CNA/27

COMISION NACIONAL DE ENERGIA ATOMICA
DEPENDIENTE DE LA PRESIDENCIA DE LA NACION

CENTRAL NUCLEAR EN ATUCHA

CURSO ELEMENTAL DE ARITMETICA

Sr. O.A Martínez

(continuación)

Buenos Aires-Argentina
-1974-

AL-6

FACTOREO

6.1- INTRODUCCION

El factoreo significa descomponer una expresión algebraica en factores, tales que si los multiplica se obtiene la expresión de partida. Ejemplo:

$$a^2 + 2\ ab + b^2 = (a + b)\ (a + b)$$

En este ejemplo la expresión indicada a la izquierda del signo igual, puede descomponerse en el producto de dos idénticos factores (a+b). Si estos monomios se multiplican en la forma acostumbrada es:

$$\begin{aligned}(a+b)(a+b) &= a^2+ab+ba+b^2= \\ &= a^2+ab+ab+b^2= \\ &= a^2+2ab+b^2\end{aligned}$$

es decir que se ha recompuesto la expresión de partida.

De acuerdo al tipo de expresión algebraica que se trate, pueden seguirse diversos caminos para obtener los factores.

6.2- FACTOR COMUN

Se denomina factor común de una expresión algebraica, al monomio formado con símbolos tales que figuren en todos los monomios de la expresión de partida.

Ejemplo 1: $abc + bda + ax - 2D$

el símbolo a figura en todos los monomios, luego:

$$abc + bda + ax - 2a = a\ (bc + bd + x-2)$$

Ejemplo 2:

$$\begin{aligned}&3\ b^2cd + 27\ b^4c^3m^2 - 9\ b^5c^2md - 21\ b^2c^5m^2 = \\ &= 3b^2c\ (d + 9\ b^2c^2m - 3\ b^3cmd - 7\ c^4m^2)\end{aligned}$$

6.3- FACTOREO POR GRUPOS

Cuando en una expresión algebraica, no se encuentra ningún símbolo que figure en todos los monomios, pero si existen algunos símbolos o grupo de ellos, que son comunes en una serie de monomios, puede factorearse por grupos:

Ejemplo 1:

$$5a^2 - 10\,ax + 4\,na - 8\,nx =$$
$$= (5a^2 - 10\,ax) + (4\,na - 8\,nx) =$$
$$= 5a\,(a - 2x) + 4n\,(a - 2x) =$$
$$= (5a + 4n)\,(a - 2x)$$

Ejemplo 2:

$$a^2 + b^2 - c^2 - 2ab =$$
$$= (a^2 - 2ab + b^2) - c^2 =$$
$$= (a - b)^2 - c^2 =$$
$$= (a - b - c)\,(a - b + c)$$

6.4- DIFERENCIA DE CUADRADOS

Constituye otro caso de factoreo, y queda expresado por:

$$a^2 - b^2 = (a-b)(a+b)$$

verificación:

$$(a-b)(a+b) = a^2+\cancel{ab}-\cancel{b}a-b^2= a^2 - b^2$$

nótese que hay un orden de prioridad de a "antes que" b; pues:

$$(b-a)(b+a)=b^2+ba-ab-a^2=$$
$$=b^2-a^2\neq a^2-b^2$$

6.5- SUMA O DIFERENCIA DE CUBOS

Se aplica a expresiones de la forma:

$$a^3-b^3$$

ó

$$a^3+b^3$$

y da por resultado:

$$a^3-b^3=(a-b)(a^2+ab+b^2)$$
$$a^3+b^3=(a+b)(a^2-ab+b^2)$$

Ejemplo 1: $8a^3+27b^3=(2a)^3+(3b)^3 =$
$=(2a+3b)\quad (2a)^2-(2a)(3b)+(3b)^2 =$
$=(2a+3b)(4a^2-6ab+9b^2)$

Ejemplo 2: $X^9-64X^3-X^6+64 =$
$=X^3(X^6-64)-(X^6-64)=$
$=(X^6-64)(X^3-1)$
$=(X^3+8)(X^3-8)(X^3-1)=$
$=(X^3+2^3)(X^3-2^3)(X^3-1)=$
$=(X+2)(X^2-2X+4)(X-2)(X^2+2X+4)(X-1)(X^2+X+1)$

6.6- TRINOMIOS Y CUATRINOMIOS PERFECTOS

Constituyen también como particulares de factoreo, y responden a:

$$\left.\begin{array}{l} a^2+2ab+b^2=(a+b)^2 \\ a^2-2ab+b^2=(a-b)^2 \end{array}\right\} \text{ trinomios cuadrados perfectos}$$

$$\left.\begin{array}{l} a^3+3a^2b+3ab^2+b^3=(a+b)^3 \\ a^3-3a^2b+3ab^2-b^3=(a-b)^3 \end{array}\right\} \text{ cuatrinomios cubos perfectos}$$

Ejemplo:

$8X^3+36X^2y+54Xy^2+27y^3=$
$=(2X)^3+3(2X)^2(3y)+3(2X)(3y)^2+(3y)^3=$
$=(2X+3y)^3$

6.7- METODO GENERAL

Los casos vistos hasta ahora, si bien son muy aplicados, no dejan de ser casos particulares, pero existe un método más general que se expone y ejemplifica a continuación:

$$\boxed{P^n(x) = \prod_{i=1}^{n} (x - x_i)}$$

donde

$P^{n}_{(x)}$: polinomio de grado n en x

$\prod_{i=1}^{n}$: productoria de factores (X-Xi) desde i=1 hasta i=n

x_i : valores de X que cumplen P(Xi)=0

Es decir que encontrados todos los valores Xi que el polinomio se anule, puede factorearse en la forma indicada. Ejemplo:

Sea $\quad P^{(2)}(x) = X^2-3X+2$

con $\begin{cases} X1=1 \\ X2=2 \end{cases}$

puede comprobarse que:

$$P^{(2)}(x_1) = P^{(2)}(x=1) = 1^2-3(1)+2 = 1-3+2 = 0$$

y $$P^{(2)}(x_2) = P^{(2)}(x=2) = 2^2-3(2)+2 = 4-6+2 = 0$$

luego

$$\prod_{i=1}^{n}(x-x_i) = \prod_{i=1}^{2}(x-x_i) = (x-1)\ (x-2)$$

$$\therefore\ x^2-3x+2 = (x-1)(x-2)$$

Verificación:

$$(x-1)\ (x-2) = x^2-2.x-1.x+2$$
$$= x^2-3x+2$$

El problema de factorear, en una forma más general, se reducirá entonces a encontrar los valores Xi que hacen idénticamente nulo al polinomio que interesa factorear. En general, se tiene con polinomios:

$$\begin{array}{l|l} P(x) & Q(x) \\ \cline{2-2} R(x) & C(x) \end{array}$$

$P(x)$: polinomio dividendo
$Q(x)$: polinomio divisor
$C(x)$: polinomio cociente
$R(x)$: polinomio resto

Puede demostrarse en este caso, que cuando el polinomio Q(x) es de la forma: (X-Xi), y el resto de la división es nulo, R(x)=0; entonces el valor Xi cumple con:

$$P(Xi)=0$$

y puede formarse un factor (X-Xi) del polinomio P(x).

<u>Ejemplo 1</u>:

$P(x) = X^2-3X+2$

$Q(x) = X - 1$

$$P(x) \;\underline{|\,Q(x)} \longrightarrow \begin{array}{rrr|l} x^2 & -3x & +2 & \underline{x-1} \\ -x^2 & +x & & x-2 \\ \hline & -2x & +2 & \\ & +2x & -2 & \\ \hline & 0 & 0 & \end{array}$$

luego $\quad C(x) = X-2$
$\quad\quad\quad R(x) = 0$

y como en toda división se cumple:

$$P(x) = Q(x) \,.\, C(x) + R(x)$$

Si $\quad R(x)=0$
es $\quad P(x)=Q(x)xC(x)$

Con lo que se ha descompuesto P(x) en dos factores: Q(x) y C(x)

Continuando con el ejemplo:

$$X^2-3X+2=(X-1)(X-2)+0$$
$$=(X-1)(X-2)$$

<u>Ejemplo 2</u>:

Factorear $\quad X^4-10X^3+35X^2-50X+24$

Procedimiento:

1° Se ordena el polinomio según las potencias decrecientes.
2° Se eligen los posibles valores Xi entre los divisores del coeficiente de X^0. En este caso entre los divisores de 24.

± 1; ± 2; ± 3; ± 4; ± 6; ± 8; ± 12 y ± 24

3° Se elige primeramente uno cualquiera de estos números, por comodidad conviene comenzar con los más pequeños, y se propone un polinomio cociente.

Si se elige +1 $\longrightarrow$ $x - 1 = Q(x)$

4° Se realiza la división:

$$
\begin{array}{rrrrr|l}
x^4 & -10x^3 & +35x^2 & -50x & +24 & x-1 \\
\cline{6-6}
-x^4 & +x^3 & & & & x^3 - 9x^2 + 26x - 24 \\
\cline{1-2}
 & -9x^3 & +35x^2 & & & \\
 & +9x^3 & -9x^2 & & & \\
\cline{2-3}
 & & 26x^2 & -50x & & \\
 & & -26x^2 & +26x & & \\
\cline{3-4}
 & & & -24x & +24 & \\
 & & & +24x & -24 & \\
\cline{4-5}
 & & & R(x) & = 0 &
\end{array}
$$

5° Luego se ha obtenido un factor (x-1) pues R(x)=0. Entonces puede expresarse:

$$x^4 - 10x^3 + 35x^2 - 50x + 24 = (x-1)(x^3 - 9x^2 + 26x - 24)$$

6° Debe seguirse buscando otros factores con el polinomio C(x). Se supone nuevamente (x-1)

$$
\begin{array}{rrrr|l}
x^3 & -9x^2 & +26x & -24 & x-1 \\
\cline{5-5}
-x^3 & +x^2 & & & x^2 - 8x + 18 \\
\cline{1-2}
 & -8x^2 & +26x & & \\
 & +8x^2 & -8x & & \\
\cline{2-3}
 & & +18x & -24 & \\
 & & 18x & +18 & \\
\cline{3-4}
 & & R = & -6 &
\end{array}
$$

Es decir que como $R(x) \neq 0$, no puede formarse otro factor (x-1).

7° Se propone entonces (x+1), es decir con el otro signo posible del divisor 1 del punto 2°. Se divide:

$$\begin{array}{rrrr|l}
x^3 & -9x^2 & +26x & -24 & x+1 \\ \cline{5-5}
-x^3 & -x^2 & & & x^2-10x+36 \\ \cline{1-2}
 & -10x^2 & +26x & & \\
 & +10x^2 & +10x & & \\ \cline{2-3}
 & & 36x & -24 & \\
 & & -36x & -36 & \\ \cline{3-4}
 & & & R=-60 &
\end{array}$$

Nuevamente $R(x)\neq 0$, lo que implica que $(X+1)$ tampoco es factor.

8° Se propone entonces $(x-2)$ y se divide

$$\begin{array}{rrrr|l}
x^3 & -9x^2 & +26x & -24 & x-2 \\ \cline{5-5}
-x^3 & +2x^2 & & & \\ \cline{1-2}
 & -7x^2 & +26x & & \\
 & +7x^2 & -14x & & \\ \cline{2-3}
 & & 12x & -24 & \\
 & & -12x & +24 & \\ \cline{3-4}
 & & 0 & 0 & \longrightarrow R=0
\end{array}$$

Entonces como ahora $R(x)=0$ es $(x-2)$ otro factor. Se tiene hasta ahora:

$$x^4-10x^3+35x^2-50x+24=(x-1)(x-2)(x^2-7x+12)$$

y se continúa entonces con el polinomio:

$$X^2 - 7X + 12$$

$$\begin{array}{l|l} x^2 - 7x + 12 & x - 2 \\ \hline -x^2 + 2x & x - 5 \\ \hline \quad -5x + 12 & \\ \quad 5x - 10 & \\ \hline \quad R = 2 \neq 0 & \end{array}$$

$$\begin{array}{l|l} x^2 - 7x + 12 & x + 2 \\ \hline -x^2 - 2x & x - 9 \\ \hline \quad -9x + 12 & \\ \quad +9x + 18 & \\ \hline \quad R = 30 \neq 0 & \end{array}$$

$$\begin{array}{l|l} x^2 - 7x + 12 & x - 3 \\ \hline -x^2 + 3x & x - 4 \\ \hline \quad -4x + 12 & \\ \quad 4x - 12 & \\ \hline \quad 0 \quad\quad 0 \quad R = 0 & \end{array}$$

Luego:

$$x^4 - 10x^3 + 35x^2 - 50x + 24 = (x-1)(x-2)(x-3)(x-4)$$

GUIA DE PROBLEMAS

1. Reducir

a) $\dfrac{X^2-16}{X+4}$

b) $\dfrac{X^2-7X+12}{X^2-4X}$

2. Simplificar

a) $\dfrac{a^2}{bc} \times \dfrac{c^2}{ab} \div \dfrac{ac}{b^2}$

b) $\dfrac{(X^2-X-20)}{(X^2-25)} \cdot \dfrac{(X^2-X-2)}{(X^2+2X-8)} \div \dfrac{(X+1)}{(X^2+5X)}$

3. Simplificar

$$\frac{(x-3)}{(X^2-2X+4)} \div \frac{X^2-9}{X^3+8}$$

AL-7

7.1- INTRODUCCION

En esta lección se estudiarán los problemas de aplicación de la teoría vista hasta ahora, en cuanto a su aplicación a problemas prácticos. Fundamentalmente se estudiarán fórmulas de aplicación directa a muchos problemas comunes en la técnica.

7.2 REGLAS DE RESOLUCION DE FORMULAS

Regla 1:

La fórmula puede ser transpuesta sin cambiar los signos:

$$A = B$$
$$B = A$$

Regla 2:

Cualquier término puede ser transpuesto desde un lado de la fórmula al otro con solo cambiar de signo, siempre que figure como sumando o substraendo.

Ejemplos: $V = IR + E$

Resolver para E: $E = V - IR$

(fórmula del motor de corriente continua).

Regla 3:

Cada término, a ambos lados de la fórmula, puede ser dividido por el mismo número o letra.

Ejemplos: resolver para V:

$$W = I \cdot V$$

(fórmula de la potencia de corriente continua)

$$V = \frac{W}{I}$$

Ejemplo 2:resolver para T

$$p \cdot V = n\,RT$$

(fórmula de la ecuación característica de los gases)

$$T = \frac{p \cdot V}{n \cdot R}$$

Regla 4:

Cada término de la fórmula puede ser multiplicado por un mismo número o letra.

Ejemplo:

$$h = \frac{V^2}{2g}$$

(fórmula de la velocidad del fluido en hidráulica)

resolviendo para V^2 y para V

$$h \times 2g = \frac{v^2}{\cancel{2g}} \times \cancel{2g} \qquad v^2 = 2.g.h$$

$$v = \pm \quad 2gh$$

resolviendo para g

$$gh = \frac{v^2}{2\cancel{g}} \times \cancel{g}$$

$$gh = \frac{v^2}{2}$$

$$g.\cancel{h} \times \frac{1}{\cancel{h}} = \frac{v^2}{2} \times \frac{1}{h}$$

$$g = \frac{v^2}{2h}$$

7.3- SUMARIO DE TRANSFORMACIONES

En resumen se observa que cualquier fórmula propone una igualdad. Dicha igualdad debe mantenerse cualquiera sea la transformación realizada.

Con respecto a las reglas enunciadas, hay otras operaciones diferentes de ellas, que pueden realizarse sobre las fórmulas y que también mantienen la igualdad de la ecuación.

Algunas de estas operaciones se muestran a continuación, aplicadas a la igualdad

$$A = B$$

$$A^2 = B^2$$

$$\frac{1}{A} = \frac{1}{B}$$

$$A = \pm \quad B$$

$$A^3 = B^3$$

$$e^A = e^B$$

$$\operatorname{sen}A = \operatorname{sen}B$$

$$\frac{dA}{dt} = \frac{dB}{dt}$$

$$\int Adx = \int Bdx$$

etc. etc

GUIA DE PROBLEMAS

1) Si la expresión que relaciona el tiempo que tarda un cuerpo, arrojado con un ángulo α con la horizontal a una velocidad inicial v_0, en alcanzar una altura máxima es:

$$T_1 = \frac{v_0 \operatorname{sen} \alpha}{g}$$

donde g es la aceleración de la gravedad, calcular v_0 si $\alpha = 60°$ $T_1 = 2{,}2$ seg y $g = 9{,}8$ m/seg^2.

2) Despejar el valor de r en el siguiente caso:

$$I = \frac{E + (\varphi_A - \varphi_B)}{R_1 + R_2 + r}$$

3) Despejar n:

$$1 = \frac{(H - h)}{\sqrt{n^2 - 1}}$$

AL-8

8.1- POTENCIACION: GRADO DE POLINOMIOS

Se estudió en unidades anteriores, la técnica de operación con potencias. Se ha visto entonces la regla de multiplicar potencias de igual base:

$$a^{m} \times a^{n} = a^{m+n}$$

En el caso de los monomios, el producto de los exponentes de los literales se denomina: grado. En consecuencia el grado de una serie de monomios se ve aumentado si se les multiplica entre sí. Para el caso de un polinomio, puede pensarse en un polinomio de monomios semejantes, por ejemplo:

$$12\ ab^{2} + 13\ ab^{3} + 2\ a^{2}b - 3\ ab$$

puede definirse el grado del polinomio como el grado que posee el monomio de mayor grado, en el caso del ejemplo: polinomio de 4° grado.

Desde el punto de vista técnico, son de interés los polinomios que poseen un solo literal, que generalmente se desgina con X y se tiene

$$P_{(x)}^{(n)} = a_1X^{n} + a_2X^{n-2} + a_3\ X^{n-1} + \ldots + a$$

en este caso se tiene un polinomio en X, de grado n.

Si a este polinomio se lo ordena de modo de obtener sucesivamente monomios de menor grado es decir:

$$P_{(x)}^{(n)} = a_1X^{n} + a_2X^{n-1} + a_3X^{n-2} + a_4\ X^{n-3} + \ldots$$

$$\ldots + a_nX^{n-n+1} + a_o$$

se dice que se ha ordenado el polinomio según las potencias decrecientes de X.

Si en el desarrollo anterior algún a_i fuese:

$$\text{algún } a_i = 0$$

Entonces, dentro de las sucesivas potencias decrecientes de X_1, habría algunas que no aparecen, por ejemplo:

$$P_{(x)}^{(4)} = X^4 - 2X^3 + X - 2$$

en este caso el ai correspondiente al término de X^2 es nulo, luego por ordenar y completar debe entenderse, la operación de disponer los monomios del polinomio según todas las potencias necesarias decrecientes de X, con coeficientes nulos donde sea necesario.

Ejemplo: ordenar y completar:

$$P_{(x)}^{(4)} = -2X^3 - 2 + X^4 + X$$

$$P_{(x)}^{(4)} = X^4 - 2X^3 + 0X^2 + X - 2$$

8.2- LEYES DE LA RADICACION

En unidades anteriores se utilizaron ciertas propiedades de la radicación que a continuación se resumen:

a) $\sqrt[n]{a} = b \iff b^n = a$

b) $\sqrt[n]{a} \times \sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{a \times b}$

c) $\left(\sqrt[n]{a}\right)^n = \sqrt[n]{a^n} = a$

d) $\sqrt[n]{a^m} = a^{\frac{m}{n}}$

e) $\sqrt[n]{\sqrt[m]{a}} = \sqrt[n \times m]{a}$

Ejemplos:

1. $\sqrt[5]{32} = 2 \implies 2^5 = 32$

2. $\sqrt{2} \times \sqrt{32} = \sqrt{32 \times 2} = \sqrt{64} = 8$

3. $\left(\sqrt[4]{7842}\right)^4 = \sqrt[4]{7.842^4} = 7842$

4. $\sqrt[5]{b^7} = b^{\frac{7}{5}}$

5. $\sqrt[3]{\sqrt{64}} = \sqrt[2\times 3]{64} = \sqrt[6]{64} = 2$

8.3- EXPONENTES NEGATIVOS

El resultado de una base cuyo exponente es negativo, es una raíz

$$a^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{a}$$

Ejemplos:

a) $\sqrt[3]{4} = 4^{\frac{1}{3}}$

b) $\sqrt[7]{8} = 8^{\frac{1}{7}}$

Esta propiedad puede emplearse para resolver operaciones de la forma:

$$\sqrt[n]{a^m} = a^{\frac{m}{n}}$$

si se tiene la situación m $>$ n puede formarse el número mixto.

$$\frac{m}{n} = C\,\frac{m'}{n} = C + \frac{m'}{n}$$

luego:

$$a^{\frac{m}{n}} = a^{\left(C + \frac{m'}{n}\right)}$$

$$= a^C . a^{\frac{m'}{n}}$$

$$= a^C \sqrt[n]{a^{m'}}$$

donde $m' < n$

Ejemplo 1:

$$\sqrt[4]{b^7} = b^{\frac{7}{4}} = b^{1\frac{3}{4}} = b^1 . b^{\frac{3}{4}} = b\sqrt[4]{b^3}$$

Ejemplo 2:

$$\sqrt[5]{32^{94}} = 32^{\frac{94}{5}} = 32^{18+\frac{4}{5}} = 32^{18} \times 32^{\frac{4}{5}}$$

$$= 32^{18}\sqrt[5]{32^4}$$

8.4- RACIONALIZACION DE DENOMINADORES

Se denomina así a la operación de eliminar los radicales que puedan figurar en el denominador de una expresión algebraica.

Ejemplo 1:

$$\frac{\sqrt{b}}{\sqrt{a}} = \frac{\sqrt{b}}{\sqrt{a}} \times \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{a}}$$

$$= \frac{\sqrt{b} \times \sqrt{a}}{(\sqrt{a})^2}$$

$$= \frac{\sqrt{b}\sqrt{a}}{a}$$

$$= \frac{\sqrt{b.a}}{a}$$

$$\therefore \frac{\sqrt{b}}{\sqrt{a}} = \frac{\sqrt{b.a}}{a}$$

Ejemplo 2:

$$\frac{5}{\sqrt{27}} = \frac{5\sqrt{27}}{\sqrt{27}\sqrt{27}}$$

$$= \frac{5\sqrt{27}}{27}$$

$$= \frac{5\sqrt{9 \times 3}}{9 \times 3}$$

$$= \frac{5\sqrt{3}}{9}$$

Puede darse el caso que el denominador sea un radical único.

$$\frac{1}{\sqrt{a}} = \frac{1}{\sqrt{a}} \times \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{a}}$$

$$= \frac{\sqrt{a}}{a}$$

$$\frac{1}{\sqrt[n]{a}} = \frac{\left(\sqrt[n]{a}\right)^{n-1}}{\sqrt[n]{a} \cdot \left(\sqrt[n]{a}\right)^{n-1}}$$

$$= \frac{\left(\sqrt[n]{a}\right)^{n-1}}{a}$$

$$\frac{1}{\sqrt[n]{a}} = \frac{\left(\sqrt[n]{a}\right)^{n-1}}{a}$$

<u>Ejemplo</u>:

$$\frac{2a}{\sqrt[3]{2}} = \frac{2a\left(\sqrt[3]{2}\right)^2}{\sqrt[3]{2}\left(\sqrt[3]{2}\right)^2}$$

$$= \frac{2a\sqrt[3]{2^2}}{\sqrt[3]{2^3}}$$

$$= \frac{2a\sqrt[3]{4}}{2}$$

$$= a\sqrt[3]{4}$$

GUIA DE PROBLEMAS

1) Ordenar y determin ar el grado de:

a) $ab^2 + 3ab - 2a^3b + 4ba^2$

b) $ax^2 + 2bx - 2x^2 + 3cd$

2) Ordenar y completar el siguiente polinomio en X.

$$12x^8 - 4x^7 + 2x^5 + 44x^3 - 12x^9 + 42x^2 - 7x^6 = 0$$

3) Ordenar y completar:

$$7x^2 - 2 + 4x^5 - 4x^2 - 4x^5 + 2x^3 - 1 = 0$$

4) Resolver:

a) $\dfrac{2}{\sqrt{5}}$

b) $\dfrac{3}{\sqrt{6}}$

c) $\dfrac{2}{\sqrt{18}}$

d) $\dfrac{a}{2\sqrt[7]{b}}$

e) $\dfrac{2a}{\sqrt[3]{7}}$

f) $\dfrac{1}{\sqrt[3]{\frac{1}{a}}}$

AL-9

9.1- ECUACIONES

Con este nombre se designa la igualdad de dos expresiones algebraicas cualesquiera:

$$ax - 2bz = 3cd \qquad (1)$$

Donde las partes literales representan números. Si se supone que las últimas letras del alfabeto, o sea las letras:

$$x;\ y;\ z;\ u;\ v;\ t;\ w,\ etc$$

se utilizan para designar magnitudes desconocidas o incógnitas y las primeras letras:

$$a,\ b,\ c,\ d,\ e,\ f,\ \ etc$$

se utilizan para designar coeficientes conocidos, resulta entonces claro que en uná expresión como la (1) habrá términos conocidos y no conocidos.

Pero de todos modos, la ecuación impone una condición, que el "término de la izquierda" sea igual al "de la derecha" y esta igualdad debe mantenerse siempre, entonces resulta que no cualquier valor de la incógnita podrá resolver la ecuación. Se entenderá entonces por "resolver la ecuación" a la operación de encontrar los valores posibles de las incógnitas, tal que reemplazados en la ecuación la satisfacen, es decir que la igualdad propuesta se cumple.

Ejemplo 1: Sea la ecuación

$$3x - 2 = 0$$

Si se propone por ejemplo X=1 como solución y se verifica, es:

$$3 \times 1 - 2 = 1 \neq 0$$

es decir que la ecuación no se cumple o satisface con el valor X=1, luego este, no es solución de la ecuación.

Si ahora se propone: $X = \frac{2}{3}$ y se verifica:

$$3 \times \frac{2}{3} - 2 = \frac{\cancel{3} \times 2}{\cancel{3}} - 2$$

$$= 2 - 2 = 0$$

se cumple

Luego el valor $X = 2/3$ es solución o es la incógnita buscada que hace cierta la ecuación

Ejemplo 2:

Sea la ecuación:

$$x^2 - 2x - 4 = 4$$

puede comprobarse que el número X=1 no satisface la ecuación, pero el valor X=-2:

$$(-2)^2 - 2(-2) - 4 = 4 + \cancel{4} - \cancel{4} = 4$$

sí satisface la ecuación, luego X=-2 es una solucion o incógnita de la misma.

9.2- GRADO Y NUMERO DE INCOGNITAS

De acuerdo al grado de los monomios que intervienen en la ecuacion, se obtiene el grado de la misma, como el grado del monomio de mayor grado

Ejemplos

$3x - 2 = 0$	1° grado - 1 incógnita
$x^2 - 2x - 4 = 4$	2° grado - 1 incognita
$3xy + 2xy^2 - 4y = 2$	3° grado - 2 incógnitas
$2x - 4y = 2z + 3x$	1° grado - 3 incognitas

9.3- ECUACIONES DE 1° GRADO CON UNA INCOGNITA

Para resolver este tipo de ecuaciones deben aplicarse las reglas de despejar terminos estudiados anteriormente.

Ejemplo 1:

$$\frac{1}{3}(2x-1)-\frac{1}{5}(4x-6)=\frac{7}{15}$$

$$15\left[\frac{1}{3}(2x-1)-\frac{1}{5}(4x-6)\right]=\frac{7}{\cancel{15}}\times\cancel{15}$$

$$5(2x-1)-3(4x-6)=7$$

$$10x-5-12x+6=7$$

$$10x-12x=7-6+5$$

$$-2x=6$$

$$x=-3$$

Ejemplo 2:

$$\frac{(x+5)}{(x+3)}=-\frac{(5-x)}{(x+5)}$$

$$(x+5)(x+5)=-(5-x)(x+3)$$

$$x^2+10x+25=x^2-5x+3x-15$$

$$x^2+10x+25=x^2-2x-15$$

$$x^2-x^2+10x+2x=-15-25$$

$$12x=-40$$

$$x=-\frac{40}{12}$$

GUIA DE PROBLEMAS

1. Resolver

a) $(3X+1)5 - 2X = 6X+3$

b) $\frac{(X-2)}{(X+3)} - \frac{(X-5)}{(X-1)} = 0$

c) $\frac{3X-1}{3} - \frac{(3-X)}{3} = \frac{6X+1}{2}$

d) $-(2X-4) + (-1)(-3X+2) = (4X-12)(-1)$

2. <u>Problemas</u>:

Cuando pilas, de tensión E voltios cada una y resistencia interna r ohms, se conectan en serie, la corriente I que circula por un circuito exterior de resistencia R es:

$$I = \frac{nE}{R+nr} \qquad n: \text{número de pilas}$$

Calcular el número de pilas necesario si:

E = 5 volts
r = 0.5 ohmios
I = 10 amperes
R = 10 ohmios

AL-10

CURSO DE ALGEBRA

10.1- Definiciones

Por ecuación se entiende toda igualdad propuesta entre dos expresiones algebraicas

Ejemplo:

$$7x - 4 = 2x + 21$$

Sobre dicha igualdad pueden realizarse transformaciones, las que serán válidas siempre y cuando sigan manteniendo la igualdad. Las transformaciones permitidas fueron analizadas en la sección correspondiente a la resolución de fórmulas; y todo lo dicho allí es perfectamente aplicable a ecuaciones.

Resolver la ecuación significa encontrar el ó los valores de la incógnita que hacen cierta la igualdad propuesta. Sí en el ejemplo indicado más arriba, se reemplaza el valor de la incógnita x por:

$$x = 5$$

se tiene:

$$(7.5) - 4 = 35 - 4 = 31$$

en el lado izquierdo de la igualdad.

Mientras que en el lado derecho es:

$$(2.5) + 21 = 10 + 21 = 31$$

luego $31 = 31$ lo que implica que la igualdad se satisface, es decir que el valor de la incógnita es $x = 5$

Existen diversos métodos para calcular el valor de la incógnita. Dichos métodos dependen además del tipo de ecuación que se trate.

10.2- Clasificación de ecuaciones

La clasificación de ecuaciones sencillas se hace en base a las consideraciones fundamentales a saber:

- el grado de la ecuación
- el número de incógnitas

Como se sabe, cada expresión algebraica posee un determinado grado. En este caso el grado se refiere a las potencias de las incógnitas y al producto de las mismas, ejemplos:

a) $7x^2 ab - 2x^3 b + 2cx = 4x^2 - 2x$

ecuación de tercer grado, debido a que en el monomio $-2x^3 b$ la incógnita posee el exponente 3 y se observa que es el mayor exponente en todos los monomios

b) $7x^2 y^3 ab - 2x^3 y b + 2cx = 4x^2 - 2y$

ecuación de quinto grado debido al monomio $7x^2 y^3 ab$, en el cual el grado se obtiene con la suma de los grados en x y en y que constituyen las incógnitas.

En los ejemplos anteriores se observa además que el caso a) se tiene una sola incógnita, en el caso b) se tienen 2 incógnitas (x e y)

En base a estas consideraciones las ecuaciones pueden clasificarse en:

1° Grado : 1 incógnita ; 2 incógnitas ; 3 incógnitas ; etc.

2° Grado : 1 incógnita ; 2 incógnitas ; 3 incógnitas ; etc.

3° Grado : 1 incógnita ; 2 incógnitas ; 3 incógnitas ; etc.

Etc., etc., -

N^{mo} Grado : 1 incógnita ; 2 incógnitas ; 3 incógnitas ; etc.

10.3- Resolución de ecuaciones de Primer grado con una incógnita

Caso a) por transposición:

Ejemplo:

$$7x - 4 = 2x + 21$$

se transponen todos los monomios que poseen la incógnita al lado izquierdo (LI) de la ecuación y los que poseen únicamente números al lado derecho (LD)

$$7x - 2x = 21 + 4$$

$$x(7 - 2) = 25$$

$$x = \frac{25}{5}$$

$$x = 5$$

Ejemplo:

$$(10\ x + 6) - (11 - 15\ x) = 20\ x$$

primeramente se sacan los paréntesis:

$$10\ x + 6 - 11 + 15\ x = 20\ x$$

luego se procede como en el ejemplo anterior

$$10\ x + 15\ x - 20\ x = 11 - 6$$

$$x\ (10 + 15 - 20) = 5$$

$$x = \frac{5}{5}$$

$$x = 1$$

Caso b): Ecuaciones que implican productos
Ejemplo: $(x-1)(x+2) = (x-3)(x-2)$

se realizan los productos:

$$x^2 + 2\ x - x - 2 = x^2 - 2\ x - 3\ x + 6$$

$$x^2 + x - 2 = x^2 - 5\ x + 6$$

y se continúa en la forma conocida:

$$\cancel{x^2} + x - \cancel{x^2} + 5x = 6 + 2$$

$$6\ x = 8$$

$$x = \frac{8}{6} = 1\ 1/3$$

En este caso el término de 2° Grado ha sido eliminado y la ecuación quedo de 1° Grado.

Caso c): Ecuaciones que incluyen fracciones

Ejemplo 1 :

$$\frac{1}{3}\ (2\ x - 1) - \frac{1}{5}\ (4\ x - 6) = \frac{7}{15}$$

En este ejemplo se observa que MCD de 3, 5 y 15 es el número 15, luego se multiplican ambos lados de la ecuación por 15:

$$5\,(2x-1)-3\,(4x-6)=7$$

$$(10x-1)-(12x-18)=7$$

$$10x-5-12x+18=7$$

$$10x-12x=7-18+5$$

$$-2x=-6$$

$$2x=6$$

$$x=\frac{6}{2}$$

$$x=3$$

Ejemplo 2:

$$\frac{(x+5)}{(x+3)}+\frac{(5-x)}{(x+5)}=0$$

En este caso se presentan dos caminos:

- ó bién multiplicar por el MCD
- ó bién se resuelve por transposición

$$\text{MCD} = (x+3)\,(x+5)$$

Por el MCD

$$\cancel{(x+3)}\,(x+5)\,\frac{(x+5)}{\cancel{(x+3)}}+(x+3)\,\cancel{(x+5)}\,\frac{(5-x)}{\cancel{(x+5)}}=0$$

$$(x+5)^2+(x+3)(5-x)=0$$

$$\cancel{x^2}+10x+25+5x-\cancel{x^2}+15-3x=0$$

$$10x+5x-3x=-25-15$$

$$12x=40$$

$$x=-\frac{40}{12}$$

$$x=-\frac{10}{3}=-3\ \frac{1}{3}$$

Por transposición

$$\frac{x+5}{x+3}=\frac{(5-x)}{(x+5)}$$

$$(x+5)(x+5)=-(5-x)(x+3)$$

$$x^2+10x+25=-5x-15+x^2+3x$$

$$\cancel{x^2}+10x+5x-3x-\cancel{x^2}=-15-25$$

$$12x=-40$$

$$x=-\frac{40}{12}$$

$$x=-\frac{10}{3}=-3\ \frac{1}{3}$$

Ejemplo 3:

$$\frac{(x+1)}{(x^2-4x+3)} + \frac{(x-2)}{(x^2-7x+12)} - \frac{(2x-5)}{(x^2-5x+4)} = 0$$

Primero se factorean los denominadores

$$\left.\begin{aligned} x^2 - 4x + 3 &= (x-1)(x-3) \\ x^2 - 7x + 12 &= (x-4)(x-3) \\ x^2 - 5x + 14 &= (x-4)(x-1) \end{aligned}\right\} \quad MCD = (x-1)(x-3)(x-4)$$

luego se multiplican por M.C.D.

$$\frac{\cancel{(x-1)}\cancel{(x-3)}(x-4)(x+1)}{\cancel{(x-1)}\cancel{(x-3)}} + \frac{(x-1)\cancel{(x-3)}\cancel{(x-4)}(x-2)}{\cancel{(x-4)}\cancel{(x-3)}} - \frac{\cancel{(x-1)}(x-3)\cancel{(x-4)}(2x-5)}{\cancel{(x-4)}\cancel{(x-1)}} = 0$$

$$(x-4)(x+1) + (x-1)(x-2) - (x-3)(2x-5) = 0$$

$$\cancel{x^2} - 3x - 4 + \cancel{x^2} - 3x + 2 - \cancel{2x^2} + 11x - 15 = 0$$

$$-3x - 3x + 11x = 4 - 2 + 15$$

$$5x = 17$$

$$x = \frac{17}{5} = 3\ \frac{2}{5}$$

10.4- Aplicaciones

Mediante la aplicación de los conceptos de la ecuación de primer Grado con una incógnita, pueden resolverse los problemas relativos a cuestiones simples de la técnica. Dichos problemas deben entonces plantearse como una ecuación de primer Grado con una incógnita, para ello deben seguirse los siguientes pasos:

a) Representar las incógnitas con letras, quedando bién claro a que unidad representa.

b) Expresar la situación del problema en términco de las letras de las incógnitas.

c) Formar la ecuación que expresa la igualdad requerida en el problema.

d) Resolver la ecuación y determinar la incógnita.

e) Verificar la respuesta

Ejemplo:

Una plancha rectangular de hierro posee 5 m de longitud. En un extremo se recorta un trozo de 0,9 mts y en el otro extremo un trozo de 0,25 mts. Encontrar el ancho de la placa sabiendo que el resto pesó 82 kg y que el peso de 1 m^2 = 30 kg.

Si se llama con x al ancho incógnita es:

Area inicial : $5.x\ m^2 = Ai$

Area cortada : $(0,9\ x + 0,25\ x) m^2 = 1,15\ x\ m^2 = Ac$

Area restante: $Ai - Ac = 5\ x - 1,15\ x = (5-1,15)x = 3,85x$

El area restante pesa: 82 kg

luego

$$82\ kg \text{ ———————— } 3,85\ x\ m^2$$

$$30\ kg \text{ ———————— } 1\ m^2$$

$$\therefore\ 82\ kg \times 1\ m^2 = 30\ kg \times 3,85 \times m^2$$

$$\therefore\ x = \frac{82\ \cancel{kg}}{30\ \cancel{kg}}\ \frac{1\ \cancel{m^2}}{3,85\ \cancel{m^2}}$$

$$\cong 0,56\ m$$

10.5- Ecuaciones de Primer Grado con dos incógnitas

Avanzando en complejidad, se llegó a este otro tipo de ecuaciones, en este caso, la igualdad propuesta involucra expreciones algebraicas de primer grado, pero con monomios que pareceran como incógnitas a x ó a y.

Ejemplo:

$$3\ x - 2\ y = 4 - 2\ x$$

Entonces, al tratar de resolver la expresión por alguno de los métodos conocidos se llega a otra expresión que pone en evidencia el hecho de que una incógnita podrá tomar un único valor sí y solo sí se conoce un valor de la otra, se obtienen entonces, pares de valores x - y tal que satisfacen la ecuación, pero dichos pares de valores son infinitos ya que se deduce uno siempre y cuando al otro se le da cualquier valor.

En el caso del ejemplo:

$$3x + 2x = 4 + 2y$$

$$5x = 4 + 2y$$

$$x = \frac{4}{5} + \frac{2}{5}y$$

si $y = 1$ $\quad x = \frac{6}{5}$

si $y = 4$ $\quad x = \frac{8}{5}$

si $y = -1$ $\quad x = \frac{2}{5}$

etc. etc.

Es decir que podrían asignarsele infinitos valores diferentes a y se obtendrían los correspondientes infinitos valores de x, en consecuencia los infinitos pares x - y que satisfacen la ecuación.

10.6- Sistema de dos ecuaciones con dos incógnitas

La utilidad de las ecuaciones de primer grado con dos incógnitas se pone en evidencia si se considera una segunda ecuación, tal que uno solo de los posibles pares de valores x - y sea capaz de hacer ciertas simultáneamente los de ecuaciones.

Al conjunto de ecuaciones que deben satisfacerse simultaneamente con un único juego de valores de las incógnitas, se la denomina sistema de ecuaciones.

En nuestro caso será un sistema de dos ecuaciones con dos incógnitas.

Ejemplo:

$$\begin{array}{ll} \text{I} & \left\{ \begin{array}{l} 3x + 2y = 13 \\ 3x - 2y = 5 \end{array} \right. \\ \text{II} & \end{array}$$

Constituye un caso de sistema de ecuaciones.

Resolver el sistema significa encontrar un par de valores x - y, único que hace cierto simultaneamente las dos igualdades propuestas.

En otras palabras, de los infinitos pares de valores x - y que satisfacen la ecuación I y de las infinitas que satisfacen la ecuación II hay que ubicar el par común que resulta único y que sirve para hacer cierta tanta la igualdad de I como la II.

10.7- Metodos de resolución

Hay diversos métodos, pero únicamente el análisis cuidadoso y la experiencia adquirida en la resolución de muchos problemas dará una idea rápida de cual de los métodos es el aplicable a un problema en particular.

10.7.1- Método de eliminación:

Ejemplo 1 :

$$\begin{array}{r} \text{I} \\ \text{II} \end{array} \begin{cases} 3x + 2y = 13 \\ 3x - 2y = 5 \end{cases}$$

sumando m.a.m. las dos ecuaciones es:

$$\begin{array}{rl} & 3x + 2y = 13 \\ + & 3x - 2y = 5 \\ \hline & 6x + 0y = 18 \end{array}$$

$$6x = 18 \quad (i)$$

$$x = \frac{18}{6}$$

$$x = 3$$

reemplazando este valor en la ecuación I y II (es indistinto):

en I : $3(3) + 2y = 13$

$$2y = 13 - 9 = 4$$

$$y = \frac{4}{2}$$

$$y = 2$$

se obtiene el par $x = 3$; $y = 2$ que satisface simultaneamente la ecuación I y la II.

Verificación:

en I $3(3) + 2(2) = 9 + 4 = 13$ $\checkmark$ correcta en II $3(3) - 2(2) = 9 - 4 = 5$ √ correcta

Conclusión

el método de la eliminación consiste esencialmente en obtener, para la misma incógnita, los mismos coeficientes en las dos ecuaciones; lüego se las suma (ó se las resta) de modo que dicha incógnita queda eliminada, se obtiene como resultado una ecuación de una incógnita (i) (que es la no eliminada) y que se calcula y reemplaza posteriormente en cualquiera de las ecucaciones de partida, con el objeto de obtener el valor de la restante.

Ejemplo 2 :

$$\begin{array}{r} \mathrm{I} \\ \mathrm{II} \end{array} \begin{cases} 3x + 2y = 12 \\ x + 3y = 11 \end{cases}$$

En este caso, ninguna de las incógnitas posee los mismos coeficientes en las 2 ecuaciones. Pero sí a la ecuación II se la multiplica en ambos miembros por un mismo número, la ecuación no varía. Se observa que si se la multiplica a la ecuación II por 3, el coeficiente en X será el mismo en las 2 ecuaciones, es decir:

$$\begin{array}{l} \mathrm{I} = \mathrm{I}' : \\ \mathrm{II} \times 3 = \mathrm{II}' : \end{array} \begin{cases} 3x + 2y = 12 \\ 3x + 9y = 33 \end{cases}$$

En el nuevo sistema de ecuaciones I' y II' se puede hacer:

$$\begin{array}{rrrrr} & 3x & + 2y & = & 12 \\ - & 3x & + 9y & = & 33 \\ \hline & 0x & - 7y & = & -21 \end{array}$$

Entonces:

$$y = \frac{-21}{-7}$$

$$= 3$$

con este valor en I ó en II es:

en I:

$$3x + 2(3) = 12$$

$$3x = 12 - 6$$

$$x = \frac{6}{3}$$

$$x = 2$$

y se obtiene el par buscado $y = 3$; $x = 2$

Verificación:

en I $\quad 3(2) + 2(3) = 6 + 6 = 12 \quad \checkmark$ correcta

en II $\quad (2) + 3(3) = 2 + 9 = 11 \quad \checkmark$ correcta

Ejemplo 3:

$$\begin{cases} \text{I} & \dfrac{x}{7} - \dfrac{y}{3} = -3 \\[2ex] \text{II} & \dfrac{x}{3} + \dfrac{y}{4} = 10 \end{cases}$$

si se multiplica I por $\frac{7}{3}$ es :

$$\text{I}' : \quad \frac{\cancel{7}}{3}\,\frac{x}{\cancel{7}} - \frac{7}{3}\,\frac{y}{3} = -\cancel{3}\,\frac{7}{\cancel{3}}$$

$$\text{I}' : \quad \frac{x}{3} - \frac{7}{9}y = -7$$

luego haciendo I' - II

$$\begin{cases} \text{I}' & \dfrac{x}{3} - \dfrac{7}{9}y = -7 \\[2ex] -\ \text{II} & \dfrac{x}{3} + \dfrac{y}{4} = 10 \end{cases}$$

$$-\frac{7}{9}y - \frac{y}{4} = -7 - 10$$

$$-\frac{7}{9}y - \frac{1}{4}y = -17$$

$$y\left(-\frac{7}{9}-\frac{1}{4}\right)=-17$$

$$y\left(\frac{-28-9}{36}\right)=-17$$

$$y\left(-\frac{37}{36}\right)=-17$$

$$y=\frac{17 \times 36}{37}$$

$$=\frac{612}{37}=16\ \frac{20}{37}$$

en II :

$$\frac{x}{3}+\frac{1}{4}\left(\frac{612}{37}\right)=10$$

$$\frac{x}{3}=10-\frac{153}{37}$$

$$x=30-\frac{3 \times 153}{37}$$

$$=\frac{1110-459}{37}$$

$$=\frac{651}{37}=17\ \frac{22}{37}$$

luego $x = 17\ \frac{22}{37}$ $\qquad y = 16\ \frac{20}{37}$

10.7.2 Método de substitución

En este método, en una ecuación se despeja una incógnita y se reemplaza el valor en la otra ecuación que quedará entonces como ecuación de una sola incógnita.

Ejemplo:

$$\begin{array}{l} \text{I} \\ \text{II} \end{array} \begin{cases} 5x - 3y = -37 \\ 2x + 3y = 2 \end{cases}$$

sí en II se despeja x es :

$$2x = 2 - 3y$$

$$x = \frac{2}{2} - \frac{3}{2}y$$

$$x = 1 - \frac{3}{2}y \quad \text{(ii)}$$

y a este valor se lo reemplaza en x de la ecuación I:

$$5\ (1 - \frac{3}{2}\ y) - 3\ y = -\ 37$$

$$5 - \frac{15}{2}\ y - 3\ y = -\ 37$$

$$y\ (-\frac{15}{2} - 3) = -\ 37 - 5$$

$$y\ (\frac{-15-6}{2}) = -\ 42$$

$$y\ (-\frac{21}{2}) = -\ 42$$

$$y = \frac{42}{21} \times 2$$

$$= 2 \times 2$$

$$= 4$$

luego con $y = 4$ se reemplaza en (ii) y es:

$$x = 1 - \frac{3}{2}\ (4) = 1 - 6 = -\ 5$$

luego:

$y = 4 \qquad x = -\ 5$

Verificación:

en I : $5\ (-5) - 3\ (4) = -25 - 12 = -\ 37$ ✓ correcta

en II : $2\ (-5) + 3\ (4) = -10 + 12 = 2$ ✓ correcta

10.7.3 Método de igualación

Consiste en despejar en las dos ecuaciones la misma incógnita, como su valor debe ser el mismo en los dos sistemas, se igualan los miembros y queda una ecuación en la incógnita no igualada.

Ejemplo:

sea el mismo ejemplo del caso anterior:

$$\begin{array}{ll} \text{I} & \left\{ \begin{array}{l} 5\ x - 3\ y = -\ 37 \\ 2\ x + 3\ y = 2 \end{array} \right. \\ \text{II} & \end{array}$$

de I $\qquad x = \dfrac{-\ 37 + 3\ y}{5} \qquad$: I'

de II $\qquad x = \dfrac{2 - 3\ y}{2} \qquad$: II'

Luego si los primeros miembros son iguales, los segundos también lo son:

$$\frac{-37 + 3\,y}{5} = \frac{2 - 3\,y}{2}$$

que ya es una ecuación de primer grado con la incógnita y

$$-\ 37 \times 2 + 3\,y \times 2 = 5 \times 2 - 3\,y \times 5$$

$$-74 + 6\,y = 10 - 15\,y$$

$$15y + 6\,y = 10 + 74$$

$$21\,y = 84$$

$$y = \frac{84}{21}$$

$$= 4$$

Con $y = 4$ en I' ó en II' es:

en I':

$$x = \frac{-37 + 3\ (4)}{5}$$

$$= \frac{-37 + 12}{5}$$

$$= \frac{-\ 25}{5}$$

$$= -\ 5$$

luego $y = 4$ $x = 4$ y se comprueba que por otro método diferente se obtiene el mismo resultado.

10.8- Determinantes

Se conoce en álgebra con este nombre, a un número indlcado por medio de una expresión algebraica de otros números los que se agrupan ordenadamente en filas y columnas entre las barras

Filas →

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots\cdots\cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \cdots\cdots\cdots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \cdots\cdots\cdots & a_{3n} \\ - & - & - & - \ - \ - \ - \ - & - \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{m3} & & a_{mn} \end{vmatrix} = \Delta\ mn$$

↑
Columnas

donde un elemento del determinante Δ_{mn} se indica genéricamente con

a_{jk} : *elemento ubicado en fila j y columna k*

Fila ┘ └ *Columna*

y Δ_{mn} *significa : determinante de m filas y n columnas*

Para la resolución de sistemas de ecuaciones comunes interesan los llamados <u>determinantes cuadrados</u>; en los cuales el número de filas es igual al número de columnas

a) La operación indicada por un determinante 2 x 2, es decir de 2 filas y 2 columnas es:

$$\Delta\, 2 \times 2 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11} \cdot a_{22} - a_{21}\, a_{12} = 2 \times 2$$

evidentemente, realizada esa operación se obtiene el número que represente al determinante.

b) La operación indicada para un determinante 3 x 3 es:

$$\Delta\, 3 \times 3 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}\, a_{22}\, a_{33} + a_{12}\, a_{23}\, a_{31} + a_{21}\, a_{32}\, a_{13} - a_{31}\, a_{22}\, a_{13} - a_{21}\, a_{12}\, a_{33} - a_{32}\, a_{23}\, a_{11} = 3.3$$

<u>Ejemplos</u>:

1) $$\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 2 \end{vmatrix} = 2 \,.\, 2 - 4 \times 3 = 4 - 12 = -8$$

2) $$\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 8 \end{vmatrix} = 1 \,.\, 8 - 3 \times 2 = 8 - 6 = 2$$

3) $$\begin{vmatrix} -1 & -4 \\ -2 & 5 \end{vmatrix} = (-1).5 - (-2)(-4) = -5-8=-13$$

4) $$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 3 & 4 & 1 \\ 1 & 3 & 2 \end{vmatrix} = 1 \times 4 \times 2 + 2 \times 1 \times 1 + 3 \times 3 \times 1 - 1 \times 4 \times 1 - 3 \times 1 \times 1 - 3 \times 2 \times 2 =$$

$$= 8 + 2 + 9 - 4 - 3 - 12 =$$

$$= 19 - 19 = 0$$

10.8.1 <u>Aplicación de los determinantes 2 x 2 a la resolución de sistemas de 2 ecuaciones con 2 incógnitas</u>.

Sea un sistema:

$$\begin{cases} a\,x + by = c \\ d\,x + ey = f \end{cases}$$

se forma el determinante de los coeficientes:

$$\Delta = \begin{vmatrix} a & b \\ d & e \end{vmatrix}$$

se forma el determinante de las x :

$$\Delta_x = \begin{vmatrix} c & b \\ f & e \end{vmatrix}$$

Es similar al determinante de los coeficientes solo que en lugar de los coeficientes de x, que son a y d , se colocan los coeficientes independientes c y f respectivamente.

Se forma el determinante de las y

$$\Delta y = \begin{vmatrix} a & c \\ d & f \end{vmatrix}$$

Analogamente, es similar el de los coeficientes, solo que en lugar de los coeficientes de y, que son b y e se colocan los coeficientes independientes c y f respectivamente.

Luego las incógnitas se expresan como:

$$x = \frac{\Delta_x}{\Delta} \qquad \text{e} \qquad y = \frac{\Delta_y}{\Delta}$$

<u>Ejemplo</u>:

sea el ejemplo anterior:

$$\begin{cases} 5\,x - 3\,y = -37 \\ 2\,x + 3\,y = 2 \end{cases}$$

luego

$$\Delta = \begin{vmatrix} 5 & -3 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} \qquad \Delta_x = \begin{vmatrix} -37 & -3 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} \qquad \Delta_y = \begin{vmatrix} 5 & -37 \\ 2 & 2 \end{vmatrix}$$

luego:

$$x = \frac{\Delta_x}{\Delta} = \frac{\begin{vmatrix} -37 & -3 \\ 2 & 3 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 5 & -3 \\ 2 & 3 \end{vmatrix}} = \frac{(-37)(3) - (-3)(2)}{(5)(3) - (-3)(2)} =$$

$$= \frac{-111 + 6}{15 + 6}$$

$$= \frac{-105}{21} = -5$$

$$y = \frac{\Delta_y}{\Delta} = \frac{\begin{vmatrix} 5 & -37 \\ 2 & 2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 5 & -3 \\ 2 & 3 \end{vmatrix}} = \frac{(5)(2)-(-37)(2)}{21} =$$

$$= \frac{10 + 74}{21}$$

$$= \frac{84}{21}$$

$$= 4$$

luego $x = 5$ $\qquad y = 4$

La gran ventaja de este método, es que puede aplicarse en forma compacta en sistemas más complejos.

10.9- Aplicaciones

Muchos problemas técnicos pueden ser resueltos mediante el planteo de sistemas de ecuaciones.

Ejemplo 1 :

La resistencia R, de el arrollamiento de un termómetro resistencia, varía con la temperatura t° C de acuerdo con la fórmula:

$$R = a + b\,t \text{ ohm}$$

El termómetro se calibra colocándolo en agua caliente, primero a 20° y luego a 100° C, los valores obtenidos son:

para $t = 20°\,C$: $R = 11,5$ ohm

para $t = 100°C$: $R = 14,7$ ohm

Calcular las constantes a y b de la fórmula:

$$\begin{array}{ll} \text{I} & \left\{ \begin{array}{l} a + 20\,b = 11,5 \\ a + 100\,b = 14,7 \end{array} \right. \\ \text{II} & \end{array}$$

Resolución:

II - 1 es: $80\,b = 3,2$

$$b = \frac{3,2}{80}$$

$$= \frac{3,2}{8}\ \frac{x\,10^{-1}}{x\,10}$$

$$= 4 \times 10^{-2}$$

$$b = 4 \times 10^{-2}\ \frac{\text{ohm}}{°C}$$

en I es:

$$a + 20\,(4 \times 10^{-2}) = 11,5$$

$$a = 11,5 - 80 \times 10^{-2}$$

$$= 11,5 - 0,8$$

$$= 10,7$$

luego $b = 4 \times 10^{-2}$ y $a = 10,7$ ohm

y la fórmula es:

$$R = 10,7 + 0,04\ t$$

Ejemplo 2:

Un avión recorre 1.800 km con viento a favor en 3 horas. Luego retorna contra el viento que se supone de igual velocidad, tardando 3 3/4 horas. Calcular la velocidad del avión y la del viento.

Se asignan incógnitas:

x : Velocidad del avión

y : Velocidad del viento

$$\text{Velocidad} = \frac{\text{espacio}}{\text{tiempo}}$$

de ida : I $\quad x + y = \dfrac{1800 \text{ km}}{3 \text{ h}} = 600 \text{ km/h}$

de retorno: II $\quad x - y = \dfrac{1800 \text{ km}}{3{,}75 \text{ h}} = 480 \text{ km/h}$

I - II : $\quad y -(-y) = 600 - 480 = 120 \text{ km/h}$

$$2y = 120 \text{ km/h}$$

$$y = \frac{120}{2} \text{ km/h}$$

$$y = 60 \frac{\text{km}}{\text{h}}$$

de I es: $\quad x = 600 \text{ km/h} - 60 \text{ km/h}$

$$= 540 \text{ km/h}$$

luego:

Velocidad del avión: 540 km/h

Velocidad del viento: 60 km/h

Oscar A. Martínez

GUIA DE PROBLEMAS

1- Resolver

a) $(6x + 1) - 3 \stackrel{\circ}{=} 12x - (8x - 4)$

b) $(3x + 1)(2x - 7) = 6(x - 3)^2 + 7$

c) $\dfrac{(2x - 2)}{4} - \dfrac{(3x + 1)}{2} = \dfrac{(x + 1)}{6}$

d) $\dfrac{(2x + 1)}{x^2 - 8x + 12} + \dfrac{(x - 2)}{(x^2 - 9x + 18)} = \dfrac{(3x + 4)}{(x^2 - 5x + 6)}$

2- Problemas

a) La temperatura centígrada, correspondiente a una temperatura Fahrenheit está dada por la siguiente fórmula:

$$C = E\,\frac{5}{9}\,(F - 32)$$

Calcular la temperatura Fahrenheit correspondiente a -10°C.

b) Cuando n pilas, de $E = 1,5$ V cada una, y resistencia interna $r = 0,5\,\Omega$, se conectan en serie con una resistencia exterior $R = 10$ ohms ; se observa que circula una corriente $I = 2$ amperes.

La fórmula que relaciona estas magnitudes es:

$$I = \frac{nE}{R + nr}$$

Calcular el número n de pilas necesario.

3- Resolver los siguientes sistemas:

a) $\begin{cases} 2x + y = 8 \\ x + y = 5 \end{cases}$

b) $\begin{cases} 2x + 3y = 5 \\ x + y = 2 \end{cases}$

c) $\begin{cases} \dfrac{x}{5} + \dfrac{y}{6} = 3 \\ \dfrac{x}{10} - \dfrac{y}{3} = -1 \end{cases}$

d) $\begin{cases} \dfrac{(x - 1)}{3} + \dfrac{(y + 2)}{2} = 3 \\ \dfrac{(1 - x)}{6} + \dfrac{(4 - y)}{2} = \dfrac{1}{2} \end{cases}$

e) $\begin{cases} 7,21\,x + 12 = -6,3\,y \\ x - 3,2 = 7,3\,y + 4 \end{cases}$

4- Problemas

a) 5 kg de agua pesada de pureza isotópica desconocida, se agregan a 10 kg de agua pesada de diferente pureza isotópica. La mezcla resulta con una pureza del 80 %.
Cuando 2 kg. de la primer muestra, no agregan a 3 kg de la segunda se obtiene una pureza del 78 % en la mezcla. Calcular las impurezas isotópicas.

b) La presión P, y el volúmen V de un gas estan relacionados por la fórmula

$$(p + p_o)\, V = k$$

Cuando la temperatura permanece constante, K es una constante; y Po es la presión atmosférica.

Ahora : $V = 21$ pie^3 cuando $P = 14{,}7$ psig

y $V = 14$ pie^3 cuando $P = 29{,}4$ psig.

Calcular Po y la constante K.

AL-11

CURSO DE ALGEBRA

11.1- Concepto de función

Cuando se estudiaron las ecuaciones de primer grado con dos incógnitas, se vió que había infinitos pares de valores que satisfacían dicha ecuación, pero en este caso, debía asignarse un valor a la "variable" x y se obtenía otro correspondiente de la incógnita y.

Debe observarse entonces que las expresiones involucran símbolos que permanecen fijos y símbolos que pueden variar, a los símbolos fijos se les denominan como coeficientes y puede asignárseles además el término de constantes, mientras que los símbolos que representan magnitudes que pueden cambiar de valor, se los llama variables.

Como ejemplo, sí se considera la expresión que relaciona el volúmen de una esfera con un radio se tiene

$$V = \frac{4}{3}\pi r^3$$

se observa entonces que dicha expresión posee las constantes $\frac{4}{3}\pi$ y las variables r y V.

Ahora bién, a cada valor asignado al radio r corresponderá un valor de V, luego puede decirse que V depende de r ó que V es función de r y puede anotarse como:

$$V = f(r)$$

que indica que el volúmen V es función del radio r.

Además entre las variables puede establecerse una diferencia pues como hay una que depende de la otra se pueden clasificar las variables como

- variable dependiente (ejemplo: V)
- variable independiente (ejemplo: r)

Se deduce entonces que la variable independiente puede tomar cualquier valor, pero para cada valor que asuma, automáticamente le asigna un valor (ó más de uno en algunos casos) a la variable dependiente.

NOTACION: Cuando se manejan entonces funciones, en vez de escribir la expresión completa que relaciona las variables, se acostumbra a indicar la relación de dependencia de la variable dependiente con respecto a la variable independiente como:

$$\underset{\text{variable dependiente}}{y} = f\,(\underset{\text{variable independiente}}{x})$$

y se lee: y es función de x.

donde el término "función" sintetiza la expresión algebraica que relaciona ambas variables.

<u>Ejemplo</u>:

$y = f(x)$ puede ser : $y = 2 - 4x$

En este caso también puede anotarse en forma abreviada el valor que toma la y para un dado valor de x , como ejemplo si interesa saber el valor de y cuando $x = 4$ puede anotarse como $y = f(4)$.

donde $f\,(4)$ significa:

$$f\,(4) = 2 - 2\,(4) = 2 - 8 = -6$$

es decir:

$$y = f\,(4) = -6$$

donde

$$f(x) = 2 - 4\,x$$

<u>Ejemplo</u>:

$$z = f\,(x, y) = x\,y^2 - x^2 + y$$

Calcular $f\,(0,1)$ significa evaluar la función cuando

$x = 0$ e $y = 1$

es decir

$$z \text{ en } f(0,1) = 0 \times 1^2 - 0^2 + 1 = 1$$

otras notaciones usadas para estos cálculos son:

$$f\,(0,1) = z\,\Big/_{\substack{x=0\\y=1}} = z\,\Big/_{0,1} = [z]_{\substack{x=0\\y=1}}$$

pero en el desarrollo del curso se utilizarán indistintamente

$$f\,(0,1) \quad ó \quad z\,\Big/_{\substack{x=0\\y=1}}$$

Ejemplos varios:

a) función $y = x = f(x)$

es decir $f(x) = x$

evaluar en $x = 0$; $x = 2$; $x = 4$

$f(0) = 0$

$f(2) = 2$ $\quad f(4) = 4$

b) función : $y = \frac{1}{x} = f(x)$

evaluar $f(x)$ en $x = 2$; $x = 3$; $x = 10$; $x = -100$

$f(2) = \frac{1}{2}$

$f(3) = \frac{1}{3}$

$f(10) = \frac{1}{10} = 0{,}1$

$f(-100) = -\frac{1}{100} = -0{,}01$

c) función

$y = f(x) = x^2 - 5x + 6$

evaluarla en $x = 0$; $x = -2$

$y/_{x=0} = f(0) = 6$

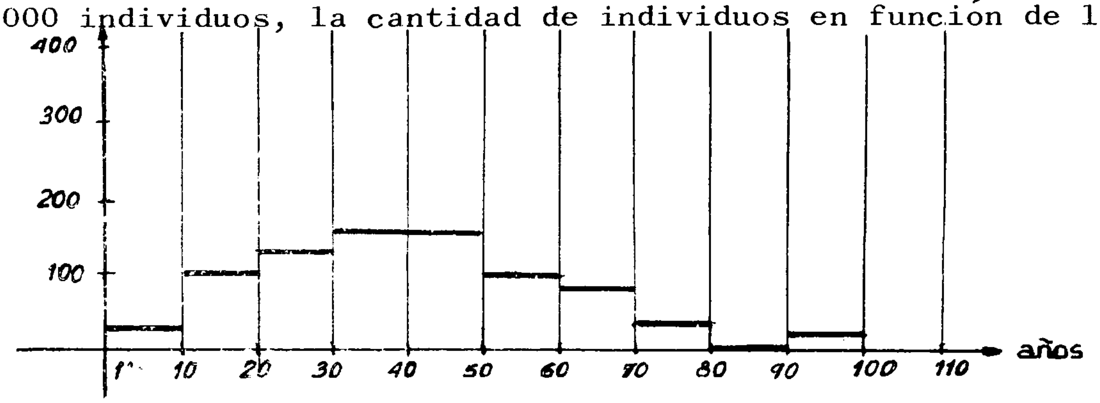
$y/_{x=-2} = f(-2) = 4 + 10 + 6 = 20$

11.2 - Representaciones graficas

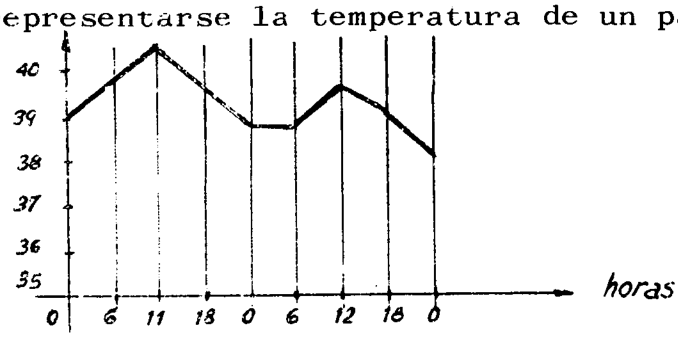
Es usual indicar enforma gráfica la dependencia ó la corroción de una variable con respecto a otra, por ejemplo puede representarse, de un total de 1.000 individuos, la cantidad de individuos en función de la edad.

Cantidad de

individuos



También podría representarse la temperatura de un paciente



11.3– Coordenadas rectangulares

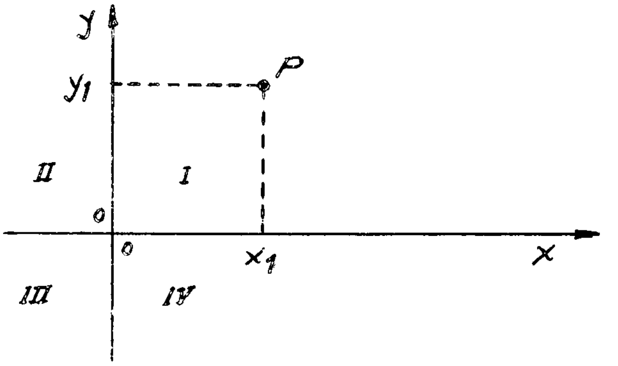
Constituye uno de los métodos más usuales para representar funciones, por medio de puntos.

Para facilitar la representación de dichos puntos, se recurre a un par de ejes de referencia.

Se constituye entonces un eje horizontal denominado eje x y otro perpendicular a él, el eje vertical, denominado eje y. Ambos ejes se denominan ejes coordenados.

De este modo cualquier punto del plano puede representarse mediante un par de números, que se representan ordenadamente según uno y otro eje cordenada, en la graduación asignada a los ejes.

Por ejemplo un punto P de "Coordenadas" x_1 e y_1 se obtiene ubicando en el eje x el valor x_1 y en el eje y el valor y_1, luego por x_1 se traza una perpendicular al eje x y por y_1 una paralela al eje x, la intersección de estas rectas determina el punto P.



la intersección del eje y con el eje x se denomina: origen, y le corresponden las coordenadas $(0,0)$.

A la coordenada x_1 según el eje x se la denomina Abcisa. A la coordenada y_1 según el eje y se la denomina Ordenada.

Se observa que el plano queda dividido, por la intersección de los dos ejes en 4 espacios denominados cuadrantes, denominados con los números romanos I; II; III y IV.

Los valores de x e y en cada uno de esos cuadrantes son:

I	$x > 0$	$y > 0$
II	$x < 0$	$y > 0$
III	$x < 0$	$y < 0$
IV	$x > 0$	$y < 0$

donde el sentido positivo de los ejes x e y se indican con una fle cha

11.4 - Representación gráfica en coordenadas (x, y)

Se dijo en el párrafo anterior que un juego de valores (x,y) determina un punto en el plano, ahora bién, para representar en el plano, es necesario que cada eje posea una adecuada graduación. El método más práctico consiste en recurrir al papel cuadriculado ó al papel milimetrado, sobre los cuales se grafica con comodidad.

Ejemplo:

Ubicación de puntos en el plano x - y
(Ver Fig. 1)

a) P_1 (1;5)
 └── ordenada
 └── absisa

b) P_2 (-4;-3)

c) P_3 (-4;3)

d) P_4 (-2,5;1)

e) P_5 (3;-7)

f) P_6 $(6;\frac{1}{2})$

11.4.1- Representación de ecuaciones de primer grado con 2 incógnitas

Cuando se estudió este tipo de ecuaciones, se vió que se satisfacían para un infinito número de pares de valores (x, y). Además podía despejarse una incógnita en función de la otra y se obtenía una $y = f(x)$ ó una $x = f(y)$, dicha función puede ser representada en el plano $x - y$.

Ejemplo: sea la ecuacion:

$$-2x + y = 4x - 3x + 1$$

si se resuelve para y es:

$$y = 4x - 3x + 2x + 1$$

$$= 3x + 1$$

se obtiene entonces

$$y = f(x) \quad ó \quad y = 3x + 1$$

Tal que para cada valor arbitrario dado a x se obtiene un valor (único en este caso de y), es decir:

si	$x = 0$	$y = 1$
"	$x = 1$	$y = 4$
"	$x = -1$	$y = -2$
"	$x = 6$	$y = 19$
"	$x = 2$	$y = 7$
	etc.	etc.

Puede formarse entonces una " Tabla de valores".

	x	$y = 3x + 1$
P_1	0	1
P_2	1	4
P_3	-1	-2
P_4	6	19
P_5	2	7

Cada par de valores puede representarse mediante un punto en el plano ($x - y$). La línea que une todos esos puntos en el plano, es la "gráfica" de la función.

Generalmente importantes resultados pueden obtenerse de tales gráficas como se verá más adelante.

En función del ejemplo, para los puntos de la tabla de valores se grafica en la figura 2.

Conclusiones de la gráfica: los puntos estan substancialmente alineados en una recta, dicha recta constituye la representación gráfica de la expresión analítica

$$y = 3x - 1$$

En forma gráfica se deduce además que es lógico que una expresión análitica como la indicada posea infinitas soluciones, puesto que cualquier punto de la recta, es solución de la ecuación, de alli que las soluciones sean infinitas.

AL-11.7

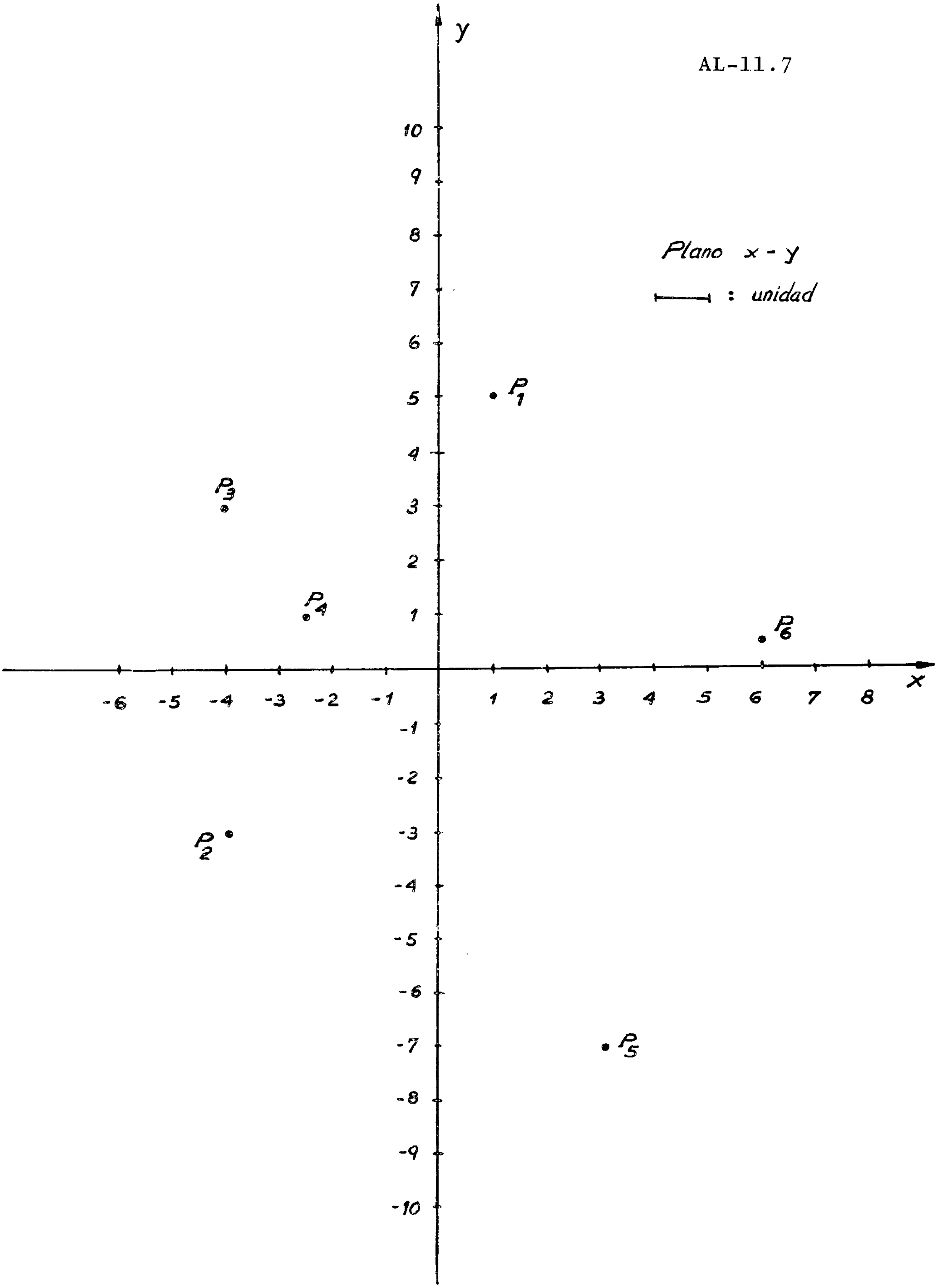


FIGURA 1

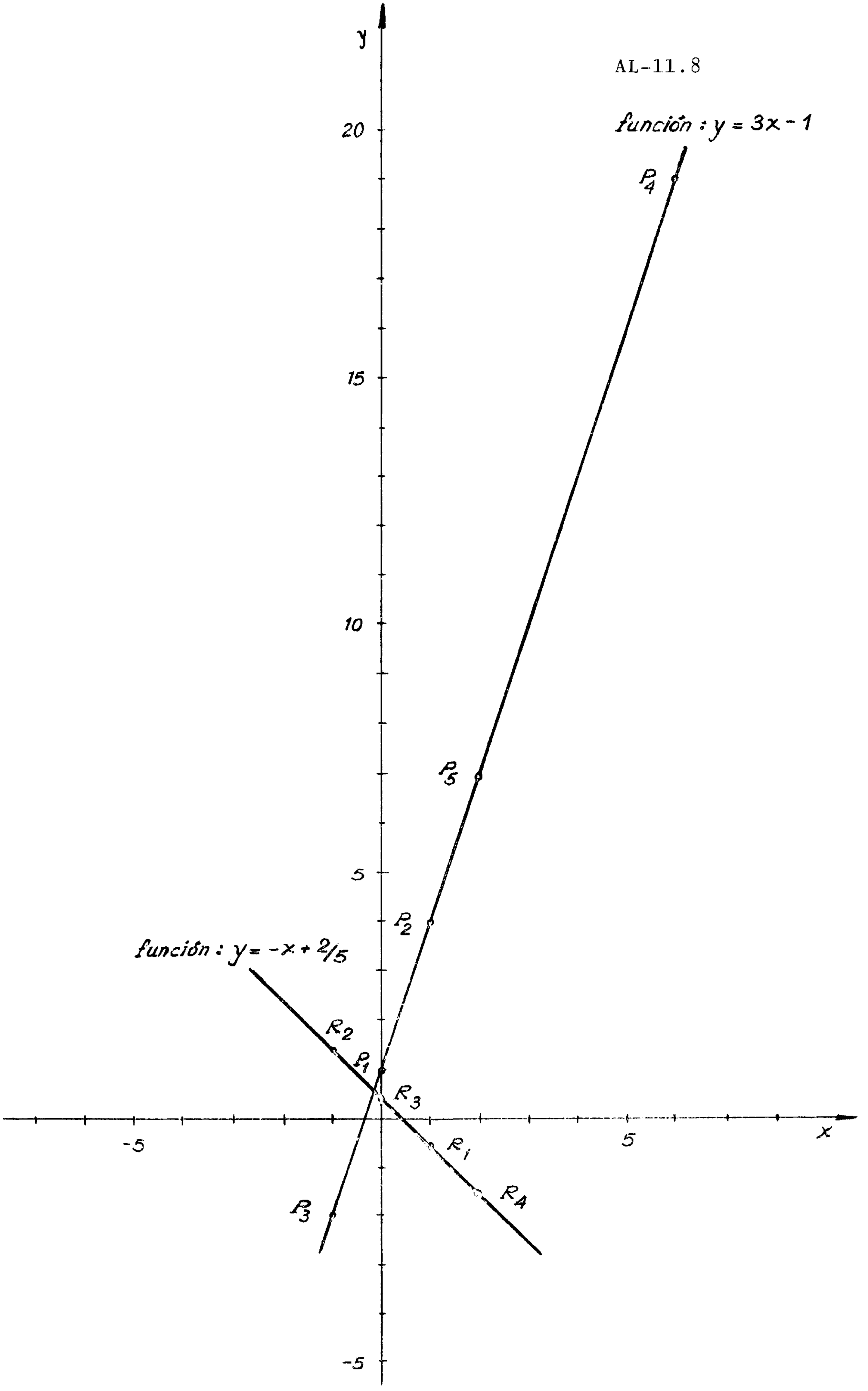

y
20
15
10
5
-5
-5
5
x
función : y = 3x - 1
función : y= -x + 2/5
P_1
P_2
P_3
P_4
P_5
R_1
R_2
R_3
R_4

FIGURA 2

Ejemplo: representar graficamente:

$$2x + 3y = -4x + x - 2y + 2$$

Resolviendo

$$2y + 3y = -4x + x - 2x + 2$$

$$5y = -6x + x + 2$$

$$5y = -5x + 2$$

$$y = -\frac{5}{5}x + \frac{2}{5}$$

$$y = -x + \frac{2}{5}$$

Con esta función puede formarse una tabla de valores que se representan en la figura 2 mediante los puntos R_1 ; R_2 ; etc.

R_i	x	$y = -x + 2/5$
R_1	1	$-3/5$
R_2	-1	$7/5 = 1\,2/5$
R_3	0	$2/5$
R_4	2	$-8/5 = -1\,3/5$
R_5	6	$-28/5 = -5\,3/5$

Donde nuevamente los puntos resultan alineadas sobre una recta.

11.5- Observación

Si con las ecuaciones de los ejemplos anteriores se forma un sistema de dos ecuaciones con 2 incógnitas se tiene:

$$\begin{cases} -2x + y = x + 1 \\ 2x + 3y = -3x + 2y + 2 \end{cases}$$

Analitícamente puede demostrarse, que este sistema posee una única solución, es decir un único par de valores (x, y) que hacen cierta simultaneamente las dos ecuaciones.

El punto de vista gráfico, de la figura 2 , constituye otra evidencia de este hecho, ya que el punto de intersección de las rectas pertenece simultaneamente a ambas rectas y además es único. Las coordenadas de este punto deben entonces coincidir con el par de valores (x, y) solución, que se obtendría analíticamente.

Oscar A. Martinez

GP-AL-11.1

GUIA DE PRACTICA

---

1) <u>Graficar</u>

a) $= 2x^2 - 4x + 2$

b) $= -x^2 - 2x + 1$

2) <u>Determinar graficamente los ceros</u>

$$y = x^3 + 4x^2 + x + 6$$

3) <u>Resolver los siguientes sistemas gráficamente y comparar resultados</u>

a) $\begin{cases} \dfrac{x}{5} + \dfrac{y}{6} = 3 \\[2ex] \dfrac{x}{10} - \dfrac{y}{3} = -1 \end{cases}$

b) $\begin{cases} 2x + 3y = 5 \\ x + y = 2 \end{cases}$

c) $\begin{cases} 7{,}21\,x + 12 = -6{,}3\,y \\ x - 3{,}2 = 7{,}3\,y + 4 \end{cases}$

4) <u>Graficar</u>

$$x^2 + y^2 = 4$$

Oscar A. Martinez