n C \bar{\epsilon}^{(n-1)} \quad (119)$$

Reemplazando 118 y 119 en 117:

$$1 < \frac{\pi^2 n}{\lambda^2 \bar{\epsilon}} \quad (120)$$

En estos materiales el pandeo se evitará cuanto mayor sea  $n$  y menores  $\lambda$  y  $\bar{\epsilon}$ . Como para una sección circular  $J = \frac{S \cdot r^2}{4}$ , reemplazando en 114 resulta:

$$\lambda = \frac{2h}{r}$$

lo que demuestra que el pandeo se evitará cuanto menor sea la relación altura diámetro.

En general, el problema puede presentarse en el encabezado por forja (upsetting), pero se evita disminuyendo el coeficiente de forma  $h_0/d_0$  a 3 como máximo.

#### E.4.b. CONSECUENCIA DE LA FRICCIÓN EN COMPRESIÓN

En una probeta cilíndrica comprimida, sus superficies libres se mantendrían paralelas, como muestran las figuras 50 a y b, pero la fricción no permite que la zona de contacto mordaza-probeta fluya libremente, efecto que se va atenuando hacia la zona central con lo que la probeta presenta una forma de barril típica del ensayo de compresión con fricción (figura 50 c).

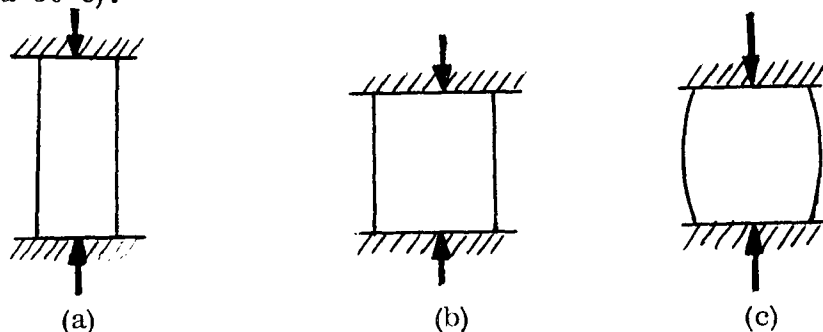


Fig. 50

Si se comprime una placa de altura  $h$ , como se indica en la figura 51 a, y se estudia el estado de tensiones en un elemento de ancho  $dx$ , ubicado a una distancia  $x$  del borde de la mordaza de compresión (figura 51 c), se obtiene la siguiente condición de equilibrio para un ancho unitario, si se admite que  $\bar{\sigma}_3$  es uniforme en todo el alto:

$$\begin{aligned} \bar{\sigma}_3 h - (\bar{\sigma}_3 + d\bar{\sigma}_3) h + 2\bar{\tau} dx &= 0 \\ -h \cdot d\bar{\sigma}_3 + 2\bar{\tau} \cdot dx &= 0 \end{aligned} \quad (121)$$

Para poner esta ecuación diferencial en función de la tensión impues-

ta se aplica la ley Amontons:

$$\tau = \mu \sigma_1 \quad (122)$$

De la figura 51 a se desprende que  $\epsilon_2 = 0$  debido a que el material libre de tensiones a ambos lados de las mordazas impide los desplazamientos en la dirección 2. De acuerdo a lo visto en el punto D.9 se trata de un caso de fluencia plana para el cual  $\sigma_2 = \frac{1}{2} (\sigma_3 + \sigma_1)$  y la condición de fluencia queda establecida por:

$$\sigma_1 - \sigma_3 = 2k \quad (123)$$

donde:  $k = Y/2$  si se adopta el criterio de Tresca o  $1.155 Y/2$  para Von Mises.

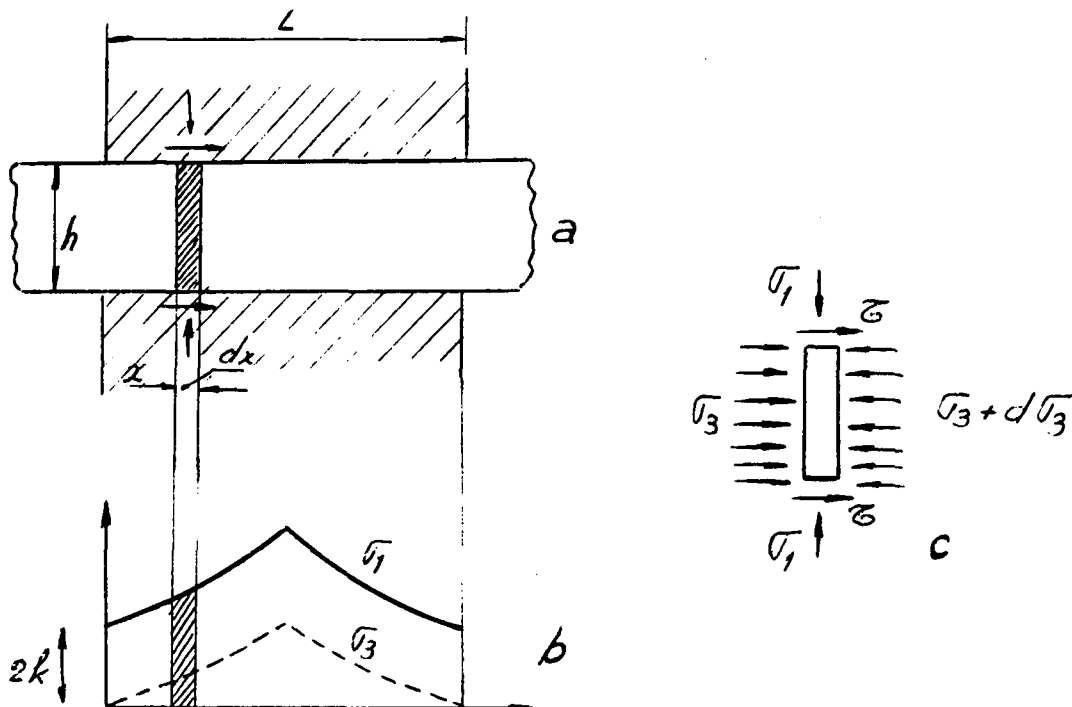


Fig. 51

Diferenciando la ecuación 123:

$$d\sigma_1 - d\sigma_3 = 0 \quad d\sigma_1 = d\sigma_3 \quad (124)$$

Introduciendo las ecuaciones 122 y 124 en 121:

$$\begin{aligned} 2\mu \sigma_1 dx - h d\sigma_1 &= 0 \\ \frac{2\mu}{h} dx &= \frac{d\sigma_1}{\sigma_1} \\ \ln \sigma_1 &= \frac{2\mu x}{h} + c \end{aligned} \quad (125)$$

La constante de integración puede obtenerse de las condiciones de borde, para  $x = 0$  es  $\sigma_3 = 0$ , y por lo tanto de 123 resulta:

$$\sigma_1 = 2k \quad \text{y} \quad C = \ln 2k$$

Con lo que la ecuación 125 queda:

$$\sigma_1 = 2k \cdot e^{\frac{2\mu x}{h}} \quad (126)$$

Esta función es válida hasta el centro de la mordaza. A partir de allí la curva es simétrica puesto que se invierte el signo de  $\sigma$ . En la figura 51 b se ha graficado la expresión 126. Se observa que  $\sigma_1$  aumenta con  $x$  como consecuencia de la fricción.

La variación de  $\sigma_3$  con  $x$  puede obtenerse de la expresión 123:

$$\sigma_3 = \sigma_1 - 2k$$

La ecuación 126 corresponde al caso de fricción "con deslizamiento" que tiene lugar siempre que  $\sigma = \mu \sigma_1 < k$  condición para la cual es suficientemente aproximada la solución obtenida, tanto más cuanto menor sea  $\mu$ .

De la observación de la figura 51 b se concluye que la existencia de fricción en los ensayos de compresión provoca estados complejos de tensiones con distribución no uniforme en la sección.

#### E.4.c. ENSAYOS ESPECIALES DE COMPRESION

Debido al problema de la fricción, son varios los ensayos en los que se ha procurado minimizar su efecto. A continuación se describirán someramente algunos.

- (a) Mayer y Mehl (1925): Su método consiste en colocar tres probetas del mismo material, tal como se indica en la figura 52 a. El coeficiente de forma inicial es  $h_0/d_0$  igual a 2.5. Para evaluar resultados las mediciones se efectúan sólo en la probeta central. Da resultados satisfactorios mientras las deformaciones son pequeñas (Figura 52 b), pero cuando el cono rígido toca la probeta central (Figura 52 c), ésta también se abarrilla. Considerando lo difícil que es alinear las tres probetas, este tipo de ensayo no tiene mucha aplicación.

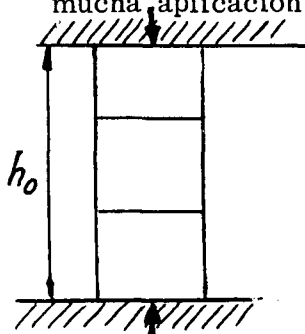


Fig. 52 a

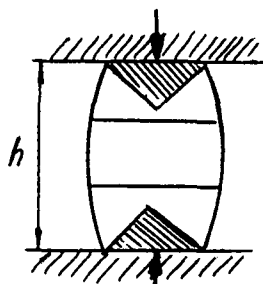


Fig. 52 b

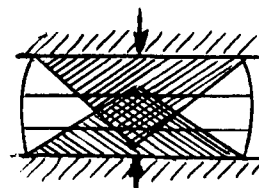


Fig. 52 c

- (b) Siebel y Pomp (1928) : Siebel calculó el valor de  $\bar{\sigma}$  para una probeta cilíndrica comprimida entre dos conos de ángulo  $\alpha$  (fig. 53):

$$\bar{\sigma} = 2k \left[ 1 + \frac{1}{3} \frac{d}{h} \operatorname{tg}(\rho - \alpha) \right] \quad (127)$$

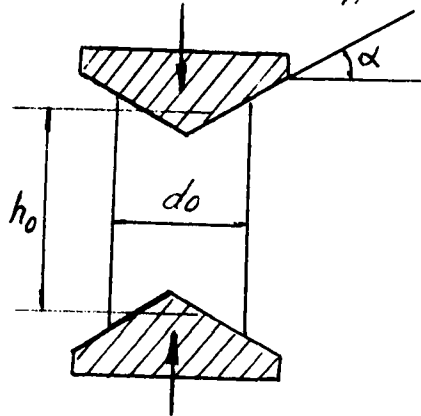


Fig. 53

donde  $\rho$  = ángulo de roce =  $\operatorname{arc. tg.} \mu$

Cuando  $\alpha = \rho$ , la ecuación 127 queda  $\bar{\sigma} = 2k$  eliminándose el efecto de la fricción.

En general los resultados son satisfactorios para reducciones hasta el 40%. Para valores mayores surgen problemas por la inhomogeneidad en la deformación introducida por la matriz cónica. Además se nota la influencia de la relación  $h_0/d_0$  (por lo que generalmente se toma igual a 2.5) puesto que se introduce otro problema en la compresión como se verá en c).

- (c) Cook y Larke (1945) : Para eliminar la influencia del coeficiente de forma  $h_0/d_0$ , tomaron distintas probetas con distintas relaciones  $d_0/h_0$  obteniendo las curvas de la figura 54 a. En base a ellas trazaron  $\bar{\sigma}$  en función de  $d_0/h_0$  para  $\bar{\epsilon} = \text{Constante}$  (figura 54 b), extrapolando los valores a  $d_0/h_0 = 0$  y obteniendo así una curva ideal llamada "curva tensión-deformación básica". Esta curva, para una probeta hipotética de altura infinita, no tendría los valores de la tensión afectados por el roce. Los valores que da son menores que los obtenidos por ensayos convencionales.

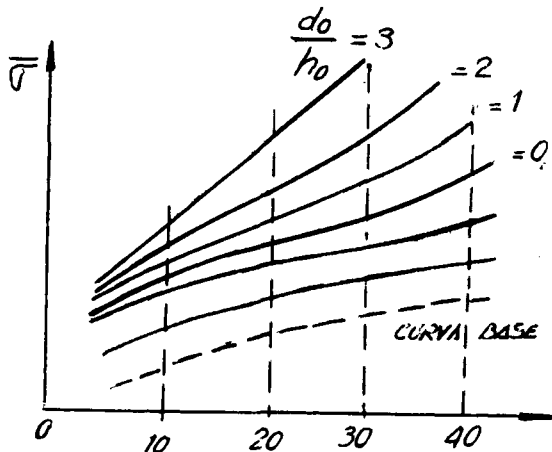


Fig. 54 a

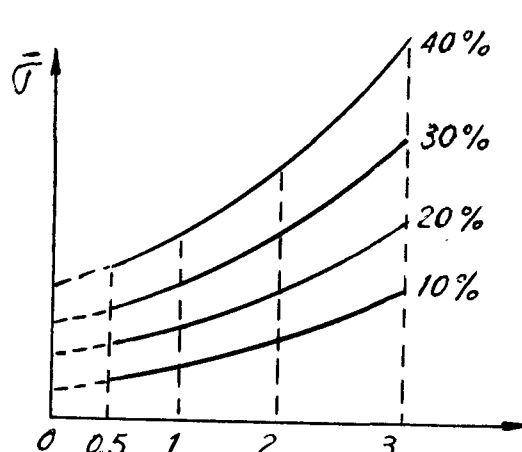


Fig. 54 b

## E.4.d. COMPRESION EN FLUENCIA PLANA

De los casos de fluencia plana, interesa aquí en particular aquél en que el material es libre de fluir en una dirección, la 3 por ejemplo y por lo tanto  $\sigma_3 = 0$ , pero el flujo es restringido en otra dirección, supóngase la 2; luego  $\epsilon_2 = 0$  (figura 55). Esta es la situación que se produce en la laminación de chapas y flejes.

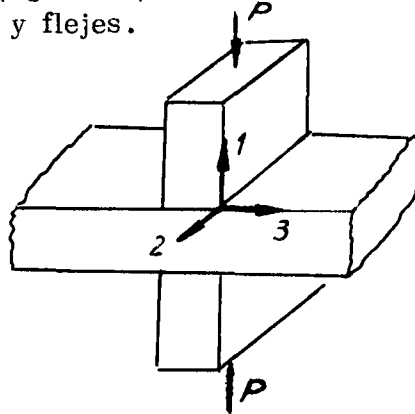


Fig. 55

La condición general de fluencia plana se analizó en el punto D.9. Como en nuestro caso particular es ahora  $\sigma_3 = 0$ , de acuerdo con la ecuación 84 el estado de tensiones aplicado es tal que:

$$\sigma_2 = \frac{1}{2} \sigma_1$$

Por otra parte, el criterio de fluencia de Von Mises en deformación plana dado por la ecuación 85 queda:

$$\bar{\sigma} = \frac{\sqrt{3}}{2} \sigma_1 \quad (128)$$

Además, siendo  $\epsilon_2 = 0$ , por constancia de volumen (ecuación 33, punto B.4):  $-d\epsilon_1 = d\epsilon_3$ . Teniendo esto en cuenta puede calcularse el incremento de deformación efectiva (ecuación 35a, punto B.6):

$$d\bar{\epsilon} = \frac{2}{\sqrt{3}} d\epsilon_1 \quad (129)$$

Orowan propuso un ensayo para poder verificar la condición de fluencia plana, que realizaron en 1948 Watts y Ford. Consiste en una indentación con una matriz de acero templado de ancho L, en un fleje de material a ensayar de espesor h y ancho w (figuras 56 a y b).

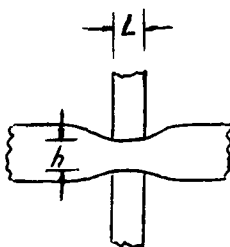


Fig. 56 a

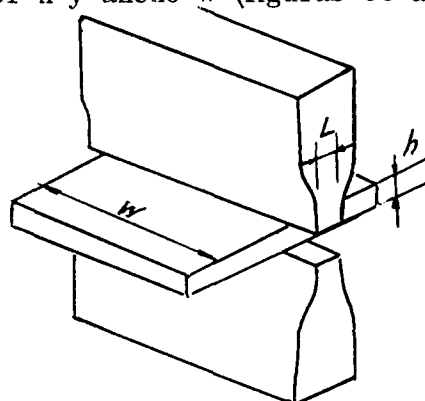


Fig. 56 b

El ancho  $w$  del fleje, conviene que sea suficientemente mayor que  $L$  para asegurar que el ensanchamiento lateral sea despreciable.

La presión de indentación  $p$  guarda una relación con el valor  $2k$ , que es también en este caso función de la geometría del proceso. Siendo  $k$  la tensión de fluencia por corte del material según la teoría de Von Mises, resulta  $2k = 1.155 Y$ . Según la expresión 128:

$$\bar{\sigma} = \frac{\sqrt{3}}{2} \sigma_1 = \frac{\sqrt{3}}{2} p = \frac{\sqrt{3}}{2} \frac{P}{S}$$

donde  $P$  es la carga aplicada sobre la sección de contacto  $S$ . De acuerdo a la ecuación 129:

$$\bar{\epsilon} = \frac{2}{\sqrt{3}} \epsilon_1 = \frac{2}{\sqrt{3}} \ln \frac{h}{h_0}$$

Hill y Green proponen dos soluciones, una definida para valores de  $h/L > 1$  y la otra para valores de  $h/L < 1$  respectivamente.

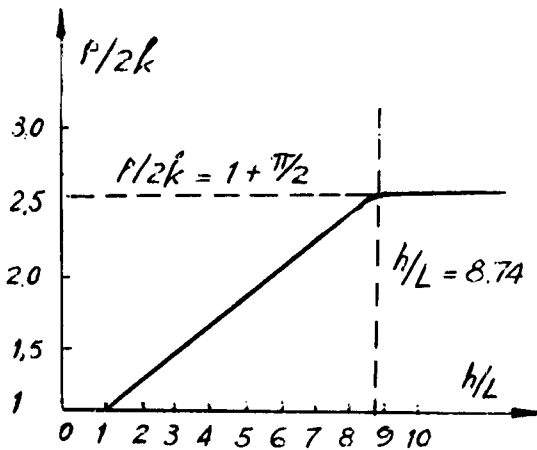


Fig. 57 a

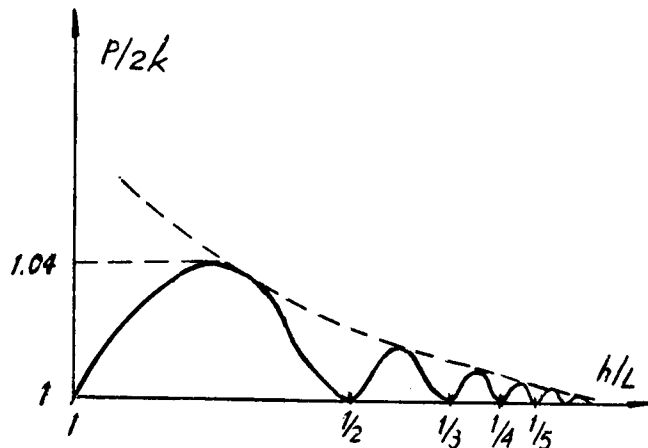


Fig. 57 b

Según Hill (Figura 57 a), si  $h$  es demasiado grande, la presión de indentación excede la tensión de fluencia. En el límite cuando  $h$  es infinito el proceso se convierte en una indentación de un simple punzón y la presión de indentación es igual a 2.57 veces la tensión de fluencia ( $p/2k = 2.57$ ). Esto se puede demostrar por medio de los campos de líneas de deslizamiento.

En la solución de Green (figura 57 b), cuando  $h/L = 1, 1/2, 1/3,$  etc., se desprende del campo de líneas de deslizamiento que  $p = 2k$ . En el caso que  $h/L$  no corresponda a un valor recíproco de un número natural positivo, por interacción de los conos rígidos  $p/2k > 1$ , con errores que pueden llegar al 4%. Esto ocurre para valores de  $h/L$  comprendidos entre 1 y  $1/2$ .

## E.5. ENSAYO DE TORSION

Es uno de los ensayos menos usados en la práctica para la determinación de las características mecánicas en frío. Sus inconvenientes son:

- (a) Si se efectúa sobre una barra sólida, la tensión será función de la distancia al eje, por lo que puede no producirse fluencia en toda la sección, o en caso de que así sea será inhomogénea. No obstante se lo usa para la deformación en caliente.
- (b) Si se trabaja con tubos de paredes delgadas, la textura (producida durante el proceso de trafilación para obtenerlos) modifica los valores. Sin embargo se utilizan para verificar los criterios de fluencia, combinando torsión con tracción y/o presión interna.

La figura 58 muestra un tubo de pared delgada, de radio medio  $r_m$  y espesor de pared  $t$ .

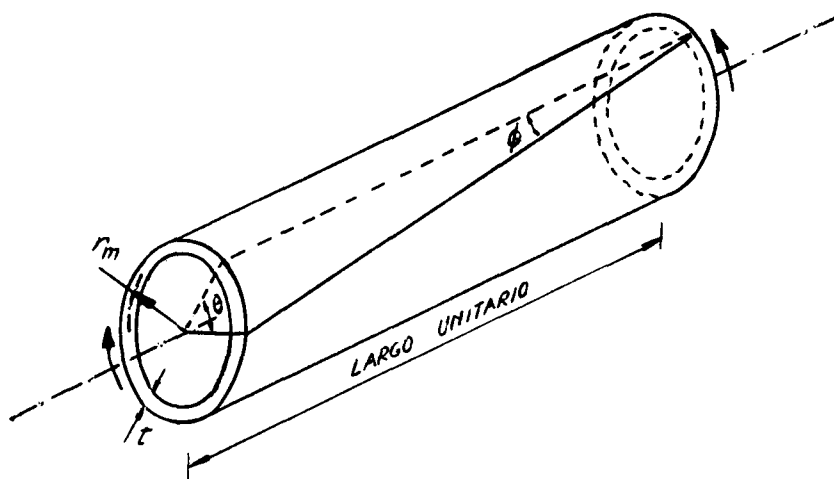


Fig. 58

Siendo la tensión efectiva:

$$\bar{\sigma} = \sqrt{\frac{1}{2} [(\sigma_r - \sigma_\theta)^2 + (\sigma_\theta - \sigma_z)^2 + (\sigma_z - \sigma_r)^2] + 3(\tau_{r\theta}^2 + \tau_{\theta z}^2 + \tau_{zr}^2)}$$

y como  $\sigma_r = \sigma_\theta = \sigma_z = \tau_{r\theta} = \tau_{zr} = 0$ , resulta:

$$\bar{\sigma} = \sqrt{3} \tau_{\theta z}$$

$\tau_{\theta z}$  se puede obtener a partir de la expresión del momento torsor T:

$$T = \tau_{\theta z} 2\pi r_m^2 \cdot t$$

La deformación efectiva se obtiene de la expresión:

$$\bar{\epsilon} = \sqrt{\frac{2}{9} [(\epsilon_r - \epsilon_\theta)^2 + (\epsilon_\theta - \epsilon_z)^2 + (\epsilon_z - \epsilon_r)^2] + \frac{4}{3} (\gamma_{r\theta}^2 + \gamma_{\theta z}^2 + \gamma_{zr}^2)}$$

y como  $\epsilon_r = \epsilon_\theta = \epsilon_z = \gamma_{r\theta} = \gamma_{zr} = 0$ , se obtiene:

$$\bar{\epsilon} = \frac{2}{\sqrt{3}} \gamma_{\theta z} = \frac{2}{\sqrt{3}} \frac{\tan \phi}{2} = \frac{1}{\sqrt{3}} \tan \phi$$

Si se deseara considerar las deformaciones elásticas, aplicando Prandtl-Reuss (punto D.6, ecuación 76), la deformación efectiva plástica resultaría:

$$\bar{\epsilon}^p = \bar{\epsilon} - \bar{\epsilon}^e = \frac{1}{\sqrt{3}} \left[ 2 \gamma_{\theta z} - \frac{\sigma_{\theta z}}{G} \right]$$

#### E.6. LOS ENSAYOS MECANICOS Y SUS POSIBILIDADES PARA LA DETERMINACION DE LAS CARACTERISTICAS MECANICAS "EN CALIENTE"

Mientras que en la deformación en frío, la tensión efectiva depende de la deformación efectiva alcanzada, en los procesos "en caliente" como ya se indicó en E.2, la resistencia a la deformación es función de la temperatura, la velocidad de deformación, la magnitud de la deformación y la historia previa del material. Esto exige que en caliente la determinación de  $\bar{\sigma}$  deba efectuarse en los rangos de temperaturas, velocidades de deformación y deformación propias del proceso de conformado de interés. Además, si bien en algunos procesos la deformación total se efectúa en una sola etapa (extrusión por ejemplo), en otros esto se logra en etapas sucesivas (laminación). Durante los períodos entre etapas de deformación tienen lugar en mayor o menor grado recuperación de propiedades y/o recristalización, que afectan a la resistencia a la deformación de las etapas siguientes. Esto obliga a que el método de ensayo sea tal que permita simular los ciclos de deformación propios de la determinada operación práctica de interés.

Así, si bien muchas veces se prefiere estudiar un proceso mediante ensayos de laboratorio que reproducen en escala reducida el caso real, es precisamente el hecho de depender la resistencia a la deformación en caliente de la historia previa del material, lo que puede imposibilitar económicamente tal estudio. En efecto, en aquellas operaciones de conformado que se realizan por etapas de deformación, como en el caso de la Laminación, las exigencias de equipos para reproducir exactamente los tiempos entre etapas son prohibitivos.

Otra circunstancia que debe tenerse en cuenta es la necesidad de poder efectuar enfriamientos rápidos, a los efectos de retener a temperatura ambiente la estructura de alta temperatura para su estudio, y así interpretar lo que ocurre con la misma durante la deformación. Esta es una situación que se complica cuando en el enfriamiento hay cambios de fases (acero, por ejemplo).

No debe olvidarse además que a los efectos de no introducir

alteraciones en la composición química, las operaciones deben realizarse en atmósfera inerte.

A continuación se indican en forma rápida las principales ventajas y desventajas de cada uno de los ensayos clásicos (tracción, compresión y torsión) para la determinación de las características mecánicas en caliente.

### Ensayo de tracción

En primer lugar, los equipos convencionales normalmente no son aptos para reproducir las velocidades por lo común elevadas de los distintos procesos industriales, de manera que se necesitan equipos especiales. Además a los efectos de tener  $\dot{\bar{\epsilon}}$  constante, el desplazamiento entre cabeceras debe ser tal que:

$$\dot{\bar{\epsilon}} = \frac{d\bar{\epsilon}}{dt} = \frac{d}{dt} \left( l_n \frac{l}{l_0} \right) = \frac{1}{l} \frac{dl}{dt} = \text{CONSTANTE} \quad (130)$$

Esto se logra con distintos sistemas entre los que se incluyen levas de perfil logarítmico.

La ley 130 sólo es válida hasta la estricción, lo cual ocurre para deformaciones naturales de aproximadamente 0.7 (100% de elongación). De allí en adelante hay que considerar la deformación real en la sección mínima, de modo que para mantener  $\dot{\bar{\epsilon}}$ , constantemente los desplazamientos entre cabeceras a partir del punto de inestabilidad plástica, deben cumplir:

$$d\bar{\epsilon} = - \frac{1}{s} \frac{ds}{dt}$$

que resulta de reemplazar  $d l / l$  de 104 en la 130. Blain y Rossard con este método han obtenido curvas  $\bar{\sigma} - \bar{\epsilon}$  para distintas velocidades de deformación constante hasta deformaciones de alrededor de 2. El método, de por sí complicado, necesita además las correcciones de  $\bar{\sigma}$  después de la estricción (Punto E.3.b).

### Ensayo de compresión

También en este caso, como en tracción, la única manera de obtener velocidad de deformación constante, es imponiendo que el desplazamiento entre cabeceras siga leyes logarítmicas.

Además, para minimizar los efectos de la fricción debe recurrirse a lubricantes, lo cual también complica el ensayo por el problema que significa lubricar a alta temperatura.

Trabajando con probetas axisimétricas pueden obtenerse curvas hasta  $\bar{\epsilon} = 0.7$  (50% de reducción en altura), punto en que comienza el

abarrilamiento. Como el área de la probeta crece continuamente los esfuerzos necesarios resultan muy grandes. En compresión plana en cambio el área permanece constante. Esto hace que puedan alcanzarse deformaciones de hasta aproximadamente 5, sin necesitar por otra parte equipos de excesiva potencia.

### Ensayo de torsión

Si bien el ensayo de torsión es uno de los menos usados para determinar características en frío, en caliente en cambio, tiene ventajas sobre los anteriores.

En efecto, simplemente con velocidades de giro constantes de la cabecera móvil, se inducen velocidades de deformación constantes en cualquier región de la probeta, pudiéndose a veces alcanzar deformaciones reales muy grandes (de varios cientos). Además se puede operar con una amplia gama de modo que es posible reproducir las altas velocidades de deformación de los procesos reales. A esto debe sumarse el hecho de no existir problemas de fricción.

Aunque teóricamente el proceso debiera efectuarse sin variación de las dimensiones de la probeta, lo cierto es que por causas que se ignoran, algunos materiales se acortan (la mayoría de los aceros) y otros se alargan (aluminio) durante el ensayo. Esto obliga a aplicar cargas axiales para mantener la longitud constante, por lo que las tensiones no son más de corte puro. Trabajos realizados en la Universidad de Stanford han comparado los resultados con probetas axialmente libres de deformarse y probetas con cargas axiales, llegándose a la conclusión que el primer caso permite un análisis mejor de los fenómenos que el segundo.

En el Punto E.5 ya se adelantó que el ensayo de torsión en caliente se realiza con barras macizas. La razón de ello es que pese a que la tensión de corte varía con el radio, si se usan tubos de pared delgada sólo se alcanzan deformaciones pequeñas, porque el tubo entra en inestabilidad plástica (se abolla). Se pierde entonces una de las principales ventajas de este ensayo (grandes deformaciones).

Las tensiones y deformaciones inducidas en una barra torsionada se obtienen de:

$$\gamma = \frac{r \theta}{2L} \quad (131)$$

$$\tau = 2\pi \int_0^R \zeta r^2 dr \quad (132)$$

Como puede apreciarse en 131,  $\gamma$  es función del radio. Igual cosa ocurre con  $\dot{\gamma}$ . El problema que surge es que  $\zeta$  depende a su vez de  $\gamma$  y  $\dot{\gamma}$ , y por lo tanto del radio, desconociéndose la función que los vincula. Esto implica que no puede recurrirse en forma inmediata a la expresión 132 para obtener  $\zeta$ .

Fiels y Backofen encontraron para el caso en que  $\bar{\tau}$  es función de  $\dot{\gamma}$  y  $\dot{\gamma}$ , la siguiente relación:

$$\bar{\tau}_R = \frac{T(3+m+n)}{2\pi R^3}$$

Donde  $\bar{\tau}_R$  es la tensión de corte en la superficie,  $m$  es la pendiente de la curva  $\log T - \log \dot{\theta}$  a  $\dot{\theta}$  constante, y  $n$  la pendiente de  $\log T - \log \dot{\theta}$  a  $\dot{\theta}$  constante.

A las temperaturas de trabajado en caliente y en régimen estacionario es  $m = 0$ . Blain y Rossard trabajando con aceros en esas condiciones, determinaron que en la mayoría de los casos  $n$  es independiente de  $\dot{\theta}$  y  $\dot{\theta}$ , excepto para un acero ferrítico con 25% de cromo, para el cual a cierta temperatura  $n$  cambia bruscamente de valor en un determinado  $\dot{\theta}$  (figura 60).

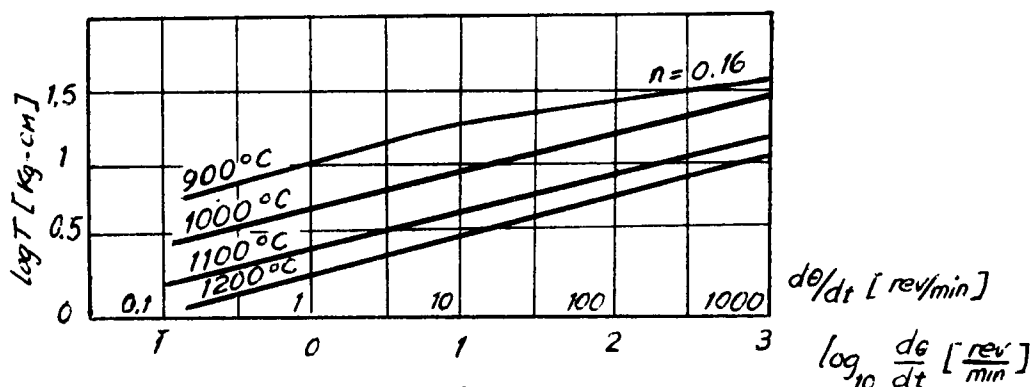


Fig. 60

La Tabla II da los valores de  $n$  para las distintas temperaturas y materiales determinados por Blain y Rossard, con probetas de 6 mm. de diámetro y 50 mm. de longitud.

En definitiva, de lo dicho se desprende que el ensayo de torsión es el más adecuado para determinar características en caliente, siendo con este fin objeto de particular atención en los últimos años. Puesto que permite obtener una amplia gama de velocidades con  $\bar{\tau}$  constante parece factible reproducir con él procesos discontinuos. En efecto Blain y Rossard han realizado trabajos tendientes a simular las condiciones de laminación, pero últimamente Sellars y McTegar establecieron que la recuperación y recristalización dependen de las tensiones máximas inducidas y de la naturaleza de las mismas.

TABLA II

MATERIAL	Temperatura	n	$\sigma_R$ (Kg/mm <sup>2</sup> )
Acero 0.25%C	900	0.10	7.4
	1000	0.17	6.0
	1100	0.17	4.2
	1200	0.19	3.1
Hierro Armco	1100	0.17	3.9
Acero Extra Duro	1100	0.17	4.2
Acero 0.85%C	1100	0.16	3.1
Acero 1.2%C	1100	0.14	3.5
Acero Inox. 18/8	900	0.07	9.8
	1000	0.11	8.3
	1100	0.16	5.6
	1200	0.20	4.7
Acero 25% Cr	900	0.24 y 0.16	6.5 y 5.1
	1000	0.24	3.3
	1100	0.25	1.9
	1200	0.26	1.3
Acero 4% Si	1100	0.24	1.5