

C. N. E. A. Biblioteca	
ARCHIVO EDUCACIONES	
Nº 2	AÑO 1981

00.81.10

CNEA-NT 15/81

CAB-NT 5/81

REPUBLICA ARGENTINA
COMISION NACIONAL DE ENERGIA ATOMICA
Dependiente de la Presidencia de la Nación
CENTRO ATOMICO BARILOCHE

MODELO DE RESERVORIO BIDIMENSIONAL DE PETROLEO, CON
FRACTURAS VERTICALES Y POZOS EN PRODUCCION, FORMULADO
EN BASE AL ANALISIS DE ELEMENTOS FINITOS

Sergio Pissanetzky

Buenos Aires

1981

Abstract

We present the model of a two-dimensional vertically fractured oil reservoir with wells in production. The model is based on the Finite Element analysis. Both variational methods and the Galerkin procedure have been used for the sake of comparison. The model we present here is isothermal, for a single phase and a single component, which may be either gas or compressible non-saturated liquid. The density of the fluid is considered to be a function of pressure, and the rock porosity and permeability are arbitrary functions of the coordinates. In addition, the porosity is a function of pressure. The formulation can be extended to multiphase, thermal and compositional models.

Resumen

Se presenta un modelo de un reservorio bidimensional de petróleo que contiene fracturas verticales y pozos en producción. El modelo ha sido formulado en base al análisis de elementos finitos, empleando tanto el método variacional como el de Galerkin, con el propósito de compararlos. El modelo que presentamos es isotérmico, monofásico y de un solo componente que puede ser gas o líquido compresible no saturado. La densidad del fluido se considera una función de la presión y la porosidad y permeabilidad de la roca son funciones arbitrarias de las coordenadas. La porosidad es, además, una función de la presión. La formulación puede ser extendida a modelos multifásicos, térmicos y composicionales.

Introducción

El método de Elementos Finitos (MEF) (1) se emplea para la resolución numérica de ecuaciones diferenciales. El procedimiento empleado consiste en subdividir el recinto de solución en muchos Elementos Finitos, los que pueden ser triángulos o cuadriláteros en dos dimensiones, o tetraedros, pirámides o prismas en tres dimensiones. Sobre cada elemento se definen varios puntos llamados Nodos. Dentro de cada elemento, la función incógnita se aproxima, generalmente por medio de un polinomio lineal, cuadrático o cúbico en las coordenadas. Los coeficientes del polinomio se expresan en términos de los valores de la función incógnita en los nodos del elemento, llamados los valores de Nodo. Los valores de nodo se convierten en las incógnitas del problema, pues su conocimiento permite determinar la función incógnita en todos los puntos del recinto.

La ecuación diferencial y las condiciones de borde se reemplazan por una formulación integral, usualmente la minimización de un funcional de la función incógnita sobre todo el recinto, o bien en el método de Galerkin, la exigencia de ortogonalidad entre el "error" cometido en la ecuación diferencial y las funciones de base empleadas para la aproximación.

El MEF posee considerables ventajas si se lo compara con el método de diferencias finitas. El empleo de funciones continuas en el MEF permite establecer un teorema de convergencia de la solución (1,2), que garantiza la corrección

matemática de los resultados. MEF es un método directo (inclusive en el tiempo, si se desea, pues los elementos finitos pueden definirse también en el tiempo), no se requieren iteraciones, y se obtiene así una economía muy grande en la cantidad de cálculos que deben realizarse en el computador. Los elementos finitos empleados por el MEF pueden ser mucho más grandes que los bloques empleados para diferencias finitas, pueden tener cualquier forma para amoldarlas a la forma del recinto dado y las aproximaciones no necesitan ser lineales sino que pueden ser cuadráticas o cúbicas, todo lo cual permite reducir muchísimo el número total de nodos, y con él la cantidad de ecuaciones y el tiempo de computación necesaria para resolverlas.

Han aparecido ya los primeros trabajos que emplean el MEF para problemas de flujo en medios porosos (3,4,5). Las ventajas apreciadas, junto con el desarrollo de nuevas técnicas de computación principalmente por parte de A. George en Waterloo University y de F. Gustavson en el Watson Center de la IBM, hacen pensar que en un futuro próximo la mayor parte de los simuladores de reservorios de Petróleo, acuíferos, etc., trabajarán en base al MEF.

Aquí presentamos los elementos teóricos necesarios para poder formular un modelo de reservorio bidimensional, isotérmico monofásico y de un solo componente que puede ser gas o líquido compresible no saturado. El reservorio puede tener cualquier forma, pueden existir fracturas verticales de cualquier forma y posición y pozos en cualquier número y posición. La den-

sidad del fluido se considera una función de la presión. Los parámetros de las rocas, porosidad y permeabilidad, son funciones de las coordenadas y pueden especificarse punto por punto, tanto en las fracturas como en el reservorio. La porosidad es además una función de la presión. La formulación que presentamos es, sin embargo, general, y puede ser extendida fácilmente a modelos multifásicos, térmicos y composicionales en dos o tres dimensiones.

La ecuación diferencial y las condiciones de borde

La conservación de la masa del fluido que fluye está expresada por la ecuación de continuidad (ver la tabla de símbolos al final):

$$\frac{\partial}{\partial t} (\phi \rho) + \nabla \cdot (\rho \vec{v}) + m = 0 \quad (1)$$

y la pseudovelocidad está dada por la ley de Darcy:

$$\vec{v} = - \frac{k}{\mu} \nabla p \quad (2)$$

Reemplazando (2) en (1) obtenemos la siguiente ecuación diferencial, que gobierna el flujo:

$$\frac{\partial}{\partial t} (\phi \rho) - \nabla \cdot \left(\rho \frac{k}{\mu} \nabla p \right) + m = 0 \quad (3)$$

La ecuación (3) contiene como única incógnita la presión p . La densidad ρ del fluido es una función de p solamente (flujo isotérmico). Los parámetros de la roca ϕ y k son funciones de las coordenadas, y ϕ además es una función de p . La viscosidad μ es considerada constante. La ec.(3) no es lineal. Para el caso bidimensional que nos ocupa la ecuación es:

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\rho k}{\mu} \frac{\partial p}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\rho k}{\mu} \frac{\partial p}{\partial y} \right) - \frac{\partial}{\partial t} (\rho \phi) - m = 0 \quad (4)$$

La masa de fluido producida en la unidad de tiempo de la unidad de volumen es m .

En todos los elementos finitos $m=0$, excepto en aquellos que tienen un pozo, donde se impone;

$$m = \frac{Q}{A^{(e)}_h} \quad (5)$$

Para imponer las condiciones de borde suponemos un reservorio cerrado y exigimos $v_{\perp}=0$ sobre toda la superficie S que lo rodea, sea:

$$\left(\frac{\partial p}{\partial n} \right)_S = 0 \quad \text{en } S$$

o bien:

$$\left[\frac{\partial p}{\partial x} \right]_S n_x + \left[\frac{\partial p}{\partial y} \right]_S n_y = 0 \quad \text{en } S \quad (6)$$

La Pseudopresión

La introducción de una pseudopresión similar a la de Al-

Hussainy (6,7) permite simplificar la ecuación diferencial (4) y su correspondiente formulación en términos de un funcional a minimizar. Se define:

$$M = \left(\frac{\mu}{\rho k}\right)_0 \int_p^{p_0} \frac{\rho k}{\mu} dp \quad (7)$$

donde p_0 es algún valor particular de la presión, usualmente la presión máxima inicial pues así $M=0$ para $t=0$ y $(\mu/\rho k)_0$ es el valor de $(\mu/\rho k)$ a esa presión p_0 . Se tiene:

$$\frac{dM}{dp} = -\left(\frac{\mu}{\rho k}\right)_0 \frac{\rho k}{\mu} \quad \frac{\partial M}{\partial x} = -\left(\frac{\mu}{\rho k}\right)_0 \frac{\rho k}{\mu} \frac{\partial p}{\partial x}$$

$$\frac{\partial M}{\partial y} = -\left(\frac{\mu}{\rho k}\right)_0 \frac{\rho k}{\mu} \frac{\partial p}{\partial y} \quad \frac{\partial M}{\partial t} = -\left(\frac{\mu}{\rho k}\right)_0 \frac{\rho k}{\mu} \frac{\partial p}{\partial t}$$

$$\frac{\partial (\rho \Phi)}{\partial t} = \frac{\partial (\rho \Phi)}{\partial M} \frac{\partial M}{\partial t}$$

y definimos:

$$m' = \left(\frac{\mu}{\rho k}\right)_0 m$$

$$f(M) = \left(\frac{\mu}{\rho k}\right)_0 \frac{\partial (\rho \Phi)}{\partial M} \equiv - \frac{\mu}{\rho k} \frac{\partial (\rho \Phi)}{\partial p} \quad (8)$$

Usando (7) y (8), la ecuación diferencial (4) se transforma en:

$$\frac{\partial^2 M}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 M}{\partial y^2} + f(M) \frac{\partial M}{\partial t} + m' = 0 \quad (9)$$

y la condición de borde (6) queda:

$$\left(\frac{\partial M}{\partial x}\right)_S n_x + \left(\frac{\partial M}{\partial y}\right)_S n_y = 0 \quad (10)$$

La introducción de M es conveniente pues se simplifican muchísimo las fórmulas de Elementos Finitos.

La minimización de un funcional

Para resolver la ec. (9) con su condición de borde (10) por medio del MEF pueden emplearse dos caminos diferentes: encontrar un funcional apropiado y minimizarlo, o bien el método de Galerkin. Ahora vamos a presentar el primer procedimiento (1,8). El funcional siguiente adquiere un valor estacionario cuando se satisface la ecuación diferencial (9) y su condición de borde (10):

$$\chi = \int_V \frac{1}{2} \left[\left(\frac{\partial M}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial M}{\partial y}\right)^2 \right] dV - \int_V M \left[f(M) \frac{\partial M}{\partial t} + m' \right] dV \quad (11)$$

La minimización de χ se hace respecto de $\delta M, \delta(\partial M/\partial x)$ y $\delta(\partial M/\partial y)$, y se emplean pasos de tiempo. En la segunda integral, $f(M)$ y $\partial M/\partial t$ se consideran constantes durante cada paso de tiempo, y sus cambios se incorporan al finalizar cada paso de tiempo (8, pag. 213). Por eso, en la segunda integral sólo se varía M . Es conveniente cambiar la forma

del funcional (11) y para ello se define el vector:

$$\{g\} = \begin{bmatrix} \frac{\partial M}{\partial x} \\ \frac{\partial M}{\partial y} \end{bmatrix} \quad (12)$$

con lo cual el funcional queda:

$$\chi = \int_V \frac{1}{2} \{g\}^T \{g\} dV - \int_V M \left[f(M) \frac{\partial M}{\partial t} + m' \right] dV \quad (13)$$

Las integrales de volumen se calculan como suma de integrales sobre cada elemento finito:

$$\chi = \sum_{(e)} \left[\int_{V(e)} \frac{1}{2} \{g^{(e)}\}^T \{g^{(e)}\} dV - \int_{V(e)} M^{(e)} \left[f(M^{(e)}) \frac{\partial M^{(e)}}{\partial t} + m'^{(e)} \right] dV \right] \quad (14)$$

El próximo paso antes de poder minimizar χ es expresar M en función de los valores nodales $\emptyset$ y las funciones de forma $N^{(e)}$:

$$M^{(e)} = [N^{(e)}] \{\emptyset\} \quad (15)$$

donde las funciones de forma son:

$$[N^{(e)}] = [N_i^{(e)}, N_j^{(e)}, \dots, N_r^{(e)}]$$

y el vector de valores de nodo de M es:

$$\{\emptyset\}^T = \{\emptyset_i, \emptyset_j, \dots, \emptyset_r\}$$

Entonces, en términos de estas definiciones:

$$\{g^{(e)}\} = [B^{(e)}] \{\emptyset\} \quad (16)$$

donde:

$$B^{(e)} = \begin{bmatrix} \frac{\partial N_i^{(e)}}{\partial x} & \frac{\partial N_j^{(e)}}{\partial x} & \dots & \frac{\partial N_r^{(e)}}{\partial x} \\ \frac{\partial N_i^{(e)}}{\partial y} & \frac{\partial N_j^{(e)}}{\partial y} & \dots & \frac{\partial N_r^{(e)}}{\partial y} \end{bmatrix} \quad (17)$$

Usamos (15) y (16) en (14), y obtenemos para cada elemento finito:

$$\begin{aligned} x^{(e)} = & \int_{V(e)} \frac{1}{2} \{\emptyset\}^T [B^{(e)}]^T [B^{(e)}] \{\emptyset\} dV - \int_{V(e)} f^{(e)}(M) [N^{(e)}] \{\emptyset\} [N^{(e)}] \frac{\partial \{\emptyset\}}{\partial t} dV \\ & - \int_{V(e)} m^{(e)} [N^{(e)}] \{\emptyset\} dV \end{aligned} \quad (18)$$

Ahora calculamos la variación con respecto a $\{\emptyset\}$, manteniendo $f(M^{(e)})$, $\partial \{\emptyset\} / \partial t$ y $m^{(e)}$ constantes durante el paso de tiempo, y obtenemos:

$$\frac{\partial \chi^{(e)}}{\partial \{\emptyset\}} = [k^{(e)}] \{\emptyset\} + [c^{(e)}] \frac{\partial \{\emptyset\}}{\partial t} + f^{(e)} \quad (19)$$

donde:

$$[k^{(e)}] = \int_{V^{(e)}} [B^{(e)}]^T [B^{(e)}] dv$$

$$[c^{(e)}] = - \int_{V^{(e)}} f^{(e)} (M) [N^{(e)}]^T [N^{(e)}] dv$$

$$\{f^{(e)}\} = - \int_{V^{(e)}} m^{(e)} [N^{(e)}]^T dv$$

Efectuando la suma indicada en (14) y definiendo:

$$[K] = \sum_{(e)} [k^{(e)}] \quad [C] = \sum_{(e)} [c^{(e)}] \quad \{F\} = \sum_{(e)} \{f^{(e)}\} \quad (20)$$

se obtiene finalmente:

$$[C] \frac{\partial \{\emptyset\}}{\partial t} + [K] \{\emptyset\} + \{F\} = 0 \quad (21)$$

Este es un sistema de ecuaciones diferenciales lineales, cuyas incógnitas son las componentes del vector $\{\emptyset\}$. Se lo puede resolver por medio de diferencias finitas, estableciendo pasos de tiempo apropiados, o bien dividiendo el tiempo en elementos finitos y empleando el MEF (8, pag. 360). En ambos casos se obtiene un sistema de ecuaciones lineales,

cuya resolución es materia rutinaria. El resultado es el vector $\{\emptyset\}$ que permite emplear la (15) para calcular los valores de la pseudopresión M en cualquier punto del reservorio.

Líquido compresible

El cálculo de las matrices $\left[c^{(e)} \right]$ de la ecuación (19) requiere especificar propiedades del fluido y de la roca. Lo haremos para el caso de un líquido compresible cuya compresibilidad c se define por:

$$c = -\frac{1}{V} \frac{\partial V}{\partial p} \equiv \frac{1}{\rho} \frac{\partial \rho}{\partial p} \quad (22)$$

La compresibilidad c_f de la roca se define en relación con la porosidad como sigue:

$$c_f = \frac{1}{1-\phi} \frac{\partial \phi}{\partial p} \quad (23)$$

Usando (22) y (23) en la definición (8) de $f(M)$ se obtiene:

$$f(M) = -\frac{\mu}{k} \left[(c - c_f) \phi + c_f \right] \quad (24)$$

La relación (24) es general por cuanto no se ha hecho ninguna hipótesis sobre c ni c_f . Si ahora hacemos la hipótesis que k, μ, c y c_f son constantes, se puede obtener expresiones cerradas para M , $f(M)$ y las matrices de elemento $\left[c^{(e)} \right]$. La integración

de (22) y (23) suministra:

$$\rho = \rho_0 e^{c(p-p_0)} \quad (25)$$

$$\phi = 1 - (1 - \phi_0) e^{-c_f(p-p_0)} \quad (26)$$

Usando (25) en (7) obtenemos fácilmente:

$$M = \frac{1}{c} \left[1 - e^{c(p-p_0)} \right] \quad (27)$$

o bien la relación inversa:

$$p = p_0 + \frac{1}{c} \ln (1 - Mc) \quad (28)$$

Usando (28) en (26):

$$\phi = 1 - (1 - \phi_0) (1 - Mc)^{-c_f/c} \quad (29)$$

y reemplazando (24):

$$f(M) = \frac{-\mu}{k} (c - c_f) \left[1 - (1 - \phi_0) (1 - Mc)^{-c_f/c} \right] - \frac{\mu c_f}{k} \quad (30)$$

La expresión (30) se utiliza para calcular los valores $E_i \equiv f(M_i^{(e)})$ en los nodos. Dentro de cada elemento $f^{(e)}(M)$ se aproxima linealmente:

$$f^{(e)}(M) = [N^{(e)}] \{E^{(e)}\} \quad (31)$$

y la expresión (31) se emplea en (19) para el cálculo de las matrices de elemento $[C^{(e)}]$.

Metodo de Galerkin

Ahora presentaremos el procedimiento para resolver la ecuación diferencial (3) por el método de Galerkin. Se puede trabajar directamente en términos de la presión p , no siendo necesaria la introducción de la pseudopresión M . Dentro de cada elemento finito, la presión p se representa de la manera usual, análogamente a (15):

$$p = \sum_i N_i P_i \quad (32)$$

donde P_i son los valores de nodo de la presión, y N_i las funciones de forma. Cuando la aproximación (32) se sustituye en la ecuación diferencial (3), el resultado del segundo miembro no será cero, sino un cierto "error". El método de Galerkin consiste en minimizar este error exigiendo que sea ortogonal a todas las funciones de forma dentro del recinto de solución:

$$\int_V N_i \left[\nabla \cdot \left(\frac{\rho k}{\mu} \nabla p \right) - m - \frac{\partial (\rho \phi)}{\partial t} \right] dV = 0 \quad (33)$$

para todo i donde p está dado por (32). De esta manera se de-

terminan los valores de nodo p_i que luego permiten calcular p en cualquier punto del reservorio. Las derivadas segundas son divergentes en las fronteras entre elementos. Por lo tanto hay que eliminarlas de la (33). Para ello usamos la identidad vectorial:

$$N_i \nabla \cdot \left[\frac{\rho k}{\mu} \nabla p \right] = \nabla \cdot \left[N_i \frac{\rho k}{\mu} \nabla p \right] - \frac{\rho k}{\mu} \nabla p \cdot \nabla N_i$$

y luego usamos el teorema de Stokes para transformar:

$$\int_V \nabla \cdot \left[N_i \frac{\rho k}{\mu} \nabla p \right] dV = \oint_S N_i \frac{\rho k}{\mu} \nabla p \cdot \vec{n} dS$$

Obtenemos de esta manera:

$$\oint_S N_i \frac{\rho k}{\mu} \nabla p \cdot \vec{n} dS - \int_V \frac{\rho k}{\mu} \nabla p \cdot \nabla N_i dV - \int_V N_i m dV - \int_V N_i \frac{\partial (\rho \Phi)}{\partial t} dV = 0 \quad (34)$$

El resto del cálculo no se desarrollará aquí pues sigue lineamiento análogos a la minimización de un funcional. Las condiciones de borde (6), sin embargo no están automáticamente incluidas en el formalismo. Su efecto se tiene en cuenta cuando, una vez ensamblada la matriz del sistema de ecuaciones lineales final, se reemplazan las ecuaciones asociadas a los nodos superficiales del reservorio por las ecuaciones correspondientes a las condiciones borde (6). Para

un líquido compresible, la expresión para $\partial(\rho\phi)/\partial t$ puede obtenerse usando la definición de las compresibilidades (22) y (23):

$$\frac{\partial}{\partial t} (\rho\phi) = \left[c\phi + c_f(1-\phi) \right] \rho \frac{\partial p}{\partial t} \quad (35)$$

Conclusiones

El análisis de Elementos Finitos se ha usado para formular la teoría de un reservorio bidimensional que contiene fracturas verticales y pozos en producción. Se ha utilizado tanto el procedimiento de minimización de un funcional como el método de Galerkin. El caso particular de un líquido compresible fue tratado y formulado. La teoría está completa y lista para el cálculo numérico.

Lista de Símbolos

$A^{(e)}$	Area de un elemento finito.
$B^{(e)}$	Matriz definida en la ec. (17).
c	Compresibilidad del líquido.
c_f	Compresibilidad de la roca.
g	Vector definido en la ec. (12).
$g^{(e)}$	Vector g especificado para un elemento (e) .
h	Espesor vertical del reservorio.
k	Permeabilidad de la roca.
m	Producción (masa por unidad de volumen y de tiempo).
m'	Parámetro definido en (8).
$m'^{(e)}$	Parámetro m' especificado para un elemento (e) .
M	Pseudopresión.
$M^{(e)}$	Pseudopresión especificado para un elemento (e) .
n	Normal saliente a la superficie s .
n_x, n_y	Componentes de n .
$N^{(e)}$	Funciones de forma para un elemento (e) .
p	Presión .
p_o	Presión máxima.
Q	Producción de un pozo (masa por unidad de tiempo).
r	Cantidad de nodos en un elemento finito.
S	Superficie que rodea el reservorio.
t	Tiempo.
$\vec{v}$	Pseudovelocidad.
V	Volumen total del reservorio.
$V^{(e)}$	Volumen de un elemento (e) .

x, y, z Coordenadas.

Griegos

ϕ Porosidad de la roca

$\emptyset$ Valores de nodo de la pseudopresión, ec. (15).

χ Funcional, ec. (11)

$\chi^{(e)}$ El funcional de un elemento (e)

μ Viscosidad del fluido

ρ Densidad del fluido

Referencias

- (1) O.C.Zienkiewicz. "The Finite Element Method in Engineering Science" Mc Graw-Hill- London, 1971.
- (2) J.T. Oden "Finite Elements of Nonlinear Continua" Mc Graw-Hill New York, 1972.
- (3) J.C.Cavendish, H.S.Price, R.S.Varga "Galerkin Methods for the Numerical Solution of Boundary Value Problems". SPE symposium on Numerical Simulation of Reservoir Performance (Paper SPE 2034), Dallas, Texas, April 1968.
- (4) N.Sitar "Optimization of Dewatering Schemes". Thesis. Department of Geology, Stanford University, June 1975
- (5) J.G.Mendez. "Simulación de Flujo Monofásico en medios porosos utilizando el Método de Galerkin". Trabajo Especial. Facultad de Ingeniería, Universidad del Zulia, Junio 1974.
- (6) R. Al Hussainy, H.J.Ramcy and P.B.Crawford. "The flow of real gases through porous media" Trans. AIME, 237, 624-636 (1966).
- (7) W.K.Sawyer and C.D.Locke. "Combination Model for simulating transient gas flow in a vertically fractured reservoir". Report 7890. Morgantown Energy Research Center, W.Va.

- (8) L.J.Segerling "Applied Finite Element Analysis". John Wiley & Sons, Inc. New York, 1976.

