

04.74.03

TE. 34/131

COMISION NACIONAL DE ENERGIA ATOMICA
DEPENDIENTE DE LA PRESIDENCIA DE LA NACION

AREA COMBUSTIBLES NUCLEARES

ANALISIS ELASTICO DE TENSIONES-DEFORMACIONES LOCALES
EN LA UNION DE LA VAINA CON EL TAPON DE LA BARRA COMBUSTIBLE

JOSE ALBERTO CASARIO

BUENOS AIRES
1974

TE. 34/131

COMISION NACIONAL DE ENERGIA ATOMICA
DEPENDIENTE DE LA PRESIDENCIA DE LA NACION

AREA COMBUSTIBLES NUCLEARES

ANALISIS ELASTICO DE TENSIONES-DEFORMACIONES LOCALES
EN LA UNION DE LA VAINA CON EL TAPON DE LA BARRA COMBUSTIBLE

JOSE ALBERTO CASARIO

BUENOS AIRES
1974

CAPITULO 1:

INTRODUCCION

1.- INTRODUCCION

En los reactores nucleares de potencia, heterogéneos, el Zircaloy es usado extensamente para las vainas cilíndricas de las barras combustibles. En su interior se apilan las pastillas de óxido de uranio. Su cara exterior es bañada axialmente por una corriente de fluido refrigerante. Durante el servicio los tubos están sometidos a estados tensionales múltiples que son variables en coordenadas espaciales y temporales. El presente trabajo tiene por finalidad evaluar el estado multiaxial de tensiones y deformaciones manifestadas en la zona de unión del tapón con la vaina de la barra combustible para ciertas condiciones de funcionamiento.

La importancia del análisis de estas perturbaciones locales reside en que se amplifican las tensiones en la región donde las propiedades mecánicas del material sufren importantes modificaciones como consecuencia del proceso metalúrgico de la soldadura.

, La teoría desarrollada sobre las láminas de revolución delgadas es de aplicación general. Parte de las hipótesis fundamentales de la teoría de la elasticidad. Se refiere a materiales con propiedades mecánicas de isotropía y homogeneidad. Esto es, ciertamente, una simplificación que nos permite un cuadro más simple sin disminuir por ello la esencia del fenómeno a estudiar. Sin embargo, en la realidad, los materiales se alejan de esta situación.

El Zircaloy presenta fuerte anisotropía mecánica como resultado de su marcada textura cristalográfica obtenida en el trabajado.

Los tubos circulares de Zircaloy muestran una típica orientación cristalográfica. La anisotropía mecánica se refleja en características de fluencia y creep disímiles en distintas direcciones y también para tensiones de distinto signo. Lo mismo ocurre con las constantes del comportamiento elástico. En servicio las propiedades mecánicas varían por efecto de radiación, temperatura y deformación plástica uniforme y no uniforme.

Un estudio más riguroso debería contemplar la anisotropía mecánica considerando valores de las constantes elásticas para cada dirección y deberían tomar en cuenta las variaciones de estas en la zona afectada por la soldadura.

Con fines simplificativos, partimos de la hipótesis del estado plano de tensión generalizado, característico de las láminas de revolución delgadas, que implica despreciar las tensiones normales en dirección radial y sus correspondientes deformaciones. La teoría desarrollada para láminas delgadas se vuelve más exacta a medida que la relación del espesor al radio medio disminuye. Un tratamiento más exacto exige considerar las soluciones de borde para láminas de espesor grueso, más complejas. En la vaina de la barra combustible para la Central Nuclear Atucha, la relación espesor-radio ($h/r = 0,0969 < 0,1$) nos ubica en la zona de error tolerable. Acotemos que la vaina combustible CANDU-PHW tiene una relación $h/r = 0,055$ y es colapsable.

Las tensiones locales se originan por la discontinui

dad de deformaciones de la vaina y del tapón en la unión de ambos.

En el estudio de la flexión de borde suponemos que el tapón presenta una rigidez inmensamente mayor que la de la vaina, o sea, tapón indeformable y condiciones de contorno de empujamiento no elástico. En realidad, la pequeña deformación de los bordes de la placa circular disminuye la deformación local de la lámina y las correspondientes tensiones, pero este efecto es despreciable.

Asumiremos que el tubo es una lámina cilíndrica circular sin excentricidades ni desviaciones axiales y con espesor constante circunferencial y axialmente. El alejamiento de esta idealidad geométrica involucra un estado asociado de tensiones y deformaciones por flexión.

En este trabajo no analizaremos las inestabilidades elásticas a que puedan dar lugar los esfuerzos de compresión en la lámina, particularmente en el caso de presión efectiva exterior.

En el cuarto capítulo aplicamos este estudio sobre las tensiones y deformaciones de discontinuidad en la región de la soldadura del tapón inferior con la vaina de la barra combustible prototipo de la Central Nuclear Atucha (PHW; 319 MW eléctricos). Ambos elementos están fabricados con Zircaloy 4. La geometría, dimensiones y tolerancias están representadas en la figura 5, acompañada de una macrofotografía típica de la zona de la soldadura (fig. 6).

En el espacio inferior para depósito de gases admitiremos que durante el servicio, la temperatura de la cara inte-

rior es igual a la de la cara exterior y ligeramente superior a la temperatura de entrada, en el canal, de la masa de fluido refrigerante. O sea, no hay gradientes de temperaturas radiales, circunferenciales ni axiales. Esto se cumple más aproximadamente cuanto más nos alejamos de la última pastilla y nos acercamos al tapón inferior, que es la zona de vaina afectada por la perturbación local que nos interesa. Esto equivale a suponer que el tapón inferior y la región de vaina cercana a él sufren un calentamiento uniforme hasta una temperatura común. Con un mismo coeficiente medio de dilatación térmica lineal en ambos elementos se presenta una igual deformación radial que al no estar impedidas no generan tensiones térmicas.

La flexión estudiada es de carácter senoidal amortiguado y se torna despreciable en la segunda longitud de onda lo que pone de manifiesto su carácter local; a su vez la distancia entre la última pastilla combustible y el tapón inferior es del orden de una decena de veces esa longitud de onda.

El estado de tensiones-deformaciones térmicas producidas por los gradientes de temperatura radiales, circunferenciales y axiales en la zona de quemado de la barra, consideramos que se amortiguan como para no interferir con estas perturbaciones locales. Lo mismo ocurre con las interacciones entre la pastilla y la vaina.

El casquillo inferior tiene un juego radial dentro de la vaina, especificada en el armado. Por esto, los desplazamientos radiales de la vaina producidos en la flexión de borde no llegan a interferir con el casquillo. En caso contrario varían las condiciones de contorno impuestas.

La barra es armada con una presión interna de helio a temperatura ambiente. Cuando comienza su servicio en el reactor en régimen, este gas se dilata por la temperatura del medio, sumando su presión parcial a la de los gases residuales que se desprenden y combinadamente una importante reducción de volumen que ocupan los gases por dilatación de las pastillas combustibles. Así se alcanza una presión interior inicial, del orden de cuatro veces la de llenado con helio, necesaria para reducir la presión efectiva exterior y evitar el colapso elástico y plástico de la vaina por efecto de la presión externa presente en el seno del fluido refrigerante y atenuar la interacción entre vaina y pastilla. Señalemos que el diseño de estas vainas es del tipo autoportante, resistentes a la presión efectiva exterior.

La presión interna va creciendo fundamentalmente por el desprendimiento del gas de fisión. Al final de la utilización, se estima una presión interna levemente inferior a la externa, con lo que la presión efectiva ha disminuído, pero el material de la vaina ha sufrido cambios metalúrgicos por efecto de la radiación y temperatura.

Aplicaremos las soluciones analíticas logradas en los casos:

a) Antes de entrar en servicio con presión interna de armado y temperatura ambiente. La importancia de este caso reside en conocer las variaciones de dimensión radial por efecto del fenómeno local.

b) En el momento inicial (tiempo cero) de servicio. En este caso la carga de superficie es la mayor de toda la vida

útil de la barra, pero a su vez, el zircaloy no está dañado por radiación. Sus constantes elásticas son las correspondientes a la temperatura media de servicio. Dejamos de lado el análisis de los estados transitorios, y su influencia en la zona analizada, que la barra recorre hasta alcanzar su estado propiamente inicial de servicio.

c) El elemento combustible, al final de su tiempo de residencia en el reactor, es transferido a la piletta de enfriamiento. La presión interior es máxima y la exterior es sensiblemente la ambiente. Aceptamos que la temperatura no supera los 100°C . El material está irradiado y recocido.

d) En la situación de un accidente de pérdida de presión del refrigerante en el canal. Al interrumpirse la refrigeración la temperatura en las barras se eleva rápidamente hasta que actúa la refrigeración auxiliar. En la zona del tapón inferior la estimaremos del orden de 500°C . Supondremos que este accidente ocurre al final del tiempo de residencia del elemento combustible para considerar la presión interior máxima y material irradiado.

El estado tensional hallado es máximo en las caras externas e internas, variando a lo largo del tubo. Para determinar si el material entra en fluencia, límite de esta teoría elástica, utilizamos el criterio de von Mises. Apelamos a éste, en vez de otros modelos más exactos que consideran anisotropía y efecto Bauschinger, por no poseer datos confiables de las tensiones de fluencia por tracción y compresión en las direcciones axiales y tangenciales. Según Mises, la tensión eficaz la comparamos con la tensión de fluencia por tracción en dirección axial, que es la menor y más confiable.

CAPITULO 2

DESARROLLO ANALITICO:

- 2.1. Teoría general de las láminas de revolución delgada.
- 2.2. Láminas delgadas cilíndricas circulares.
- 2.3. Soluciones de borde en las láminas delgadas cilíndricas circulares.
- 2.4. Cilindro circular sometido a presión interna, cerrado y empotrado en el extremo.
- 2.5. Tensión equivalente.
- 2.6. Criterios de fluencia.
- 2.7. Dilatación homogénea.

2.1. TEORIA GENERAL DE LAS CASCARAS DE REVOLUCION DELGADAS

Las láminas de revolución se obtienen por rotación de una curva plana o meridiano alrededor de un eje contenido en el plano de la curva. La lámina queda geoméricamente definida en el espacio mediante la función que describe la superficie media según las coordenadas θ y φ y el espesor en cada punto, también como función de esas coordenadas.

El borde, o límite, de una lámina, es el último círculo paralelo. Prácticamente es la unión de la lámina con otro elemento de distinta geometría, de distinto espesor o distintas propiedades mecánicas, como pueden ser: otra lámina, tapa, brida, elemento de soporte, etc.

Ecuaciones de equilibrio estático

Analizaremos un elemento de la lámina infinitamente pequeño, definido por las coordenadas θ y φ , limitado por dos círculos paralelos y dos curvas meridianas, según la figura 1.

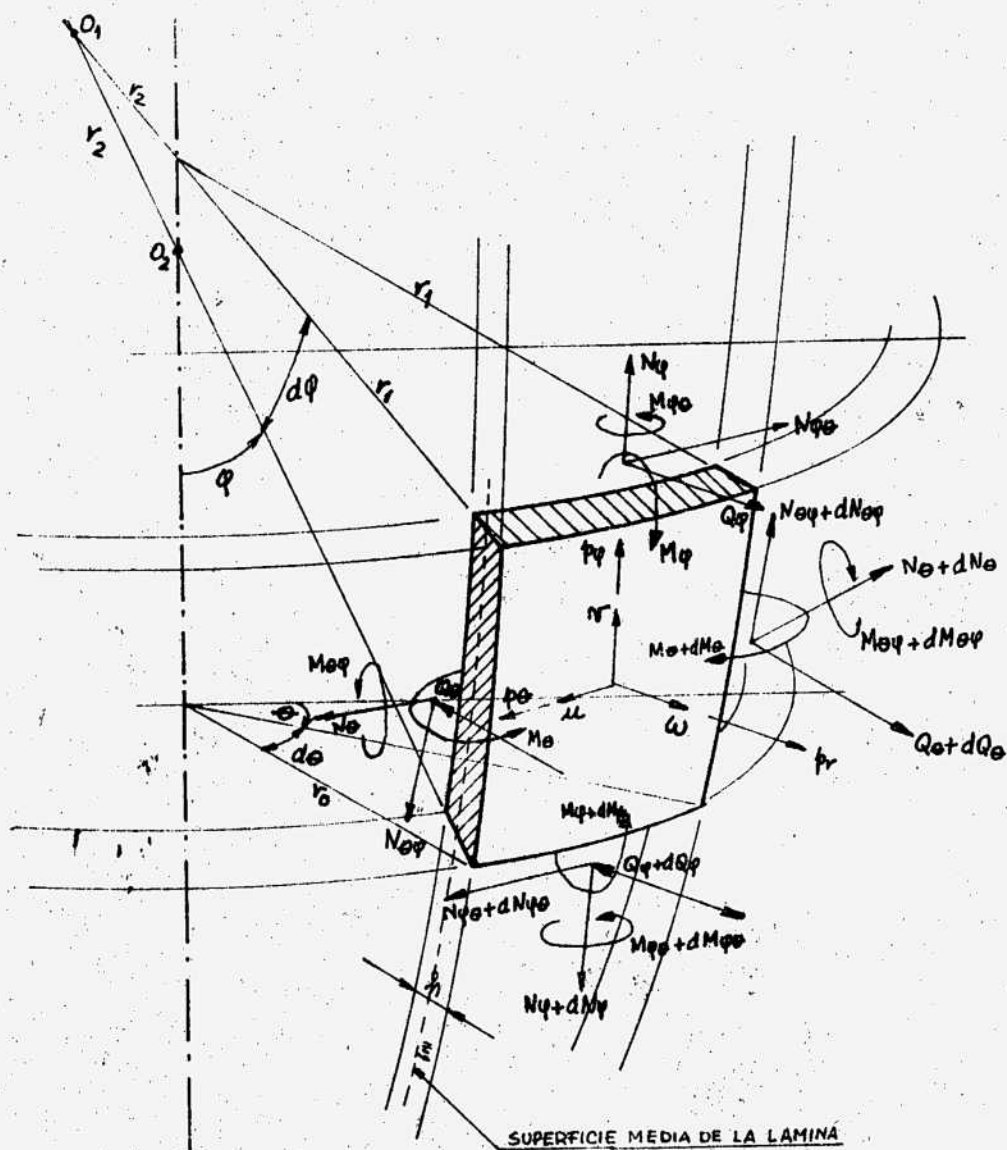
Se desprende que:

$$1) \quad r_0 = r_2 \sin \varphi$$

$$2) \quad dr_0 = da \cos \varphi = r_1 d\varphi \cos \varphi$$

Este elemento de lámina tendrá por dimensiones $r_1 d\varphi$, $r_0 d\theta$ y espesor h .

Consideremos una fuerza distribuida que actúa en la superficie (externa o interna) que es función continua de las coordenadas θ y φ . Esta carga de superficie la descompondremos en tres componentes según las siguientes direcciones: p_r según la normal a la superficie media en el elemento, p_φ según la tan



ELEMENTO DE LAMINA DE REVOLUCION

FIG. 1

gente al meridiano y p_θ según la tangente al paralelo. La carga de superficie y sus componentes se expresan por unidad de área de la superficie media.

Analizaremos el equilibrio de las fuerzas y de los momentos actuantes según las tres direcciones indicadas descartando las fuerzas dinámicas, o sea, el equilibrio estático. Obtenemos seis ecuaciones diferenciales de equilibrio en el espacio, que, simplificadas, son:

- 3) $\frac{\partial}{\partial \varphi} (r_0 N_\varphi) + r_1 \frac{\partial N_{\theta\varphi}}{\partial \theta} - r_1 N_\theta \cos \varphi - r_0 Q_\varphi + r_0 r_1 p_\varphi = 0$
- 4) $\frac{\partial}{\partial \varphi} (r_0 N_{\varphi\theta}) + r_1 \frac{\partial N_\theta}{\partial \theta} + r_1 N_{\theta\varphi} \cos \varphi - r_1 Q_\theta \sin \varphi + r_0 r_1 p_\theta = 0$
- 5) $r_1 N_\theta \sin \varphi + r_0 N_\varphi + r_1 \frac{\partial Q_\theta}{\partial \theta} + \frac{\partial}{\partial \varphi} (r_0 Q_\varphi) - r_0 r_1 p_r = 0$
- 6) $\frac{\partial}{\partial \varphi} (r_0 M_\varphi) + r_1 \frac{\partial M_{\theta\varphi}}{\partial \theta} - r_1 M_\theta \cos \varphi - r_0 r_1 Q_\varphi = 0$
- 7) $\frac{\partial}{\partial \varphi} (r_0 M_{\varphi\theta}) + r_1 \frac{\partial M_\theta}{\partial \theta} + r_1 M_{\theta\varphi} \cos \varphi - r_0 r_1 Q_\theta = 0$
- 8) $r_0 r_1 N_{\theta\varphi} - r_0 r_1 N_{\varphi\theta} - r_1 M_{\theta\varphi} \sin \varphi + r_0 M_{\varphi\theta} = 0$

Hipótesis de comportamiento del material

Supondremos que la materia es continua y perfecta, o sea, que nuestros sólidos serán mecánicamente isótropos en cualquier dirección y homogéneos en cualquier punto. El modelo físico de vinculación entre el estado de tensión y el estado de deformación en cada punto lo adoptaremos elástico-lineal (recuperación instantánea y respuesta lineal) hasta la fluencia. Así, nuestro estudio está limitado a que el estado de tensión en ningún punto sobrepase este límite. En la práctica este límite lo adoptaremos como el que deja una pequeña deformación residual de valor convencional. La ley generalizada de Hooke, en un punto se expresa, en función de las constantes elásticas del material utilizadas en la técnica, según las siguientes ecuaciones:

$$\begin{aligned}
 9) \quad \varepsilon_x &= \frac{1}{E} [\sigma_x - \nu(\sigma_y + \sigma_z)] \\
 \varepsilon_y &= \frac{1}{E} [\sigma_y - \nu(\sigma_x + \sigma_z)] \\
 \varepsilon_z &= \frac{1}{E} [\sigma_z - \nu(\sigma_x + \sigma_y)] \\
 \gamma_{xy} &= \frac{2}{E} (1+\nu) \tau_{xy} \\
 \gamma_{yz} &= \frac{2}{E} (1+\nu) \tau_{yz} \\
 \gamma_{zx} &= \frac{2}{E} (1+\nu) \tau_{zx}
 \end{aligned}$$

Superposición de efectos

Las solicitaciones externas serán absorbidas en el caso general por el efecto superpuesto de las tensiones uniformes normales y tangenciales con la rigidez a la flexión y a la torsión. Es decir, nos valdremos del principio de independencia de las acciones para analizar los efectos producidos por la aplicación de momentos flectores y torsores superponiéndoles un estado membranar producido por los esfuerzos normales, tangenciales y cargas de superficie.

Pequeño espesor:

En todo nuestro estudio nos mantendremos en láminas de espesor pequeño comparado a las restantes dos dimensiones y a los radios de curvatura de los paralelos y meridianos.

Con esta limitación, despreciaremos la influencia en los desplazamientos, de los esfuerzos cortantes Q_θ y Q_φ .

La tensión normal en la dirección transversal a la lámina, σ_z , se origina por la presión mutua entre las capas de la lámina debido a la componente normal de la fuerza de superficie. Varía a través del espesor, siendo su valor en las superficies extremas:

$$10) (\bar{T}_z)_{+h/2} = -p_{\text{reterior}}$$

$$11) (\bar{T}_z)_{-h/2} = -p_{\text{r interior}}$$

Como en general estas presiones están bastante por debajo de las tensiones de trabajo del material, despreciaremos $\bar{\sigma}_z$ y su influencia en los desplazamientos de la superficie media. Asumimos que el desplazamiento radial w es constante para cualquier apartamiento z de la superficie media, de esta manera la deformación $(\epsilon_z)_z$ es nula, ya que:

$$12) (\epsilon_z)_z = \frac{\partial w}{\partial z}$$

Al despreciar la función $(\bar{T}_z)_z$ no podemos, ni es necesario, distinguir el lugar de aplicación de las cargas. Adoptaremos como lugar geométrico de aplicación la superficie media de la lámina. Esto es válido, incluso, para las cargas máxicas, que ordinariamente varían a lo ancho del espesor, como el peso propio o fuerzas dinámicas.

El despreciar en los desplazamientos la acción de $\bar{\epsilon}_z$, $\bar{\epsilon}_{\varphi z}$ y $\bar{T}_z$, apareja la hipótesis que durante la flexión, los elementos rectos y normales a la superficie media permanecerán rectos y normales a la superficie media de la lámina deformada.

Significa que $\bar{T}_\theta$, $\bar{T}_\varphi$ y $\bar{\epsilon}_{\theta\varphi}$ son funciones lineales de z del tipo:

$$13) (\bar{T}_\theta)_z = (\bar{T}_\theta)_{z=0} + \left(\frac{\partial \bar{T}_\theta}{\partial z} \right)_{z=0} dz$$

Como despreciamos $\bar{T}_z$, $\bar{\epsilon}_{\theta z}$ y $\bar{\epsilon}_{\varphi z}$ en las deformaciones, suponemos actuando solamente $\bar{T}_\theta$, $\bar{T}_\varphi$ y $\bar{\epsilon}_{\theta\varphi}$, el tensor de tensiones toma la forma

$$14) \begin{vmatrix} \bar{T}_\theta & \bar{\epsilon}_{\theta\varphi} & 0 \\ \bar{\epsilon}_{\varphi\theta} & \bar{T}_\varphi & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}$$

característico del estado de tensión plano generalizado. Por el teorema de Cauchy es $\tau_{\theta\varphi} = \tau_{\varphi\theta}$.

En virtud de este estado tensional así supuesto, el modelo físico elástico-lineal generalizado que vincula las tensiones con las deformaciones, se obtiene a partir de las ecuaciones 9) y se expresan así:

$$15) (\sigma_{\varphi})_z = \frac{E}{1-\nu^2} [(\varepsilon_{\varphi})_z + \nu(\varepsilon_{\theta})_z]$$

$$16) (\sigma_{\theta})_z = \frac{E}{1-\nu^2} [(\varepsilon_{\theta})_z + \nu(\varepsilon_{\varphi})_z]$$

$$17) (\tau_{\theta\varphi})_z = (\tau_{\varphi\theta})_z = \frac{E}{2(1+\nu)} \gamma_{\theta}$$

En tratamientos más elaborados, siempre con cargas de superficie, al tener en cuenta $(\sigma_z)_z$, $(\tau_{\theta z})_z$ y $(\tau_{\varphi z})_z$, se demuestra que las tensiones $(\sigma_{\varphi})_z$, $(\tau_{\theta\varphi})_z$ y $(\sigma_{\theta})_z$ producidas por los momentos flectores y torsores dejan de ser funciones lineales de z porque las soluciones contienen términos de tercer orden en z . Estos términos parabólicos pierden importancia al disminuir el espesor de la lámina.

De igual manera σ_z tiene a través del espesor una distribución parabólica que en el caso de una lámina cilíndrica circular es de segundo grado en z y en el caso de una placa es de tercer grado.

Cuando el espesor es del mismo orden de magnitud que los radios de curvatura de la lámina, o en las proximidades del lugar de aplicación de cargas concentradas, es necesario analizar el problema con teorías más complejas. Acotemos que en el caso de una envolvente de gran espesor solicitada exclusivamente por presión radial uniforme y alejado de cargas concentradas y cambios geométricos y físicos, partiendo de la hipótesis de estado de tensión plano generalizado, tenemos la solución de Lamé.

Ecuaciones geométricas

El desplazamiento de la superficie media del elemento de lámina considerado, de coordenadas θ y φ , se puede descomponer vectorialmente según tres direcciones ortogonales: $\underline{u}$, $\underline{v}$ y $\underline{w}$.

Aquí haremos otra hipótesis limitativa para todo este trabajo: los desplazamientos serán de pequeña magnitud comparados al espesor. De esta manera despreciaremos los infinitésimos de orden superior en las ecuaciones geométricas de las deformaciones en función de los corrimientos:

$$18) \quad \epsilon_{\theta} = \frac{1}{r_0} \frac{\partial u}{\partial \theta} + \frac{r}{r_1 r_0} \frac{\partial r_0}{\partial \varphi} + \frac{w}{r_2}$$

$$19) \quad \epsilon_{\varphi} = \frac{1}{r_1} \frac{\partial v}{\partial \varphi} + \frac{w}{r_1}$$

Estas son las deformaciones uniformes normales a las caras del elemento. La deformación angular es:

$$20) \quad \gamma_{\theta\varphi} = \gamma_{\varphi\theta} = \frac{1}{r_1} \frac{\partial u}{\partial \varphi} - \frac{u \cos \varphi}{r_0} + \frac{1}{r_0} \frac{\partial v}{\partial \theta}$$

En donde, $\gamma_{\theta\varphi}$ es igual a $\gamma_{\varphi\theta}$ por el teorema de Cauchy.

Durante la flexión los radios de curvatura cambian. Teniendo en cuenta la limitación de pequeños desplazamientos y despreciando la influencia de las deformaciones uniformes ϵ_{θ} y ϵ_{φ} , los cambios de curvatura se expresan:

$$21) \quad \kappa_{\theta} = \frac{1}{r_0} \left[\frac{\partial}{\partial \theta} \left\{ \frac{1}{r_0} \left(\frac{\partial w}{\partial \theta} - u \sin \varphi \right) \right\} + \frac{\cos \varphi}{r_1} \left(\frac{\partial w}{\partial \varphi} - v \right) \right]$$

$$22) \quad \kappa_{\varphi} = \frac{1}{r_1} \cdot \frac{\partial}{\partial \varphi} \left(\frac{1}{r_1} \frac{\partial w}{\partial \varphi} - \frac{v}{r_1} \right)$$

De igual manera el momento torsor produce distorsión angular.

$$23) \quad \kappa_{\theta\varphi} = \frac{1}{2} \left\{ \frac{r_0}{r_1} \cdot \frac{\partial}{\partial \varphi} \left[\frac{1}{r_0^2} \left(\frac{\partial w}{\partial \theta} - u \sin \varphi \right) \right] + \frac{1}{r_0} \frac{\partial}{\partial \theta} \left[\frac{1}{r_1} \frac{\partial w}{\partial \varphi} - \frac{v}{r_1} \right] \right\}$$

De esta manera podemos indicar las deformaciones de una capa de espesor infinitamente pequeño, contenido en el elemento de lámina, a una distancia z de la superficie media, en la dirección del espesor y hacia afuera de la envolvente.

$$24) (\epsilon_\theta)_z = \epsilon_\theta - z \cdot \kappa_\theta$$

$$25) (\epsilon_\varphi)_z = \epsilon_\varphi - z \cdot \kappa_\varphi$$

$$26) (\gamma_{\theta\varphi})_z = \gamma_{\theta\varphi} - 2z \cdot \kappa_{\theta\varphi}$$

Ecuaciones físicas

Reemplazando las anteriores expresiones de las deformaciones en las 15), 16) y 17) tenemos:

$$27) (\sigma_\varphi)_z = \frac{E}{1-\nu^2} [\epsilon_\varphi + \nu \epsilon_\theta - z (\kappa_\varphi + \nu \kappa_\theta)]$$

$$28) (\sigma_\theta)_z = \frac{E}{1-\nu^2} [\epsilon_\theta + \nu \epsilon_\varphi - z (\kappa_\theta + \nu \kappa_\varphi)]$$

$$29) (\tau_{\theta\varphi})_z = \frac{E}{2(1+\nu)} (\gamma_{\theta\varphi} - 2z \kappa_{\theta\varphi})$$

Obtenemos los esfuerzos y momentos resultantes en las secciones integrando a lo largo del espesor, desde $z = -h/2$ a $z = h/2$. Estos esfuerzos y momentos son por unidad de longitud de paralelo o de meridiano según corresponda.

$$30) N_\theta = \int_{-h/2}^{h/2} (\sigma_\theta)_z \left(1 - \frac{z}{r_1}\right) dz$$

$$31) N_\varphi = \int_{-h/2}^{h/2} (\sigma_\varphi)_z \left(1 - \frac{z}{r_2}\right) dz$$

$$32) N_{\theta\varphi} = \int_{-h/2}^{h/2} (\tau_{\theta\varphi})_z \left(1 - \frac{z}{r_1}\right) dz$$

$$33) N_{\varphi\theta} = \int_{-h/2}^{h/2} (\tau_{\varphi\theta})_z \left(1 - \frac{z}{r_2}\right) dz$$

$$34) Q_\theta = \int_{-h/2}^{h/2} (\tau_{\theta z})_z \left(1 - \frac{z}{r_1}\right) dz$$

$$35) Q_\varphi = \int_{-h/2}^{h/2} (\tau_{\varphi z})_z \left(1 - \frac{z}{r_2}\right) dz$$

Teniendo en cuenta la regla de signos establecidas

$$36) M_{\varphi} = \int_{-h/2}^{h/2} -(\sigma_{\varphi})_z \cdot z \cdot \left(1 - \frac{z}{r_2}\right) dz$$

$$37) M_{\theta} = \int_{-h/2}^{h/2} -(\sigma_{\theta})_z \cdot z \cdot \left(1 - \frac{z}{r_1}\right) dz$$

$$38) M_{\theta\varphi} = \int_{-h/2}^{h/2} -(\tau_{\theta\varphi})_z \cdot z \cdot \left(1 - \frac{z}{r_1}\right) dz$$

$$39) M_{\varphi\theta} = \int_{-h/2}^{h/2} -(\tau_{\varphi\theta})_z \cdot z \cdot \left(1 - \frac{z}{r_2}\right) dz$$

Los términos $\frac{z}{r_1}$ y $\frac{z}{r_2}$ se deben a que las secciones laterales del elemento tienen forma trapezoidal por la curvatura de la lámina. La curvatura de los paralelos es, en general, distinta a la curvatura de los meridianos. Por esta razón, si bien es $\tau_{\theta\varphi} = \tau_{\varphi\theta}$, los esfuerzos transversales $N_{\theta\varphi}$ y $N_{\varphi\theta}$ son generalmente distintos y lo mismo ocurre con los momentos de torsión $M_{\theta\varphi}$ y $M_{\varphi\theta}$. Por la limitación inicial de que h es pequeño comparado con r_1 y r_2 , los valores $\frac{z}{r_1}$ y $\frac{z}{r_2}$ se pueden despreciar. Esta simplificación implica que la ecuación 8) de equilibrio no se satisface, salvo el caso en que r_1 es igual a r_2 . Por esta razón no la tendremos en cuenta de aquí en más y sólo mantendremos como ecuaciones de equilibrio las cinco primeras.

Sustituyendo en estas expresiones así simplificadas las ecuaciones 27), 28) y 29) e integrando obtenemos:

$$40) N_{\varphi} = \frac{E h}{1-\nu^2} (\epsilon_{\varphi} + \nu \epsilon_{\theta})$$

$$41) N_{\theta} = \frac{E h}{1-\nu^2} (\epsilon_{\theta} + \nu \epsilon_{\varphi})$$

$$42) N_{\theta\varphi} = N_{\varphi\theta} = \frac{E h}{2(1+\nu)} \chi_{\theta\varphi}$$

Que son los esfuerzos uniformes. Los momentos resultan:

$$43) M_{\varphi} = \frac{E h^3}{12(1-\nu^2)} (\chi_{\varphi} + \nu \chi_{\theta})$$

Llamando "coeficiente de rigidez a la flexión" de la lámina a:

$$44) \quad D = \frac{E h^3}{12(1-\nu^2)}$$

La expresión de los momentos se simplifican

$$45) \quad M_\varphi = D (\kappa_\varphi + \nu \kappa_\theta)$$

$$46) \quad M_\theta = D (\kappa_\theta + \nu \kappa_\varphi)$$

$$47) \quad M_{\theta\varphi} = M_{\varphi\theta} = D(1-\nu) \kappa_{\theta\varphi}$$

Tensiones

Determinaremos las tensiones actuantes en el elemento de lámina, asumiendo que los esfuerzos N_θ , N_φ y $N_{\theta\varphi}$ se distribuyen uniformemente a lo ancho del espesor en virtud de lo pequeño de éste.

Introduciendo las expresiones 40) y 43) en la 27) y operando obtenemos:

$$48) \quad (\sigma_\varphi)_z = \frac{N_\varphi}{h} - 12 \frac{M_\varphi}{h^3} z$$

Operando de igual manera con las 41) y 46) en la 28):

$$49) \quad (\sigma_\theta)_z = \frac{N_\theta}{h} - 12 \frac{M_\theta}{h^3} z$$

Idénticamente con las 42) y 47) en la 29):

$$50) \quad (\tau_{\theta\varphi})_z = (\tau_{\varphi\theta})_z = \frac{N_{\theta\varphi}}{h} - 12 \frac{M_{\theta\varphi}}{h^3} z$$

Es inmediato que las tensiones máximas se producen en las capas más alejadas de la superficie media de la lámina. Para $z = h/2$ y $z = -h/2$ las expresiones 48), 49) y 50) se convierten en:

$$51) (\sigma_{\varphi})_{z=\pm h/2} = \frac{N_{\varphi}}{h} \mp \epsilon \frac{M_{\varphi}}{h^2}$$

$$52) (\sigma_{\theta})_{z=\pm h/2} = \frac{N_{\theta}}{h} \mp \epsilon \frac{M_{\theta}}{h^2}$$

$$53) (\tau_{\theta\varphi})_{z=\pm h/2} = \frac{N_{\theta\varphi}}{h} \mp \epsilon \frac{M_{\theta\varphi}}{h^2}$$

Los esfuerzos cortantes Q_{θ} y Q_{φ} por unidad de longitud se determinan a partir de las ecuaciones de equilibrio 6) y 7) en función de M_{θ} , M_{φ} , $M_{\theta\varphi}$ y $M_{\varphi\theta}$.

Por similitud con el estado de tensiones plano generalizado aplicado en la teoría elemental de flexión de placas y vigas, admitiremos, aproximadamente, una distribución parabólica de $(\tau_{\theta z})_z$ y de $(\tau_{\varphi z})_z$ a través del espesor de la siguiente forma:

$$54) (\tau_{\theta z})_z = (\tau_{z\theta})_z = \frac{6 Q_{\theta}}{h^3} \left(\frac{h^2}{4} - z^2 \right)$$

$$55) (\tau_{\varphi z})_z = (\tau_{z\varphi})_z = \frac{6 Q_{\varphi}}{h^3} \left(\frac{h^2}{4} - z^2 \right)$$

En las caras de la lámina, para $z = \pm h/2$, estas tensiones cortantes se anulan.

En la superficie media, para $z = 0$, alcanzan su mayor valor.

$$56) (\tau_{\theta z})_{z=0} = \frac{3}{2} \frac{Q_{\theta}}{h}$$

$$57) (\tau_{\varphi z})_{z=0} = \frac{3}{2} \frac{Q_{\varphi}}{h}$$

Cargas con simetría rotacional

En el caso en que la carga de superficie aplicada ten

ga simetría respecto al eje de rotación de la envolvente, el análisis tensional se simplifica ya que p_{θ} es nulo y p_r y p_{φ} son independientes de θ , o sea constantes para cada θ ; sólo son funciones de φ .

Si $p_{\theta} = 0$, implica que:

$$Q_{\theta} = 0$$

$$N_{\theta\varphi} = N_{\varphi\theta} = 0$$

$$M_{\theta\varphi} = M_{\varphi\theta} = 0$$

las ecuaciones de equilibrio se reducen a:

$$58) \frac{d}{d\varphi} (r_0 N_{\varphi}) - r_1 N_{\theta} \cos \varphi - r_0 Q_{\varphi} + r_0 r_1 p_{\varphi} = 0$$

$$59) r_1 \frac{\partial N_{\theta}}{\partial \theta} = 0$$

$$60) \frac{d}{d\varphi} (r_0 Q_{\varphi}) + r_1 N_{\theta} \sin \varphi + r_0 N_{\varphi} - r_0 r_1 p_r = 0$$

$$61) \frac{d}{d\varphi} (r_0 M_{\varphi}) - r_1 M_{\theta} \cos \varphi - r_0 r_1 Q_{\varphi} = 0$$

$$62) r_1 \frac{\partial M_{\theta}}{\partial \theta} = 0$$

De las expresiones 59) y 62) vemos que N_{θ} y M_{θ} es constante a lo largo del paralelo, o sea, son independientes de θ .

Eliminando N_{θ} entre 58) y 60):

$$\frac{d}{d\varphi} (r_0 N_{\varphi}) \sin \varphi - r_0 Q_{\varphi} \sin \varphi + r_0 r_1 p_{\varphi} \sin \varphi + r_0 N_{\varphi} \cos \varphi + \frac{d}{d\varphi} (r_0 Q_{\varphi}) \cos \varphi - r_0 r_1 p_r \cos \varphi = 0$$

$$\frac{d}{d\varphi} (r_0 N_{\varphi} \sin \varphi) + \frac{d}{d\varphi} (r_0 Q_{\varphi} \cos \varphi) + r_0 r_1 (p_{\varphi} \sin \varphi - p_r \cos \varphi) = 0$$

Integrando a lo largo de φ y multiplicando ambos miembros por 2π , obtenemos:

63)

$$2\pi r_0 (N_{\varphi} \sin \varphi + Q_{\varphi} \cos \varphi) = 2\pi \int_{\varphi} r_0 r_1 (p_r \cos \varphi - p_{\varphi} \sin \varphi) d\varphi = R$$

R es la carga total en la dirección del eje de revolución que actúa en el paralelo extremo de la cáscara, en el caso de $p_\theta = 0$. Esta expresión puede usarse como una ecuación de equilibrio.

$\frac{R}{2\pi r_0}$ es la carga repartida a lo largo del paralelo final.

Notemos que p_r y p_φ en general son funciones del punto considerado, pero en este caso de $p_\theta = 0$ son funciones de φ pero independientes de θ .

Membranas de revolución

Asumiendo que la lámina no absorbe momentos flectores ni torsores y que las cargas de superficie las absorberá totalmente las tensiones que actúan paralelas al plano tangente en cada punto de la superficie media de la lámina. Esta hipótesis implica que sólo se tienen en cuenta las tensiones debidas a la deformación de la superficie media y estas tensiones se distribuyen uniformemente a lo ancho del espesor.

Las soluciones de membrana así logradas son válidas suficientemente alejadas de aplicación de cargas concentradas y de discontinuidades geométricas y físicas. En caso contrario, los momentos flectores y las fuerzas cortantes son parte necesaria de la solución completa de la lámina.

En realidad, hay flexión y torsión para un caso general de cargas de superficie en una lámina. Pero si ésta es de pequeño espesor comparada a las restantes dimensiones y a los radios de curvatura de los meridianos y paralelos, su coeficiente de rigidez es pequeño y los momentos flectores y torsores son despreciables, de igual manera para las variaciones peque-

ñas de curvatura. Para algunas geometrías particulares de láminas, los momentos flectores y torsores no se pueden despreciar como el caso de la lámina toroidal.

Se desprende de estas consideraciones que los desplazamientos en el último círculo paralelo no deben ser restringidas y que las reacciones en el borde se presentan paralelas al plano tangente al meridiano.

En las condiciones de equilibrio 3) a 8) introducimos:

$$M_{\theta} = 0$$

$$M_{\varphi} = 0$$

$$M_{\theta\varphi} = 0$$

$$M_{\varphi\theta} = 0$$

surge de la 6) que $Q_{\varphi} = 0$ y de la 7) que $Q_{\theta} = 0$.

Las ecuaciones de equilibrio se reducen a:

$$64) \frac{\partial}{\partial \varphi} (r_0 N_{\varphi}) + r_1 \frac{\partial N_{\theta\varphi}}{\partial \theta} - r_1 N_{\theta} \cos \varphi + p_{\varphi} r_0 r_1 = 0$$

$$65) \frac{\partial}{\partial \varphi} (r_0 N_{\varphi\theta}) + r_1 \frac{\partial N_{\theta\varphi}}{\partial \theta} + r_1 N_{\theta\varphi} \cos \varphi + p_{\theta} r_0 r_1 = 0$$

$$66) r_1 N_{\theta} \sin \varphi + r_0 N_{\varphi} - p_r r_0 r_1 = 0$$

$$67) N_{\theta\varphi} - N_{\varphi\theta} = 0$$

De la ecuación 67) surge que $N_{\theta\varphi} = N_{\varphi\theta}$. Esto implica que las incógnitas son N_{θ} ; N_{φ} ; $N_{\theta\varphi} = N_{\varphi\theta}$ y para resolverlas contamos con las tres ecuaciones diferenciales de equilibrio 64); 65) y 66), por lo que las tensiones de membrana están totalmente definidas por las condiciones de equilibrio y el problema es estáticamente determinado conociendo las cargas que actúan sobre ella

Reemplazando la relación geométrica 1) en la ecuación

$$66): r_1 N_\theta \sin \varphi + r_2 N_\varphi \sin \varphi - p_r r_1 r_2 \sin \varphi = 0$$

$$68) \frac{N_\theta}{r_2} + \frac{N_\varphi}{r_1} - p_r = 0$$

importante ecuación de e-

quilibrio de las membranas.

Membranas con simetría rotacional

En el caso en que las cargas de superficie aplicadas a las membranas tengan simetría referida al eje de rotación, o sea $p_\theta = 0$, vimos que implica que $N_{\theta\varphi} = N_{\varphi\theta} = 0$.

Las ecuaciones de equilibrio 42);43);44) se reducen

a:

$$69) \frac{\partial}{\partial \varphi} (r_0 N_\varphi) - r_1 N_\theta \cos \varphi + p_\varphi r_0 r_1 = 0$$

$$70) r_1 \frac{\partial N_\theta}{\partial \theta} = 0$$

$$71);66) r_1 N_\theta \sin \varphi + r_0 N_\varphi - p_r r_0 r_1 = 0$$

La expresión 70) indica, como ya vimos en la 59), que N_θ es independiente de θ o sea, constante a lo largo del paralelo.

Eliminando N_θ entre la 69) y la 71) obtenemos:

$$\frac{\partial}{\partial \varphi} (r_0 N_\varphi) \sin \varphi + r_0 N_\varphi \cos \varphi = p_r r_0 r_1 \cos \varphi - p_\varphi r_0 r_1 \sin \varphi$$

$$\frac{\partial}{\partial \varphi} (r_0 N_\varphi \sin \varphi) = r_0 r_1 (p_r \cos \varphi - p_\varphi \sin \varphi)$$

Integrando y recorriendo φ y multiplicando ambos miembros por

2π es:

$$72) 2\pi r_0 N_\varphi \sin \varphi = 2\pi \int_\varphi r_0 r_1 (p_r \cos \varphi - p_\varphi \sin \varphi) d\varphi = R$$

Esta expresión es un caso particular cuando $Q_\varphi = 0$ de

la hallada en 63), donde R es la carga total en la dirección del eje de revolución que actúa en el último círculo paralelo.

En el caso particular de membranas de revolución con cargas superficiales simétricas respecto al eje ($p_{\theta} = 0$), mediante la ecuación de equilibrio 68) se halla N_{θ} . En este caso, las ecuaciones diferenciales de equilibrio 69) y 71) se pueden reemplazar por las ecuaciones 68) y 72).

Flexión de borde

Los desplazamientos y reacciones obtenidas para el último círculo paralelo, usando la teoría de membrana en muchos casos son incompatibles con las condiciones de vínculo real. La flexión producida generalmente es localizada en las cercanías del límite y las tensiones producidas se superponen a las tensiones membranales. Esto se considera en las "soluciones de borde" como veremos en nuestro caso más adelante.

2.2. LAMINAS CILINDRICAS DE SECCION CIRCULAR

Un elemento de lámina queda definido por las coordenadas x, θ de la superficie media. Conociendo el espesor h en cada punto queda geométricamente definida la lámina.

En este caso, según vemos en la figura 2 es:

$$73) \quad \left\{ \begin{array}{l} r_1 = \infty \\ r_2 = \text{constante} \\ \varphi = \pi/2 \end{array} \right.$$

De acuerdo a la expresión 1) es $r_0 = r_2 \sin \pi/2$ de donde:

$$74) \quad r_0 = r_2 = \text{constante} = r$$

Este es el radio del cilindro medio.

Las seis ecuaciones diferenciales de equilibrio, teniendo en cuenta 73) y 74), se pueden derivar como caso particular de las ecuaciones 3) a 8) o bien se pueden hallar directamente de la figura anterior.

$$75) \quad r \frac{\partial N_x}{\partial x} + \frac{\partial N_{\theta x}}{\partial \theta} + r p_r = 0$$

$$76) \quad \frac{\partial N_{\theta}}{\partial \theta} + r \frac{\partial N_{x\theta}}{\partial x} - Q_{\theta} + r p_{\theta} = 0$$

$$77) \quad \frac{\partial Q_{\theta}}{\partial \theta} + r \frac{\partial Q_x}{\partial x} + N_{\theta} - r p_r = 0$$

$$78) \quad \frac{\partial M_{\theta}}{\partial \theta} + r \frac{\partial M_{x\theta}}{\partial x} - r Q_{\theta} = 0$$

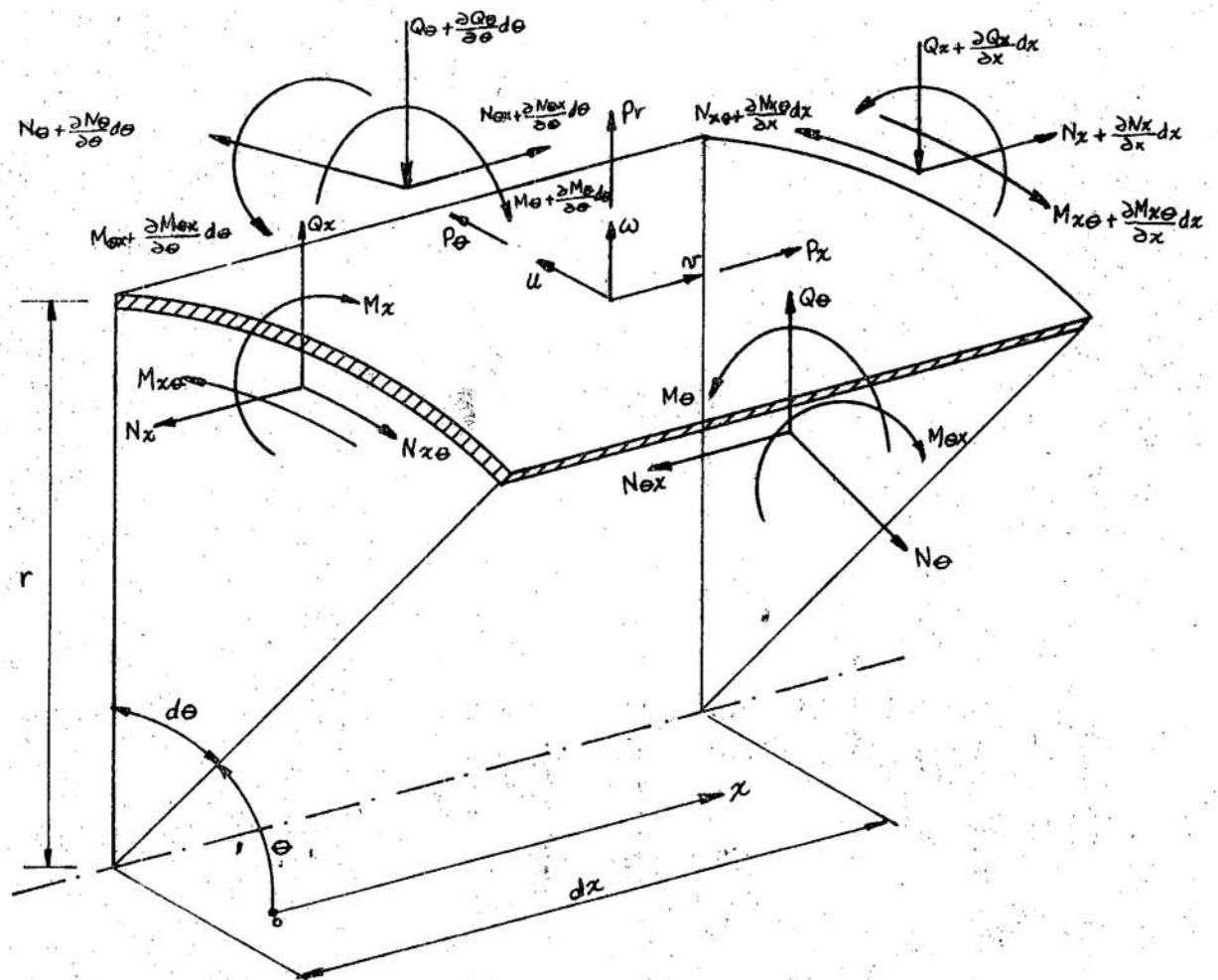
$$79) \quad r \frac{\partial M_x}{\partial x} + \frac{\partial M_{\theta x}}{\partial \theta} - r Q_x = 0$$

$$80) \quad r N_{x\theta} - r N_{\theta x} + M_{\theta x} = 0$$

Las componentes del desplazamiento de ese punto de coordenadas x, θ serán u, v, w . En función de ellas expresamos las deformaciones de la superficie media como en las ecuaciones 18), 19) y 20) del caso general.

$$81) \quad \epsilon_{\theta} = \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial \theta} + \frac{w}{r}$$

Al ser $r_1 \rightarrow \infty$ no se pueden utilizar las ecuaciones 19) y 20); de



ELEMENTO DE LAMINA CILINDRICA CIRCULAR.

FIG. 2

bemos reemplazarla por:

$$82) \quad \varepsilon_x = \frac{dv}{dx}$$

$$83) \quad \gamma_{\theta x} = \gamma_{x\theta} = \frac{\partial v}{r \partial \theta} + \frac{\partial u}{\partial x} \quad (\text{deformación tangencial})$$

Aceptando que elementos rectos y normales a la superficie media de la lámina permanecen rectos y normales a la superficie media de la cáscara deformada.

Los cambios de curvatura y la torsión de la superficie media se pueden expresar, considerando la regla de signos adoptadas, como:

$$84) \quad \kappa_x = \frac{\partial^2 w}{\partial x^2}$$

$$85) \quad \kappa_\theta = \frac{1}{r^2} \left[\frac{\partial^2 w}{\partial \theta^2} - \frac{\partial v}{\partial \theta} \right]$$

$$86) \quad \kappa_{\theta x} = \frac{1}{r^2} \left[\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial \theta} - \frac{\partial v}{\partial x} \right]$$

Despreciaremos la influencia de las deformaciones de la superficie media (ε_θ ; ε_x ; $\gamma_{\theta x}$) sobre el cambio de curvatura. A una distancia z de la superficie media, en la dirección normal a ella y hacia afuera, las deformaciones son:

$$87) \quad \varepsilon_{\theta z} = \varepsilon_\theta - z \cdot \kappa_\theta$$

$$88) \quad \varepsilon_{x z} = \varepsilon_x - z \cdot \kappa_x$$

$$89) \quad \gamma_{\theta x z} = \gamma_{\theta x} - 2z \cdot \kappa_{\theta x}$$

Suponemos que $\sigma_z = 0$ como en el caso general.

Vinculando las tensiones con las deformaciones, según la ley de Hooke obtenemos las ecuaciones (semejantes a las ecuaciones 27), 28), y 29)):

$$90) \quad \sigma_{x z} = \frac{E}{1-\nu^2} \left[\varepsilon_x + \nu \varepsilon_\theta - z (\kappa_x + \nu \kappa_\theta) \right]$$

$$91) \quad \sigma_{\theta z} = \frac{E}{1-\nu^2} \left[\varepsilon_\theta + \nu \varepsilon_x - z (\kappa_\theta + \nu \kappa_x) \right]$$

$$92) \quad \tau_{\theta x z} = \tau_{x \theta z} = \frac{E}{2(1+\nu)} \left[\gamma_{\theta x} - 2z \cdot \kappa_{\theta x} \right]$$

Los esfuerzos resultantes por unidad de longitud de

las secciones normales son:

$$93) \quad N_{\theta} = \int_{-h/2}^{h/2} \tau_{\theta z} dz$$

$$94) \quad N_x = \int_{-h/2}^{h/2} \tau_{xz} \left(1 - \frac{z}{r}\right) dz$$

$$95) \quad N_{\theta x} = \int_{-h/2}^{h/2} \tau_{\theta x z} dz$$

$$96) \quad N_{x\theta} = \int_{-h/2}^{h/2} \tau_{x\theta z} \left(1 - \frac{z}{r}\right) dz$$

$$97) \quad M_{\theta} = \int_{-h/2}^{h/2} -\tau_{\theta z} z dz$$

$$98) \quad M_x = \int_{-h/2}^{h/2} -\tau_{xz} z \left(1 - \frac{z}{r}\right) dz$$

$$99) \quad M_{\theta x} = \int_{-h/2}^{h/2} -\tau_{\theta x z} z dz$$

$$100) \quad M_{x\theta} = \int_{-h/2}^{h/2} -\tau_{x\theta z} z \left(1 - \frac{z}{r}\right) dz$$

$$101) \quad Q_{\theta} = \int_{-h/2}^{h/2} \tau_{\theta z} dz$$

$$102) \quad Q_x = \int_{-h/2}^{h/2} \tau_{xz} z \left(1 - \frac{z}{r}\right) dz$$

, El valor $\frac{z}{r}$ se debe a que la sección transversal de la lámina cilíndrica de sección circular tiene forma trapezoidal.

Aunque $\tau_{\theta x} = \tau_{x\theta}$, los esfuerzos $N_{\theta x}$ y $N_{x\theta}$ y los momentos $M_{\theta x}$ y $M_{x\theta}$ son distintos. Como en nuestras hipótesis h es pequeño comparado a r , el término $\frac{z}{r}$ lo despreciamos. La ecuación de equilibrio 80) deja de cumplirse y no la tendremos en cuenta.

Incorporando las ecuaciones 90, 91 y 92, integramos a lo largo de espesor y obtenemos:

$$103) \quad N_{\theta} = \frac{Eh}{1-\nu^2} (\epsilon_{\theta} + \nu \epsilon_x)$$

$$104) N_x = \frac{Eh}{1-\nu^2} (\epsilon_x + \nu \epsilon_\theta)$$

$$105) N_{\theta x} = N_{x\theta} = \frac{Eh}{2(1+\nu)} \gamma_{\theta x}$$

$$106) M_\theta = D (\kappa_\theta + \nu \kappa_x)$$

$$107) M_x = D (\kappa_x + \nu \kappa_\theta)$$

$$108) M_{\theta x} = M_{x\theta} = D(1-\nu) \kappa_{\theta x}$$

Lámina cilíndrica de sección circular con cargas de superficie simétricas respecto al eje

Si $p_\theta = 0$, la consecuencia es:

$$Q_\theta = 0$$

$$N_{\theta x} = N_{x\theta} = 0$$

$$M_{\theta x} = M_{x\theta} = 0$$

Las ecuaciones de equilibrio ahora son:

$$109) r \frac{dN_x}{dx} + r p_x = 0$$

$$110) \frac{dN_\theta}{d\theta} = 0$$

$$111) r \frac{dQ_x}{dx} + N_\theta - r p_r = 0$$

$$112) \frac{dM_\theta}{d\theta} = 0$$

$$113) r \frac{dM_x}{dx} - r Q_x = 0$$

Las ecuaciones 110) y 112) implican que N_θ y M_θ es constante a lo largo de la circunferencia media.

De la 113) obtenemos:

$$114) Q_x = \frac{dM_x}{dx}$$

Si además de $p_\theta = 0$, se da que $p_x = 0$, la ecuación 109) indica que N_x es constante a lo largo de la generatriz, o sea, independiente de x .

Membrana cilíndrica de sección circular

Como ya vimos, en las soluciones de membrana debe ser:

$$M_{\theta} = 0$$

$$M_x = 0$$

$$M_{\theta x} = M_{x\theta} = 0$$

Se desprende de la ecuación 78) que $Q_{\theta} = 0$ y de la ecuación 79) que $Q_x = 0$.

Las ecuaciones de equilibrio toman la forma:

$$115) \quad r \frac{\partial N_x}{\partial x} + \frac{\partial N_{\theta x}}{\partial \theta} + r p_x = 0$$

$$116) \quad \frac{\partial N_{\theta}}{\partial \theta} + r \frac{\partial N_{x\theta}}{\partial x} + r p_{\theta} = 0$$

$$117) \quad N_{\theta} - r p_r = 0 \quad \text{o sea:} \quad N_{\theta} = r \cdot p_r$$

$$118) \quad N_{x\theta} - N_{\theta x} = 0; \text{ que significa } N_{x\theta} = N_{\theta x}$$

Conociendo las cargas externas, las ecuaciones 115), 116) y 117) nos permiten resolver las tres incógnitas N_{θ} ; N_x y $N_{\theta x}$. El problema es estáticamente determinado.

Deformaciones en membranas cilíndricas circulares

, Del sistema formado por las dos ecuaciones de equilibrio 103) y 104) podemos resolver ϵ_{θ} y ϵ_x en función de N_{θ} y N_x , resultando:

$$119) \quad \epsilon_{\theta} = \frac{N_{\theta}}{hE} - \nu \frac{N_x}{hE}$$

$$120) \quad \epsilon_x = \frac{N_x}{hE} - \nu \frac{N_{\theta}}{hE}$$

Introduciendo en ellas las ecuaciones 81) y 82) tenemos:

$$121) \quad \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial \theta} + \frac{w}{r} = \frac{1}{hE} (N_{\theta} - \nu N_x)$$

$$122) \quad \frac{dw}{dx} = \frac{1}{hE} (N_x - \nu N_{\theta})$$

De igual manera, introduciendo la ecuación 83) en la 105) obtenemos:

$$123) \quad \frac{1}{r} \frac{\partial N}{\partial \theta} + \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{2(1+\nu)}{Eh} N_{\theta x}$$

Membrana cilíndrica circular con carga de superficie simétrica respecto al eje

Si las cargas de superficie tienen simetría rotacional, o sea, $p_{\theta} = 0$, sabemos que $N_{\theta x} = N_{x\theta} = 0$.

El sistema de ecuaciones de equilibrio se reduce a:

$$124) \quad \frac{\partial N_x}{\partial x} + p_x = 0$$

$$125) \quad r \frac{\partial N_{\theta}}{\partial \theta} = 0$$

$$126) \quad N_{\theta} - r p_r = 0$$

La ecuación 125) indica que cuando la carga tiene simetría rotacional, N_{θ} es independiente de θ , o sea, es constante a lo largo de cada circunferencia media.

Si $p_x = 0$, la ecuación 124) señala que N_x es independiente de x ; constante a lo largo de la generatriz.

Como $p_{\theta} = 0$ por simetría tenemos que $u = 0$ y v es constante en el paralelo. Luego es: $\frac{\partial u}{\partial \theta} = 0$; $\frac{\partial u}{\partial x} = 0$ y $\frac{\partial v}{\partial \theta} = 0$.

Reemplazando estos valores en las ecuaciones 121) y 122) tenemos:

$$127) \quad \frac{w}{r} = \frac{1}{hE} (N_{\theta} - \nu N_x)$$

$$128) \quad \frac{dw}{dx} = \frac{1}{hE} (N_x - \nu N_{\theta})$$

La ecuación 83 indica que $\chi_{\theta x} = 0$.

Despejando w en la ecuación 127):

$$129) \quad w = \frac{r}{hE} (N_{\theta} - \nu N_x)$$

Esta ecuación señala el desplazamiento de la circunferencia media para el caso de cargas simétricamente rotacional. Este desplazamiento es constante para la circunferencia media pero en general es función de x si lo son N_{θ} y N_x .

Membrana cilíndrica circular cargada solamente con presión (interior o exterior) constante

$$\text{Es } p_{\theta} = 0$$

$$p_x = 0$$

$$p_r = \text{constante a lo largo de } x$$

Vimos que N_x es independiente de x y de la ecuación 117) $N_{\theta} = p_r \cdot r$ que es constante para θ y x por ser p_r constante para cualquier x .

Podemos diferenciar dos casos:

a) Extremos abiertos:

La carga total al final de la lámina es nula ($R = 0$), luego es $N_x = 0$.

Luego de la ecuación 129):

$$130) \quad W = \frac{r}{hE} N_{\theta}$$

reemplazando el valor de N_{θ} de la ecuación 117)

$$131) \quad W = \frac{r^2}{hE} p_r$$

La ecuación 106) queda:

$$132) \quad \frac{dn'}{dx} = - \frac{\partial r}{hE} p_r$$

Integrando entre $x = 0$ y x para ∂, r, h y E constante a lo largo de x :

$$133) \quad W = - \frac{\partial r}{hE} p_r x \quad \text{que es el desplazamiento total del cilindro de longitud } x.$$

b) Extremos cerrados: La presión actúa no sólo en la superficie cilíndrica sino también en los extremos. La carga total que actúa en el último paralelo, en la dirección del eje es:

134) $R = p_r \pi (r - \frac{h}{2})^2$ pero como nuestra hipótesis de partida es que h es pequeño frente a r adoptamos:

$$135) R \cong p_r \pi r^2$$

de la ecuación 72) es $R = 2\pi r N_x$

luego:

$$136) N_x = \frac{1}{2} p_r r = \text{constante}$$

De la ecuación 117) vemos que:

$$137) N_x = \frac{N_\theta}{2}$$

Introduciendo los valores de N_θ y N_x de las ecuaciones 117) y

136) en la ecuación 129):

$$138) w = \frac{p_r r^2}{h E} (1 - \nu/2) \quad \text{que es el corrimiento del radio medio}$$

Reemplazando igualmente en la ecuación 128):

$$139) \frac{dw}{dx} = \frac{p_r r}{h E} (\frac{1}{2} - \nu)$$

Integrando a lo largo de x para r , h , E y ν constantes:

$$140) w = \frac{p_r r}{h E} (\frac{1}{2} - \nu) x$$

Las ecuaciones 117), 136), 138) y 140) reúnen las conocidas soluciones de membrana para cilindros circulares de extremos cerrados en el que sólo actúa una presión. Recordemos que estas tensiones y desplazamientos sólo son válidas suficientemente alejadadas de los extremos del cilindro y de cualquier otra perturbación local.

2.3. SOLUCIONES DE BORDE PARA LÁMINAS CILÍNDRICAS CIRCULARES

Cuando las deformaciones y reacciones en los bordes de láminas con las hipótesis de membrana no satisfacen las condiciones reales de contorno es necesario considerar la flexión que se produce en la lámina.

Analizaremos el caso de cargas de superficie con simetría rotacional, es decir, $p_{\theta} = 0$.

Esto significa, como ya vimos, que $u = 0$ y $v_{(\theta)} = \text{cte.}$, luego, las deformaciones, según las ecuaciones 81); 82) y 83) son:

$$141) \quad \epsilon_{\theta} = \frac{w}{r}$$

$$142) \quad \epsilon_x = \frac{dw}{dx}$$

$$143) \quad \gamma_{\theta x} = \gamma_{x\theta} = 0$$

Reemplazando en las ecuaciones 103) y 104):

$$144) \quad N_{\theta} = \frac{Eh}{1-\nu^2} \left(\frac{w}{r} + \nu \frac{dw}{dx} \right)$$

$$145) \quad N_x = \frac{Eh}{1-\nu^2} \left(\frac{dw}{dx} + \nu \frac{w}{r} \right)$$

Introduciendo la ec. 114) en la 111) tenemos:

$$146) \quad \frac{d^2 M_x}{dx^2} + \frac{N_{\theta}}{r} - p_r = 0$$

$$\text{Según la ec. 84)} \quad \gamma_x = \frac{\partial^2 w}{\partial x^2}$$

Por la simetría de cargas es $w_{(\theta)} = \text{cte.}$ y también $v_{(\theta)} = \text{cte.}$, luego, la ec. 85) indica que $\gamma_{\theta} = 0$ que significa que no hay cambios de curvatura según un plano transversal. La ec. 86) igualmente nos da que $\gamma_{\theta x} = \gamma_{x\theta} = 0$.

Reemplazando estos valores en las ec. 106) y 107) obtenemos:

$$147) \quad M_{\theta} = D \nu \frac{d^2 w}{dx^2}$$

$$148) \quad M_x = D \frac{d^2 w}{dx^2}$$

Comparando estas dos últimas expresiones vemos que:

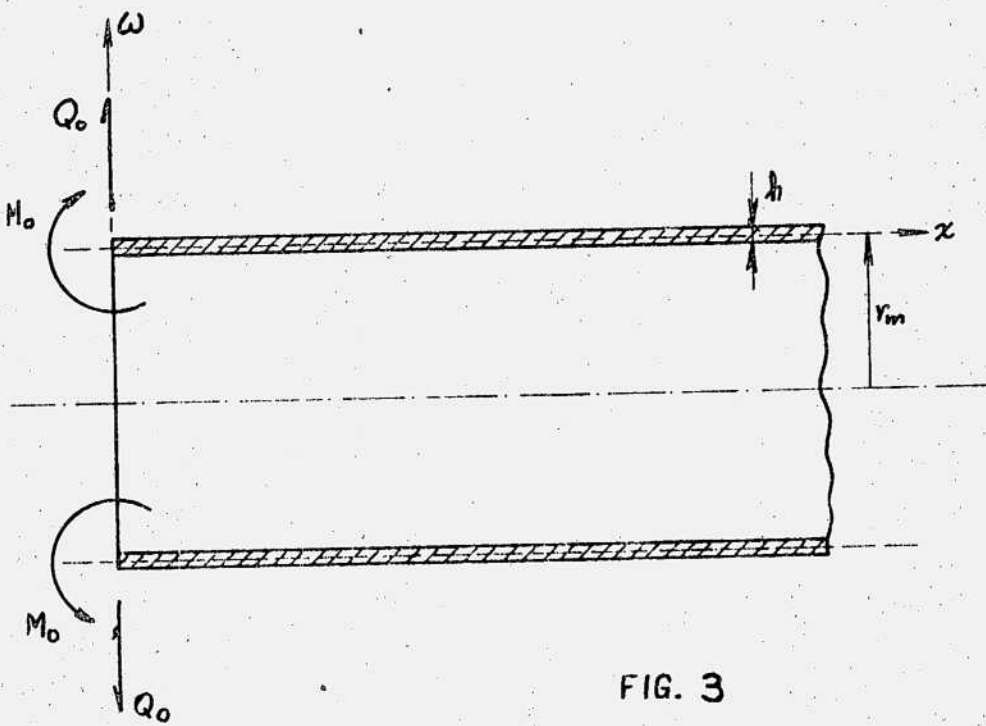


FIG. 3

$$149) \quad M_{\theta} = \nabla M_x$$

Despejando $\frac{dw}{dx}$ de la ec. 145) e introduciéndolo en la ec. 144) obtenemos:

$$150) \quad N_{\theta} = \frac{Eh}{r} w + \nabla N_x$$

Incorporando la ec. 147) y la 150) en la ec. 146):

$$151) \quad \frac{d^2}{dx^2} \left(D_x \frac{d^2 w}{dx^2} \right) + \frac{Eh_x}{r^2} w + \frac{\nabla}{r} N_x - p_r = 0$$

Esta es la ecuación diferencial general de las soluciones de borde de láminas cilíndricas circulares solicitada por cargas de superficie con simetría rotacional.

Si el espesor de la lámina es constante, lo es D, luego:

$$152) \quad D \frac{d^4 w}{dx^4} + \frac{Eh}{r^2} w + \frac{\nabla}{r} N_x - p_r = 0$$

que se puede poner:

$$153) \quad \frac{d^4 w}{dx^4} + \frac{Eh}{r^2 D} w + \frac{\nabla}{r D} N_x - \frac{p_r}{D} = 0$$

Esta ecuación diferencial ordinaria es de cuarto orden, lineal y no homogénea. Haremos la siguiente sustitución:

$$154) \quad a^4 = \frac{Eh}{4r^2 D}$$

se transforma en:

$$155) \quad \frac{d^4 w}{dx^4} + 4a^4 w + \frac{\nabla}{r D} N_x - \frac{p_r}{D} = 0$$

Si consideramos que $N_x = 0$ y $p_r = 0$ (implícitamente $p_x = 0$) obtenemos la ecuación diferencial lineal homogénea a coeficientes constantes:

$$156) \quad \frac{d^4 w}{dx^4} + 4a^4 w = 0$$

Solución de la ecuación diferencial homogénea:

Para esta ecuación diferencial homogénea buscaremos soluciones particulares de la forma: $w = e^{mx}$. Reemplazando en la 156):

$$\frac{d^4}{dx^4} e^{mx} + 4a^4 e^{mx} = 0$$

$$m^4 e^{mx} + 4a^4 e^{mx} = 0$$

$$(m^4 + 4a^4) e^{mx} = 0$$

obtenemos la ecuación característica:

$$m^4 + 4a^4 = 0 \text{ que tiene las siguientes raíces:}$$

$$m_1 = a + ia$$

$$m_2 = a - ia$$

$$m_3 = -a + ia$$

$$m_4 = -a - ia$$

Con estos valores de m_i , tenemos cuatro soluciones particulares distintas $W_i = e^{m_i x}$ de la ecuación diferencial, que, debido a su carácter lineal, podemos multiplicarlas por constantes arbitrarias.

La solución general la obtenemos así:

$$W = C'_1 e^{m_1 x} + C'_2 e^{m_2 x} + C'_3 e^{m_3 x} + C'_4 e^{m_4 x}$$

Reemplazando:

$$W = C'_1 e^{(a+ia)x} + C'_2 e^{(a-ia)x} + C'_3 e^{(-a+ia)x} + C'_4 e^{(-a-ia)x}$$

$$W = C'_1 e^{ax} e^{iax} + C'_2 e^{ax} e^{-iax} + C'_3 e^{-ax} e^{iax} + C'_4 e^{-ax} e^{-iax}$$

Reemplazando las relaciones de Euler:

$$e^{\pm iax} = \cos ax \pm i \sin ax$$

tenemos:

$$W = C'_1 e^{ax} (\cos ax + i \sin ax) + C'_2 e^{ax} (\cos ax - i \sin ax) + C'_3 e^{-ax} (\cos ax + i \sin ax) + C'_4 e^{-ax} (\cos ax - i \sin ax)$$

Ordenando:

$$W = (C'_1 + C'_2) e^{ax} \cos ax + (C'_3 + C'_4) e^{-ax} \cos ax + \\ + i [(C'_1 - C'_2) e^{ax} \sin ax + (C'_3 - C'_4) e^{-ax} \sin ax]$$

Debido a la naturaleza física del problema buscaremos exclusivamente curvas integrales en el campo real. Para ello es inmediato que las constantes de integración deban cumplir las siguientes condiciones:

$$C'_1 = 1/2 (C_1 + iC_2)$$

$$C'_2 = 1/2 (C_1 - iC_2)$$

Al ser complejos conjugados entre sí, se verifica que:

$$C'_1 + C'_2 = C_1$$

$$C'_1 - C'_2 = iC_2$$

De igual manera:

$$C'_3 = 1/2 (C_3 + iC_4)$$

$$C'_4 = 1/2 (C_3 - iC_4)$$

$$C'_3 + C'_4 = C_3$$

$$C'_3 - C'_4 = iC_4$$

Reemplazando estas nuevas constantes:

$$W = C_1 e^{ax} \cos ax + C_3 e^{-ax} \cos ax + i^2 C_2 e^{ax} \sin ax + \\ + i^2 C_4 e^{-ax} \sin ax$$

Absorbiendo signos en las constantes y ordenando, expresamos la solución general real, de la ecuación diferencial homogénea, de la siguiente forma:

157)

$$W = C_1 e^{ax} \cos ax + C_2 e^{ax} \sin ax + C_3 e^{-ax} \cos ax + C_4 e^{-ax} \sin ax$$

La solución de la ecuación diferencial de cuarto orden tiene cuatro constantes arbitrarias de integración C_1, C_2, C_3, C_4 , que

se determinan por las condiciones de contorno en cada problema particular. La 157) es la integral complementaria de la solución general de la ecuación diferencial 155). La solución general de la 155) la obtendremos agregándole a 157) una solución particular de la 155) que ya veremos como encontrarla en algunos casos. Es decir, la solución general de la ecuación diferencial 155), llamando con $g(x)$ una solución particular de la 155) es:

$$158) \quad W = C_1 e^{ax} \cos ax + C_2 e^{ax} \sin ax + C_3 e^{-ax} \cos ax + C_4 e^{-ax} \sin ax + y(x)$$

Notemos que la ecuación diferencial homogénea ($N_x = 0$, $p_r = 0$) es idénticamente nula si $W_x = 0$ y la 157) también.

Reemplazando la 44): $D = \frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)}$ en la 154) obtenemos:

$$159) \quad a^4 = \frac{3(1-\nu^2)}{r^2 h^2} \quad \text{de donde:}$$

$$160) \quad a = \left[\frac{3(1-\nu^2)}{r^2 h^2} \right]^{1/4}$$

Una solución de la ecuación homogénea:

Volvamos a la ecuación diferencial homogénea 156) propia del caso en que $N_x = 0$ y $p_r = 0$ ($p_x = 0$). Analizaremos el caso en que la lámina esté solicitada en el extremo por momentos flectores y esfuerzos transversales radiales uniformemente repartidos (simetría rotacional) según la fig. 3. Con este estado de cargas se producirá una flexión localizada. Supondremos que el cilindro circular es semiinfinito de manera que estas flexiones locales no se superpongan con otras perturbaciones locales provenientes del resto o del extremo del cilindro.

Con estas condiciones impuestas de que la flexión es local y se extingue al alejarse del extremo cargado y no hay superposición con otras flexiones locales es inmediato que en la

ecuación 157) debe ser $C_1 = 0$ y $C_2 = 0$ para anular los términos que contienen a la exponencial e^{ax} , tomando para 160) la raíz aritmética. La anulación de las constantes de integración C_1 y C_2 lo analizaremos con mayor rigor a partir del principio de Saint-Venant. El sistema de cargas formado por momentos flectores y esfuerzos transversales radiales distribuidos uniformemente en el borde, está equilibrado por la simetría axial. La zona de aplicación es de dimensiones reducidas frente al resto del cuerpo elástico ya que al considerar el cilindro semiinfinito implica que su longitud es suficientemente grande en relación al diámetro. Según el principio de Saint-Venant, las tensiones y deformaciones producidas bajo este estado de carga en equilibrio, decrecen rápidamente al alejarse del borde y generalmente pueden despreciarse a distancias que exceden de la mayor dimensión de la zona cargada. Esto sólo se puede satisfacer si $C_1 = 0$ y $C_2 = 0$ en la ecuación diferencial 157).

La solución general de la ecuación diferencial homogénea 157) se transforma en:

$$161) \quad w' = C_3 e^{-ax} \cos ax + C_4 e^{-ax} \operatorname{sen} ax$$

factoreando:

$$162) \quad w = e^{-ax} (C_3 \cos ax + C_4 \operatorname{sen} ax)$$

Valor de las constantes C_3 y C_4 :

Las constantes de integración C_3 y C_4 las hallaremos teniendo en cuenta las condiciones de carga en el borde del cilindro para este caso particular. Llamaremos con M_0 los momentos flectores y Q_0 los esfuerzos cortantes, ambos distribuidos

con simetría respecto al eje y aplicados en el borde. Tomaremos el origen de x en ese extremo cargado. Para espesor constante, o sea D constante, de la ecuación 148) obtenemos:

$$163) M_o = (M_x)_{x=0} = D \left(\frac{d^2 w}{dx^2} \right)_{x=0}$$

y de la ec. 114):

$$164) Q_o = (Q_x)_{x=0} = \left(\frac{dM_x}{dx} \right)_{x=0}$$

Reemplazando en esta expresión, la 148):

$$165) Q_o = D \left(\frac{d^3 w}{dx^3} \right)_{x=0}$$

Derivando sucesivamente la ecuación 162) respecto de x , tenemos:

$$166) \frac{dw}{dx} = a e^{-ax} [-C_3 (\cos ax + \sin ax) + C_4 (\cos ax - \sin ax)]$$

$$167) \frac{d^2 w}{dx^2} = 2a^2 e^{-ax} [C_3 \sin ax - C_4 \cos ax]$$

$$168) \frac{d^3 w}{dx^3} = 2a^3 e^{-ax} [C_3 (\cos ax - \sin ax) + C_4 (\cos ax + \sin ax)]$$

Introduciendo la 167) y la 168) en las expresiones 163) y 165)

respectivamente, para $x = 0$, tenemos:

$$169) \frac{M_o}{D} = -2a^2 C_4$$

$$170) \frac{Q_o}{D} = 2a^3 [C_3 + C_4]$$

Las expresiones 169) y 170) forman un sistema de dos ecuaciones con dos incógnitas, C_3 y C_4 , porque deben satisfacerse simultáneamente.

De la 169) es inmediato que:

$$171) C_4 = -\frac{M_o}{2a^2 D}$$

Reemplazando en 170) y resolviendo C_3 :

$$172) C_3 = \frac{Q_o}{2a^3 D} + \frac{M_o}{2a^2 D} = \frac{1}{2a^3 D} (Q_o + a M_o)$$

Así obtenidos los valores de las constantes de integración las

aplicamos en la ecuación 162), resultando:

$$173) \quad W = e^{-ax} \left[\frac{1}{2a^3D} (Q_0 + aM_0) \cos ax - \frac{1}{2a^2D} M_0 \sin ax \right]$$

operando es:

$$174) \quad W = \frac{e^{-ax}}{2a^3D} \left[Q_0 \cos ax + aM_0 (\cos ax - \sin ax) \right]$$

que determina el desplazamiento del radio de la superficie media del cilindro para este caso particular de sollicitación.

Para un material y una geometría dada, W es función del argumento ax . El desplazamiento es de carácter oscilatorio y su amplitud decrece rápidamente en forma exponencial a medida que crece ax , lo que confirma el carácter local de la flexión. Su longitud de onda es constante y llamándola λ , la obtenemos haciendo:

$$175) \quad a\lambda = 2\pi \quad \text{para } x = \lambda$$

Introduciendo el valor de a de la ecuación 160) tenemos:

$$176) \quad \lambda = 2\pi \sqrt{\frac{4r^2 h^2}{3(1-\nu^2)}}$$

λ depende exclusivamente de las características geométricas y mecánicas del cilindro.

Con ν constante, la 176) es:

$$177) \quad \lambda = \frac{2\pi}{[3(1-\nu^2)]^{1/4}} \cdot (r h)^{1/2} = \text{constante} \cdot (r h)^{1/2}$$

Esta expresión nos señala que la longitud de onda disminuye con la raíz cuadrada del espesor y del radio medio.

La función exponencial e^{-ax} para valores positivos de x , decrece rápidamente, como vemos en la siguiente tabla:

x	e^{-ax}
$x = 0$	$e^0 = 1$

$x = \frac{1}{a}$	$e^{-1} = 3,68 \times 10^{-1}$
$x = \frac{\lambda}{2} = \frac{\pi}{a}$	$e^{-\pi} = 4,32 \times 10^{-2}$
$x = \lambda = \frac{2\pi}{a}$	$e^{-2\pi} = 1,87 \times 10^{-3}$
$x = \frac{3}{2}\lambda = \frac{3\pi}{a}$	$e^{-3\pi} = 6,51 \times 10^{-9}$
$x = 2\lambda = \frac{4\pi}{a}$	$e^{-4\pi} = 1,80 \times 10^{-33}$

En la 174) la función exponencial factora a funciones aditivas de senos y cosenos, en fase, que repiten sus valores con periodo de $ax = 2\pi$. Se desprende que: $(w)_{x=\lambda} \approx 0,00187 \cdot (w)_{x=0}$. Es decir, la función w para una longitud de onda, decae a menos del 0,19% del inicial para $x = 0$. Más allá de una longitud de onda, el efecto de la flexión de borde es despreciable.

El cilindro circular sometido a flexiones en los bordes extremos se comporta para cada extremo como semiinfinito si la longitud total del cilindro es $\geq 2\lambda$. De esta manera las perturbaciones locales de cada extremo no se superponen, condición bajo la cual es $C_1 = 0$, y $C_2 = 0$ en la solución 157).

Teniendo en cuenta la 177) es evidente que la flexión es más localizada cuanto más delgada es la lámina para un radio medio dado.

Para el Zircaloy, tomando $\nu = 0,38$, la constante de la expresión 177) toma el valor:

$$\text{constante} = \frac{2\pi}{[3(1-0,38^2)]^{1/4}} \approx 4,964$$

con lo cual $\lambda = 4,964 (r.h)^{1/2}$.

La flexión de borde desaparece para $x > 4,964 (r.h)^{1/2}$.

Introduciendo los valores de las constantes de integración C_3 y C_4 halladas en las expresiones 171) y 172) en las ecuaciones 166), 167) y 168):

En la 166)

$$\frac{dw}{dx} = a e^{-ax} \left[-\frac{1}{2a^3 D} (Q_0 + a M_0) (\cos ax + \sin ax) - \frac{M_0}{2a^2 D} (\cos ax - \sin ax) \right]$$

que operando se reduce a:

$$178) \quad \frac{dw}{dx} = \frac{e^{-ax}}{2a^2 D} \left[Q_0 (\cos ax + \sin ax) + 2a M_0 \cos ax \right]$$

De la 167)

$$\frac{d^2 w}{dx^2} = 2a^2 e^{-ax} \left[\frac{1}{2a^3 D} (Q_0 + a M_0) \sin ax + \frac{M_0}{2a^2 D} \cos ax \right]$$

operando:

$$179) \quad \frac{d^2 w}{dx^2} = \frac{e^{-ax}}{a D} \left[Q_0 \sin ax + a M_0 (\sin ax + \cos ax) \right]$$

De la 168)

$$\frac{d^3 w}{dx^3} = 2a^3 e^{-ax} \left[\frac{1}{2a^3 D} (Q_0 + a M_0) (\cos ax - \sin ax) - \frac{M_0}{2a^2 D} (\cos ax + \sin ax) \right]$$

operando:

$$180) \quad \frac{d^3 w}{dx^3} = \frac{e^{-ax}}{D} \left[Q_0 (\cos ax - \sin ax) - 2a M_0 \sin ax \right]$$

La expresión 178) señala la rotación que sufre cada punto en función de x .

Introduciendo la ecuación 148) en la 179) tenemos la variación del momento flector M_x según x :

$$181) \quad M_x = \frac{e^{-ax}}{a} \left[Q_0 \sin ax + a M_0 (\sin ax + \cos ax) \right]$$

Reemplazando la ec. 114) en la 148) es:

$$182) \quad Q_x = D \frac{d^3 w}{dx^3}$$

operando con la 180):

$$183) \quad Q_x = e^{-ax} \left[Q_0 (\cos ax - \sin ax) - 2a M_0 \sin ax \right]$$

que muestra la variación del esfuerzo transversal radial en función de x .

Para completar el análisis de los esfuerzos aplicamos la ecuación 149) en la 181) y obtenemos la variación del momento flector M_θ según x:

$$184) \quad M_\theta = \frac{2e^{-ax}}{a} \left[Q_0 \sin ax + a M_0 (\sin ax + \cos ax) \right]$$

Estamos resolviendo la ecuación diferencial homogénea 156) que obtuvimos de la ecuación diferencial general 155) al considerar que $N_x = 0$ y $p_r = 0$. En este caso la expresión 150) se transforma en:

$$185) \quad N_\theta = \frac{Eh}{r} W \quad \text{que es el esfuerzo tangencial en función de los desplazamientos } W \text{ del radio medio que a su vez, aplicando la 174) es función de } x:$$

$$186) \quad N_\theta = \frac{Eh}{r} \frac{e^{-ax}}{2a^3 D} \left[Q_0 \cos ax + a M_0 (\cos ax - \sin ax) \right]$$

Las expresiones 174), 178), 181), 183), 184) y 186) sintetizan las variaciones de la deformación, la rotación, los momentos flectores, el esfuerzo cortante radial y el esfuerzo circunferencial en función de x solamente, ya que por las características simétricas de las sollicitaciones son independientes de θ , como ya vimos repetidamente.

Solución general:

La expresión 174) es la solución general de la ecuación diferencial homogénea 156) derivada de la ecuación diferencial 155) cuando $N_x = 0$ y $p_r = 0$. A su vez, ésta es la integral complementaria de la 155).

Para obtener la solución general de la 155) debemos agregarle una solución particular $g(x)$ como notamos en la 158).

Continuaremos analizando el caso en que M_0 y Q_0 distribuidos simétricamente en el borde, caso para el que hallamos la 174).

Ahora le supondremos una presión radial (interior o exterior) uniforme y consideraremos el caso en que el extremo del cilindro es cerrado. Es decir: p_r es constante para x (y θ). Con

$p_x = 0$, según la ecuación 109) es N_x constante para x (y θ) y

$p_\theta = 0$.

A medida que nos alejamos del borde, la flexión local producida por M_0 y Q_0 se extingue hasta que el desplazamiento radial se uniformiza y permanece independiente de x . Por simetría de cargas también es constante respecto de θ .

Luego, para w constante ($= g$), la ecuación diferencial 155) se transforma:

$$187) \quad C + 4a^4 g + \frac{\partial}{rD} N_x - \frac{p_r}{D} = 0$$

introduciendo las expresiones 154) y 136) y despejando g tenemos:

$$188) \quad g = \frac{p_r \cdot r^2}{h E} \left(1 - \frac{\partial}{2}\right) \quad \text{que coincide con el desplazamiento}$$

constante del radio medio dado en 138) para el caso de membrana cilíndrica circular de extremos cerrados y con presión uniforme como única carga.

De esta manera, la solución general de la ecuación diferencial 155) la obtenemos agregándole a la 174) la 188):

$$189) \quad w = \frac{e^{-ax}}{2a^3 D} \left[Q_0 \cos ax + a M_0 (\cos ax - \sin ax) \right] + \frac{p_r r^2}{h E} \left(1 - \frac{\partial}{2}\right)$$

La deformación transitoria 174) es oscilatoria extinguiéndose rápidamente al crecer x , alrededor de la deformación uniforme dada por 188).

Al estado uniforme de deformación le acompañan las tensiones u-

niformes (o de membrana) dadas por las expresiones 117) y 136) que se superponen a las tensiones locales producidas por la flexión de borde. Observemos que al derivar sucesivamente la 189) obtenemos las expresiones 178), 179) y 180) porque la 188) es constante, lo que pone de manifiesto que suficientemente alejado del borde no hay flexión, comportándose como membrana.

Otras soluciones generales:

En el caso de presión uniforme pero con los extremos abiertos, es $N_x = 0$ y por el mismo procedimiento obtendríamos que la solución particular de la 155) es:

$$190) \quad g = \frac{p_r r^2}{h E} \quad \text{que coincide con la 131).}$$

También podríamos considerar que p_x no sea nula, y entonces N_x es una cierta función de x , con lo que la ecuación 155) dejaría de ser a coeficientes constantes y su solución algo más laboriosa.

La solución general 189) antes hallada para ese caso particular del cilindro circular cerrado en los extremos y sometido a presión uniforme la introducimos en la expresión 150) obteniendo:

$$191) \quad N_\theta = \frac{E h}{r} \left\{ \frac{e^{-ax}}{2a^3 D} \left[Q_0 \cos ax + a M_0 (\cos ax - \sin ax) \right] + \frac{p_r r^2}{h E} \left(1 - \frac{1}{2} \right) \right\} + \nabla N_x$$

Reemplazando N_x por su expresión 136) hallada para el caso de extremos cerrados y operando:

$$192) \quad N_\theta = \frac{E h}{r} \cdot \frac{e^{-ax}}{2a^3 D} \left[Q_0 \cos ax + a M_0 (\cos ax - \sin ax) \right] + p_r \cdot r$$

Calcularemos la tensión $(\sigma_\theta)_z$ reemplazando las expresiones 192) y 184) en la 49) tenemos la:

$$193) (\sigma_z)_z = \frac{E e^{-ax}}{2ra^3D} [Q_0 \cos ax + aM_0(\cos ax - \sin ax)] - \\ - \frac{12}{h^3} \frac{\partial e^{-ax}}{a} [Q_0 \sin ax + aM_0(\sin ax + \cos ax)] z + \frac{p_r \cdot r}{h}$$

De igual manera obtendremos la tensión $(\sigma_x)_z$ reemplazando la 136) y la 181) en la 48):

$$194) (\sigma_x)_z = - \frac{12 e^{-ax}}{h^3 a} [Q_0 \sin ax + aM_0(\sin ax + \cos ax)] z + \frac{p_r \cdot r}{2h}$$

Es evidente que en estas expresiones 193) y 194), cuando x crece, los términos afectados por la exponencial se extinguen. A suficiente distancia, prácticamente cuando $x > \lambda$, la influencia de la flexión de borde desaparece y sólo quedan presentes los términos constantes respecto a x y a z que son las tensiones uniformes de membrana:

$$195) \sigma_z = \frac{p_r \cdot r}{h}$$

$$196) \sigma_x = \frac{p_r \cdot r}{2h}$$

Estas tensiones de membrana se pueden obtener reemplazando los esfuerzos de membranas cilíndricas circulares de extremos cerrados dados en 117) y 136) en las 48) y 49) donde, por el carácter membranar, son M_θ y M_x nulos.

Las tensiones normales máximas se producirán en las fibras más alejadas de la superficie media de la lámina, o sea en las caras externas e internas. Reemplazando $z = \pm h/2$ en las 193) y 194) obtenemos respectivamente:

$$197) (\sigma_z)_{z=\pm h/2} = \frac{E e^{-ax}}{2ra^3D} [Q_0 \cos ax + aM_0(\cos ax - \sin ax)] \mp \\ \mp \frac{6}{h^2} \frac{\partial e^{-ax}}{a} [Q_0 \sin ax + aM_0(\sin ax + \cos ax)] + \frac{p_r \cdot r}{h}$$

$$198) (\sigma_x)_{z=\pm h/2} = \mp \frac{6 e^{-ax}}{h^2 a} [Q_0 \sin ax + aM_0(\sin ax + \cos ax)] + \frac{p_r \cdot r}{2h}$$

Como anteriormente indicamos, al derivar sucesivamente la solución general 189) obtenemos las expresiones 178), 179) y 180). De esta manera el giro de un punto a distancia x está dado por la 178).

Igualmente aplicando la tercera derivada de w en la 182) hallamos nuevamente la 183) que expresa el esfuerzo cortante radial por unidad de longitud de circunferencia media en función de la distancia x . Su distribución parabólica a través del espesor está representado por la expresión 55). Reemplazando en ella la 183) tenemos:

$$199) \quad (\tau_{xz})_z = (\tau_{zx})_z = \frac{E a^{-ax}}{h^3} \left[Q_0 (\cos ax - \sin ax) - 2a M_0 \sin ax \right] \left(\frac{h^2}{4} - z^2 \right)$$

Esta tensión transversal se anula en las caras externa e interna, para $z = h/2$ y $z = -h/2$ respectivamente. Es máximo su valor en la superficie media, donde $z = 0$, o sea:

$$200) \quad (\tau_{xz})_{z=0} = (\tau_{zx})_{z=0} = \frac{3e^{-ax}}{2h} \left[Q_0 (\cos ax - \sin ax) - 2a M_0 \sin ax \right]$$

2.4. CILINDRO CIRCULAR SOMETIDO A PRESION INTERNA, CERRADO Y EMPOTRADO EN EL EXTREMO.

Estimaremos los valores del momento M_0 y del esfuerzo cortante Q_0 uniformemente distribuidos en el borde del cilindro circular de acuerdo a la vinculación impuesta en el extremo. Analizaremos el caso en que el cilindro, sometido exclusivamente a presión interna o externa, está cerrado en su extremo por una placa circular, como se aprecia en la figura 4.

Se puede considerar la deformación de la placa sometida a la carga de superficie y a los momentos y esfuerzos radiales uniformemente distribuidos en el borde. Así la rotación de los bordes de la placa hace que el giro del extremo de la lámina sea menor, o sea, es un empotramiento elástico. Cuanto mayor rigidez a la flexión tiene la placa, menor es su rotación en el borde, y, por la continuidad de la materia, mayor será el giro en el extremo del cilindro.

Si la placa es suficientemente gruesa (y con iguales constantes elásticas que la lámina) su rigidez a la flexión comparada a la del cilindro es muy grande y la podemos suponer con rigidez infinita. De esta manera, el cilindro está rígidamente empotrado y es responsable de absorber totalmente la rotación. Este análisis es más simple y a la vez conservativo ya que al imponerle un giro máximo las tensiones locales del cilindro, así calculadas, son mayores.

Como nuestras incógnitas son : M_0 y Q_0 , necesitamos dos ecuaciones. Las determinaremos, asumiendo empotramiento rígido con el tapón indeformable. Las condiciones de vínculo, de cumplimiento simultáneo, impuestas al extremo del cilindro son:

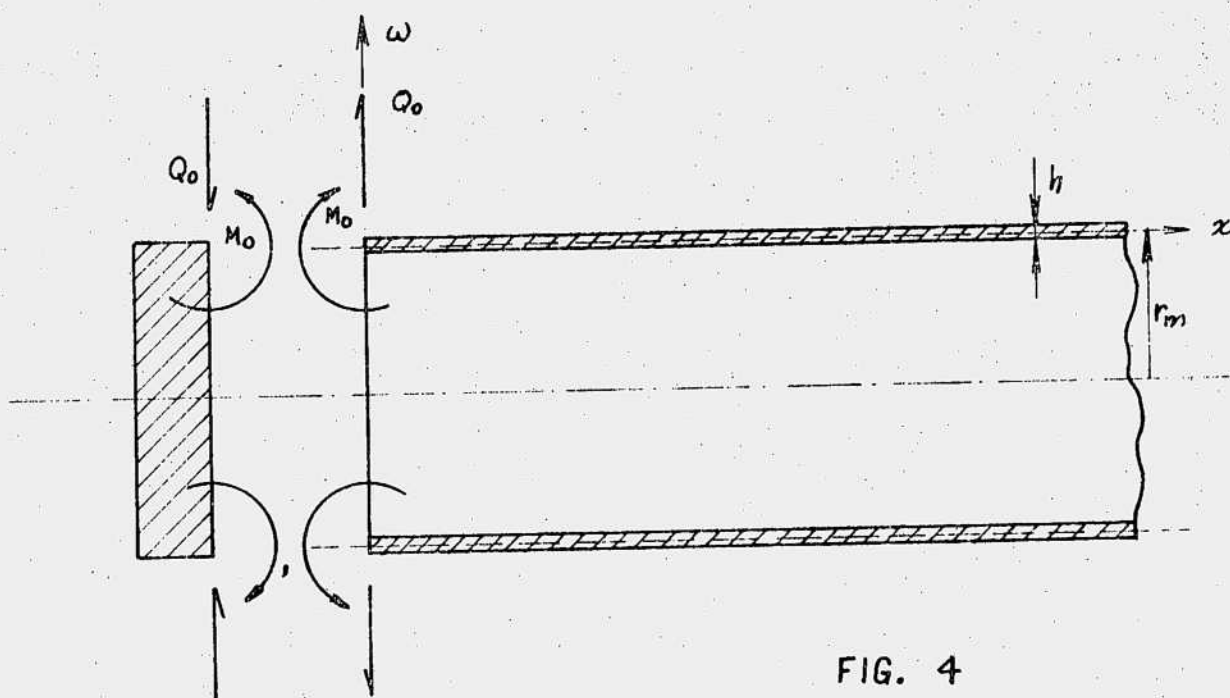


FIG. 4

El desplazamiento del radio medio en el extremo está impedido, luego debe ser:

$$201) (W)_{x=0} = 0$$

La rotación en el borde es nula, entonces:

$$202) \left(\frac{\partial W}{\partial x} \right)_{x=0} = 0$$

Obtenemos las dos ecuaciones necesarias reemplazando en 201) y

202) las 189) y 178) respectivamente, haciendo en ellas $x = 0$:

$$203) (W')_{x=0} = \frac{1}{2a^3 D} [Q_0 + a M_0] + \frac{p_r r^2}{h E} \left(1 - \frac{\nu}{2}\right) = 0$$

$$204) \left(\frac{\partial W}{\partial x} \right)_{x=0} = \frac{1}{2a^2 D} [Q_0 + 2a M_0] = 0$$

Resolviendo este sistema de ecuaciones tenemos que:

$$205) M_0 = 2a^2 D \frac{p_r r^2}{h E} \left(1 - \frac{\nu}{2}\right)$$

$$206) Q_0 = -4a^3 D \frac{p_r r^2}{h E} \left(1 - \frac{\nu}{2}\right)$$

Tomando el valor de a de la expresión 160) y el de D de la 44)

obtenemos:

$$207) a^2 = \frac{[3(1-\nu^2)]^{1/2}}{r h}$$

$$208) a^3 = \frac{[3(1-\nu^2)]^{3/4}}{(r h)^{3/2}}$$

Reemplazando en la 205) y en la 206) obtendremos:

$$209) M_0 = \frac{1 - \nu/2}{2[3(1-\nu^2)]^{1/2}} h r p_r$$

$$210) Q_0 = - \frac{1 - \nu/2}{[3(1-\nu^2)]^{1/4}} (h r)^{1/2} p_r$$

El momento y el esfuerzo cortante radial distribuidos uniformemente en el borde están en función del módulo de Poisson del material, de las dimensiones del cilindro y de la diferencia de presiones internas y externas.

También, por razones prácticas, es conveniente expresar M_0 y Q_0 en función de a ; operando resulta:

$$211) \quad M_0 = \frac{1 - \nu/2}{2a^2} p_r$$

$$212) \quad Q_0 = - \frac{1 - \nu/2}{a} p_r$$

Otro caso

Se puede demostrar que el caso del cilindro circular abierto en los extremos ($N = 0$) y con los bordes empotrados rígidamente, el factor $1 - \frac{\nu}{2}$ se convierte en la unidad, o sea:

$$213) \quad M_0 = \frac{1}{2[3(1-\nu^2)]^{1/2}} h \cdot r \cdot p_r = \frac{p_r}{2a^2}$$

$$214) \quad Q_0 = - \frac{1}{[3(1-\nu^2)]^{1/4}} (h \cdot r)^{1/2} p_r = - \frac{p_r}{a}$$

Reemplazando los valores de M_0 y Q_0 hallados para el caso particular según 211) y 212) en la solución general 189)

tenemos:

$$W = \frac{e^{-ax}}{2a^3 D} \left[- \left(\frac{1-\nu/2}{a} \right) p_r \cos ax + a \frac{1-\nu/2}{2a^2} p_r (\cos ax - \sin ax) \right] + \frac{p_r r^2}{h E} (1 - \frac{\nu}{2})$$

Sustituyendo las expresiones 44) y 154) obtenemos finalmente:

$$215) \quad W = \frac{r^2}{E h} p_r (1 - \frac{\nu}{2}) \left[1 - e^{-ax} (\cos ax + \sin ax) \right]$$

De igual manera operamos con las rotaciones dadas por la 178)

$$\frac{dW}{dx} = \frac{e^{-ax}}{2a^2 D} \left[- \left(\frac{1-\nu/2}{a} \right) p_r (\cos ax + \sin ax) + 2a \frac{1-\nu/2}{2a^2} p_r \cos ax \right]$$

teniendo en cuenta la 44) y la 208), operando, resulta:

$$216) \quad \frac{dW}{dx} = - \frac{2\sqrt{3} r^{3/2} (1-\nu^2)^{1/4}}{E h^{3/2}} p_r (1 - \frac{\nu}{2}) e^{-ax} \sin ax$$

Sustituyendo en expresión del momento flector M_x de la 181):

$$M_x = \frac{e^{-ax}}{a} \left[- \left(\frac{1-\nu/2}{a} \right) p_r \sin ax + a \frac{1-\nu/2}{2a^2} p_r (\sin ax + \cos ax) \right]$$

operando con la 207) obtenemos:

$$217) M_x = \frac{r h}{2\sqrt{3}(1-\nu^2)^{1/2}} p_r (1-\frac{\nu}{2}) e^{-ax} (\cos ax - \sin ax)$$

De igual forma, en la expresión de M_θ de 184):

$$218) M_\theta = \frac{\nu r h}{2\sqrt{3}(1-\nu^2)^{1/2}} p_r (1-\frac{\nu}{2}) e^{-ax} (\cos ax - \sin ax)$$

Operando con el esfuerzo cortante radial de 183):

$$Q_x = e^{-ax} \left[-\left(\frac{1-\nu/2}{a}\right) p_r (\cos ax - \sin ax) - 2a \frac{1-\nu/2}{2a^2} p_r \sin ax \right]$$

teniendo en cuenta la 160) resulta:

$$219) Q_x = -\frac{(r h)^{1/2}}{[3(1-\nu^2)]^{1/4}} p_r (1-\frac{\nu}{2}) e^{-ax} \cos ax$$

El esfuerzo tangencial normal de la 192):

$$N_\theta = \frac{E h e^{-ax}}{r 2a^3 D} \left[-\left(\frac{1-\nu/2}{a}\right) p_r \cos ax + a \frac{1-\nu/2}{2a^2} p_r (\cos ax - \sin ax) \right] + p_r r$$

reemplazando el valor de 44) y 154) resulta:

$$220) N_\theta = p_r r \left[1 - \left(1-\frac{\nu}{2}\right) e^{-ax} (\cos ax + \sin ax) \right]$$

Reemplazando los valores obtenidos en 211) y 212) de M_θ y Q_θ en

la expresión de la tensión normal (T_θ) dada en 193):

$$(T_\theta)_z = \frac{E e^{-ax}}{2ra^3 D} \left[\left(-\frac{1-\nu/2}{a}\right) p_r \cos ax + a \frac{1-\nu/2}{2a^2} p_r (\cos ax - \sin ax) \right] - \frac{12\nu e^{-ax}}{h^3 a} \left[\left(-\frac{1-\nu/2}{a}\right) p_r \sin ax + a \frac{1-\nu/2}{2a^2} p_r (\sin ax + \cos ax) \right] r + \frac{p_r r}{h}$$

Aplicando la 154) en el primer término del segundo miembro y la

207) en el segundo término, tenemos:

$$221) (T_\theta)_z = -\frac{r}{h} p_r (1-\frac{\nu}{2}) e^{-ax} (\sin ax + \cos ax) - \frac{\nu 2\sqrt{3} r}{(1-\nu^2)^{1/2} h^2} p_r (1-\frac{\nu}{2}) e^{-ax} (\cos ax - \sin ax) z + \frac{p_r r}{h}$$

Esta tensión es máxima para $z = \pm h/2$, como vimos en la 197):

$$(\tau_{\theta})_{z=\pm h/2} = -\frac{r}{h} p_r (1-\nu/2) e^{-ax} (\sin ax + \cos ax) + \\ + \frac{\sqrt{3}}{(1-\nu^2)^{1/2}} \frac{r}{h} p_r (1-\nu/2) e^{-ax} (\cos ax - \sin ax) + \frac{p_r r}{h}$$

operando:

222)

$$(\tau_{\theta})_{z=\pm h/2} = \frac{p_r r}{h} \left[1 - (1-\frac{\nu}{2}) e^{-ax} (\sin ax + \cos ax) + \right. \\ \left. + \frac{\sqrt{3}}{(1-\nu^2)^{1/2}} (1-\frac{\nu}{2}) e^{-ax} (\cos ax - \sin ax) \right]$$

Igualmente, con la tensión normal $(\sigma_x)_z$ de la 194):

$$(\sigma_x)_z = -\frac{12 e^{-ax}}{h^3 a} \left[\left(-\frac{1-\nu/2}{a} \right) p_r \sin ax + a \left(\frac{1-\nu/2}{2a^2} \right) p_r (\sin ax + \cos ax) \right] + \frac{1}{2} \frac{r}{h}$$

teniendo en cuenta la 207)

$$223) (\sigma_x)_z = -\frac{2\sqrt{3} \cdot r}{(1-\nu^2)^{1/2} h^2} p_r (1-\frac{\nu}{2}) e^{-ax} (\cos ax - \sin ax) + \frac{p_r r}{2h}$$

Esta tensión es máxima para $z = \pm h/2$, igual que en 198):

$$(\sigma_x)_{z=\pm h/2} = \frac{\sqrt{3}}{(1-\nu^2)^{1/2}} \frac{r}{h} p_r (1-\frac{\nu}{2}) (\cos ax - \sin ax) + \frac{p_r r}{2h}$$

operando:

$$224) (\sigma_x)_{z=\pm h/2} = \frac{p_r r}{2h} \left[1 + \frac{2\sqrt{3}}{(1-\nu^2)^{1/2}} (1-\frac{\nu}{2}) e^{-ax} (\cos ax - \sin ax) \right]$$

En el esfuerzo cortante radial dado en la 199), al reemplazar los valores de M_0 y Q_0 obtenidos:

$$(\tau_{rz})_z = (\tau_{rz})_z = \frac{6 e^{-ax}}{h^3} \left[-\left(\frac{1-\nu/2}{a} \right) p_r (\cos ax - \sin ax) - 2a \left(\frac{1-\nu/2}{2a^2} \right) p_r \sin ax \right] \left(\frac{h^2}{4} - z^2 \right)$$

Introduciendo el valor de a de la 160):

$$225) (\tau_{rz})_z = (\tau_{rz})_z = -\left[\frac{2 \cdot 3^{3/4}}{(1-\nu^2)^{1/4}} \frac{r^{1/2}}{h^{1/2}} p_r (1-\frac{\nu}{2}) e^{-ax} \cos ax \right] \left(\frac{h^2}{4} - z^2 \right)$$

Esta distribución parabólica se anula para $z = \pm h/2$ y es máxima en $z = 0$:

226)

$$(\tau_{rz})_{z=0} = (\tau_{rz})_{z=0} = -\frac{3^{3/4}}{2(1-\nu^2)^{1/4}} \left(\frac{r}{h} \right)^{1/2} p_r (1-\frac{\nu}{2}) e^{-ax} \cos ax$$

En estas expresiones que logramos al reemplazar M_0 y Q_0 por sus valores de las 211) y 212) nuevamente observamos el carácter local de la flexión de borde ya que los términos que contienen al factor exponencial se anulan al alejarse del extremo, reduciéndose así a un estado puramente membranial.

Por otra parte, estas expresiones quedan determinadas por: la diferencia de presiones externa e interna; el espesor y el radio medio del cilindro circular y el módulo de elasticidad longitudinal y el módulo de Poisson

Otro caso

En el caso del cilindro circular con los bordes rígidamente empotrados pero con extremos abiertos ($N_x = 0$) anteriormente vimos que el valor de M_0 se expresa según la 213) y el de Q_0 con la 214). Al operar de igual manera que antes vemos que en todas las expresiones en donde interviene el factor $(1 - \frac{\nu}{2})$ éste se transforma en la unidad. Para abreviar, no transcribimos estas funciones, basta reemplazar en ellas el factor $(1 - \frac{\nu}{2})$ por 1.

Máximos de las funciones de tensiones normales

Vimos que las tensiones normales varían a través del espesor, siendo máximas en las fibras más alejadas de la superficie media. Ahora determinaremos las abscisas para las cuales son máximas estas tensiones en el caso de $z = \pm h/2$.

Derivando la expresión 222):

$$\frac{\partial}{\partial x} (\sigma_{\theta})_{z=\pm h/2} = -\frac{p r r}{h} (1 - \frac{\nu}{2}) \frac{\partial}{\partial x} \left[e^{-ax} (\sin ax + \cos ax) \right] \mp$$

$$\mp \frac{p r r \sqrt{3}}{h (1 - \nu^2)^{1/2}} (1 - \frac{\nu}{2}) \frac{\partial}{\partial x} \left[e^{-ax} (\cos ax - \sin ax) \right]$$

$$227) \quad \frac{\partial}{\partial x} (\sigma_\theta)_{\beta=\pm 1/2} = \frac{2 p r r}{h} (1 - \frac{\nu}{2}) a e^{-ax} (\sin ax \mp \frac{\sqrt{3}}{(1-\nu^2)^{1/2}} \cos ax)$$

Esta derivada se anula cuando:

$$228) \quad e^{-ax} (\sin ax \mp \frac{\sqrt{3}}{(1-\nu^2)^{1/2}} \cos ax) = 0$$

Como e^{-ax} se atenúa sin cambiar de signo, debe ser:

$$229) \quad \sin ax \mp \frac{\sqrt{3}}{(1-\nu^2)^{1/2}} \cos ax = 0$$

Esta ecuación trascendente tiene raíces periódicas pero sólo nos interesan los extremos de la 222) dentro de la primer longitud de onda ya que son los de mayor amplitud ($ax \leq 2\pi$).

En cada caso concreto, resolviendo numéricamente la ecuación 229) (EJ.: por iteración), obtendremos las raíces ax_i para las cuales se anula la derivada 227). Como a es constante en definitiva tenemos los valores de x_i . Para estos valores de x_i , la función tensión 222) presenta extremos a condición que la segunda derivada calculada en esos puntos sea no nula:

$$230) \quad \frac{\partial^2}{\partial x^2} (\sigma_\theta)_{\beta=\pm 1/2} = \frac{2 p r r (1-\frac{\nu}{2}) a^2}{h} e^{-ax} \left[\sin ax + \cos ax + \frac{\sqrt{3}}{(1-\nu^2)^{1/2}} (\mp \cos ax \mp \sin ax) \right]$$

El extremo es un máximo si $\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} \sigma_\theta \right)_{x=x_i} < 0$; es un mínimo si $\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} \sigma_\theta \right)_{x=x_i} > 0$; pero en general nos interesa su valor absoluto.

Repetiendo el método para la expresión 224)

$$\frac{\partial}{\partial x} (\sigma_x)_{\beta=\pm 1/2} = \mp \frac{p r r \sqrt{3} (1-\frac{\nu}{2})}{h (1-\nu^2)^{1/2}} \cdot \frac{\partial}{\partial x} \left[e^{-ax} (\cos ax - \sin ax) \right]$$

$$231) \quad \frac{\partial}{\partial x} (\sigma_x)_{\beta=\pm 1/2} = \mp \frac{2\sqrt{3} p r r (1-\frac{\nu}{2}) a}{h (1-\nu^2)^{1/2}} e^{-ax} \cos ax$$

Se anula para:

$$\mp e^{-ax} \cos ax = 0$$

y como e^{-ax} no se anula, debe ser:

$$232) \quad \mp \cos ax = 0$$

Sus raíces son:

$$ax_i = \frac{\pi}{2} + n\pi \quad \text{para } n = 0, 1, 2, 3, \dots$$

o sea:

$$233) \quad x_i = \frac{\pi}{a} \left(\frac{1}{2} + n \right)$$

y para $ax < 2\pi$, o sea $x < \lambda$ debe ser:

$$234) \quad x_1 = \frac{\pi}{2a}$$

$$235) \quad x_2 = \frac{3\pi}{2a}$$

La segunda derivada de la 224) es:

$$236) \quad \frac{\partial^2}{\partial x^2} (\tau_x)_{z=\pm \frac{1}{2}} = \mp \frac{2\sqrt{3} p_r r (1-\nu/2) a^2}{h (1-\nu^2)^{1/2}} e^{-ax} (\cos ax + \sin ax)$$

$$e^{-ax} (\cos ax + \sin ax) \quad \text{no se anula para } x_1 = \frac{\pi}{2a} \quad \text{y} \quad x_2 = \frac{3\pi}{2a},$$

luego en estos x tenemos extremos de la función tensión 224).

Máximo de la función tensión cortante radial:

A través del espesor se distribuye parabólicamente, siendo nula en las fibras más alejadas del radio medio y máxima para la superficie media. En este caso de $z = 0$, analizaremos las abscisas para las cuales son máximas estas tensiones tangenciales. Derivando la expresión 226):

$$\frac{\partial}{\partial x} (\tau_{xz})_{z=0} = - \frac{3^{3/4} p_r}{2(1-\nu^2)^{1/4}} \left(\frac{r}{h} \right)^{1/2} (1-\nu/2) \cdot \frac{\partial}{\partial x} (e^{-ax} \cos ax)$$

$$237) \quad \frac{\partial}{\partial x} (\tau_{xz})_{z=0} = - \frac{3^{3/4} p_r}{2(1-\nu^2)^{1/4}} \left(\frac{r}{h} \right)^{1/2} (1-\nu/2) a e^{-ax} (\cos ax + \sin ax)$$

La derivada se anula para:

$$238) \quad \cos ax + \sin ax = 0$$

Las raíces periódicas de esta ecuación transcendente son:

$$ax_i = \frac{3}{4}\pi + n\pi \quad \text{para } n = 0, 1, 2, 3, \dots$$

$$239) \quad x_i = \frac{\pi}{a} \left(\frac{3}{4} + n \right)$$

para $x < \lambda$ es:

$$240) \quad x_1 = \frac{3\pi}{4a}$$

$$241) \quad x_2 = \frac{7\pi}{4a}$$

La segunda derivada de la 226) es:

$$242) \quad \frac{\partial^2}{\partial x^2} (\tau_{x3})_{x=0} = \frac{3^{3/4} p_r}{2(1-\nu^2)^{1/4}} \left(\frac{r}{h}\right)^{1/2} (1-\nu/2) [-2ae^{-ax} \sin ax]$$

$e^{-ax} \sin ax$ no se anula para las raíces x_1 y x_2 , luego en estos puntos hay extremos de la función tensión 226).

Extremos de la función del corrimiento radial:

Determinaremos las abscisas para la cual se producen los mayores desplazamientos radiales del radio medio del cilindro.

Derivando la expresión 215):

$$\frac{\partial W}{\partial x} = - \frac{r^2 p_r (1-\nu/2)}{E h} \frac{\partial}{\partial x} [e^{-ax} (\cos ax + \sin ax)]$$

$$243) \quad \frac{\partial W}{\partial x} = \frac{2r^2 p_r (1-\nu/2)a}{E h} e^{-ax} \sin ax$$

que se anula cuando:

$$244) \quad \sin ax = 0$$

$$\text{o sea para } ax_i = n\pi \quad \text{para } n = 0, 1, 2, 3, \dots$$

es decir:

$$245) \quad x_i = n \frac{\pi}{a}$$

y para $ax \leq 2\pi$

$$\text{es: } 246) \quad x_1 = 0$$

$$247) \quad x_2 = \pi/a$$

$$248) \quad x_3 = \frac{2\pi}{a}$$

La derivada segunda de la 215) es:

$$249) \quad \frac{\partial^2 W}{\partial x^2} = \frac{2r^2 p_r (1-\nu/2)a^2}{E h} e^{-ax} (\cos ax - \sin ax)$$

$(\cos ax - \sin ax)$ no toma el valor nulo para x_1 , x_2 y x_3 . Así tenemos para estas x extremos de la función 215.. El signo de la 249) indicará si son máximos o mínimos.

2.5. TENSION EQUIVALENTE:

La tensión efectiva permite comparar distintos estados de tensión reduciéndolos a estados equivalentes. Está en función de las tensiones principales, en un punto. Es independiente del sistema de referencia adoptado, o sea, es invariante para cada estado de tensión. Se define como el valor positivo de la raíz:

$$250) \quad \sigma_e = \left\{ \frac{1}{2} [(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2] \right\}^{1/2}$$

En el caso que estamos analizando, admitimos que la tensión normal radial σ_z es nula y que las tensiones tangenciales $\tau_{xz} = \tau_{zx}$ tienen una distribución parabólica que se anula en las caras.

Además, por las condiciones de simetría rotacional de las cargas se anulaban las tensiones tangenciales $\tau_{x\theta} = \tau_{\theta x}$ y $\tau_{\theta z} = \tau_{z\theta}$.

De esta manera, el tensor de tensiones está diagonalizado en las caras del cilindro. Las tensiones normales σ_θ y σ_x , en las caras externa e interna, forman un sistema de tensiones principales plano ya que no hay componentes tangenciales. La expresión de la tensión efectiva 250), tomando:

$$\sigma_1 = \sigma_x, \quad \sigma_2 = \sigma_\theta \quad \text{y} \quad \sigma_3 = \sigma_z = 0$$

$$251) \quad \sigma_e = (\sigma_x^2 + \sigma_\theta^2 - \sigma_x \sigma_\theta)^{1/2}$$

Las tensiones σ_x y σ_θ son funciones de x , y están dadas respectivamente en las 224) y 222). Así, la σ_e también es función de la abscisa.

De un simple análisis de desigualdades se puede ver que se presentan seis posibles casos en la expresión 251).

Cuando: $\text{signo}(\sigma_x) = \text{signo}(\sigma_\theta)$

- a) si $|\sigma_x| = |\sigma_\theta|$ es $\sigma_e = |\sigma_x| = |\sigma_\theta|$
 b) si $|\sigma_x| > |\sigma_\theta|$ es $|\sigma_x| > \sigma_e > |\sigma_\theta|$
 c) si $|\sigma_x| < |\sigma_\theta|$ es $|\sigma_x| < \sigma_e < |\sigma_\theta|$

Cuando: signo $(\sigma_x) \neq$ signo (σ_θ)

- d) si $|\sigma_x| = |\sigma_\theta|$ es $\sigma_e > |\sigma_x| = |\sigma_\theta|$
 e) si $|\sigma_x| > |\sigma_\theta|$ es $\sigma_e > |\sigma_x| > |\sigma_\theta|$
 f) si $|\sigma_x| < |\sigma_\theta|$ es $\sigma_e > |\sigma_\theta| > |\sigma_x|$

Vemos en los tres últimos casos que si los signos de las tensiones principales son opuestos, la tensión equivalente es siempre mayor que el valor absoluto de las tensiones normales axial y circunferencial.

Tensión equivalente uniforme:

Para valores suficientemente grandes de la abscisa ($x > \lambda$) las tensiones normales σ_θ y σ_x expresadas en 222) y 224) se transforman en las tensiones uniformes de membranas dadas, respectivamente, en las 195) y 196). De esta manera la tensión equivalente se convierte en:

$$\sigma_e = \left[\left(\frac{p_r r}{2h} \right)^2 + \left(\frac{p_r r}{h} \right) - \left(\frac{p_r r}{2h} \right) \left(\frac{p_r r}{h} \right) \right]^{1/2}$$

operando y recordando que por definición la tensión eficaz es siempre positiva, debe ser independiente del signo de p_r :

$$252) \quad \sigma_e = \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot |p_r| \cdot \frac{r}{h}$$

En este caso membranaral puro, las tensiones uniformes son siempre de igual signo, independiente que la presión actuante sea externa o interna, luego:

$$|\sigma_x| < \sigma_e < |\sigma_\theta|$$

que es igual a : $\frac{1}{2} |p_r| \frac{r}{h} < \frac{\sqrt{3}}{2} |p_r| \frac{r}{h} < |p_r| \frac{r}{h}$

Extremos de la función de tensión eficaz:

Para estudiar los extremos de la función 251) podemos apelar a analizar sus derivadas:

$$\frac{\partial \sigma_e}{\partial x} = \frac{1}{2(\sigma_x^2 + \sigma_e^2 - \sigma_x \sigma_e)^{1/2}} \left[2\sigma_x \frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + 2\sigma_e \frac{\partial \sigma_e}{\partial x} - \left(\frac{\partial \sigma_x}{\partial x} \sigma_e + \frac{\partial \sigma_e}{\partial x} \sigma_x \right) \right]$$

de donde:

$$253) \frac{\partial \sigma_e}{\partial x} = \frac{1}{2\sigma_e} \left[(2\sigma_x - \sigma_e) \frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + (2\sigma_e - \sigma_x) \frac{\partial \sigma_e}{\partial x} \right]$$

Para que se anule esta derivada, ya que es:

$$\frac{1}{2\sigma_e} \neq 0, \text{ debe ser:}$$

$$254) (2\sigma_x - \sigma_e) \frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + (2\sigma_e - \sigma_x) \frac{\partial \sigma_e}{\partial x} = 0$$

Reemplazando σ_x y σ_e por sus expresiones, tenemos una ecuación transcendente. Resolviéndola tenemos un conjunto de raíces periódicas de las que sólo nos interesan las que están comprendidas en $ax \leq 2\pi$. Como a es constante, obtenemos los valores x_i para los cuales se anula. Para estos valores de x_i , σ_e tiene extremos, descontando, por el carácter senoidal amortiguado de las funciones involucradas que en esos puntos es $\left(\frac{\partial^2 \sigma_e}{\partial x^2} \right)_{x_i} = 0$

Pero la resolución de la ecuación 254) es sumamente laboriosa, por lo que buscaremos los extremos de la 251) y las abscisas x_i en que se producen, por aproximaciones numéricas sucesivas para cada caso concreto, mediante la utilización del calculador programable.

2.6. CRITERIOS DE FLUENCIA

Para determinar si un estado tensional, en un elemento sólido continuo, es el necesario para el tránsito del comportamiento elástico al plástico, límite de aplicabilidad de la teoría elástica que anteriormente desarrollamos, se aplican modelos matemáticos de comportamiento a la fluencia. Estas teorías aceptan que el tensor hidráulico de tensiones no influye en el comportamiento plástico y que sólo el tensor desviador es el responsable de la deformación plástica; esto se evidencia experimentalmente hasta presiones del orden de las tensiones de fluencia. Por esta razón adoptan la forma de superficies cilíndricas en el espacio triaxial de tensiones principales. Estas superficies de fluencia no son las iniciales si el material ha recorrido un camino de deformaciones previas durante el conformado mecánico como en el caso de los tubos.

La intersección del cilindro con cualquiera de los planos formados por dos tensiones principales es una curva de fluencia para ese estado bidimensional de tensiones.

Criterio de von Mises:

El criterio de von Mises considera materiales mecánicamente isótropos y que presentan igual tensión de fluencia monoaxial para tracción y para compresión, o sea, balanceados.

En el espacio de tensiones principales determina una superficie cilíndrica circular de fluencia que en función del tensor de tensiones diagonalizado se expresa así:

$$255) \frac{1}{2X^2} \left[(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_4)^2 \right] = 1$$

siendo X la tensión monoaxial de fluencia, que por la isotropía

considerada son iguales para cualquier dirección y que, además por no tener efecto Bauschinger coinciden para tracción y para compresión.

La 255) se puede escribir:

$$256) \quad X = \left\{ \frac{1}{2} [(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2] \right\}^{1/2}$$

El segundo miembro coincide con la expresión de la tensión equivalente definida en la 250). Con el criterio de von Mises se compara la tensión eficaz que representa un estado multiaxial de tensiones con la tensión monoaxial de fluencia hallada experimentalmente. Esta última generalmente es la de tracción por ser más confiable que la de compresión por las inestabilidades elásticas o plásticas que se pueden presentar, especialmente en tubos. Si al comparar, la tensión eficaz es menor que la tensión monoaxial de fluencia, en el punto, al cual corresponde el estado tensional comparado, el material se encuentra en régimen elástico. Si son iguales, el material se encuentra en el punto de transición, o sea, fluencia, y el estado de tensiones es un punto perteneciente al cilindro de fluencia.

En un estado plano de tensiones principales la 255) toma la forma, para $\sigma_3 = 0$:

$$257) \quad \frac{1}{X^2} [\sigma_1^2 + \sigma_2^2 - \sigma_1 \sigma_2] = 1 \text{ que es la expresión de una elipse en el plano } \sigma_1, \sigma_2.$$

Para las caras internas y externas de la lámina cilíndrica que analizamos es inmediato que el material se comporta elásticamente para las abscisas en que se cumple:

$$258) \quad X > (\sigma_e)_x = \sqrt{\sigma_e^2 + \sigma_x^2 - \sigma_e \sigma_x}$$

La ley de von Mises es relativamente aproximada para dúctiles

pero se aleja más cuanto mayor es la anisotropía, que es el caso de los tubos de Zircaloy.

Criterio de Hill:

Es una generalización del criterio de Mises para anisótropos sin efecto Bauschinger.

En coincidencia de ejes de tensiones principales con los ejes principales de anisotropía, la superficie cilíndrica de fluencia es de sección elíptica y para tensores diagonalizados en el espacio triaxial de tensiones principales, es:

$$259) \quad F(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + G(\sigma_2 - \sigma_3)^2 + H(\sigma_3 - \sigma_1)^2 = 1$$

Donde F, G y H son parámetros característicos de anisotropía.

Llamando con X, Y y Z las tensiones monoaxiales de fluencia (tracción o compresión) en las tres direcciones principales de anisotropía 1, 2 y 3 respectivamente, surge que:

$$260) \quad \begin{aligned} 2F &= \frac{1}{X^2} + \frac{1}{Y^2} - \frac{1}{Z^2} \\ 2G &= \frac{1}{Y^2} + \frac{1}{Z^2} - \frac{1}{X^2} \\ 2H &= \frac{1}{Z^2} + \frac{1}{X^2} - \frac{1}{Y^2} \end{aligned}$$

Si el material presenta simetría rotacional de anisotropía respecto al eje 1, significa que $Y = Z$ y la expresión 259) permanece invariante de los ejes 2 y 3; se demuestra que $F = H$.

Si hay isotropía, o sea, simetría esférica es $X = Y = Z$ y $G = F = H$. La 259), considerando la 260), se convierte en la 255), o sea, la ley de von Mises como caso particular del criterio de Hill.

Para un estado plano de tensiones principales tenemos: nuevamente una elipse de intercepción entre el cilindro de fluencia

cia y el plano σ_1, σ_2 :

$$261) F (\sigma_1 - \sigma_2)^2 + G \sigma_2^2 + H \sigma_1^2 = 1$$

con axisimetría anisotrópica era $F = H$, aplicando las 260 resulta:

$$262) \frac{1}{X^2} (\sigma_1^2 - \sigma_1 \sigma_2) + \frac{1}{Y^2} \sigma_2^2 = 1$$

En el problema de láminas que abordamos en este trabajo resulta, en las caras externa e interna, que:

$$263) \frac{1}{X^2} (\sigma_x^2 - \sigma_x \sigma_\theta) + \frac{1}{Y^2} \sigma_\theta^2 = 1$$

donde X e Y son las tensiones monoaxiales de fluencia generalmente tracción en las direcciones axiales y circunferenciales respectivamente. Las abscisas del tubo donde se produce la igualdad 263) indica el comienzo de la fluencia. En los puntos donde el primer miembro es menor que la unidad el material está en régimen elástico. Es evidente que si $X = Y$ la 263) se transforma en la 257). En los tubos de Zircaloy, experimentalmente se ha verificado la simetría rotacional de anisotropía respecto al eje del cilindro y la tensión de fluencia en dirección tangencial es aproximadamente igual a la radial, lo que justifica la forma 263).

Notemos que la teoría elástica desarrollada no indica lo que sucede en los puntos donde se sobrepasa el límite elástico, para ello, si es necesario, se tendría que emplear los análisis al límite.

El criterio de Hill fue extendido para materiales anisótropos que presentan efecto Bauschinger, en el criterio propuesto por Ota, Shindo y Fukuoka que utiliza las tensiones de fluencia en tracción y en compresión para todas las direcciones principales de anisotropía.

En tubos de pequeño espesor, algunos puntos de la curva de fluencia en el plano de tensiones principales pueden lograrse experimentalmente con combinaciones de cargas axiales y presiones, pero son **difícultosos**, particularmente en algunos cuadrantes y no reproducen la curva completa. También se emplea el método de dureza Knoop.

2.7. DILATACION HOMOGENEA

En el caso en que la placa circular y la envolvente circular cilíndrica sufran una misma elevación o descenso uniforme de temperatura y si ambos poseen igual coeficiente medio de dilatación térmica, ambas sufrirán una misma deformación circunferencial uniforme:

$$264) (\epsilon_{\theta})_t = \alpha_m (t - t_0)$$

donde α_m es el coeficiente medio de dilatación térmica lineal entre la temperatura t_0 inicial y la temperatura t final.

El desplazamiento radial de la superficie media de la lámina y del fondo es:

$$265) (w)_t = r_0 \alpha_m (t - t_0)$$

El radio medio dilatado (o contraído) es:

$$266) (r)_t = r_0 + (w)_t = r_0 [1 + \alpha_m (t - t_0)]$$

Esta dilatación, al no ser impedida, no genera tensiones térmicas.

En rigor, el espesor de la lámina también se dilata, pero con la hipótesis de lámina fina esta deformación se desprecia.

Si la envolvente y el tapón se dilatan distinto, sea por tener distintas α_m o por sufrir calentamientos homogéneos con diferentes temperaturas finales, se producirán tensiones térmicas por flexión de borde, semejante a la analizada hasta aquí. Asimismo, la existencia de gradientes térmicos radiales, circunferenciales y axiales origina un estado de tensiones y deformaciones térmicas que también se superponen a los anteriores.

PROGRAMAS DESARROLLADOS PARA EL CALCULO

Las soluciones analíticas fueron programadas para obtener resultados numéricos con la calculadora programable de mesa Hewlett-Packard, Modelo 9100B del Grupo de Cálculo para aprovechar su graficador de funciones. En cálculos secundarios se utilizó la calculadora programable compacta MONROE, Modelo 1665 del Grupo de Diseño de Elementos Combustibles.

Se programaron las funciones que expresan la variación a lo largo de la abscisa de los desplazamientos radiales y de las tensiones, en función de las constantes elásticas, dimensiones y de la carga de superficie efectiva. Las funciones fueron tabuladas para incrementos constantes de $\Delta(ax) = 0,1$, elegido para obtener una fina variación de amplitud. Equivale a incrementos constantes de abscisas de $\Delta x = 0,1/a$. Se resolvió numéricamente hasta una abscisa del orden de una vez y media la longitud de onda de la amortiguación senoidal ($ax = 10 > 3\pi$). Se calcularon los correspondientes valores extremos de todas las funciones, para $x \leq \lambda$.

$$215) \quad W = \frac{r^2 p_r}{E h} (1 - \nu/2) \left[1 - e^{-ax} (\cos ax + \sin ax) \right]$$

con extremos en: 246) $ax_1 = 0$

$$247) \quad ax_2 = \pi$$

$$248) \quad ax_3 = 2\pi$$

$$222) \quad (\sigma_\theta)_{z=\pm h/2} = \frac{p_r r}{h} \left[1 - (1 - \nu/2) e^{-ax} (\sin ax + \cos ax) \pm \frac{\sqrt{3}}{(1 - \nu^2)^{1/2}} (1 - \nu/2) e^{-ax} (\cos ax - \sin ax) \right]$$

Los extremos surgen de la ecuación

$$229) \quad \sin ax \pm \frac{\sqrt{3}}{(1 - \nu^2)^{1/2}} \cos ax = 0$$

Se elaboró un programa para obtener las raíces reales dentro de $ax \leq 2\pi$. La solución numérica para $\nu = 0,38$ (ver Capítulo 4) indicó:

$$ax_1 = 0,6184393670 = 0,1968553645 \pi$$

$$ax_2 = 2,523153286 = 0,8031446352 \pi$$

$$ax_3 = 3,760032020 = 1,196855364 \pi$$

$$ax_4 = 5,664745940 = 1,803144635 \pi$$

$$^{224)} (\sigma_x)_{z=\pm h/2} = \frac{p_r r}{2h} \left[1 \pm \frac{2\sqrt{3}(1-\nu/2)}{(1-\nu^2)^{1/2}} e^{-ax} (\cos ax - \sin ax) \right]$$

Presenta extremos:

$$^{234)} ax_1 = \frac{\pi}{2}$$

$$^{235)} ax_2 = \frac{3\pi}{2}$$

$$^{226)} (\tau_{xz})_{z=0} = -\frac{3^{3/4}}{2(1-\nu^2)^{1/4}} \left(\frac{r}{h}\right)^{1/2} p_r (1-\nu/2) e^{-ax} \cos ax$$

Extremos en:

$$^{240)} ax_1 = \frac{3\pi}{4}$$

$$^{241)} ax_2 = \frac{7\pi}{4}$$

El valor de la constante a fue programado con la expresión 160):

$$a = \left[\frac{3(1-\nu^2)}{r^2 h^2} \right]^{1/4}$$

Para la longitud de onda de la amortiguación senoidal se utilizó la 175):

$$\lambda = \frac{2\pi}{a}$$

El radio medio del cilindro circular dilatado se resuelve con la fórmula 266):

$$r_t = r_0 \left[1 + \alpha_m (t - t_0) \right]$$

Mediante la 251) se calculó:

$$\sigma_e = (\sigma_x^2 + \sigma_\theta^2 - \sigma_x \sigma_\theta)^{1/2}$$

CAPITULO 3

PROGRAMAS DESARROLLADOS PARA EL CALCULO

Title FORMULA 215 : $W(x)$

Step	Key	Code	Display			Step	Key	Code	Display			Step	Key	Code	Display		
			x	y	z				x	y	z				x	y	z
00	f	15				310	x	36				610	If $x < y$	52			
1	↑	27				1	x	36				1	8	08			
2	x	36				2	y →	40				2	5	05			
3	d	17				3	5	05				3	↓	25			
4	↑	27				4	x ←	67				4	α	13			
5	x	36				5	6	06				5	↑	27			
6	↓	25				6	PRINT	45	α	$\frac{r^2 Pr}{Eh} (1 - \frac{1}{2})$		6	x ←	67			
7	x	36				7	α	13				7	6	06			
8	c	16				8	↑	27				8	÷	35			
9	↑	27				9	↑	27				9	3	03			
a	x	36				a	sen x	70				a	0	00			
b	1	01				b	x ↔ y	30				b	0	00			
c	x ↔ y	30				c	cos x	73				c	x	36			
d	-	34				d	+	33				d	↑	ROLL	22		
10	3	03				40	↑	ROLL	22			70	x ↔ y	30			
1	x	36				1	CHG SIGN	32				1	5	05			
2	↓	25				2	e ^x	74				2	EXP	26			
3	x ↔ y	30				3	↑	ROLL	22			3	5	05			
4	÷	35				4	x	36				4	x	36			
5	↓	25				5	1	01				5	↑	25			
6	ln	65				6	x ↔ y	30				6	x ↔ y	30			
7	↑	27				7	-	34				7	FMT	42			
8	4	04				8	x ←	67				8	↓	25			
9	÷	35				9	5	05				9	α	13			
a	↓	25				a	x	36				a	↑	27			
b	e ^x	74				b	α	13				b	•	21			
c	x →	23				c	↑	27				c	1	01			
d	6	06				d	x ←	67				d	+	33			
20	c	16				50	6	06				+ Storage					
1	↑	27				1	÷	35				F	r				
2	2	02				2	↓	25				E	E				
3	÷	35				3	PRINT	45	x	w		d	h				
4	1	01				4	x ←	67				c	↓				
5	x ↔ y	30				5	7	07				b	Pr				
6	-	34				6	↑	27				a	0				
7	b	14				7	1	01				9	(ax) ₁				
8	x	36				8	+	33				8	(ax) ₂				
9	e	12				9	y →	40				7	0				
a	÷	35				a	7	07				6	α				
b	d	17				b	1	01				5	$\frac{r^2 Pr}{Eh} (1 - \frac{1}{2})$				
c	÷	35				c	0	00				4					
d	f	15				d	1	01				3					
												2					
												1					
												0					

Title (CONT. W_x)

HEWLETT-PACKARD

HEWLETT-PACKARD

HEWLETT-PACKARD

HEWLETT-PACKARD

Step	Key	Code	Display			Step	Key	Code	Display			Step	Key	Code	Display		
			x	y	z				x	y	z				x	y	z
80	y →	40				10						0					
1	Q	13				1						1					
2	GoTo	44				2						2					
3	3	03				3						3					
4	7	07				4						4					
5	FMT	42				5						5					
6	↑	27				6						6					
7	x ←	67				7						7					
8	7	07				8						8					
9	↑	27				9						9					
a	1	01				a						a					
b	0	00				b						b					
c	4	04				c						c					
d	If x=y	50				d						d					
90	9	11				0						0					
1	d	17				1						1					
2	x ←	67				2						2					
3	9	11				3						3					
4	x →	23				4						4					
5	Q	13				5						5					
6	x ←	67				6						6					
7	8	10				7						7					
8	x →	23				8						8					
9	9	11				9						9					
a	GoTo	44				a						a					
b	3	03				b						b					
c	7	07				c						c					
d	END	46				d						d					
0						0						0					
1						1						1					
2						2						2					
3						3						3					
4						4						4					
5						5						5					
6						6						6					
7						7						7					
8						8						8					
9						9						9					
a						a						a					
b						b						b					
c						c						c					
d						d						d					

+ Storage -

Title FORMULA 224): $\sigma(x)$

Step	Key	Code	Display			Step	Key	Code	Display			Step	Key	Code	Display		
			x	y	z				x	y	z				x	y	z
00	f	15				30	$\sqrt{x}$	76				60	x ←	67			
1	↑	27				1	↑	27				1	5	05			
2	x	36				2	2	02				2	x	36			
3	d	17				3	x	36				3	a	13			
4	↑	27				4	C	16				4	↑	27			
5	x	36				5	↑	27				5	x ←	67			
6	↓	25				6	2	02				6	6	06			
7	x	36				7	÷	35				7	÷	35			
8	C	16				8	1	01				8	↓	25			
9	↑	27				9	x ↔ y	30				9	PRINT	45	x	σ_x	
a	x	36				a	-	34				a	x ←	67			
b	1	01				b	↓	25				b	7	07			
c	x ↔ y	30				c	x	36				c	↑	27			
d	-	34				d	C	16				d	1	01			
10	3	03				40	↑	27				70	+	33			
1	x	36				1	x	36				1	y →	40			
2	↓	25				2	1	01				2	7	07			
3	x ↔ y	30				3	x ↔ y	30				3	1	01			
4	÷	35				4	-	34				4	0	00			
5	↓	25				5	↓	25				5	1	01			
6	ln	65				6	$\sqrt{x}$	76				6	IF x < y	52			
7	↑	27				7	÷	35				7	9	11			
8	4	04				8	y →	40				8	b	14			
9	÷	35				9	4	04				9	↓	25			
a	↓	25				a	a	13				a	a	13			
b	e ^x	74				b	↑	27				b	↑	27			
c	x →	23				c	↑	27				c	x ←	67			
d	6	06				d	cos x	73				d	6	06			
20	b	14				50	x ↔ y	30				Storage					
1	↑	27				1	sen x	70				+					
2	f	15				2	-	34				-					
3	x	36				3	ROLL	22				r					
4	2	02				4	CNG	32				h					
5	÷	35				5	SIGN	32				y					
6	d	17				6	e ^x	74				pr					
7	÷	35				7	ROLL	22				0					
8	x ←	67				8	x	36				(ax) ₁					
9	6	06				9	x ←	67				(ax) ₂					
a	PRINT	45	a	$\frac{p-r}{2h}$		a	4	04				0					
b	y →	40				b	x	36				a					
c	5	05				c	1	01				PR					
d	3	03				d	x ↔ y	30				2h					
							+	34				=					

Title (CONT. σ_k)

HEWLETT-PACKARD

HEWLETT-PACKARD

HEWLETT-PACKARD

HEWLETT-PACKARD

Step	Key	Code	Display			Step	Key	Code	Display			Step	Key	Code	Display		
			x	y	z				x	y	z				x	y	z
80	$\div$	35				610	$x \rightarrow$	23				0					
1	3	03				1	9	11				1					
2	0	00				2	Go To	44				2					
3	0	00				3	4	04				3					
4	x	36				4	a	13				4					
5	$\uparrow$ ROLL	22				5	END	46				5					
6	$x \leftrightarrow y$	30				6						6					
7	1	01				7						7					
8	0	00				8						8					
9	0	00				9						9					
a	x	36				a						a					
b	$\downarrow$	25				b						b					
c	$x \leftrightarrow y$	30				c						c					
d	FMT	42				d						d					
90	$\downarrow$	25				0						0					
1	a	13				1						1					
2	$\uparrow$	27				2						2					
3	.	21				3						3					
4	1	01				4						4					
5	+	33				5						5					
6	$y \rightarrow$	40				6						6					
7	a	13				7						7					
8	Go To	44				8						8					
9	4	04				9						9					
a	a	13				a						a					
b	FMT	42				b						b					
c	$\uparrow$	27				c						c					
d	$x \leftarrow$	67				d						d					
00	7	07				0											
1	$\uparrow$	27				1											
2	1	01				2											
3	0	00				3											
4	4	04				4											
5	IF $x=y$	50				5											
6	b	14				6											
7	5	05				7											
8	$x \leftarrow$	67				8											
9	9	11				9											
a	$x \rightarrow$	23				a											
b	a	13				b											
c	$x \leftarrow$	67				c											
d	8	10				d											

+ Storage -

[62] HEWLETT-PACKARD

[65] HEWLETT-PACKARD

[68] HEWLETT-PACKARD

[71] HEWLETT-PACKARD

Step	Key	Code	Display			Step	Key	Code	Display			Step	Key	Code	Display																																				
			x	y	z				x	y	z				x	y	z																																		
00	f	15				310	÷	35				60	X ←	67																																					
1	↑	27				1	1	01				1	3	03																																					
2	x	36				2	X ↔ y	30				2	-	34																																					
3	e	12				3	-	34				3	↓	25																																					
4	↑	27				4	b	14				4	X	36																																					
5	x	36				5	CHG SIGN	32				5	X ←	67																																					
6	↓	25				6	e ^x	74				6	4	04																																					
7	x	36				7	x	36				7	X	36																																					
18	d	17				8	y →	40				8	1	01																																					
9	↑	27				9	4	04				9	X ↔ y	30																																					
a	x	36				a	b	14				a	+	33																																					
b	1	01				b	↑	27				b	X ←	67																																					
c	X ↔ y	30				c	sen x	70				c	1	01																																					
d	-	34				d	X →	23				d	-	34																																					
10	3	03				40	3	03				70	X ←	67																																					
1	x	36				1	X ↔ y	30				1	5	05																																					
2	↓	25				2	cos x	73				2	X	36																																					
3	X ↔ y	30				3	X →	23				3	b	14																																					
4	÷	35				4	2	02				4	↑	27																																					
5	↓	25				5	+	33				5	X ←	67																																					
6	ln x	65				6	X ←	67				6	6	06																																					
7	↑	27				7	4	04				7	÷	35																																					
8	4	04				8	x	36				8	↓	25																																					
9	÷	35				9	y →	40				9	PRINT	45	x	00																																			
a	↓	25				a	1	01				a	X →	23																																					
b	e ^x	74				b	d	17				b	0	00																																					
c	X →	23				c	↑	27				c	X ←	67																																					
d	6	06				d	x	36				d	7	07																																					
20	c	16				50	1	01				Storage <table> <tr> <th>+</th><th>-</th></tr> <tr> <td>r</td><td>(ax)₄</td></tr> <tr> <td>h</td><td></td></tr> <tr> <td>j</td><td></td></tr> <tr> <td>Pr</td><td></td></tr> <tr> <td>0</td><td></td></tr> <tr> <td>(ax)₁</td><td></td></tr> <tr> <td>(ax)₂</td><td></td></tr> <tr> <td>(ax)₃</td><td></td></tr> <tr> <td>0</td><td></td></tr> <tr> <td>a</td><td></td></tr> <tr> <td>Pr_h</td><td></td></tr> <tr> <td>-</td><td></td></tr> <tr> <td>-</td><td></td></tr> <tr> <td>-</td><td></td></tr> <tr> <td>-</td><td></td></tr> <tr> <td>-</td><td></td></tr> </table>						+	-	r	(ax) ₄	h		j		Pr		0		(ax) ₁		(ax) ₂		(ax) ₃		0		a		Pr _h		-		-		-		-		-	
+	-																																																		
r	(ax) ₄																																																		
h																																																			
j																																																			
Pr																																																			
0																																																			
(ax) ₁																																																			
(ax) ₂																																																			
(ax) ₃																																																			
0																																																			
a																																																			
Pr _h																																																			
-																																																			
-																																																			
-																																																			
-																																																			
-																																																			
1	↑	27				1	X ↔ y	30																																											
2	f	15				2	-	34																																											
3	x	36				3	3	03																																											
4	e	12				4	X ↔ y	30																																											
5	÷	35				5	÷	35																																											
6	X ←	67				6	↓	25																																											
7	6	06				7	√x	76																																											
8	PRINT	45	a	$\frac{Pr}{h}$		8	↑	27																																											
9	y →	40				9	d	17																																											
a	5	05				a	X	36																																											
b	d	17				b	X ←	67																																											
c	↑	27				c	2	02																																											
d	2	02				d	↑	27																																											

Title (CONT. σ_e)

HEWLETT-PACKARD						HEWLETT-PACKARD						HEWLETT-PACKARD						HEWLETT-PACKARD					
Step	Key	Code	Display			Step	Key	Code	Display			Step	Key	Code	Display			Step	Key	Code	Display		
80	$\uparrow$	27				b0	$x \leftarrow$	67				0											
11	1	01				1	7	07				1											
2	$x \leftrightarrow y$	30				2	$\uparrow$	27				2											
3	+	33				3	1	01				3											
4	$y \rightarrow$	40				4	0	00				4											
5	7	07				5	6	06				5											
6	1	01				6	IF $x=y$	50				6											
7	0	00				7	d	17				7											
8	1	01				8	0	00				8											
9	IF $x < y$	52				9	a	13				9											
a	d	13				a	$x \rightarrow$	23				a											
b	c	16				b	b	14				b											
c	$\downarrow$	25				c	$x \leftarrow$	67				c											
d	$x \leftarrow$	67				d	g	11				d											
90	0	00				c0	$x \rightarrow$	23				0											
1	$\uparrow$	27				1	d	13				1											
2	3	03				2	$x \leftarrow$	67				2											
3	0	00				3	8	10				3											
4	0	00				4	$x \rightarrow$	23				4											
5	x	36				5	9	11				5											
6	$\uparrow$	22				6	$x \leftarrow$	67				6											
7	$x \leftrightarrow y$	30				7	-	34				7											
8	2	02				8	f	15				8											
9	0	00				9	$x \rightarrow$	23				9											
a	0	00				a	B	10				a											
b	x	36				b	Go To	44				b											
c	$\downarrow$	25				c	2	02				c											
d	$x \leftrightarrow y$	30				d	b	14				d											
a0	FMT	42				d0	END	46															
1	$\downarrow$	25				1																	
2	b	14				2																	
3	$\uparrow$	27				3																	
4	.	21				4																	
5	1	01				5																	
6	+	33				6																	
7	$y \rightarrow$	40				7																	
8	b	14				8																	
9	Go To	44				9																	
a	2	02				a																	
b	b	14				b																	
c	FMT	42				c																	
d	$\uparrow$	27				d																	

+ Storage -

Resolución de la ecuación trascendente 229): $\text{sen} ax \pm \frac{23\frac{1}{2}}{(1-2)^{1/2}} \cos ax = 0$

Title Se complementa con el programa de HEWLETT-PACKARD PART NO. 09100-70014

Step	Key	Code	Display			Step	Key	Code	Display			Step	Key	Code	Display		
			x	y	z				x	y	z				x	y	z
6	0	27	ax	ax		10						0					
1	sen x	70				1						1					
2	x ↔ y	30				2						2					
3	cos x	73				3						3					
4	y →	40				4						4					
5	a	13				5						5					
6	↑	27				6						6					
7	b	14				7						7					
8	↑	27				8						8					
9	x	36				9						9					
a	1	01				a						a					
b	x ↔ y	30				b						b					
c	-	34				c						c					
d	3	03				d						d					
7	0	x ↔ y	30			0						0					
1	÷	35				1						1					
2	↓	25				2						2					
3	√x	76				3						3					
4	x	36				4						4					
5	b	14				5						5					
6	x	36				6						6					
7	a	13				7						7					
8	x ↔ y	30				8						8					
9	+	34				9						9					
a	↓	33				a						a					
b	↓	25				b						b					
c	Go To	44				c						c					
d	0	00				d						d					
7	6	06				7						7					
8	END	46				0						0					
1						1						1					
2						2						2					
3						3						3					
4						4						4					
5						5						5					
6						6						6					
7						7						7					
8						8						8					
9						9						9					
a						a						a					
b						b						b					
c						c						c					
d						d						d					
1						1						1					
2						2						2					
3						3						3					
4						4						4					
5						5						5					
6						6						6					
7						7						7					
8						8						8					
9						9						9					
a						a						a					
b						b						b					
c						c						c					
d						d						d					

Storage

Title FORMULA 251): $(Ge)_x$

Step	Key	Code	Display			Step	Key	Code	Display			Step	Key	Code	Display		
			x	y	z				x	y	z				x	y	z
00	3	03				30	d	17				60	x↔y	30			
1	$\sqrt{x}$	76				1	x	36		σ_x		1	—	34			
2	↑	27				2	y→	40				2	3	03			
3	2	02				3	9	11				3	x↔y	30			
4	x	36				4	e	12				4	÷	35			
5	f	15				5	↑	27				5	↓	25			
6	↑	27				6	C	16				6	$\sqrt{x}$	76			
7	2	02				7	÷	35				7	↑	27			
8	÷	35				8	y→	40				8	f	15			
9	1	01				9	8	10				9	x	36			
a	x↔y	30				a	f	15				a	x←	67			
b	—	34				b	↑	27				b	5	05			
c	↓	25				c	2	02				c	↑	27			
d	x	36				d	÷	35				d	x←	67			
10	f	15				40	1	01				70	6	06			
1	↑	27				1	x↔y	30				1	—	34			
2	x	36				2	—	34				2	↓	25			
3	1	01				3	e	12				3	x	36			
4	x↔y	30				4	CHG SIGN	32				4	x←	67			
5	—	34				5	e ^x	74				5	7	07			
6	↓	25				6	x	36				6	x	36			
7	$\sqrt{x}$	76				7	y→	40				7	1	01			
8	÷	35				8	7	07				8	x↔y	30			
9	y→	40				9	e	12				9	$\frac{34}{33}$	34			
a	α	13				a	↑	27				a	x←	67			
b	e	12				b	senx	70				b	4	04			
c	↑	27				c	x→	23				c	—	34			
d	↑	27				d	6	06				d	d	17			
20	cos x	73				50	x↔y	30				Storage					
1	x↔y	30				1	cos x	73				f	y				
2	senx	70				2	x→	23				e	0				
3	—	34				3	5	05				d	$\frac{34}{33}$				
4	↑	22				4	+	33				c	a				
5	CHG SIGN	32				5	x←	67				5	0				
6	e ^x	74				6	7	07				a	—				
7	↑	22				7	x	36				9	σ_x				
8	x	36				8	y→	40				8	x				
9	α	13				9	4	04				7	—				
a	x	36				a	f	15				6	—				
b	1	01				b	↑	27				5	—				
c	x↔y	30				c	x	36				4	σ_e				
d	$\frac{34}{33}$	34				d	1	01				3					
												2					
												1					
												0					

Title (CONT. $(\sigma_e)_x$)

Step	Key	Code	Display			Step	Key	Code	Display			Step	Key	Code	Display		
			x	y	z				x	y	z				x	y	z
80	↑	27				b0	↓	25				0					
1	2	02				1	$x \leftrightarrow y$	30				1					
2	X	36				2	FMT	42				2					
3	↓	25				3	↓	25				3					
4	x	36				4	b	14				4					
5	$y \rightarrow$	40				5	↑	27				5					
6	3	03				6	1	01				6					
7	$x \leftarrow$	67				7	+	33				7					
8	9	11				8	$y \rightarrow$	40				8					
9	↑	27				9	b	14				9					
a	X	36				a	1	01				a					
b	$x \leftarrow$	67				b	0	00				b					
c	3	03				c	1	01				c					
d	↑	27				d	IF $x < y$	52				d					
90	X	36				c0	c	16				0					
1	↓	25				1	c	16				1					
2	+	33				2	e	12				2					
3	$x \leftarrow$	67				3	↑	27				3					
4	9	11				4	.	21				4					
5	↑	27				5	1	01				5					
6	$x \leftarrow$	67				6	+	33				6					
7	3	03				7	$y \rightarrow$	40				7					
8	X	36				8	e	12				8					
9	↓	25				9	GoTo	44				9					
a	-	34				a	0	00				a					
b	↓	25				b	0	00				b					
c	$\sqrt{x}$	76				c	END	46				c					
d	↑	27				d						d					
a0	$x \leftarrow$	67				0											
1	8	10				1											
2	PRINT	45	x	σ_e		2											
3	↑	27				3											
4	3	03				4											
5	0	00				5											
6	0	00				6											
7	X	36				7											
8	ROLL	22				8											
9	$x \leftrightarrow y$	30				9											
a	1	01				a											
b	0	00				b											
c	0	00				c											
d	X	36				d											

+ Storage -

Step	Key	Code	Display			Step	Key	Code	Display			Step	Key	Code	Display		
			x	y	z				x	y	z				x	y	z
0	f	15				3	↑	01				6	5	05			
1	↑	27				1	x↔y	30				1	x	36			
2	x	36				2	-	34				2	a	13			
3	d	17				3	↓	25				3	↑	27			
4	↑	27				4	x	36				4	x←	67			
5	x	36				5	3	03				5	6	06			
6	↓	25				6	ln x	65				6	÷	35			
7	x	36				7	↑	27				7	↓	25			
8	c	16				8	3	03				8	PRINT	45	x	τ	
9	↑	27				9	x	36				9	x←	67			
a	x	36				a	4	04				a	7	07			
b	1	01				b	÷	35				b	↑	27			
c	x↔y	30				c	↓	25				c	1	01			
d	-	34				d	e ^x	74				d	+	33			
10	3	03				4	↑	27				7	y→	40			
1	x	36				1	2	02				1	7	07			
2	↓	25				2	÷	35				2	1	01			
3	x↔y	30				3	↓	25				3	0	00			
4	÷	35				4	x	36				4	1	01			
5	↓	25				5	c	16				5	IF x<y	52			
6	ln x	65				6	↑	27				6	9	11			
7	↑	27				7	x	36				7	a	13			
8	4	04				8	1	01				8	↓	25			
9	÷	35				9	x↔y	30				9	a	13			
a	↓	25				a	-	34				a	↑	27			
b	e ^x	74				b	↓	25				b	x←	67			
c	x→	23				c	√x	76				c	6	06			
d	6	06				d	√x	76				d	÷	35			
2	b	14				5	÷	35									
1	CHG SIGN	32				1	x←	67									
2	↑	27				2	6	06									
3	f	15				3	PRINT	45	a	-							
4	↑	27				4	y→	40									
5	d	17				5											

Title (CONT. $(\tau_{xz})_x$)

Step	Key	Code	Display			Step	Key	Code	Display			Step	Key	Code	Display		
			x	y	z				x	y	z				x	y	z
80	3	03				810	9	11				0					
1	0	00				1	Go To	44				1					
2	0	00				2	5	05				2					
3	X	36				3	6	06				3					
4	ROLL	22				4	END	46				4					
5	$x \leftrightarrow y$	30				5						5					
6	8	10				6						6					
7	0	00				7						7					
8	0	00				8						8					
9	X	36				9						9					
a	↓	25				a						a					
b	$x \leftrightarrow y$	30				b						b					
c	FMT	42				c						c					
d	↓	25				d						d					
90	a	13				0						0					
1	↑	27				1						1					
2	.	21				2						2					
3	1	01				3						3					
4	+	33				4						4					
5	$y \rightarrow$	40				5						5					
6	a	13				6						6					
7	Go To	44				7						7					
8	5	05				8						8					
9	6	06				9						9					
a	FMT	42				a						a					
b	↑	27				b						b					
c	$x \leftarrow$	67				c						c					
d	7	07				d						d					
a	↑	27				0						0					
1	1	01				1						1					
2	0	00				2						2					
3	4	04				3						3					
4	IF $x=y$	50				4						4					
5	b	14				5						5					
6	4	04				6						6					
7	$x \leftarrow$	67				7						7					
8	9	11				8						8					
9	$x \rightarrow$	23				9						9					
a	a	13				a						a					
b	$x \leftarrow$	67				b						b					
7	8	10				c						c					
7	$x \rightarrow$	23				d						d					

+ Storage -

DATOS Y CONSTANTES UTILIZADAS

- Se adoptaron valores medios -

Caso a). Antes de entrar en servicio:

Presión efectiva interior de cálculo $p_r = 0,15 \text{ kg.mm}^{-2}$

Temperatura ambiente (aprox. 20°C).

Propiedades elásticas del Zircaloy-4 a esa temperatura:

- Módulo de elasticidad longitudinal $E_{20^\circ\text{C}} = 10.000 \text{ kg.mm}^{-2}$

- Coeficiente de Poisson $\nu = 0,38$

Dimensiones geométricas del tubo a esa temperatura: (Ver fig. 5)

- Espesor, $h = 0,55 \text{ mm}$.

- Radio medio, $r = 5,675 \text{ mm}$.

Caso b). Tiempo inicial en servicio (tiempo cero):

Presión exterior (zona del tapón inferior) $p_{\text{ext}} = 1,20 \text{ kg.mm}^{-2}$

Presión interior, $p_{\text{int.}} = 0,60 \text{ kg.mm}^{-2}$

Presión efectiva exterior de cálculo, $p_r = -0,60 \text{ kg.mm}^{-2}$

Temperatura máxima (zona del tapón inferior) aprox. 300°C .

Propiedades elásticas del Zry-4 a 300°C .

- $E_{300^\circ\text{C}} = 7.500 \text{ kg.mm}^{-2}$

- $\nu = 0,38$

Coeficiente medio de dilatación térmica del Zry-4

$\alpha_{0 - 300^\circ\text{C}} = 6,5 \times 10^{-6} \text{ }^\circ\text{C}^{-1}$

Dimensiones a 300°C :

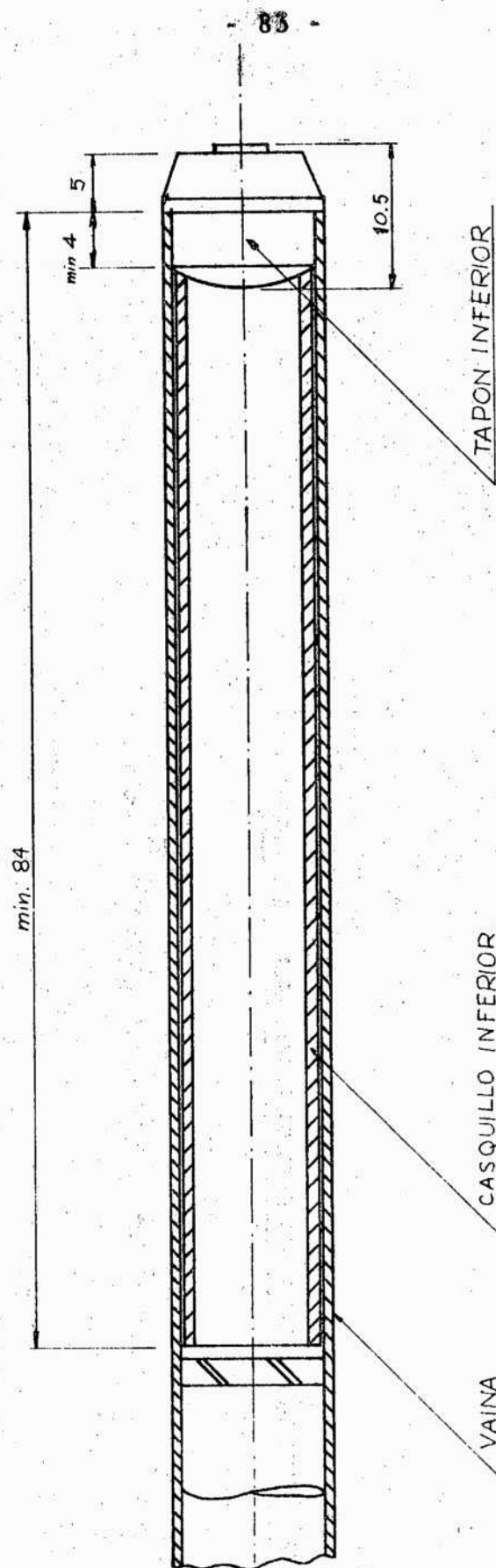
- $h \simeq 0,55 \text{ mm}$.

- Aplicando la expresión 266) se calculó el radio medio a esa temperatura, $r = 5,686 \text{ mm}$.

Las especificaciones mínimas requeridas para los tu-

CAPITULO 4

DATOS Y CONSTANTES UTILIZADAS



casquillo inferior: ϕ exterior: $10,65 \pm 0,05$
 ϕ interior: $9,30 \pm 0,05$
 espesor : min 0,60

ϕ exterior vaina: $11,90 \pm 0,05$
 ϕ interior vaina: $10,80 \pm 0,04$
 espesor vaina: 0,55

Medidas en m.m. ESCALA : 2:1

EXTREMO INFERIOR DE LA BARRA COMBUSTIBLE PARA LA C.N.A. FIG. 5

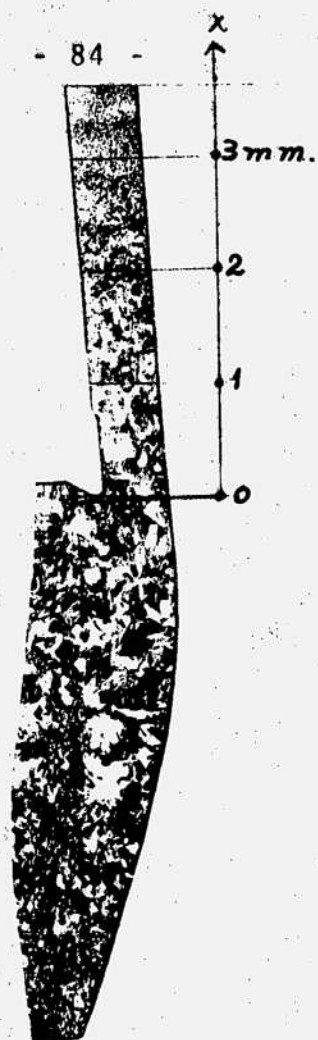


Figura 6

Macrofotografía de la zona de la soldadura de la vaina con el ta
pón, aumentada unas 17 veces, que muestra la geometría resultan
te. Se puede apreciar la gama de estructuras metalográficas.

hos de Zry-4 para la C.N.A., antes del armado, ensayados con tensión de tracción axial, son:

Temperatura	$\sigma_{0,2} \text{ [kg. mm}^{-2}\text{]}$	$\sigma_{\text{máx.}} \text{ [kg. mm}^{-2}\text{]}$
ambiente	≥ 46	≥ 60
400°C	≥ 27	≥ 34

Caso c: Transferencia del elemento combustible servido del reactor a la piletta de enfriamiento.

Presión efectiva interior de cálculo $p_r = 1,15 \text{ kg. mm}^{-2}$.

Temperatura de la zona del tapón inferior, menor que 100°C.

Propiedades elásticas del Zry-4 a 100°C:

$$E_{100^\circ\text{C}} = 9.000 \text{ kg.mm}^{-2}$$

$$\nu = 0,38$$

$$\sigma_{0,2} \approx 40 \text{ kg.mm}^{-2}$$

Coefficiente medio de dilatación térmica del Zry-4

$$\alpha_{0-300^\circ\text{C}} = 6,5 \times 10^{-6} \text{ } ^\circ\text{C}^{-1}$$

Dimensiones a 100°C:

$$h \approx 0,55 \text{ mm.}$$

$$Y_{100^\circ\text{C}} = 5.678 \text{ mm.}$$

Caso d: Accidente de pérdida de presión en el canal.

Presión efectiva interior de cálculo $p_r = 1,15 \text{ kg.mm}^{-2}$

Temperatura de la zona del tapón inferior, estimado en 500°C.

Propiedades elásticas del Zry-4 a 500°C:

$$\cdot E_{500^{\circ}\text{C}} = 5.000 \text{ kg. mm}^{-2}$$

$$\cdot \nu = 0,38$$

$$\cdot \sigma_{0,2} \approx 14 \text{ kg.mm}^{-2}$$

Coefficiente medio de dilatación térmica del Zry-4:

$$\alpha_0 - 700^{\circ}\text{C} = 5,8 \times 10^{-6} \text{ }^{\circ}\text{C}^{-1}$$

Dimensiones a 500°C :

$$h \approx 0,55 \text{ mm.}$$

$$r_{500^{\circ}\text{C}} = 5,691 \text{ mm.}$$

CAPITULO 5

RESULTADOS Y GRAFICOS OBTENIDOS:

Tabla de valores correspondientes al caso b), tiempo inicial de servicio

X [mm]	W [mm x 10 ⁻³]	$G_x [kg mm^{-2}]$		$G_\phi [kg mm^{-2}]$		$G_e [kg mm^{-2}]$		$Z_{xz} [kg mm^{-2}]$
		$z = \frac{h}{2}$	$z = -\frac{h}{2}$	$z = \frac{h}{2}$	$z = -\frac{h}{2}$	$z = \frac{h}{2}$	$z = -\frac{h}{2}$	$z = 0$
0,000	0,0000	6,307	-12,510	2,397	-4,754	5,514	10,094	1,852
0,140	-0,0356	4,519	-10,722	1,670	-4,121	3,958	9,368	1,667
0,280	-0,1331	2,917	-9,120	0,933	-3,641	2,581	7,952	1,486
0,419	-0,2794	1,497	-7,700	0,200	-3,295	1,408	6,692	1,311
0,559	-0,4630	2,513	-6,454	-0,515	-3,063	0,677	5,592	1,143
0,699	-0,6740	-0,829	-5,373	-1,204	-2,931	1,067	4,660	0,986
0,838	-0,9034	-1,755	-4,447	-1,859	-2,882	1,809	3,907	0,839
0,978	-1,1438	-2,538	-3,665	-2,473	-2,901	2,506	3,349	0,703
1,118	-1,3889	-3,189	-3,014	-3,044	-2,977	3,119	2,996	0,580
1,257	-1,6333	-3,720	-2,483	-3,568	-3,098	3,646	2,841	0,467
1,397	-1,8728	-4,144	-2,059	-4,045	-3,253	4,095	2,850	0,368
1,537	-2,1040	-4,472	-1,731	-4,475	-3,433	4,473	2,973	0,280
1,677	-2,3241	-4,716	-1,487	-4,858	-3,631	4,788	3,161	0,202
1,816	-2,5312	-4,886	-1,317	-5,195	-3,839	5,048	3,379	0,135
1,956	-2,7239	-4,993	-1,210	-5,490	-4,052	5,259	3,603	0,078
2,096	-2,9012	-5,047	-1,156	-5,745	-4,266	5,430	3,821	0,029
2,235	-3,0629	-5,056	-1,147	-5,961	-4,476	5,564	4,027	-0,011
2,375	-3,2087	-5,027	-1,176	-6,143	-4,679	5,668	4,216	-0,044
2,515	-3,3390	-4,969	-1,234	-6,293	-4,873	5,746	4,388	-0,070

2,654	-3,4542	-4,888	-1,315	-6,414	-5,056	5,803	4,543	-0,090
2,794	-3,5550	-4,789	-1,414	-6,509	-5,226	5,842	4,682	-0,104
2,934	-3,6420	-4,678	-1,525	-6,581	-5,383	5,866	4,806	-0,114
3,074	-3,7163	-4,558	-1,645	-6,634	-5,527	5,878	4,915	-0,121
3,213	-3,7788	-4,433	-1,770	-6,669	-5,657	5,879	5,012	-0,124
3,353	-3,8305	-4,307	-1,896	-6,689	-5,773	5,873	5,097	-0,124
3,493	-3,8725	-4,182	-2,021	-6,697	-5,876	5,860	5,171	-0,122
3,633	-3,9057	-4,060	-2,142	-6,695	-5,966	5,841	5,235	-0,118
3,772	-3,9312	-3,943	-2,260	-6,684	-6,044	5,819	5,289	-0,113
3,912	-3,9498	-3,832	-2,371	-6,666	-6,111	5,794	5,336	-0,106
4,052	-3,9625	-3,728	-2,475	-6,643	-6,167	5,768	5,375	-0,099
4,191	-3,9701	-3,631	-2,572	-6,617	-6,214	5,739	5,408	-0,091
4,331	-3,9734	-3,542	-2,660	-6,587	-6,252	5,710	5,434	-0,083
4,471	-3,9732	-3,462	-2,741	-6,556	-6,282	5,681	5,455	-0,076
4,611	-3,9700	-3,389	-2,814	-6,525	-6,306	5,652	5,471	-0,067
4,750	-3,9645	-3,325	-2,878	-6,493	-6,323	5,623	5,483	-0,060
4,890	-3,9572	-3,268	-2,935	-6,461	-6,335	5,596	5,491	-0,052
5,030	-3,9485	-3,218	-2,985	-6,431	-6,342	5,570	5,496	-0,045
5,170	-3,9389	-3,175	-3,027	-6,402	-6,346	5,545	5,498	-0,039
5,309	-3,9287	-3,139	-3,063	-6,375	-6,346	5,521	5,497	-0,033
5,449	-3,9181	-3,109	-3,094	-6,349	-6,344	5,499	5,405	-0,027

5,589	-3,9075	-3,084	-3,119	-6,326	-6,339	5,479	5,490	-0,022
5,728	-3,8971	-3,063	-3,139	-6,304	-6,335	5,461	5,485	-0,017
5,868	-3,8870	-3,048	-3,155	-6,285	-6,326	5,444	5,478	-0,014
6,008	-3,8772	-3,036	-3,167	-6,268	-6,318	5,429	5,471	-0,010
6,147	-3,8680	-3,027	-3,176	-6,252	-6,309	5,416	5,464	-0,007
6,287	-3,8594	-3,021	-3,182	-6,239	-6,300	5,404	5,456	-0,004
6,427	-3,8515	-3,018	-3,185	-6,227	-6,290	5,394	5,448	-0,002
6,567	-3,8442	-3,017	-3,186	-6,217	-6,281	5,385	5,440	-0,002
6,706	-3,8376	-3,018	-3,185	-6,209	-6,272	5,378	5,432	-0,001
6,846	-3,8317	-3,019	-3,183	-6,202	-6,264	5,371	5,425	-0,003
6,986	-3,8265	-3,023	-3,180	-6,196	-6,256	5,366	5,418	-0,004
7,125	-3,8219	-3,027	-3,176	-6,191	-6,248	5,362	5,411	-0,004
7,265	-3,8179	-3,031	-3,172	-6,188	-6,241	5,359	5,405	-0,005
7,405	-3,8144	-3,036	-3,166	-6,185	-6,235	5,357	5,400	-0,005
7,544	-3,8150	-3,042	-3,161	-6,183	-6,229	5,355	5,394	-0,005
7,684	-3,8091	-3,047	-3,156	-6,182	-6,224	5,354	5,390	-0,005
7,824	-3,8071	-3,053	-3,150	-6,182	-6,219	5,354	5,386	-0,005
7,964	-3,8055	-3,058	-3,146	-6,182	-6,215	5,353	5,382	-0,005
8,103	-3,8043	-3,063	-3,140	-6,183	-6,211	5,354	5,379	-0,005
8,243	-3,8034	-3,068	-3,135	-6,183	-6,208	5,354	5,376	-0,005

8,383	-3,8027	-3,073	-3,130	-6,183	-6,205	5,355	5,374	0,004
8,522	-3,8023	-3,077	-3,126	-6,185	-6,203	5,356	5,372	0,004
8,662	-3,8021	-3,081	-3,123	-6,186	-6,201	5,357	5,371	0,004
8,802	-3,8020	-3,084	-3,118	-6,187	-6,200	5,358	5,369	0,003

ESTADO DE TENSIONES Y DEFORMACIONES UNIFORMES PARA $\lambda > \lambda$								
∞	-3,8091	-3,101	-3,101	-6,203	-6,203	5,372	5,372	0

$$\alpha = 0,7158 \text{ mm}^{-1}$$

$$\lambda = \frac{2\pi}{a} = 8,778 \text{ mm}.$$

Caso b), tiempo inicial de servicio

En la tabla siguiente los valores de los desplazamientos radiales y de las tensiones para cada abscisa. La tabulación se interrumpe para una abscisa del orden de la primera longitud de onda porque la dispersión alrededor del estado uniforme es muy pequeña (del orden del milésimo).

De la tabla extraemos los valores máximos y los uniformes.

$$W \text{ máximo} = -0,003974 \text{ mm.}, \text{ para } x = 4,389 \text{ mm.}$$

$$W \text{ uniforme} = 0,003809 \text{ mm.}$$

$$\sigma_x \text{ máximo} = -12,510 \text{ kg.mm}^{-2} \text{ en la capa interior para } x = 0$$

$$\sigma_x \text{ uniforme} = -3,101 \text{ kg.mm}^{-2}$$

$$\sigma_e \text{ máximo} = -6,697 \text{ kg.mm}^{-2} \text{ en la capa exterior para } x = 3,493 \text{ mm.}$$

$$\sigma_e \text{ uniforme} = -6,203 \text{ kg.mm}^{-2}$$

$$\sigma_e \text{ máximo} = 10,094 \text{ kg.mm}^{-2} \text{ en la capa interior para } x = 0$$

$$\sigma_e \text{ uniforme} = 5,372 \text{ kg.mm}^{-2}$$

Como consecuencia de la fina variación programada para las abscisas, resultó innecesario referir los valores extremos de las funciones calculadas.

Los casos a), c) y d) para simplificar los analizaremos aplicando factores de proporcionalidad a los resultados numéricos obtenidos en el caso b) desarrollado anteriormente. Esta simplificación implica despreciar en cada caso las diferentes dilataciones del radio medio del tubo para diferentes temperaturas a la del caso b).

El factor de proporcionalidad para obtener los desplazamientos radiales en los casos a), c) y d) a partir de los des

plazamientos calculados en b)

$$-\frac{p}{0,60} \cdot \frac{7.500}{E} \text{ donde:}$$

p_r es la presión efectiva de cálculo con signo, en kg. mm^{-2} , en las nuevas condiciones.

E es el módulo de Young en kg. mm^{-2} , también en las nuevas condiciones.

Para obtener las tensiones de los casos planteados a), c) y d) es necesario afectar a todas las tensiones calculadas en el caso b) con el factor:

$$-\frac{p}{0,60} \text{ donde:}$$

p_r es la nueva presión efectiva de cálculo con signo, en kgmm^{-2} .

En estos tres nuevos casos la presión efectiva opera en el interior del tubo, por consiguiente los desplazamientos y tensiones son de signos contrarios al caso b). Una de las consecuencias de despreciar las distintas dilataciones del radio medio es suponer que las funciones de desplazamientos y tensiones, en todos los casos son de igual periodicidad. En la realidad, hay un ligero apartamiento que no llega a ser superior a 0,01 mm. En consecuencia las gráficas son semejantes, de aproximadamente igual periodicidad, de distintas amplitudes y de signos contrarios.

Resumiremos en cada caso los valores más representativos:

Caso a):

Este caso, luego del llenado con helio y antes de entrar en servicio, es el menos importante, ya que la carga de

superficie es sólo una cuarta parte del caso b); y a temperatura ambiente. La presión efectiva actúa en el interior produciendo tensiones y desplazamientos de sentido contrario al caso b). Los correspondientes gráficos presentan forma simétrica y menor amplitud.

$$- \frac{0,15}{0,60} \cdot \frac{7.500}{10.000} = -0,1875$$

$$- \frac{0,15}{0,60} = -0,25$$

$$W \text{ máximo} = 7,45 \times 10^{-4} \text{ mm. para } x = 4,39 \text{ mm.}$$

$$W \text{ uniforme} = 7,14 \times 10^{-4} \text{ mm.}$$

$$\sigma_x \text{ máximo} = 3,13 \text{ kg.mm}^{-2} \text{ en la capa interior, para } x = 0$$

$$\sigma_x \text{ uniforme} = 0,78 \text{ kg.mm}^{-2}$$

$$\sigma_e \text{ máximo} = 1,67 \text{ kg.mm}^{-2} \text{ en la capa exterior, para } x = 3,49 \text{ mm}$$

$$\sigma_e \text{ uniforme} = 1,55 \text{ kg.mm}^{-2}$$

$$\sigma_e \text{ máximo} = 2,52 \text{ kg.mm}^{-2} \text{ en la capa interior para } x = 0$$

$$\sigma_e \text{ uniforme} = 1,34 \text{ kg.mm}^{-2}$$

Caso c):

La presión efectiva es interior, los desplazamientos y tensiones son de signo contrario al caso b) y mayor amplitud.

$$- \frac{1,15}{0,60} \cdot \frac{7.500}{9.000} = -1,5722$$

$$- \frac{0,15}{0,60} = -0,25$$

$$W \text{ máximo} = 0,006248 \text{ mm. para } x = 4,389 \text{ mm.}$$

$$W \text{ uniforme} = 0,005989 \text{ mm.}$$

$$\sigma_x \text{ máximo} = 23,98 \text{ kg.mm}^{-2} \text{ en la capa interior para } x = 0$$

$$\sigma_x \text{ uniforme} = 5,94 \text{ kg.mm}^{-2}$$

$$\sigma_e \text{ máximo} = 12,84 \text{ kg.mm}^{-2} \text{ en la capa exterior para } x = 3,493 \text{ mm}$$

$$\sigma_e \text{ uniforme} = 11,89 \text{ kg.mm}^{-2}$$

$$\sigma_e \text{ máximo} = 19,35 \text{ kg.mm}^{-2} \text{ en la capa interior para } x = 0$$

$$\sigma_e \text{ uniforme} = 10,30 \text{ kg.mm}^{-2}$$

Caso d):

En la despresurización del canal la carga de superficie es interna y las tensiones y desplazamientos son de sentido contrario al caso b)

$$-\frac{1,15}{0,60} \cdot \frac{7.500}{5.000} = -2,8745$$

$$-\frac{1,15}{0,60} = -1,9167$$

$$W \text{ máximo} = 0,01142 \text{ mm. para } x = 4,389 \text{ mm.}$$

$$W \text{ uniforme} = 0,01095 \text{ mm.}$$

$$\sigma_x \text{ máximo} = 23,98 \text{ kg.mm}^{-2} \text{ en la capa interior para } x = 0$$

$$\sigma_x \text{ uniforme} = 5,94 \text{ kg.mm}^{-2}$$

$$\sigma_e \text{ máximo} = 12,84 \text{ kg.mm}^{-2} \text{ en la capa exterior para } x = 3,493 \text{ mm}$$

$$\sigma_e \text{ uniforme} = 11,89 \text{ kg.mm}^{-2}$$

$$\sigma_e \text{ máximo} = 19,35 \text{ kg.mm}^{-2} \text{ en la capa interior para } x = 0$$

$$\sigma_e \text{ uniforme} = 10,30 \text{ kg.mm}^{-2}$$

CAPITULO 6

CONCLUSIONES

Validez de hipótesis iniciales

En los resultados anteriores se observa que los desplazamientos radiales son muy pequeños comparados al espesor de la lámina:

Caso	a	b	c	d
$\frac{W_{\text{máximo}}}{h}$	$\approx 0,001$	$\approx 0,007$	$\approx 0,011$	$\approx 0,021$

Esto corrobora la hipótesis inicial de pequeños desplazamientos.

La tensión transversal radial es despreciable lo cual justifica la hipótesis de descartar la influencia de los esfuerzos cortantes en las deformaciones. Asimismo, no es necesario considerar la tensión eficaz para la superficie media de la lámina, para lo cual se debería diagonalizar el correspondiente tensor de tensiones.

Interacción entre casquillo y vaina

Según especificaciones de fabricación, a temperatura ambiente, el juego radial entre vaina y casquillo inferior es:

juego mínimo = 0,055

juego medio = 0,0875mm

juego máximo = 0,120mm.

Acceptando calentamiento homogéneo en la zona próxima al tapón inferior, este juego se mantiene aproximadamente por ser el casquillo también de Zircaloy y sufrir el mismo calentamiento que la vaina. El casquillo no está sometido a la carga

de superficie. En el caso b) hay acortamiento radial y su máximo desplazamiento calculado en $x = 4,389 \text{ mm}$, es $W = -0,003974 \text{ mm}$. En condiciones iniciales y normales de servicio no habrá interferencia entre vaina y casquillo. Si la hubiera, en otras condiciones de servicio, el casquillo pasa a colaborar con la vaina en soportar la presión efectiva exterior. Esto también se manifiesta en el estudio del colapso diferido.

En los otros casos, el alargamiento del radio aumenta la separación entre vaina y casquillo.

Las mayores sollicitaciones se presentan en la abscisa cero y para la capa interior. En todos los casos la relación es:

$$\sigma_x \text{ máximo} = 4,03 \sigma_x \text{ uniforme}$$

$$\sigma_e \text{ máximo} = 1,88 \sigma_e \text{ uniforme}$$

En el caso b) son tensiones compresivas y en los demás casos son de tracción.

El nivel de tensiones comparados al límite elástico en cada caso es:

$$\text{Caso b): } \sigma_x \text{ máximo} = 0,46 \sigma_{0,2}$$

$$\sigma_e \text{ máximo} = 0,37 \sigma_{0,2}$$

$$\text{Caso c): } \sigma_x \text{ máximo} = 0,60 \sigma_{0,2}$$

$$\sigma_e \text{ máximo} = 0,48 \sigma_{0,2}$$

En el caso d) las tensiones superan ampliamente el rango elástico con lo que se producirán deformaciones plásticas y aún, la falla de la vaina.

Según los casos, hay zonas de tensiones extensivas que indican la necesidad de estudiar la propagación de micro-

fisuras.

Las zonas sometidas a tensiones compresivas que deben ser consideradas en análisis de colapso instantáneo y diferido.

En la región de tensiones de compresión, el criterio de von Mises agrega otra imprecisión a las previstas.

Es necesario conocer experimentalmente el comportamiento elasto-plástico de los tubos de Zircaloy, para hallar las superficies de carga que contemplen anisotropía, efecto Dauschinger, temperatura, irradiación, creep y relajación a lo largo del tiempo de servicio, incluyendo la región afectada por la soldadura. Esto permitirá confeccionar modelos para conocer el estado de tensiones y deformaciones en función del tiempo.

Estados de tensiones y deformaciones locales se presentan en la zona de los patines deslizantes y en la interacción de la vaina con las pastillas combustibles a las que se superponen las tensiones térmicas, en las zonas activas de las barras.

7. BIBLIOGRAFIA CONSULTADA

1. THE STRESS ANALYSIS OF PRESSURE VESSELS AND PRESSURE VESSEL COMPONENTS. Edited by S.S. Gill. Pergamon Press. 1970.
2. PRESSURE VESSEL ENGINEERING TECHNOLOGY. Edited by P.W. Nicholas. Elsevier Publishing. 1970.
3. TEORIA DE PLACAS Y LAMINAS, por S. Timoshenko y S. Woinowsky-Krieger. Ediciones Urmo. 1970.
4. THEORY OF ELASTICITY, by S. Timoshenko and J.N. Goodier. Mc Graw-Hill. 2^o ed. 1951.
5. STRENGTH OF MATERIALS. Part I y Part II, by S. Timoshenko, D. Van Nostrand. 3^o ed. 1966.
6. TEORIA DE LA ELASTICIDAD. Por M. Filonenko-Borodich. Cartago. 2^o ed. 1966.
7. THE MATHEMATICAL THEORY OF PLASTICITY, by R. Hill. Oxford University Press. 1^o ed. 1956.
8. AN EXPERIMENTAL EVALUATION OF PLASTICITY THEORIES FOR ANISOTROPIC METALS. By R.M.W. Frederking and O.M. Sidebottom. Journal of Applied Mechanics. March 1971.
9. YIELD LOCI OF ZIRCALOY TUBING WITH DIFFERENT TEXTURES, by G. Dressler, K.H. Matucha and P. Wincierz. Canadian Metallurgical Quarterly. Volume. 11. Number 1 (1972):
10. THE PLANE-STRESS YIELD LOCI FOR ZIRCALOY-4 TUBING, ESTIMATED FROM KNOOP HARDNESS, by S.J. Goldberg and C.C. Bushy. Westing

CAPITULO 7

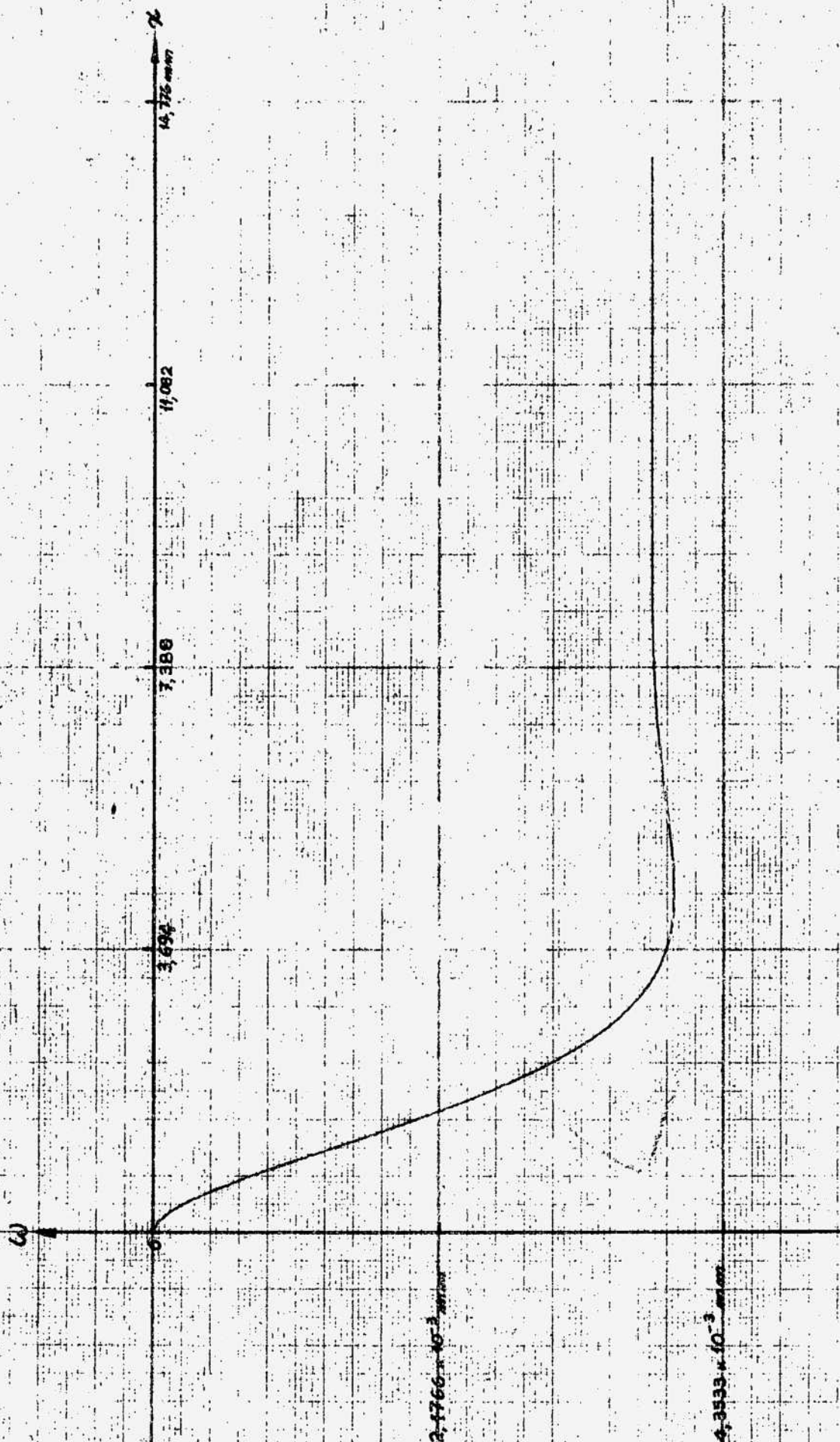
BIBLIOGRAFIA CONSULTADA

house E.C. May 1971. (U.S. Atomic Energy Commission).

11. PROPERTIES OF ZIRCALOY CLADDING, by D.O. Pickman. Nuclear Engineering and Design. 21 (1972) 212-236. North-Holland.
12. TEXTURE AND ANISOTROPY OF ZIRCONIUM IN RELATION TO PLASTIC DEFORMATION, by Krister Kallstrom. Canadian Metallurgical Quarterly. Vol 11. Nº 1 (1972).

Algunos aspectos generales del presente trabajo fueron consultados con el Prof. Dr. S.S. Gill de la Universidad de Manchester, Inglaterra, profesor en el Octavo Curso Panamericano de Metalurgia (1972).

Colaboraron los demás integrantes del Grupo de Diseño de Elementos Combustibles y del Grupo de Cálculo.



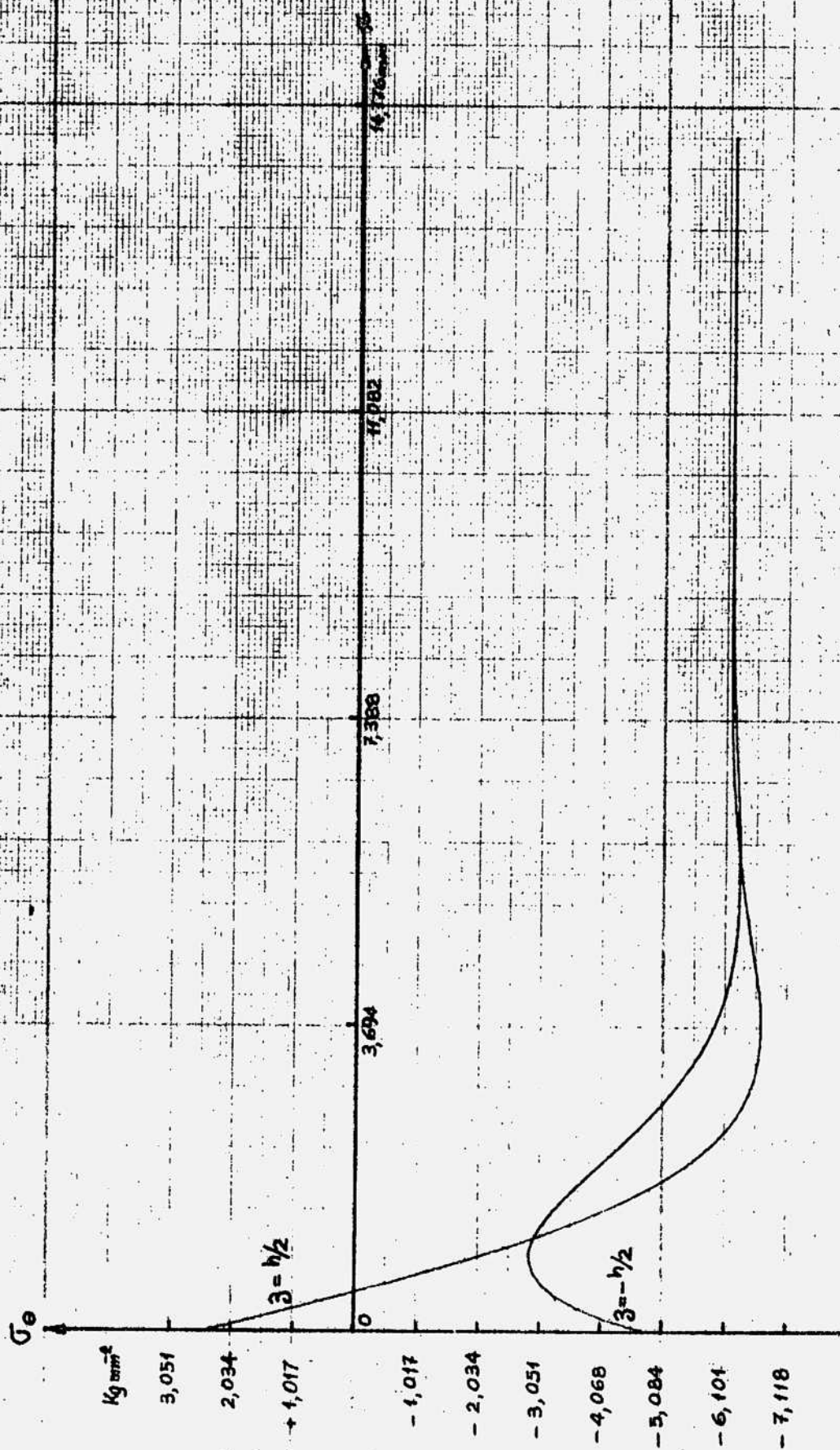
DESPLAZAMIENTO RADIAL $(\omega)z$



TENSION NORMAL AXIAL (σ_x)_{x,3}

CASO b)

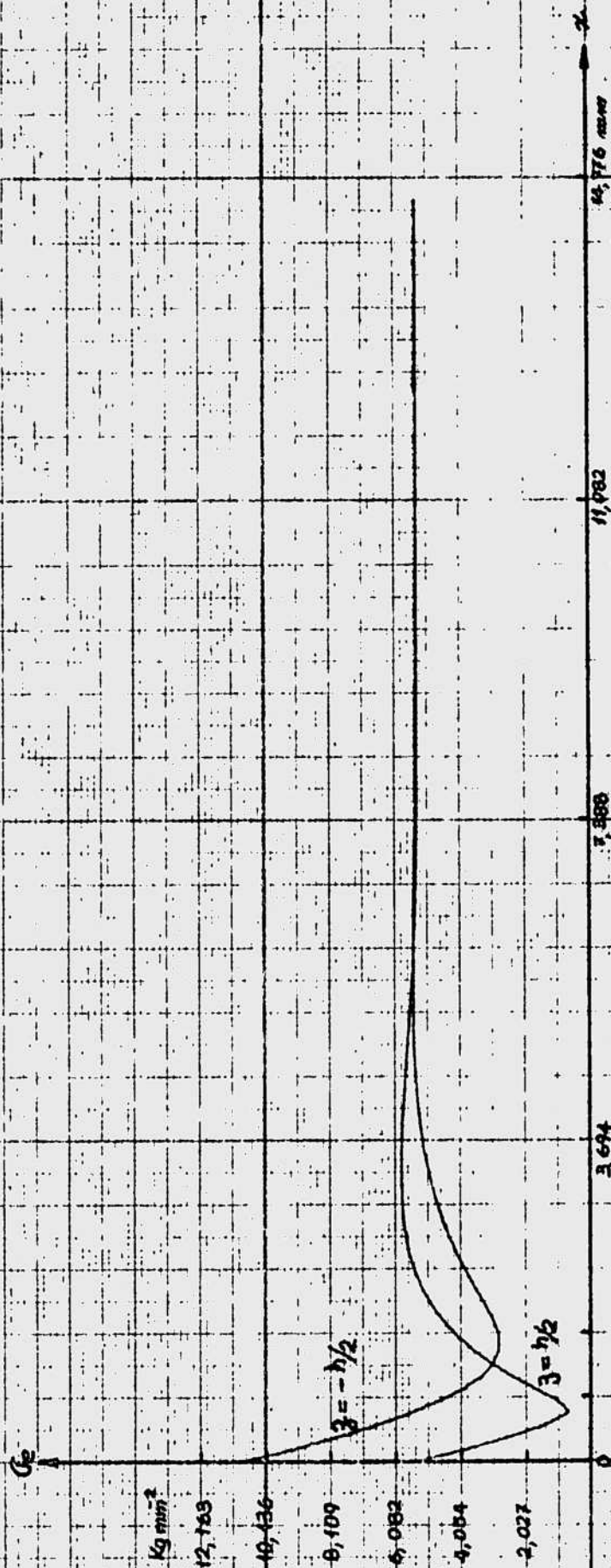
GRAFICO 2



TENSION NORMAL CIRCUNFERENCIAL $(\sigma_\theta)_{\pm \beta}$

CASO b)

GRAFICO 3



TENSION EQUIVALENTE $(\sigma_e)_{z, \beta}$

τ_{x3}

τ_{x3}
1926
1534
1263
1089
917
745
572

$\beta = 0$

3.604

7.380

11.052

14.776

τ

TENSION CORTANTE RADIAL $(\tau_{x3})_{\alpha, \beta}$

CASO b)

GRAFICO 5