

REPUBLICA ARGENTINA
COMISION NACIONAL DE ENERGIA ATOMICA

INFORME N.º 80

Fricción Interna debido a la Interacción
entre Dislocaciones y Átomos Solutos

por
Günther Schoeck

BUENOS AIRES

1963

FRICCIÓN INTERNA DEBIDA A LA INTERACCIÓN
ENTRE DISLOCACIONES Y ÁTOMOS SOLUTOS

GUNTHER SCHOECK

Consejo Nacional de Investigaciones Científicas y Técnicas, e
Instituto de Física, Centro Atómico Bariloche, Argentina.

ABSTRACT

A theory is developed to explain an internal friction peak which is observed after cold-work in bcc metals containing impurity atoms in interstitial solute-solution. In contrast to previous assumptions it is proposed that the elastic relaxation is directly caused by the movement of dislocations. The dislocations are normally locked by impurity atmospheres but can move at the peak temperature by dragging the solute atoms along. The dislocations are assumed to be anchored at immobile precipitates or clusters of solute atoms distributed at intervals along the dislocations line. Two limiting cases of dislocation oscillation are considered with amplitudes large and small compared with the interatomic distance b . It is found that the peak height and the relaxation time (and hence the peak temperature) depend on structural details such as average free length between precipitates, their distribution function and the concentration of solute atoms.

INTRODUCCION

En metales de estructura cúbica de cuerpo centrado que contienen átomos de impureza en posiciones intersticiales (como O, N o C) aparece un pico característico de fricción interna aproximadamente a temperatura ambiente para una frecuencia de alrededor de 1 cps. El mecanismo de este "pico de Snoek" (1) es bien conocido. Se trata de una reubicación de los intersticiales bajo la influencia de la tensión aplicada (2). Si la probeta se ha deformado previamente aparece otro pico de fricción interna a una temperatura más elevada. Este "cold-work peak" ha sido estudiado extensivamente en Fe con C(3,4,5) o N(4,5,6) en solución sólida, en Ta con O(7) o N(8) y en Nb con N(8), pero es muy probable que aparezca en todos los metales que normalmente muestran un "Snoek-peak". Las características del "cold-work peak" (CWP) son las siguientes:

El CWP tiene una energía de activación que es generalmente del orden de 0,5 eV más alta que la del Snoek-peak, cuya energía de activación corresponde a la de difusión del soluto en la red perfecta.

La altura del CWP aumenta con la deformación y alcanza un valor máximo. Este valor máximo es proporcional a la concentración de átomos intersticiales inicialmente en solución sólida.

El CWP desaparece a una temperatura elevada. La energía de activación del recodido parece ser la de autodifusión en Fe (3,4) pero la de difusión de O en el sistema Ta-O (7).

Aun cuando no existe hasta ahora una teoría satisfactoria sobre su mecanismo, sin duda, el CWP es debido a la interacción entre intersticiales en solución sólida y los defectos formados durante la deformación. Köster, et. al. (3) lo atribuyeron a la relajación elástica causada por la reubicación de átomos solutos cerca del centro de una dislocación. Van Bueren (9) ha criticado esta idea argumentando que la difusión cerca de una dislocación debería ocurrir con una energía de activación menor que en la red perfecta, y ha propuesto que el CWP es producto de la interacción entre intersticiales y vacancias formadas durante la deformación. Por otra parte, Mura et. al. (10), sugieren que este pico es debido al crecimiento y la disolución de precipitados, en el campo de tensión de una dislocación oscilante. Una explicación similar es también presentada por Boone (8). Para Fe fué propuesto por Okazaki (11) que el pico es causado por difusión de C en γ -Fe del cual pequeñas regiones fueron formadas durante la deformación plástica, pero en ninguno de los casos mencionados se ha propuesto un mecanismo detallado y razonable para explicar todas las características del CWP.

El objeto de este artículo es presentar una nueva teoría atomística del CWP. Esta teoría es muy general y se puede aplicar a cualquier sistema en el cual las dislocaciones estén an-

cladas por defectos puntuales. Es interesante mencionar que en aleaciones que muestran un efecto Portevin-Le Chatellier (10) también se puede observar probablemente un pico de fricción interna que se puede describir con el mismo modelo.

El modelo que proponemos se basa en que la relajación es causada por el movimiento de las dislocaciones en contraposición con las otras teorías (3, 4, 11) que consideran que ésta es debida a la reubicación de átomos solutos o precipitados. La temperatura del CWP es tan alta (a un cps) que el envejecimiento durante el ensayo ocurre rápidamente y se forman atmósferas de impurezas y precipitados sobre la línea de dislocación, como fué por ejemplo observado por Keh y Wriedt (12) usando transmisión de electrones en el sistema Fe-N. Las tensiones aplicadas en los ensayos de fricción interna son tan bajas (en casos típicos menores que $10^{-4}G$, siendo G el módulo de corte) que las dislocaciones no pueden escapar de sus atmósferas de átomos de soluto. Solamente pueden moverse si estos átomos difunden con la dislocación. Un modelo similar con vacancias ancladas a dislocaciones en Germanium fué propuesto por Kessler (13) pero su tratamiento matemático y sus resultados son diferentes de los nuestros. Consideremos dos casos extremos. Primero discutiremos el caso en el que las dislocaciones pueden doblarse entre los precipitados sobre varias distancias atómicas. Después consideremos el caso en que el anclaje es tan fuerte como para que las dislocaciones oscilen con una amplitud de vibración que es menor que una distancia atómica. En ambos casos la altura del CWP y el tiempo de relajación (o la temperatura del pico) dependen de la estructura (concentración de impurezas y dispersión de precipitados) de acuerdo con las observaciones experimentales (3-8).

El valor de la energía de activación del CWP merece especial consideración. Las impurezas intersticiales ocupan en los metales de estructura cúbica de cuerpo centrado tres posiciones distintas que son ubicadas sobre una arista del tipo $\langle 100 \rangle$ de la celda elemental. La energía de interacción entre una dislocación y un intersticial varía con la posición que éste ocupe en la red (14).

Se puede demostrar (7) que un átomo intersticial que difunde con una dislocación que se mueve, debe pasar por posiciones energéticamente desfavorables y su energía de activación para el movimiento es del orden de la suma de la energía de interacción con la dislocación, y la energía de difusión del átomo soluto en la red perfecta, de acuerdo también con las observaciones experimentales. Una comparación de la teoría con los resultados experimentales daremos en una futura publicación.

EL MECANISMO DEL "COLD-WORK PEAK"

Como ya hemos mencionado, el modelo que usamos para la descripción del CWP es el de dislocaciones ancladas por atmósfe.

ras de átomos de impurezas, La tensión usada en la medición de la fricción interna es en casos típicos del orden menor que $10^{-4}G$ (G = módulo de corte) y desde luego no es suficiente para liberar a las dislocaciones de sus nubes de impurezas. Es así que las dislocaciones sólo podrán moverse a una temperatura suficientemente alta como para que los átomos de impurezas las acompañen por difusión. La velocidad v de difusión de los átomos de impurezas (y por ende la velocidad de las dislocaciones) estará dada por la ecuación de Einstein:

$$v = \frac{\partial x}{\partial t} = \frac{D}{RT} \bar{\sigma} b \Delta l \quad (1)$$

donde D es el coeficiente de difusión de los átomos de impurezas, $\bar{\sigma}$ es la tensión actuante y Δl es el segmento de la dislocación con el vector de Burgers b ocupado en el medio por un átomo de impureza y kT tiene su significación normal. Debido a que los intersticiales más cercanos son los más importantes por su interacción, solamente se consideran los átomos de impurezas situados dentro de una pequeña distancia $R \approx b$ de la dislocación. Si C_d es la fracción atómica de los átomos de impureza cerca de las líneas de las dislocaciones, se ve fácilmente que:

$$\Delta l = 4\sqrt{3} b^3 / 9\pi R^2 C_d \quad (2)$$

Además de la atmósfera de impurezas hay bifurcaciones o precipitados con una distancia l que sirven como puntos de anclaje para las dislocaciones entre las cuales ellas pueden doblarse bajo una tensión aplicada. La fuerza de reacción causada por la curva (15) es dado por $\sigma_r b = \beta/l$, siendo β la tensión de línea y r el radio de curvatura de la línea de dislocación. Si designamos como eje "X" al de la dirección del movimiento y eje "y" al que coincide con la línea de dislocación, (Fig.1), se puede reemplazar $1/r$ por $-\partial^2 x / \partial y^2$ si la pendiente $\partial x / \partial y$ de la dislocación es pequeña en todo lugar. El movimiento de la dislocación bajo una tensión aplicada σ se describe entonces con ec (1) y (2) por

$$\alpha \frac{\partial x}{\partial t} - \beta \frac{\partial^2 x}{\partial y^2} = \sigma b \quad (3a)$$

con

$$\alpha = 9\pi R^2 C_d kT / 4\sqrt{3} D b^3 \quad \beta \approx G b^2 / 2 \quad (3b)$$

La ec (3a) es un caso especial de la ecuación diferencial del movimiento de dislocaciones usada por K ohler (16) y Granato y Lücke (17). Aquí hemos suprimido las fuerzas de iner-

cia que son despreciables en el rango de frecuencia que nos interesa.

La condición de contorno para ec. (3) es $\dot{X} = 0$ para $y = 0, l$. En el apéndice se indica una solución exacta de la ec. (3) y se muestra que el movimiento se describe con suficiente exactitud por la ecuación:

$$\alpha \frac{\partial \bar{x}}{\partial t} + \frac{8\beta}{l^2} \bar{x} = \sigma b \quad (4)$$

donde \bar{x} es el desplazamiento promedio de un arco de una dislocación de la longitud l . Para llegar de (3) a (4) hemos usado la relación $-\frac{\partial^2 x}{\partial y^2} \approx \frac{1}{l} \approx \frac{4x_m}{l^2}$ donde $x_m = 2\bar{x}$ es la máxima flecha del arco.

La solución estacionaria de ec (4) para $\sigma = \sigma_0 \exp\{i\omega t\}$ es

$$\bar{x} = \frac{\sigma_0 b (8\beta/l^2 - i\omega\alpha)}{64\beta^2/l^2 + \omega^2\alpha^2} \quad (5)$$

Generalmente existe una distribución de los largos de los arcos. Si Λ es la longitud total de dislocación por unidad de volumen y N el número de puntos de anclaje; el largo promedio de los arcos es $l_0 = \Lambda/N$. La distribución de los largos l estará dada por la función $\rho(l)$, siendo $\rho(l) dl$ el número de arcos por unidad de volumen con un largo comprendido entre l y $l+dl$. Para $\rho(l)$ existe la condición de normalización $\int_0^\infty \rho(l) l dl = \Lambda$. La deformación ϵ_d debida al doblado de los arcos estará dada (15) por

$$\epsilon_d = \gamma b \int_0^\infty \rho(l) \bar{x}(l) l dl \quad (6)$$

γ es un factor geométrico del orden 1/10 que puede tomar valores más grandes en caso de anisotropía elástica grande (18).

Si ahora aplicamos al sistema una tensión de corte periódica $\sigma = \sigma_0 \exp\{i\omega t\}$ tendremos una extensión elástica $\epsilon_e = \frac{\sigma_0}{G} \exp\{i\omega t\}$ que está en fase con σ . Pero debido al movimiento amortiguado de las dislocaciones tendremos también una parte de la deformación ϵ_d (con $\epsilon_d \ll \epsilon_e$) que estará desfasado con respecto a σ . Las pérdidas de energía por ciclo debido a este desfasaje entre ϵ_d y σ se miden como la fricción interna Q^{-1} cuyo valor está dado por: (2):

$$Q^{-1} = \operatorname{tg} \varphi = \frac{G}{\sigma_0} \operatorname{Im} \{ \epsilon_d \} \quad (7)$$

donde φ es el ángulo de desfase entre σ y ϵ y $\operatorname{Im} \{ \epsilon_d \}$ designe el parte imaginario de ϵ_d .

Con ec (5) y (6) y usando el parámetro $z = l/l_0$ se muestra fácilmente que

$$Q^{-1} = \frac{\gamma \Lambda l_0^2}{4} \int_0^{\infty} \frac{\omega \tau \bar{\xi}(z) z^5}{1 + \omega^2 \tau^2 z^4} dz \quad (8)$$

donde

$$\tau = 9\pi R^2 k T C_d l_0^2 / 16\sqrt{3} G b^5 D \quad (9)$$

y $\bar{\xi}(z) = l_0^2 \xi(z/l_0) / \Lambda$ es la función de distribución normalizada de los largos de los arcos.

Para una distribución uniforme ($l = l_0$) de los largos de los arcos $\bar{\xi}(z) = \delta(1-z)$ y la integral en ec (8) se reduce a la ecuación de un proceso singular de relajación (2) con el valor máximo

$$J_m = \frac{1}{2} \text{ para } (\omega \tau)_m = 1.$$

Para una distribución al azar de los puntos de anclaje a lo largo de la dislocación (distribución de Poisson) se puede demostrar (16) que $\bar{\xi}(z) = \exp(-z)$. En este caso la integral estará dada por una suma integral logarítmica con argumento complejo. Muy fácilmente la integral se evalúa también por un método semigráfico. Su dependencia del parámetro $\omega \tau$ está dada en Figura (2) y es similar a una función de relajación con un valor máximo $J_m \approx 2,2$ para un valor de $(\omega \tau)_m \approx 7 \cdot 10^{-2}$.

En efecto sería más correcto reemplazar en ec. (8) el límite inferior 0 de la integral por un valor $z_0 = l_1/l_0$, porque para arcos demasiado cortos la flecha producida en las dislocaciones que se doblan es menor que una distancia atómica, y entonces, el uso de la relación de Einstein (ec) (1) carece de justificación. En el caso de amplitudes de oscilación menor que una distancia atómica lo consideraremos en la próxima sección. Es conveniente señalar que la contribución a la integral en ec(8) es casi exclusivamente debida a arcos en el rango $2l_0 < l < 10l_0$ puesto que los arcos muy cortos no contribuyen mucho a ϵ_d y el número de los arcos muy largos es muy pequeño.

PEQUEÑOS DESPLAZAMIENTOS

Si la amplitud de oscilación de una dislocación es menor que una distancia atómica, la aplicación de la ecuación de Einstein (ec 1) no se justifica. En este caso la fricción interna se describe mejor por una redistribución en la atmósfera de impurezas que permite una amplitud de oscilación más amplia.

Hay dos motivos que pueden limitar la oscilación a amplitudes pequeñas. El primero es que la distancia l entre los puntos de anclaje sea suficientemente pequeña. Por ejemplo, para $G = 10^{-4}$ G, la amplitud máxima de un arco es $x_m < b$ si $l < 200b$. El segundo puede ser que en razón de que los átomos de soluto solamente pueden ocupar lugares determinados, la energía de in-

teracción de la dislocación con su atmósfera, en equilibrio termodinámico, varía con su posición dentro de una celda unitaria. Entonces puede existir un efecto similar al de la "Fuerza de Peierls" (19) y puede ser que la tensión aplicada no sea suficientemente grande para librar la dislocación, aún cuando se permita la redistribución de la atmósfera.

Consideremos una dislocación en la posición de equilibrio $x = 0$ que se puede mover en la dirección x . Como consideramos aquí solamente movimientos sobre distancias $x < b$ despreciaremos todos los términos de orden superior en x en el tratamiento siguiente. La energía interna del sistema dislocación-átomos solutos está dado por

$$U = \sum n_i(x) u_i(x) \quad (10)$$

donde n_i es el número de intersticiales en una longitud unitaria de dislocación, ocupando el sitio i con la energía de interacción u_i con la dislocación. Como en la sección anterior debemos considerar solamente los intersticiales dentro de un radio R pequeño, alrededor de la dislocación. U y las otras funciones termodinámicas se refieren todas por longitud unitaria. Si la dislocación se mueve, el cambio en U es:

$$\Delta U = \sum n_i \Delta u_i + \sum \Delta n_i u_i \quad (11)$$

Según el primer principio de la termodinámica tenemos también

$$\Delta U = \Delta W + \Delta Q \quad (12)$$

donde ΔW es el trabajo y ΔQ el calor introducido en el sistema. Se puede demostrar fácilmente (20) que cada término en ec(11) es igual al término correspondiente en ec(12). Entonces el equilibrio mecánico de la dislocación está dado por:

$$\bar{\sigma} b = \frac{dW}{dx} = \sum n_i \frac{du_i}{dx} \quad (13)$$

si $\bar{\sigma}$ es la tensión actuando en la dislocación con vector de Burgers b . Si la dislocación se encuentra en los alrededores de $x = 0$ podemos desarrollar u_i en serie de Taylor

$$u_i = u_{i0} + a_i x + d_i x^2 + \dots \quad (14)$$

El número de átomos de soluto en equilibrio térmico, si la dislocación está a distancia x , es entonces

$$\begin{aligned} n_i &= n_{i0} \exp(-u_i/kT) \\ &= n_{i0} - \frac{n_{i0}}{RT} (a_i x + \dots) \end{aligned} \quad (15)$$

donde n_0 es el número correspondiente de átomos en sitios muy lejanos de la dislocación, y $n_{i_0} = n_0 \exp(-u_{i_0}/kT)$ es el número de átomos en sitio i en equilibrio térmico si la dislocación es en posición $x = 0$.

La condición para el equilibrio mecánico de la dislocación es que en ec(10) no existen términos lineales en x , si la población n_i está en equilibrio térmico.

Entonces tenemos con ec (10), (14) y (15)

$$U = \sum n_{i_0} u_{i_0} + x \sum n_{i_0} a_i + x^2 \sum n_{i_0} d_i + \dots \quad (16)$$

y de eso sale

$$\sum n_{i_0} a_i = 0 \quad (17)$$

Ahora podemos considerar el movimiento de la dislocación dentro de su atmósfera, si existe simultáneamente una redistribución de los átomos. El número de los átomos en el sitio i es ahora también una función del tiempo t que podemos representar por

$$n_i(x, t) = n_{i_0} + \Delta n_i(x, t) \quad (18)$$

El valor de equilibrio térmico de Δn_i que se establece para $t \rightarrow \infty$ es dado evidentemente por ec(15):

$$\Delta n_{i_0} = \Delta n_i(x, \infty) = -n_{i_0} a_i x / kT + \dots \quad (19)$$

Porque el equilibrio de la población de los sitios se establece por difusión i.e. por saltos de átomos excitados por fluctuaciones térmicas el cambio en la población se describe por la ecuación cinética

$$\frac{\partial \Delta n_i}{\partial t} = \frac{\Delta n_i - \Delta n_{i_0}}{\tau_0} \quad (20)$$

si τ_0 es el tiempo medio para un salto de un átomos soluto en la atmósfera de la dislocación.

El equilibrio momentáneo de la dislocación obtenemos ahora de ec(13) si reemplazamos n_i por su valor instantáneo $n_i(x, t)$

de ec(18). Si depreciamos términos de segundo orden y si usamos ec(17) obtenemos entonces

$$\bar{\sigma} b = 2x \sum n_{i_0} d_i + \sum \Delta n_i a_i \quad (21)$$

De las ec(19) a (21) podemos eliminar Δn_i y obtenemos una ecuación diferencial lineal en x , $\bar{\sigma}$ y sus derivadas temporales que describe el comportamiento de un "sólido lineal estándar" (12). Esta ecuación se refiere a una dislocación anclada en el infinito. Si tenemos puntos de anclaje en intervalos

l_0 existe una fuerza de reacción adicional debido a la tensión de línea β que podemos tomar en cuenta globalmente reemplazando $\bar{\sigma}$ por

$$\bar{\sigma} = \sigma - 8\beta x / l_0^2 \quad (22)$$

como ya hemos justificado en ec(4). El resultado final es entonces

$$\bar{\sigma} + \tau_0 \frac{\partial \bar{\sigma}}{\partial t} = p x + \tau_0 q \frac{\partial x}{\partial t} \quad (23a)$$

con

$$p = q - \sum n_{i0} a_i / b k T \quad (23b)$$

$$q = 2 \sum n_{i0} d_i / b + 8\beta / b l_0^2 \quad (23c)$$

Para una tensión periódica $\bar{\sigma} = \sigma_0 \exp(i\omega t)$ obtenemos por medio de métodos standard de ec(23a) la solución $x = x_0 \exp(i\omega t)$ con x_0 complejo.

La deformación plástica reversible debida al movimiento de las dislocaciones sobre la distancia x_0 es

$$\epsilon_d = \gamma \mathcal{L} x_0 b \quad (24)$$

donde los símbolos tienen el mismo significado que en la sección anterior. Con igual argumento al usado para ec(7) se obtiene entonces la fricción interna

$$Q^{-1} = \frac{\gamma \mathcal{L} G b^2}{2 \sum n_{i0} d_i + 8\beta / b l_0^2} \frac{\mathcal{L}}{1 - \mathcal{L}} \frac{\omega \tau}{1 + \omega^2 \tau^2} \quad (25a)$$

con

$$\mathcal{L} = \frac{\sum n_{i0} a_i^2 / k T}{2 \sum n_{i0} d_i + 8\beta / b l_0^2} \quad (25b)$$

y

$$\tau = \tau_0 / (1 - \mathcal{L}) \quad (25c)$$

DISCUSION

Considerando los dos casos discutidos en las secciones anteriores se ve que la altura del pico de fricción y el tiempo de relajación (y por ende la temperatura del pico) depende de la estructura presentada por el largo total de dislocaciones \mathcal{L} , la concentración C_d de impurezas cercana a las dislocaciones, el intervalo promedio l entre los puntos de anclaje y la función de distribución $\rho(l)$ de los valores de l

En el caso en el cual las dislocaciones se mueven sobre varias distancias atómicas esta dependencia es muy obvia. En efecto de la altura del pico Q_m^{-1} su frecuencia ω y temperatura T_m se puede determinar los parámetros estructurales. De ec(8) y (9) sale

$$\Lambda l_0^2 = 4 Q_m^{-1} / \gamma J_m \quad (26a)$$

$$C_d l_0^2 = 16\sqrt{3} D G b^5 (\omega T)_m / 4\pi R^2 k T_m \omega \quad (26b)$$

donde $R \approx b$ y D es el coeficiente para difusión de las impurezas cercanas a la dislocación (7) (con su correspondiente energía de activación, como hemos discutido en sección 1). Hay que señalar que C_d y l_0 no son independientes uno del otro, porque si la concentración de impurezas es más grande probablemente l_0 disminuye al aumentar la probabilidad de formación de precipitados.

En el caso de dislocaciones sometidas a pequeños desplazamientos la dependencia de los parámetros estructurales es más compleja. Para una discusión cuantitativa hay que conocer el valor de $\tilde{\lambda}$ de ec (25). Primero se ve que la posición de la dislocación a $x = 0$ es solamente estable si $\tilde{\lambda} < 1$. Eso implica para un arco de largo $l_0 \rightarrow \infty$ que $\sum n_{i_0} a_i^2 / kT < 2 \sum n_{i_0} d_i$. Esta condición, por ejemplo, no sería cumplida si el potencial de interacción elástica (14) dado por $u_i \sim A/x$ fuera usado demasiado cerca de la línea de dislocación.

Una estimación del término $\sum n_{i_0} d_i$ se puede obtener de ec(16) si consideramos que la tensión crítica $\overline{\sigma}_y$ para deformación plástica a $T = 0^\circ K$ (sin fluctuaciones térmicas) es la tensión necesaria para que una dislocación escape fuera de su posición de equilibrio en el valle de potencial de su atmósfera a una distancia x , del orden de b . Entonces sale de ec(16)

$$2 b \sum n_{i_0} d_i \approx \overline{\sigma}_y b \approx 10^{-2} G b$$

usando valores de $\overline{\sigma}_y$ normalmente observados en redes cúbicas de cuerpo centrado. Una valor similar se obtiene considerando en detalle la interacción atómica entre una dislocación y su atmósfera de impurezas.

Si usamos para β el valor $G b^2 / 2$ obtenemos de ec(25b) el comportamiento siguiente: para $l_0 \gg 20 b$ el valor de $\tilde{\lambda}$ depende muy débilmente de la concentración C_d (que es proporcional a n_{i_0}), pero la altura del pico Q_m^{-1} disminuye si la densidad de la atmósfera aumenta. Para $l_0 < 20 b$ vale $\tilde{\lambda} \sim C_d l_0$ con $\tilde{\lambda} \ll 1$. Luego la altura del pico está dada por $Q_m^{-1} = \gamma \Lambda l_0^2 \tilde{\lambda} / 8$ en forma similar al valor obtenido en ec(8). Es conveniente señalar que, en este caso, se observa solamente una fricción interna detectable, si la densidad de dislocaciones tiene valores grandes de orden $\Lambda = 10^{12} \text{ cm}^{-2}$. Una comparación detallada de la teoría con los resultados experimentales de la literatura (3 - 8) daremos en una futura publicación.

Este trabajo en parte subvencionado por el US Army Research Office bajo subsidio DA-ARO-60-1.

APENDICE

La ec(3) para una tensión periódica es

$$\alpha \frac{\partial x}{\partial t} - \beta \frac{\partial^2 x}{\partial t^2} = \sigma_0 \exp(i\omega t) \quad (A1)$$

Estamos interesados en una solución $x = x(y, t)$ que es periódica en t y simétrica con respecto $x = l/2$ y entonces usamos el planteo

$$x = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \sin[(2n+1)\pi y/l] \cdot \exp(i\omega t) \quad (A2)$$

que satisface automáticamente la condición de contorno $x(0,t) = x(l,t) = 0$ Para los coeficientes a_n se obtiene

$$a_n = \frac{4\sigma_0 b l^2}{\pi^3 \beta (2n+1)^3} \frac{1 - i\omega \tau_n}{1 + \omega^2 \tau_n^2} \quad (A3)$$

con

$$\tau_n = \alpha l^2 / \pi^2 \beta (2n+1)^2 \quad (A4)$$

Para el término fundamental $n=0$, el τ_0 de (A4) es solamente un factor $8/\pi^2$ menor que el τ de ec(9)

La deformación debida al deslizamiento de la dislocación dada por ec (A2) es

$$\varepsilon_d = N \int_0^l x(y) dy b = 2 N l b \sum a_n / \pi (2n+1) \quad (A5)$$

si $N = 1/b$ es el número de arcos por volumen unitario. De ec(A3) y (A5) se ve que la contribución de los términos sucesivos a la deformación disminuye como $(2n+1)^{-4}$ y por ende la influencia de términos con $n > 0$ es despreciable. La contribución del término fundamental ($n=0$) a la fricción se obtiene por fin reemplazado en ec(8) el factor $1/4$ por $16/\pi^4$. Como estas correcciones son completamente despreciables en comparación con la incertidumbre de los otros parámetros, el uso de ec(4) que corresponde de muy preciso al término fundamental de la solución exacta es entonces justificado.

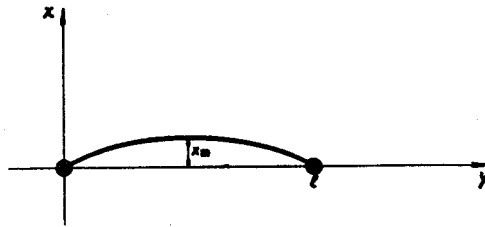


Fig. 1

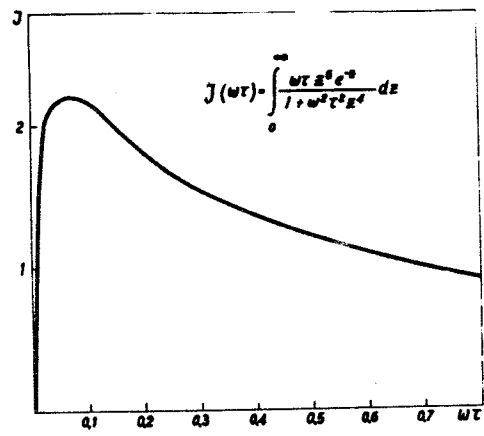


Fig. 2

BIBLIOGRAFIA

1. J.L. SNOEK, *Physica* 8, 711 (1941).
2. A.S. NOWICK, *Progress in Metal Physics*, vol.4 p. 1, (Pergamon Press 1953).
3. W. KOSTER, L. BANGERT UND R. HAHN, *Arch. Eisenhüttenw.* 25, 569 (1954).
4. K. KAMBER, D. KEEFER and C. WERT, *Acta Met.* 9, 403 (1961).
5. D.P. PETARRA, Thesis, Columbia Univ. (New York 1962).
6. W. KOSTER und G. KAMPSCHULTE, *Arch. Eisenhüttenw.* 32, 809 (1961).
7. G. SCHOECK and M. MONDINO, *J. Phys. Soc. Japan* (Tokyo Symposium 1962) a publicar.
8. D. BOONE, Thesis, Univ. of Illinois (Urbana 1962).
9. H. G. van BUEREN, *Imperfections in Crystals*, (North Holland Pub. Co., Amsterdam 1960).
10. T.MURA, J. TAMURA and J.O. BRITTAIN, *J. Appl. Phys.* 32, 92 1961.
11. A.H. COTTRELL, *Relation of Properties to Microstructure*, (ASM, Cleveland 1953).
12. A.S. KEH and H.A. WRIEDT, *Trans. AIME* a publicar.
13. J.O. KESSLER, *Phys. Rev.* 106, 646, (1957).
14. A. COCHARDT, G. SCHOECK and H. WIEDERSICH, *Acta Met.* 3, 533 (1955).
15. H.A. COTTRELL, *Dislocations and Plastic Flow in Crystals*, (Clarendon Press; Oxford 1953)
16. J.S. KOEHLER, *Imperfections in Nearly Perfect Crystals*, p. 197 (Wiley, New York 1952).
17. A. GRANATO and K. LUCKE, *J. Appl. Phys.* 27, 583 (1956).
18. J.S. KOEHLER and G. DE WIT, *Phys Rev.* 116, 1121 (1959).
19. J. LOTHE, *Techn. Report Office Naval Research Contact n° 760 (08)* (Pittsburgh 1961).
20. R.W. GURNEY, *Introduction to Statistical Mechanics*, p. 61 (McGraw-Hill, New York, 1949).

