

COMISION NACIONAL DE ENERGIA ATOMICA

MANUAL DEL CURSO DE METODOLOGIA
Y APLICACION DE RADIOISOTOPOS

CAPITULO 3

ELEMENTOS DE MATEMATICA

O.R. MOLL

BUENOS AIRES
Reimpresión 1978

1.0.0 ELEMENTOS DE MATEMATICA

1.1.0 NUMEROS NATURALES Y NEGATIVOS NUMEROS ENTEROS. SUMA ALGEBRAICA. SUPRESION DE PARENTESIS.

Se llaman números naturales a los que naturalmente asocia el hombre con su experiencia cotidiana, y que surgieron de la necesidad de contar objetos y de comparar cantidades. Con ellos estamos habituados a efectuar las conocidas operaciones de suma, resta, multiplicación y división.

La necesidad del número negativo se pone de manifiesto cuando quiere restarse de un número natural, otro mayor. Así la operación:

$$3-5$$

no es resoluble en el campo de los números naturales. Un ejemplo práctico del problema lo constituye la situación de deber una cantidad mayor que la que se tiene. Si se tienen \$ 10.000 y se deben \$ 15.000, sólo puede satisfacerse parte de la deuda, y queda un saldo deudor de \$ 5.000 que no puede interpretarse como un haber, esto es, como una cantidad positiva. Pero la situación puede describirse perfectamente diciendo que se tiene un saldo de - \$ 5.000.

De este modo asociamos un número natural o positivo con nuestro haber, y un número negativo con nuestro debe. Ahora la resta $3 - 5$ es resoluble, y su resultado es evidentemente -2 :

$$3 - 5 = -2$$

(1)

Esta operación puede interpretarse como la suma del número positivo 3 y el número negativo -5 . Lo que puede expresarse:

$$3 + (-5) = -2$$

El paréntesis tiene la finalidad de indicar que el conjunto del signo menos y el número 5, constituyen una entidad: el número -5 . Normalmente se omite el paréntesis por simplicidad de notación, que es lo que se ha hecho en la expresión (1). El signo más adelante del número 3 se omite por convención: si 3 no está precedido de un signo menos, se sobreentiende que es positivo.

Los números naturales y los números negativos reciben la designación más general de números enteros:

números enteros $\left\{ \begin{array}{l} \text{naturales} \\ \text{negativos} \end{array} \right.$

Un número entero es un ente matemático compuesto de un signo y un valor numérico. Así el valor numérico del número entero -8 es 8, y su signo, menos. Para el número entero 8, el valor numérico es 8, y el signo, más.

Dos números enteros son iguales cuando tienen el mismo valor numérico y el mismo signo.

Cuando ello no ocurre, importa saber cuál es mayor de los dos.

Se dan tres casos posibles:

a) los dos números son positivos:

4 ; 3

es mayor el de mayor valor numérico;

b) uno es positivo y el otro es negativo:

2 ; - 15

es mayor el positivo. Esto es inmediato si se piensa que tiene más quien tiene que quien debe.

c) los dos números son negativos:

-3 ; -8

es mayor el de menor valor numérico, lo que se justifica con un razonamiento similar al hecho en b). Es decir, tiene más quien debe menos.

Observación: el número cero es menor que cualquier positivo, y mayor que cualquier negativo.

Con la introducción del número negativo, las operaciones de suma y resta pueden resumirse en una operación única: la suma algebraica.

Una suma algebraica es una suma en la que aparecen términos negativos y positivos. Es decir, es una suma de números enteros.

Por ejemplo:

$$-3 + 7 + (-2) + 8 + (-1) = -3 + 7 - 2 + 8 - 1$$

(2)

es una suma algebraica.

Interesa establecer reglas prácticas para su resolución. Para ello comencemos considerando ejemplos simples de sumas algebraicas de dos números. Se dan tres casos posibles:

a) Los dos números son positivos:

$$4 + 6$$

b) Los dos números son negativos:

$$-4 - 6$$

c) Uno es positivo y el otro negativo:

$$4 - 6$$

Estos casos se resuelven con las reglas prácticas siguientes:

- Cuando ambos términos de la suma son del mismo signo, se suman los valores numéricos. El signo de la suma es el mismo signo que tienen los términos. Así las dos primeras sumas son respectivamente iguales a 10 y -10.
- Cuando los términos tienen signos distintos, se resta el menor valor numérico del mayor valor numérico. El signo de la suma es igual al signo del término de mayor valor numérico. Así en el ejemplo de (c), la suma vale -2.

Observación: de lo hasta aquí discutido se concluye que sumar un número negativo equivale a restar un positivo, y viceversa. Así $4 + (-2) = 4 - 2$. En el segundo miembro de esta igualdad, al segundo término puede pensárselo indistintamente como un número negativo que se suma o uno positivo que se resta. Análogamente, restar un número negativo equivale a sumar un positivo: $4 - (-2) = 4 + 2$. Y viceversa.

Veamos como se extienden estas reglas al caso de una suma algebraica de varios términos. Sea la suma:

$$4 - 3 - 8 + 2 - 6 - 5 + 10$$

en la que aparecen términos de ambos signos. La resolveremos en tres pasos:

a) Sumamos todos los términos positivos:

$$4 + 2 + 1 + 10 = 17$$

b) Sumamos todos los términos negativos:

$$-3 - 8 - 6 - 5 = -22$$

c) Sumamos algebraicamente los resultados parciales:

17 - 22 - - 5

Puede ocurrir que en una suma algebraica aparezcan términos entre paréntesis:

$$8+6-(4+2-1)+(-3-5+4)-6$$

En casos como éste, el procedimiento es:

a) Efectuar las sumas algebraicas encerradas en los paréntesis:

$$8+6-(5)+(-4)-6$$

b) Eliminar los paréntesis: al efecto se cumplen las reglas siguientes:

- Cuando el paréntesis está precedido por un signo más, el signo del o de los números encerrados no cambia.
- Cuando el paréntesis está precedido por un signo menos, el signo del o de los números encerrados, cambia.

Aplicando estas reglas al ejemplo:

$$8+6-5-4-6$$

Ahora la suma algebraica puede resolverse del modo conocido.

1.2.0. PRODUCTO Y COCIENTE DE NUMEROS ENTEROS. REGLA DE LOS SIGNOS.

Al efectuar el producto de dos números enteros, importa establecer el signo del producto. Se dan tres casos posibles:

a) Ambos factores son positivos:

$$2 \times 6$$

b) Ambos factores son negativos:

$$(-2) \times (-6)$$

c) Uno es positivo y el otro negativo:

$$2 \times (-6)$$

Estos casos se resuelven como sigue:

- Cuando ambos factores son del mismo signo, el signo del producto es positivo. Así en los dos primeros casos, el producto es 12.

- Cuando los factores tienen signos distintos, el signo del producto es negativo. Para el ejemplo de (c), el producto es -12.

Estas reglas se expresan esquemáticamente como sigue:

más x más	= más
más x menos	= menos
menos x más	= menos
menos x menos	= más

Consideremos ahora el producto de varios números enteros. Por ejemplo:

$$4 \times (-2) \times 3 \times (-1) \times 5 \times (-6)$$

Esta expresión indica que 4 debe ser multiplicado por -2; el producto por 3; el nuevo producto, por -1, etc., hasta que el producto del último resultado parcial por -6, proporciona el resultado final. Si en cada caso se determina el signo del producto parcial respectivo, que pasa a ser factor en el producto siguiente, puede establecerse el signo del producto. Así en el ejemplo propuesto se tiene:

$4 \times (-2) = -8$	(más por menos, menos)
$-8 \times 3 = -24$	(menos por más, menos)
$-24 \times (-1) = 24$	(menos por menos, más)
$24 \times 5 = 120$	(más por más, más)
$120 \times (-6) = -720$	(más por menos, menos)

Pero este procedimiento resulta engorroso si se tiene una larga cadena de factores. Es preferible aplicar la regla práctica siguiente:

- a) Se efectúa el producto de los valores numéricos:

$$4 \times 2 \times 3 \times 1 \times 5 \times 6 = 720$$

- b) Se cuentan los signos negativos:

- Si hay número par de signos negativos, el resultado es positivo.
- Si hay número impar de signos negativos, es negativo.

Así en el ejemplo hay tres signos negativos, y por lo tanto el resultado es negativo: -720.

Cuando se tiene un cociente de dos números enteros, la determinación del signo se ajusta a las reglas siguientes:

- a) Si dividendo y divisor tienen igual signo, el signo del cociente es positivo.
- b) Si tienen signos distintos, el signo del cociente es negativo.

Estas reglas pueden expresarse esquemáticamente:

más dividido más = más
más dividido menos = menos
menos dividido más = menos
menos dividido menos = más

Así por ejemplo:

$$\begin{aligned} 8/4 &= 2 \\ 8/(-4) &= -2 \\ -8/4 &= -2 \\ -8/(-4) &= 2 \end{aligned}$$

Finalmente, pueden presentarse combinaciones de productos y cocientes de números enteros. Sea por ejemplo la operación:

$$\frac{5 \times 3 \times (-2) \times 5}{2 \times (-4) \times 3}$$

La forma práctica de resolver un caso como éste es:

- Hallar el valor numérico del resultado, efectuando las simplificaciones, productos y cocientes necesarios. En el caso propuesto, el valor en cuestión es 6,25.
- Contar todos los signos negativos de la operación:
 - Si hay en total un número par de signos negativos, el resultado es positivo.
 - Si hay en total un número impar de signos negativos, el resultado es negativo.

En el caso del ejemplo hay en total 2 signos negativos: uno en el numerador y uno en el denominador. Por lo tanto el resultado es positivo: 6,25.

1.3.0. NUMEROS FRACCIONARIOS.

Un número fraccionario, o quebrado, es un cociente indicado pero no resuelto. Así $3/4$ es un número fraccionario y significa "tres dividido por cuatro"; pero la operación no se ha efectuado. Su valor es el que resulta de efectuar el cociente:

$$3/4 = 0,75$$

O sea que un quebrado es una forma de expresar un número mediante un cociente. Ello puede resultar preferible en determinados casos por razones de comodidad, de simplicidad, o de imposibilidad de expresar de otro modo el valor en cuestión con exactitud. Así $4/3$ representa simple y exactamente un número que expresado del modo ordinario tiene infinitas cifras decimales:

$$4/3 = 1,333333...$$

En el número fraccionario, el dividendo se designa numerador, y el divisor, denominador. El signo de un número fraccionario, es el signo de su numerador. Esto significa que si el signo es negativo, se cumple por ejemplo que:

$$-\frac{2}{3} = \frac{-2}{3}$$

Esta propiedad se asocia con el hecho de que el denominador define la calidad del número, y el numerador la cantidad de unidades que se tienen de esa calidad. Tiene sentido pensar en una cantidad negativa, pero no lo tiene el pensar en una calidad negativa. El concepto es similar al que surge de considerar objetos: podemos recibir (positivo) o entregar (negativo) tres cuadernos; pero no tiene sentido pensar si los cuadernos, es decir la calidad de tres, son positivos o negativos.

Si en el curso de un cálculo aparece como resultado parcial o final un quebrado con denominador negativo, y siendo que como acabamos de ver lo correcto es asignar el signo al numerador, la dificultad se resuelve simplemente multiplicando numerador y denominador por (-1):

$$\frac{2}{-3} = \frac{2}{-3} \times \frac{-1}{-1} = \frac{-2}{3} \quad \frac{-2}{-3} = \frac{-2}{-3} \times \frac{-1}{-1} = \frac{2}{3}$$

Estos ejemplos ilustran los dos casos posibles. Evidentemente el valor del número no cambia, pues se lo multiplica y divide por un mismo número.

Dos números fraccionarios son iguales cuando tienen igual valor numérico e igual signo. Si ello no ocurre, importa establecer cuál de ambos es mayor. Al efecto valen las reglas vistas para los números enteros:

- Si ambos son positivos, es mayor el de mayor valor numérico.
- Si ambos son negativos, es mayor el de menor valor numérico.
- Si uno es positivo y el otro es negativo, es mayor el positivo.

Pero ahora no es tan inmediato evaluar los dos primeros casos, porque no siempre es aparente a simple vista cuál de los dos quebrados tiene mayor valor numérico. Así por ejemplo, no es inmediato el poder establecer a simple vista si:

$$5/6 > 7/8 \quad \text{o si} \quad 5/6 < 7/8$$

Este problema lo resuelven las reglas siguientes:

- a) Si ambos números tienen igual denominador, tiene mayor valor numérico el de mayor numerador. Así:

$$5/7 > 3/7$$

- b) Si los denominadores son distintos, se multiplica cada numerador por el denominador del otro número. El número cuyo numerador conduce al ma-

yor producto, es el de mayor valor numérico. Así en el ejemplo de más arriba:

$$\begin{array}{ccc} \frac{5}{6} \times \frac{7}{8} & \longrightarrow & 42 \\ & \longrightarrow & 40 \end{array}$$

El producto en el que es un factor el numerador del segundo número, es mayor; luego:

$$7/8 > 5/6$$

A la suma algebraica de números fraccionarios le son aplicables las reglas generales vistas para la suma algebraica de números enteros. Surgen no obstante particularidades que resultan de las características de los números fraccionarios. Se dan dos casos posibles:

a) Los términos tienen el mismo denominador:

$$4/3 - 1/3 + 5/3 - 7/3$$

En este caso la suma algebraica es un quebrado del mismo denominador y cuyo numerador es la suma algebraica de los numeradores de los términos. Así para el ejemplo propuesto la suma algebraica es $1/3$.

b) Los términos tienen distinto denominador:

$$3/4 - 2/3 + 3/5 - 1/2$$

En este caso es necesaria la previa reducción a común denominador, es decir, la expresión de todos los términos en función de una única calidad. Al efecto:

- Se multiplican los denominadores entre sí. El resultado es el denominador común: 120.
- Cada numerador se multiplica por los denominadores de los demás términos. Cada uno de estos productos constituye uno de los nuevos numeradores:

$$\begin{array}{l} 3 \times 3 \times 5 \times 2 = 90 \\ -2 \times 4 \times 5 \times 2 = -80 \\ 3 \times 3 \times 4 \times 2 = 72 \\ -1 \times 4 \times 3 \times 5 = -60 \end{array}$$

Luego los términos pasan a ser:

$$90/120 - 80/120 + 72/120 - 60/120$$

con lo que se cae en el caso anterior (mismo denominador). Ahora el resultado es directamente calculable: $22/120$, que simplificado dividiendo numerador y denominador por 2, es $11/60$.

El producto de dos o más números fraccionarios es otro número fraccionario cuyo numerador se obtiene multiplicando entre sí los numeradores de los factores, y cuyo denominador se obtiene multiplicando entre sí los denominadores de los factores. El signo se obtiene del mismo modo que en el caso del producto de números enteros. Ejemplo:

$$1/2 \times (-2/3) \times 3/5 = -6/30 = -1/5$$

El numerador es $1 \times 2 \times 3 = 6$

El denominador es: $2 \times 3 \times 5 = 30$

El signo es negativo porque hay un número impar de factores negativos.

Una variante es el producto de un número fraccionario por un entero. Ejemplo:

$$3 \times 2/5$$

En este caso el producto es un quebrado cuyo denominador es igual al del quebrado factor y cuyo numerador es igual al producto del número entero por el numerador del quebrado factor. En el ejemplo, el resultado es entonces $6/5$

El cociente de dos números fraccionarios resulta de multiplicar el quebrado dividendo por el quebrado divisor invertido. Así:

$$5/4 \div (-3/2) = 5/4 \times (-2/3) = -10/12 = -5/6$$

El numerador es: $5 \times 2 = 10$

El denominador es: $4 \times 3 = 12$

El signo es negativo de acuerdo con la regla de los signos para la división.

1.4.0. POTENCIACION. PRODUCTO Y COCIENTE DE POTENCIAS DE IGUAL BASE. POTENCIA DE POTENCIA. PROPIEDADES DISTRIBUTIVAS. POTENCIA DE EXPONENTE NEGATIVO.

Sea la igualdad:

$$5^3 = 125$$

Esta relación ejemplifica la operación conocida como potenciación.

En ella encontramos tres elementos:

Una base: 5

Un exponente: 3

Una potencia: 125

El exponente indica cuantas veces debe multiplicarse a la base por sí misma, para obtener la potencia. Así en el caso del ejemplo es:

$$5^3 = 5 \times 5 \times 5 = 125$$

De donde en general expresamos:

$$a^n = a \times a \times a \times a \dots n \text{ veces}$$

La base puede ser positiva o negativa. Importa establecer en que casos ello influye en el signo de la potencia. Ejemplos:

$$2^2 = 2 \times 2 = 4$$

$$(-2)^2 = (-2) \times (-2) = 4$$

$$2^3 = 2 \times 2 \times 2 = 8$$

$$(-2)^3 = (-2) \times (-2) \times (-2) = -8$$

Estos cuatro ejemplos incluyen todas las variantes que pueden presentarse, y conducen a las conclusiones siguientes:

a) Cuando el exponente es par, la potencia es positiva.

b) Cuando el exponente es impar, el signo de la potencia es igual al signo de la base.

También el exponente de una potencia puede ser negativo. Puede demostrarse que toda potencia de exponente negativa es igual al cociente entre el número 1 y la misma potencia pero con exponente positivo:

$$a^{-n} = \frac{1}{a^n}$$

Así por ejemplo:

$$5^{-2} = \frac{1}{5^2} = 1/25 = 0,04$$

De esta propiedad puede deducirse la siguiente:

$$a^n = \frac{1}{a^{-n}}$$

O lo que es lo mismo:

$$\frac{1}{a^{-n}} = a^n$$

Esta relación es útil en la medida en que es frecuente en la marcha de un cálculo, encontrar potencias de exponente negativo en el denominador, las que como vemos pueden cómodamente pasarse al numerador con exponente positivo.

Consideremos un producto de potencias de igual base:

$$2^2 \times 2^3 \times 2^{-4} \times 2^{-2} \times 2^5$$

Esta expresión puede evidentemente resolverse calculando el valor de cada factor, y efectuando el producto:

$$2^2 \times 2^3 \times \frac{1}{2^4} \times \frac{1}{2^2} \times 2^5 = 4 \times 8 \times 1/16 \times 1/4 \times 32 = 16$$

No obstante, el ejemplo se presta a una resolución más directa, por aplicación de la siguiente propiedad: todo producto de potencias de igual base es igual a una potencia de la misma base y cuyo exponente es la suma algebraica de los exponentes de los factores:

$$2^2 \times 2^3 \times 2^{-4} \times 2^{-2} \times 2^5 = 2^{(2+3-4-2+5)} = 2^4 = 16$$

Vemos que la propiedad se cumple. En general podemos expresar:

$$a^n \cdot a^m \cdot a^p \cdot \dots \cdot a^t = a^{(n+m+p+\dots+t)}$$

Sea ahora un cociente de potencias de igual base. De modo similar, se cumple que todo cociente de dos potencias de igual base, es igual a una potencia de la misma base y cuyo exponente es la diferencia entre el exponente del dividendo y el exponente del divisor:

$$a^m / a^n = a^{(m-n)}$$

Ejemplo:

$$3^4 / 3^5 = 81/243 = 1/3, \text{ puede resolverse haciendo:}$$

$$3^4 / 3^5 = 3^{(4-5)} = 3^{-1} = 1/3, \text{ lo que simplifica el cálculo.}$$

Sea por ejemplo:

$(2^3)^2$ que constituye una potencia de potencia. Consiste en elevar 2 al cubo, y elevar el resultado al cuadrado:

$$(2^3)^2 = 8^2 = 64$$

Esta operación tiene la propiedad siguiente: toda potencia de una potencia es igual a una potencia de la misma base y cuyo exponente es igual al producto de los exponentes parciales. Así:

$$(2^3)^2 = 2^{(3 \times 2)} = 2^6 = 64$$

En general podemos simbolizar:

$$(a^m)^n = a^{m \cdot n}$$

Sea la operación:

$$2^2 \times 3^2 \times (0,5)^2 \times (0,1)^2 \times 5^2 = 4 \times 9 \times 0,25 \times 0,01 \times 25 = 2,25$$

que constituye un producto de potencias de igual exponente.

La propiedad distributiva de la potenciación respecto del producto, establece que todo producto de potencias de igual exponente es igual a una potencia del mismo exponente y cuya base es el producto de las bases. Para el caso del ejemplo:

$$2^2 \times 3^2 \times (0,5)^2 \times (0,1)^2 \times 5^2 = (2 \times 3 \times 0,5 \times 0,1 \times 5)^2 = (1,5)^2 = 2,25$$

En general esta propiedad puede expresarse:

$$a^n \cdot b^n \cdot c^n \dots p^n = (a \cdot b \cdot c \dots p)^n$$

Ahora consideremos un cociente de dos potencias de igual exponente. La propiedad distributiva de la potenciación respecto del cociente, establece que todo cociente de dos potencias de igual exponente es igual a una potencia del mismo exponente y cuya base es el cociente de las bases:

$$a^n / b^n = (a/b)^n$$

Ejemplo:

$$6^5 / 3^5 = 7776 / 243 = 32. \text{ Aplicando la propiedad:}$$

$$6^5 / 3^5 = (6/3)^5 = 2^5 = 32, \text{ de cálculo más simple.}$$

1.5.0 RADICACION. LA RAZ COMO POTENCIA DE EXPONENTE FRACCIONARIO. EXTENSION A LA RADICACION DE LAS PROPIEDADES DE LA POTENCIACION. -

La expresión:

$$\sqrt[n]{a} = b$$

simboliza en general una radicación. En una radicación se distinguen:

Un radicando: a

Un índice: n

Una raíz: b

Se dice que b es la raíz de índice n de a , cuando se cumple que:

$$b^n = a$$

Es decir que la radicación se define como una operación derivada de la potenciación. Es la operación opuesta a la potenciación. Así:

$$\sqrt[4]{81} = 3 \quad \text{porque} \quad 3^4 = 81$$

Sea la expresión general:

$$\sqrt[n]{a}$$

Puede demostrarse que toda raíz puede expresarse como una potencia cuya base es el radicando de la raíz y cuyo exponente es el recíproco del índice (entendiéndose por recíproco de un número, el cociente entre 1 y el número):

$$\sqrt[n]{a} = a^{1/n}$$

O sea que toda raíz es expresable como una potencia de exponente fraccionario.

Análogamente, toda raíz de una potencia puede expresarse como una potencia de exponente fraccionario, en la que el numerador del exponente es el exponente del radicando, y en la que el denominador del exponente, es el índice de la raíz:

$$\sqrt[n]{a^m} = a^{(m/n)}$$

Observación: Se aprecia la analogía entre raíz de potencia y potencia de potencia.

El interés de estas relaciones, según las cuales toda raíz equivale una potencia, radica en que en consecuencia todas las propiedades que se han visto para la potenciación valen también para la radicación y le son directamente aplicables; lo que puede resultar de utilidad en la simplificación de cálculos. Así el producto de varias raíces de igual índice, previamente convertidas en potencias de exponente fraccionario, es igual a una potencia de igual exponente y cuya base es el producto de las bases. El producto de varias raíces de igual radicando, convertidas a potencias de exponente fraccionario es una potencia de la misma base (el radicando), y cuyo exponente es la suma algebraica de los exponentes parciales; etc.

1.6.0. LOGARITMOS

La logaritmación aparece como una segunda operación opuesta o derivada de la potenciación. Su expresión general:

$$L = \log_b a$$

Vemos que se distinguen tres elementos:

Un número: a

Una base: b

Un logaritmo: L

Se dice que L es el logaritmo de a "en base b ", cuando se cumple que

$$b^L = a$$

Es decir que el logaritmo del número, es el exponente al que hay que elevar la base para obtener el número. Por definición de potencia, L indica cuántos factores iguales a b deben multiplicarse entre sí para obtener el número a .

Elegida una base hay un logaritmo para cada número positivo (los números negativos no tienen logaritmo), y en consecuencia a esa base corresponde un sistema de logaritmos. Cada vez que se cambia de base, se cambia de sistema. Como puede haber infinitas bases, es inmediato que pueden haber infinitos sistemas de logaritmos.

No obstante, normalmente sólo se emplean dos sistemas:

Los logaritmos decimales o en base 10.

Los logaritmos naturales o en base $e = 2,718...$

Lo habitual es disponer de tablas de logaritmos decimales, y es con logaritmos decimales que resulta más cómodo y simple trabajar. En los casos particulares en que se necesita el logaritmo natural de un número, se lo calcula a partir del logaritmo decimal, mediante la relación:

$$\ln a = 2,3 \log a; \text{ donde:}$$

$\ln$: logaritmo natural

$\log$: logaritmo decimal

a : número cualquiera

En relación con las expresiones de decaimiento radiactivo y de absorción de la radiación gamma por la materia, aparece con frecuencia el logaritmo natural de 2, cuyo valor conviene en consecuencia memorizar:

$$\ln 2 = 0,693...$$

Los logaritmos resultan útiles por la economía de esfuerzo que puede lograrse en las operaciones mediante su empleo. Sus propiedades principales son:

a) El logaritmo de 1 es cero en cualquier base:

$$\log_b 1 = 0$$

b) El logaritmo de la base es igual a 1 en su base

$$\log_b b = 1$$

c) El logaritmo de un producto es igual a la suma de los logaritmos de los factores:

$$\log (a \cdot b) = \log a + \log b$$

d) El logaritmo de un cociente es igual a la diferencia entre el logaritmo del dividendo y el logaritmo del divisor:

$$\log (a/b) = \log a - \log b$$

e) El logaritmo de una potencia es igual al producto del exponente por el logaritmo de la base:

$$\log a^n = n \cdot \log a$$

f) El logaritmo de una raíz es igual al cociente entre el logaritmo del radicando y el índice:

$$\log \sqrt[n]{a} = \frac{\log a}{n}$$

Se concluye que la logaritmación convierte el producto en suma, el cociente en diferencia, la potenciación en producto y la radicación en cociente; simplificando de este modo el cálculo en los diferentes casos.

1.7 0 EXPRESION APROXIMADA DE NUMEROS DE MUCHAS CIFRAS SIGNIFICATIVAS.

Consideremos el número:-

136.481,26

que tiene ocho cifras. Supongamos que representa un valor exacto de una dada magnitud física. En general en las aplicaciones físicas y técnicas de la matemática no importa tanto el conocer con una gran precisión el valor de una magnitud, como el saber con que error máximo o con que grado de precisión se conoce dicho valor. Supongamos tomar como valor del número precedente:

136.000

El error absoluto que entonces cometemos (entendiendo por error absoluto la diferencia entre el valor aproximado y el valor verdadero), vale:

$$136.481,26 - 136.000 = 481,26$$

Entonces el error relativo (o sea el cociente entre el error absoluto y el valor verdadero) es:

$$\frac{481,26}{136.481,26} = 0,00353 = 0,353 \%$$

Es decir que al tomar 136.000 como valor de la cantidad original, cometemos un error de alrededor del tres por mil; lo que podrá o no tener importancia según el problema de que se trate. En el supuesto de que dicho error sea tolerable, será perfectamente lícito operar con el valor aproximado, lo que eximirá de cálculos laboriosos.

Surge así la conveniencia de redondear los números que deban manejarse en mérito a la sencillez operativa, y aceptando un cierto error máximo. A los fines del curso será suficiente con el empleo de no más de tres cifras en cualquier expresión numérica, lo que asegura que en todos los casos el número estará expresado con un error menor del 1 %.

Importa establecer un criterio para efectuar el redondeo de una cantidad. Supongamos querer redondear a tres cifras, el número:

95.730

El número redondeado es:

95.700

en el que simplemente se han reemplazado por ceros las cifras que siguen a la tercera. El error absoluto cometido es de tres unidades del cuarto orden.

Ahora supongamos que el número sea:

95.780

Si procedemos como en el caso anterior, el número redondeado es nuevamente:

95.700

y el error cometido es de ocho unidades del cuarto orden. Si en cambio tenemos en cuenta el 8 agregando una unidad a la cifra del tercer orden, 7, se tiene:

95.800

con lo que el error cometido es de dos unidades del cuarto orden, es decir, menor que si directamente se desprecia el 8.

Conclusión: para redondear, si la primera cifra que va a despreciarse es menor que 5, ésta cifra y las que les siguen hasta la coma decimal, se reemplazan directamente por ceros. Si la primera cifra que va a despreciarse es mayor que 5, se hace asimismo el reemplazo por ceros, y se aumenta en una unidad la última cifra que no se desprecia. Si la primera cifra a despreciar es 5, el error cometido es el mismo sea que se aumente o no en una unidad la última cifra que no se desprecia; de donde es indistinto el proceder de un modo u otro.

Veamos otros ejemplos:

Número exacto	Número redondeado
2643	2640
0,004756	0,00476
8793	8790
8797	8800
8785	8780 indistinto 8790

1.8.0. EXPRESION DE NUMEROS MUY GRANDES Y MUY PEQUEÑOS EN FUNCION DE LAS POTENCIAS DE 10.

Consideremos las igualdades siguientes:

$$\begin{aligned}10 &= 10^1 \\100 &= 10^2 \\1000 &= 10^3 \\&\dots\dots\dots\text{etc.}\end{aligned}$$

Puede extraerse la conclusión siguiente:

Todo número constituido por la unidad seguida de ceros, puede expresarse como 10 elevado a un exponente igual al número de cifras que tiene el número, menos una. Así 1000 tiene cuatro cifras y por lo tanto puede expresarse como 10 elevado a 3.

Esta propiedad es útil cuando el número es grande. Así por ejemplo el número formado por 1 seguido de 14 ceros, se expresa simplemente como:

$$10^{14} \quad \text{etc.}$$

Sea ahora el número 300.000. Podemos expresarlo como el producto de 3 por 100.000:

$$300.000 = 3 \times 100.000$$

O lo que es lo mismo:

$$300.000 = 3 \times 10^5$$

Vemos que la propiedad anterior mantiene su validez aunque la primera cifra no sea 1. Así:

$$400 = 4 \cdot 10^2$$

$$5.000 = 5 \cdot 10^3$$

$$70.000 = 7 \cdot 10^4 \quad \text{etc.}$$

Ahora consideremos un número cualquiera:

$$4.300$$

Este número podemos expresarlo como:

$$4.300 = 4 \times 1000 + 3 \times 100; \quad \text{o bien}$$

$$4.300 = 4 \times 1000 + 0,3 \times 1000$$

es decir, en el segundo término del segundo miembro se ha multiplicado un factor por 10 y se ha dividido el otro factor por 10, con lo que el valor del término no cambia. Entonces tenemos:

$$4.300 = 4 \times 10^3 + 0,3 \times 10^3$$

Sacando factor común 10^3 :

$$4.300 = 10^3 (4 + 0,3) = 4,3 \times 10^3$$

O sea que:

$$4.300 = 4,3 \cdot 10^3$$

Surge de este modo un criterio para expresar cualquier número entero en términos de potencias de 10:

- Se escribe el número colocando la coma después de la primera cifra.
- Este número se multiplica por 10 elevado a un exponente igual al número de cifras enteras menos uno.

Ejemplos:

$$375.000 = 3,75 \cdot 10^5$$

$$4.070 = 4,07 \cdot 10^3$$

$$836 = 8,36 \cdot 10^2$$

Asociando lo desarrollado aquí con el procedimiento de redondeo de cantidades, se tiene un método para simplificar notablemente la expresión de cualquier número grande. Así por ejemplo:

$$10.837.546;289$$

Este número, redondeado a tres cifras, pasa a ser:

$$10.800.000$$

Expresado en función de 10:

$$1,08 \times 10^7$$

valor suficientemente aproximado al real a los fines que nos ocupan, y con el que puede operarse fácilmente.

Queda por considerar el caso de los números decimales sin parte entera. Tomemos las igualdades:

$$0,1 = 1/10 = \frac{1}{10^1} = 10^{-1}$$

$$0,01 = 1/100 = \frac{1}{10^2} = 10^{-2}$$

$$0,001 = 1/1000 = \frac{1}{10^3} = 10^{-3}$$

Concluimos que todo número decimal del tipo ejemplificado, puede expresarse como 10 elevado a un exponente negativo, igual al orden o puesto que ocupa el 1 después de la coma. Así 0,001 es expresable como 10^{-3} porque el 1 ocupa el tercer lugar después de la coma. Etc.

Por consideraciones conocidas, es inmediato que

$$0,002 = 2 \cdot 10^{-3}$$

Y que

$$0,00234 = 2,34 \cdot 10^{-3} \quad \text{Etc.}$$

Luego podemos formular la regla siguiente para la expresión de un núme-

ro decimal sin parte entera, en términos de potencias de 10;

- a) Se escriben las cifras significativas del número, colocando la coma a continuación de la primera cifra.
- b) Este número se multiplica por 10 elevado a un exponente negativo, igual al orden o puesto que ocupa después de la coma la primera cifra significativa.

En definitiva un número decimal sin parte entera cualquiera puede redondearse y expresarse de modo simple en función de 10, aplicando este procedimiento y el visto para el redondeo. Así:

0,00097672, redondeado, pasa a
0,000977;

y expresado en función de 10:

$$9,77 \cdot 10^{-4}$$

1.9.0. MANEJO DE LA REGLA DE CALCULO OPERACIONES BASICAS

Los puntos del presente apartado suponen en el lector un conocimiento básico de la regla de cálculo y de sus características, como asimismo cierta ejercitación en la lectura de números en la regla, aspectos que se atienden en las clases respectivas del curso de radioisótopos.

1.9.1. Cálculo de productos.

Cálculo del producto:

$$1869 \times 43,26$$

Redondeando los factores y expresándolos con potencias de 10:

$$1,87 \cdot 10^3 \times 4,33 \cdot 10 = 1,87 \times 4,33 \times 10^4$$

con lo que tenemos el producto preparado para presentarlo en la regla de cálculo. Los pasos a dar a continuación son:

- a) Con el trazo central del cursor se buscan las cifras 187 en la escala "X" de la regla fija.
- b) Dejando el cursor inmóvil se mueve la regla móvil hasta que el comienzo (1) de su escala coincida con las cifras 187 de la regla fija y con el trazo central del cursor.
- c) Dejando la reglita inmóvil se desplaza el cursor hasta que su trazo central coincida con las cifras 433 de la reglita, en su escala "X".

d) Frente a estas cifras y en la escala "X" de la regla fija, aparecen las cifras del producto: 81

e) Como es aproximadamente el producto 2 por 4 el resultado final es cercano a 8

$$\text{luego } 1,87 \times 4,33 = 8,1$$

De esta manera se determina el número de cifras enteras.

Luego el resultado total es:

$$1,87 \times 4,33 \times 10^4 = 8,1 \cdot 10^4$$

Cálculo del producto:

$$66,92 \times 0,00078$$

$$66,92 \times 0,0007856 \approx 6,69 \cdot 10 \times 7,86 \cdot 10^{-4} = 6,69 \times 7,86 \times 10^{-3}$$

En este caso, al cumplirse el paso (c), se comprueba que las cifras 786 de la escala "X" de la reglita, caen fuera de la regla fija. Entonces lo que se hace es hacer coincidir el extremo derecho de la escala "X" de la reglita (10) con las cifras 669 de la escala "X" de la regla. A continuación se cumplen los pasos c y d, con lo que se obtienen en la regla las cifras 526.

Como es aproximadamente el producto de 7 x 7 el número de cifras enteras es dos.

$$6,69 \times 7,86 = 52,6$$

Luego el resultado es:

$$6,69 \times 7,86 \times 10^{-3} = 52,6 \cdot 10^{-3} = 5,26 \cdot 10^{-2}$$

Los dos ejemplos precedentes cubren todas las variantes que pueden presentarse en el cálculo de productos.

1.9.2. Cálculo de cocientes

Cálculo del cociente:

$$8627 \div 36,6$$

$$8627 \div 36,6 = 8,63 \cdot 10^3 \div 3,66 \cdot 10 = \frac{8,63}{3,66} \times 10^2$$

con lo que el cociente queda preparado para introducirlo en la regla.

Los pasos siguientes son:

- a) Con el trazo central del cursor se buscan en la escala "X" de la regla fija las cifras 863 del dividendo.
- b) A cursor inmóvil, se desplaza la regla móvil hasta que las cifras 366 de la escala "X" de la regla móvil coinciden con el trazo central del cursor y con las cifras 863 de la regla fija.
- c) Dejando inmóvil la reglita, se desplaza el cursor hasta hacerlo coincidir con el extremo izquierdo (I) de la escala "X" de la reglita. En estas condiciones, el trazo central del cursor indica sobre la escala "X" de la regla fija, las cifras del cociente: 236.
- d) Como es aproximadamente el cociente entre 8 y 3 el resultado final es cercano a 2:

$$8,63 \div 3,66 = 2,36$$

Luego el cociente es:

$$\frac{8,63 \cdot 10^2}{3,66} = 2,36 \cdot 10^2$$

Cálculo del cociente:

$$\frac{0,004653}{0,0008289} \sim \frac{4,65 \cdot 10^{-3}}{8,29 \cdot 10^{-5}} = \frac{4,65 \cdot 10^5}{8,29 \cdot 10^3} = \frac{4,65}{8,29} \cdot 10^2$$

Ahora al efectuar el paso (b), el extremo izquierdo (I) de la escala "X" de la reglita cae fuera de la regla fija. Entonces se lleva el trazo central del cursor-reglita inmóvil - a coincidir con el extremo derecho de la escala "X" de la reglita; con lo que en la escala "X" de la regla se obtienen las cifras del cociente: 561

Como es aproximadamente el cociente entre 5 y 8 el resultado final es menor que 1. Luego:

$$\frac{4,65}{8,29} = 0,561$$

Luego el cociente es:

$$\frac{4,65}{8,29} \cdot 10^2 = 0,561 \cdot 10^2 = 56,1$$

1.9.3. Cálculo de cuadrados.

Cálculo del cuadrado de 2.466,3:

$$2.466,3 \approx 2,47 \cdot 10^3$$

$$(2,47 \cdot 10^3)^2 = (2,47)^2 \cdot (10^3)^2$$

En el primer paso hemos redondeado el número y lo hemos expresado en función de una potencia de 10. En el segundo, hemos aplicado la propiedad distributiva de la potenciación respecto del producto. Aplicando ahora al segundo factor la propiedad de la potencia de potencia:

$$(2,47 \cdot 10^3)^2 = (2,47)^2 \cdot 10^6$$

Con lo que el problema se reduce al de hallar con la regla de cálculo el cuadrado de 2,47. Para ello:

- a) Con el trazo central del cursor se buscan en la escala "X" de la regla fija, las cifras 247.
- b) En correspondencia con el trazo central del cursor, en la escala "X²" de la regla fija, se leen las cifras del cuadrado: 61
- c) Como el cuadrado cae en la primera de las dos escalas "X²", el número de cifras enteras es 1. O sea que:

$$(2,47)^2 = 6,1$$

Luego es:

$$(2,47 \cdot 10^3)^2 = 6,1 \cdot 10^6$$

Cálculo del cuadrado de 0,0005632

$$0,0005632 = 5,63 \cdot 10^{-4}$$

$$(5,63 \cdot 10^{-4})^2 = (5,63)^2 (10^{-4})^2 = (5,63)^2 \cdot 10^{-8}$$

con lo que el problema se reduce a hallar el cuadrado de 5,63 con la regla de cálculo. Repitiendo el procedimiento descrito en el ejemplo precedente, se comprueba que ahora las cifras del cuadrado aparecen en la segunda de las escalas "X²" de la regla fija: 32. Luego, el número de cifras enteras del cuadrado es 2:

$$(5,63)^2 = 32$$

Luego el resultado buscado es:

$$(5,63 \cdot 10^{-4})^2 = 32 \cdot 10^{-8} = 3,2 \cdot 10^{-7}$$

1.9.4. Cálculo de cubos.

Cálculo del cubo de 0,0013729

$$0.0013729 \approx 1.37 \cdot 10^{-3}$$

$$(1.37 \cdot 10^{-3})^3 = (1.37)^3 \cdot (10^{-3})^3 = (1.37)^3 \cdot 10^{-9}$$

de donde el problema se reduce a hallar con la regla de cálculo el cubo de 1.37. En estos pasos previos hemos redondeado, expresado el número en función de una potencia de 10, y aplicado la propiedad distributiva de la potenciación respecto del producto y la propiedad de la potencia de potencia. Los pasos que siguen son:

- a) Con el trazo central del cursor se buscan en la escala "X" de la regla fija, las cifras 137.
- b) En la escala "X³" de la regla fija y en correspondencia con el trazo central del cursor, se leen las cifras del cubo: 26
- c) Como el cubo que en la primera de las tres escalas "X³" de la regla fija, el número de cifras enteras del cubo es 1:

$$(1.37 \cdot 10^{-3})^3 = 2.6 \cdot 10^{-9}$$

Cálculo del cubo de 36,996:

$$36.996 \approx 3.7 \cdot 10$$

$$(3.7 \cdot 10)^3 = (3.7)^3 \cdot 10^3$$

donde el problema se reduce a hallar con la regla de cálculo el cubo de 3.7. Procediendo como en el ejemplo anterior, ahora las cifras del cubo son 51. Como el cubo que en la segunda de las escalas "X³" de la regla, el número de cifras enteras del cubo es 2:

$$(3.7)^3 = 51$$

Luego el resultado es:

$$(3.7 \cdot 10)^3 = 51 \cdot 10^3 = 5.1 \cdot 10^4$$

Cálculo del cubo de 613:

$$(6.13 \cdot 10^2)^3 = (6.13)^3 \cdot (10^2)^3 = (6.13)^3 \cdot 10^6$$

Las cifras leídas en la escala de cubos son 24. Como el cubo que en la tercera de las escalas "X³" de la regla fija, el número de cifras enteras del cubo es 3:

$$(6.13)^3 = 240$$

Luego el resultado es:

$$(6.13 \cdot 10^2)^3 = 240 \cdot 10^6 = 2.4 \cdot 10^8$$

1.9.5. Cálculo de raíces cuadradas.

Cálculo de la raíz cuadrada de 17.621:

$$17.621 = 1,76 \cdot 10^4$$

$$\sqrt{1,76 \cdot 10^4} = \sqrt{1,76} \cdot \sqrt{10^4} = \sqrt{1,76} \cdot 10^2$$

con lo que el problema se reduce a hallar la raíz cuadrada de 1,76. Como 1,76 tiene una cifra entera, buscamos las cifras 176 en la primera de las escalas "X²" de la regla fija. En la escala "X" de la regla fija y en correspondencia con el trazo central del cursor, encontramos las cifras de la raíz cuadrada: 133, con una cifra entera. O sea que:

$$\sqrt{1,76} = 1,33$$

Luego el resultado es:

$$\sqrt{1,76 \cdot 10^4} = 1,33 \cdot 10^2$$

Cálculo de la raíz cuadrada de 176.210:

$$176.210 = 1,76 \cdot 10^5$$

$$\sqrt{1,76 \cdot 10^5} = \sqrt{1,76} \cdot \sqrt{10^5}$$

No conviene dejar la operación expresada de este modo, pues la raíz cuadrada de 10⁵ no es fácilmente calculable. Es por ello que pasamos a reducir en una unidad el exponente de 10⁵, con lo que el exponente se hace par. Para compensar, multiplicamos por 10 el otro factor, 1,76:

$$\sqrt{1,76 \cdot 10^5} = \sqrt{17,6 \cdot 10^4} = \sqrt{17,6} \cdot \sqrt{10^4} = \sqrt{17,6} \cdot 10^2$$

con lo que el problema se reduce a hallar con la regla la raíz cuadrada de 17,6. Conviene observar que las cifras significativas del número son las mismas que para el ejercicio precedente.

Como 17,6 tiene dos cifras enteras, corresponde buscar las cifras 176 en la segunda de las escalas "X²" de la regla fija. En la escala "X" de la regla fija se encuentran las cifras de la raíz cuadrada: 419 con una cifra entera:

$$\sqrt{17,6} = 4,19$$

Luego el resultado es:

$$\sqrt{1,76 \cdot 10^5} = 4,19 \cdot 10^2$$

Se concluye que: al expresar el número cuya raíz cuadrada se busca, en función de 10, el exponente de 10 puede resultar impar o par. Si resulta par (caso del

primer ejemplo), se buscan las cifras significativas del radicando en la primera de las escalas " X^2 " de la regla fija. La raíz resulta con una cifra entera. Si en cambio el exponente de 10 resulta impar, se lo lleva a par reduciéndolo en una unidad. Para compensar, se multiplica el primer factor por 10. A continuación, las cifras significativas del radicando se buscan en la segunda de las escalas " X^2 " de la regla fija. La raíz resulta también en este caso, con una cifra entera. Veamos otros dos ejemplos, esta vez con números decimales sin parte entera:

Cálculo de la raíz cuadrada de 0,017621:

$$0,017621 = 1,76 \cdot 10^{-2}$$

$$\sqrt{1,76 \cdot 10^{-2}} = \sqrt{1,76} \cdot \sqrt{10^{-2}} = \sqrt{1,76} \cdot 10^{-1}$$

Vemos que corresponde buscar las cifras en la primera de las escalas " X^2 ". Las cifras de la raíz son 133. Luego el resultado es

$$\sqrt{1,76 \cdot 10^{-2}} = 1,33 \cdot 10^{-1} = 0,133$$

Cálculo de la raíz cuadrada de 0,0017621:

$$0,0017621 = 1,76 \cdot 10^{-3}$$

$$\sqrt{1,76 \cdot 10^{-3}} = \sqrt{17,6 \cdot 10^{-4}} = \sqrt{17,6} \cdot \sqrt{10^{-4}} = \sqrt{17,6} \cdot 10^{-2}$$

Como el exponente de 10 resultó impar, se lo redujo en una unidad para llevarlo a par. Corresponde buscar las cifras en la segunda escala " X^2 ". Las cifras de la raíz son 419 con una cifra entera. Luego el resultado es:

$$\sqrt{1,76 \cdot 10^{-3}} = 4,19 \cdot 10^{-2}$$

1.9.6. Cálculo de raíces cúbicas.

Cálculo de la raíz cúbica de 0,00286:

$$0,00286 = 2,86 \cdot 10^{-3}$$

$$\sqrt[3]{2,86 \cdot 10^{-3}} = \sqrt[3]{2,86} \cdot \sqrt[3]{10^{-3}} = \sqrt[3]{2,86} \cdot 10^{-1}$$

con lo que el problema se reduce al de hallar con la regla la raíz cúbica de 2,86. Como 2,86 tiene una cifra entera, con el trazo central del cursor se buscan las cifras 286 en la primera de las escalas " X^3 " de la regla fija. En la escala " X " de la regla fija se encuentran las cifras de la raíz cúbica: 142, que tiene una cifra entera:

$$\sqrt[3]{2,86} = 1,42$$

Entonces:

$$\sqrt[3]{2,86 \cdot 10^{-3}} = 1,42 \cdot 10^{-1} = 0,142$$

Cálculo de la raíz cúbica de 0,0286:

$$0,0286 = 2,86 \cdot 10^{-2}$$

$$\sqrt[3]{2,86 \cdot 10^{-2}} = \sqrt[3]{2,86} \cdot \sqrt[3]{10^{-2}}$$

No conviene dejar a la operación expresada en esta forma, pues la raíz cúbica de 10^{-2} no es fácilmente calculable. Entonces pasamos a reducir en una unidad el exponente de 10^{-2} con lo que el exponente se hace múltiple de 3: 10^{-3} . Para compensar, multiplicamos el primer factor 2,86 por 10:

$$\sqrt[3]{2,86 \cdot 10^{-2}} = \sqrt[3]{28,6 \cdot 10^{-3}} = \sqrt[3]{28,6 \cdot 10^{-1}}$$

Ahora sólo resta hallar la raíz cúbica de 28,6 con la regla. Como 28,6 tiene dos cifras enteras, buscamos con el cursor las cifras 286 en la segunda de las escalas "X" de la regla fija. En la escala "X" de la regla fija encontramos las cifras de la raíz cúbica: 305, que tiene una cifra entera:

$$\sqrt[3]{28,6} = 3,05$$

Entonces el resultado es:

$$\sqrt[3]{2,86 \cdot 10^{-2}} = 3,05 \cdot 10^{-1} = 0,305$$

Conviene observar que para el radicando se emplearon las mismas cifras significativas que para el primer ejemplo.

Cálculo de la raíz cúbica de 0,286:

$$0,286 = 2,86 \cdot 10^{-1}$$

$$\sqrt[3]{2,86 \cdot 10^{-1}} = \sqrt[3]{2,86} \cdot \sqrt[3]{10^{-1}}$$

Nuevamente encontramos el inconveniente de que la raíz cúbica de 10^{-1} no es fácilmente calculable porque -1 no es múltiplo de 3. Para facilitar el cálculo reducimos en dos unidades el exponente de 10, pasando de 10^{-1} a 10^{-3} . Con ello el exponente pasa a ser múltiplo de 3. Para compensar, multiplicamos por 100 el factor 2,86:

$$\sqrt[3]{2,86 \cdot 10^{-1}} = \sqrt[3]{286 \cdot 10^{-3}} = \sqrt[3]{286} \cdot \sqrt[3]{10^{-3}} = \sqrt[3]{286} \cdot 10^{-1}$$

Debemos hallar con la regla la raíz cúbica de 286. Como 286 tiene tres cifras enteras, buscamos las cifras 286 en la tercera de las escalas "X" de la re-

gla fija. En la escala "X" de la regla fija encontramos las cifras de la raíz cúbica: 659, que tiene una cifra entera.

$$\sqrt[3]{286} = 6,59$$

Luego el resultado es:

$$\sqrt[3]{2,86 \cdot 10^{-1}} = 6,59 \cdot 10^{-1} = 0,659$$

De los tres ejemplos precedentes podemos resumir el procedimiento de obtención de la raíz cúbica de un número como sigue:

Se expresa el número en función de la potencia de 10. Como consecuencia de ello, el exponente de 10 puede o no resultar múltiplo de 3. Si resulta múltiplo de 3, el otro factor queda con una cifra entera y las cifras significativas se buscan en la primera de las escalas "X³" de la regla fija. La raíz resulta con una cifra entera.

Si el exponente de 10 no resulta múltiplo de 3, se lo lleva a múltiplo de 3 reduciéndolo en una o en dos unidades, según sea necesario. Si se lo reduce en una unidad, el otro factor debe multiplicarse por 10 para que el valor del número no cambie. De este modo dicho factor queda con dos cifras enteras, y por lo tanto las cifras se buscan en la segunda de las escalas "X³" de la regla fija. La raíz resulta con una cifra entera. Si en cambio hace falta reducir el exponente de 10 en dos unidades, el otro factor se multiplica por 100, con lo que queda con tres cifras enteras. Las cifras se buscan en la tercera escala "X³", y la raíz resulta también con una cifra entera.

Veamos otros tres ejemplos:

Raíz cúbica de 2.860.000:

$$\sqrt[3]{2.860.000} = \sqrt[3]{2,86 \cdot 10^6} = \sqrt[3]{2,86} \cdot \sqrt[3]{10^6} = \sqrt[3]{2,86} \cdot 10^2$$

En este paso expresamos el número en función de 10, aplicamos la propiedad distributiva de la radicación respecto del producto, y la propiedad de la raíz de potencia. El primer factor queda con una cifra entera, por lo que las cifras se buscan en la primera escala:

$$\sqrt[3]{2,86} = 1,42$$

El resultado;

$$\sqrt[3]{2,86 \cdot 10^6} = 1,42 \cdot 10^2 = 142$$

Raíz cúbica de 28.600.000:

$$\begin{aligned} \sqrt[3]{28.600.000} &= \sqrt[3]{2,86 \cdot 10^7} \quad ; 7 \text{ no es múltiplo de } 3. \text{ Luego:} \\ \sqrt[3]{2,86 \cdot 10^7} &= \sqrt[3]{28,6 \cdot 10^6} = \sqrt[3]{28,6} \cdot \sqrt[3]{10^6} = \sqrt[3]{28,6} \cdot 10^2 \end{aligned}$$

El primer factor queda con dos cifras enteras, luego corresponde la segunda escala:

$$\sqrt[3]{28,6} = 3,05$$

El resultado:

$$\sqrt[3]{2,86 \cdot 10^7} = 3,05 \cdot 10^2 = 305$$

Raíz cúbica de 286.000.000:

$$\sqrt[3]{286.000.000} = \sqrt[3]{2,86 \cdot 10^8} ; 8 \text{ no es múltiplo de } 3. \text{ Luego:}$$

$$\sqrt[3]{2,86 \cdot 10^8} = \sqrt[3]{286 \cdot 10^6} = \sqrt[3]{286} \cdot \sqrt[3]{10^6} = \sqrt[3]{286} \cdot 10^2$$

El primer factor queda con tres cifras enteras, luego corresponde la tercera escala:

$$\sqrt[3]{286} = 6,59$$

El resultado:

$$\sqrt[3]{2,86 \cdot 10^8} = 6,59 \cdot 10^2 = 659$$

1.10.0. REGLA DE TRES SIMPLE.

Los problemas de regla de tres se presentan siempre que se tienen dos o más magnitudes relacionadas entre sí de modo que hay una proporcionalidad directa o inversa entre sus valores correspondientes. Así distinguimos regla de tres directa e inversa.

Consideremos primero la regla de tres directa, abordando directamente un ejemplo:

Un cuerpo que ha estado cayendo en el vacío durante 10 segundos, tiene al cabo de ese tiempo una velocidad instantánea de 98,1 m/seg. ¿Qué velocidad tendrá al cabo de 30 segundos de caída?

Siendo que en la caída libre la velocidad instantánea es proporcional al tiempo de caída, el problema puede resolverse mediante una regla de tres. El razonamiento es el siguiente:

A un tiempo de caída de 10 segundos,
corresponde una velocidad final de

98,1 m/seg

A un tiempo de caída de 1 segundo

corresponde una velocidad final 10 veces menor

A un tiempo de caída de 30 segundos,

corresponde una velocidad final 30 veces mayor que la relativa a 1 segundo.

Este razonamiento puede plantearse esquemáticamente:

10 seg. ----- 98,1 m/seg.

1 seg. ----- $\frac{98,1 \text{ m/seg.}}{10 \text{ seg.}}$

30 seg. ----- $\frac{98,1 \text{ m/seg.} \times 30 \text{ seg.}}{10 \text{ seg.}} = 294 \text{ m/seg.}$

La regla de tres en este caso es directa, porque cuando una de las magnitudes implicadas (tiempo) crece, la otra (velocidad) hace lo propio. Se ve que el procedimiento de resolución consiste en hacer una reducción a la unidad, es decir, en establecer cuantas unidades de la magnitud incógnita corresponden a una unidad de la magnitud dato (cociente 98,1/10 en el caso del ejemplo). El producto de este número por el segundo valor de la magnitud dato, proporciona el valor buscado.

Regla de tres inversa. El problema de regla de tres inversa se presenta cuando al crecer una de las magnitudes implicadas, la otra decrece. Es decir, las magnitudes en juego son entre sí inversamente proporcionales. Ejemplo:

0,5 gr. de NaCl disueltos en 2 dm³ de agua, importan una concentración de 0,25 gr/dm³ ¿Qué concentración representa la misma cantidad de compuesto, disuelta en 5 dm³ de agua?

Razonamos como sigue:

A 2 dm³ de agua, corresponde una concentración de 0,25 gr/dm³

A 1 dm³ de agua, corresponde una concentración dos veces mayor.

A 5 dm³ de agua, corresponde una concentración 5 veces menor que a 1 dm³.

Esquemáticamente:

2 dm³ ----- 0,25 gr/dm³

1 dm³ ----- 0,25 gr/dm³ x 2 dm³

5 dm³ ----- $\frac{0,25 \text{ gr/dm}^3 \times 2 \text{ dm}^3}{5 \text{ dm}^3} = 0,1 \text{ gr/dm}^3$

Se observa que el volumen de agua y la concentración, son magnitudes inversamente proporcionales mientras la cantidad de soluto no cambie (que es lo que se supone en el problema). Nuevamente se hace una reducción a la unidad, es

decir, se comienza por establecer cuantas unidades de la magnitud incógnita corresponden a una unidad de la magnitud dato. La proporcionalidad inversa conduce a que dicha reducción consiste ahora en un producto ($0,25 \times 2$ en el caso del ejemplo). Este número, dividido por el segundo valor de la magnitud dato, proporciona el valor buscado.

1.11.0. TRASPASO DE TERMINOS Y FACTORES DE UN MIEMBRO A OTRO DE UNA ECUACION. RESOLUCION DE UNA ECUACION ALGEBRAICA PARA UNO DE SUS ELEMENTOS. -

Se dan aquí nociones elementales sobre la manipulación de expresiones algebraicas con la finalidad de que el lector pueda, a partir de una expresión dada, aislar en un miembro de la misma uno cualquiera de sus elementos. Esto es lo que se entiende por resolver una ecuación para uno de sus elementos.

La regla básica a este efecto, es la de que cada elemento de una ecuación pasa de un miembro a otro efectuando la operación contraria u opuesta a la que cumplía en su situación original. Veamos algunos ejemplos:

$$a - x - c = d$$

Se trata de "despejar" x , es decir, de que x quede como único elemento del primer miembro de la ecuación. Al efecto pasamos sucesivamente al segundo miembro, los restantes elementos del primero. Cada elemento pasa efectuando la operación opuesta: a , que está sumándose (implícitamente está precedida de un signo más), pasa restándose:

$$-x - c = d - a$$

A continuación c , que está restando, pasa sumando:

$$-x = d - a + c$$

con lo que la ecuación queda resuelta para $-x$. Para resolverla para x , simplemente multiplicamos ambos miembros por -1 con lo que la igualdad se mantiene:

$$x = -d + a - c$$

Segundo ejemplo:

$$a - bx - c = d$$

Ahora el término que contiene a x consta de dos factores: x y b . Ello hace que luego de los pasos que se han visto en el ejemplo anterior, deba pasarse b al segundo miembro. Como en el primer miembro está multiplicando a x , pasa dividiendo:

$$-bx = d - a + c$$

$$-x = \frac{d - a + c}{b}$$

$$x = \frac{-d + a - c}{b}$$

Tercer ejemplo:

$$a - \frac{x}{b} - c = d$$

Ahora b divide a x , por lo que pasa al segundo miembro multiplicado:

$$-x/b = d - a + c$$

$$-x = b(d - a + c)$$

$$x = -b(d - a + c)$$

El paréntesis indica que b multiplica a todos los demás elementos del segundo miembro.

Cuarto ejemplo:

$$\frac{a}{x - b} + d = e$$

$$\frac{a}{x - b} = e - d$$

Llegados a este punto, como x aparece en el denominador de uno de los miembros, invertimos ambos miembros de la igualdad para llevarla al numerador, con lo que la igualdad no altera:

$$\frac{x - b}{a} = \frac{1}{e - d}$$

$$x - b = \frac{a}{e - d}$$

$$x = \frac{a}{e - d} + b$$

Quinto ejemplo:

$$d \cdot \sqrt{a^2 + x^2} = 2b + c$$

$$\sqrt{a^2 + x^2} = \frac{2b + c}{d}$$

A continuación y para poder separar x^2 de a^2 , elevamos al cuadrado ambos miembros.

bros de la ecuación; con lo que esta no altera:

$$a^2 + x^2 = \frac{(2b + c)^2}{d^2}$$

$$x^2 = \frac{(2b + c)^2}{d^2} - a^2$$

Para que nos quede x elevada a la primera potencia, ahora extraemos la raíz cuadrada en ambos miembros de la ecuación:

$$x = \sqrt{\frac{(2b + c)^2}{d^2} - a^2}$$

Sexto ejemplo:

$$a = b \cdot c^x + d$$

$$a - d = b \cdot c^x$$

Como x se encuentra en el exponente, para llevarla a nivel de base tomamos logaritmos en ambos miembros:

$$\log(a - d) = \log b + \log(c^x)$$

Aplicando la propiedad de logaritmo de una potencia:

$$\log(a - d) = \log b + x \cdot \log c$$

$$\log(a - d) - \log b = x \cdot \log c$$

$$\frac{\log(a - d) - \log b}{\log c} = x$$

$$x = \frac{\log \frac{a - d}{b}}{\log c}$$

En el último paso se aplica la propiedad del logaritmo de un cociente.

1.12.0. SISTEMAS DE DOS ECUACIONES LINEALES CON DOS INCOGNITAS. SU RESOLUCION POR EL METODO DE SUSTITUCION.-

Una ecuación es lineal cuando en ella las incógnitas aparecen elevadas a la primera potencia. Así:

$$x + 2 = 0$$

(una incógnita)

$$x + 2y - 3 = 0$$

(dos incógnitas)

$$x - 3y - z = 2$$

(tres incógnitas)

son ejemplos de ecuaciones lineales, en las que las incógnitas son x , y , z .

Una ecuación lineal puede tener cualquier número de incógnitas. En particular nos interesan las ecuaciones lineales con dos incógnitas, cuya forma general es:

$$ax + by + c = 0$$

En esta ecuación x e y son las incógnitas, y a , b y c los coeficientes de la ecuación, es decir, números. Así de los tres ejemplos consignados más arriba, en la segunda ecuación, que es de dos incógnitas, los coeficientes son 1, 2 y -3.

Elegido un valor cualquiera de una de las incógnitas, puede calcularse el valor correspondiente de la otra que hace que la ecuación se cumpla. Al efecto basta con despejar de la última expresión, la incógnita que corresponda:

$$x = \frac{-by - c}{a} \quad \text{o bien:} \quad y = \frac{-ax - c}{b}$$

Es decir que si elegimos un valor cualquiera de y , introduciéndolo en la primera de estas expresiones obtenemos el correspondiente de x que satisface a la ecuación. Si elegimos un valor cualquiera de x , introduciéndolo en la segunda expresión obtenemos el correspondiente de y .

Hay por lo tanto infinitos pares de valores correspondientes de x e y que satisfacen la ecuación o, en otros términos, la ecuación tiene infinitas soluciones. Así si en el ejemplo de más arriba:

$$x + 2y - 3 = 0$$

elegimos el valor $x = 1$, y despejamos $y = \frac{3 - x}{2}$, reemplazando a x por el valor

particular elegido, 1, se tiene:

$$y = \frac{3 - 1}{2} = 1$$

O sea que $x = 1$; $y = 1$, es una de las tantas infinitas soluciones de la ecuación.

Ahora consideremos simultáneamente dos ecuaciones lineales con dos incógnitas. Si bien cada una de ellas tiene por separado infinitas soluciones, hay un único par de valores de x y de y que satisfacen ambas ecuaciones. Es decir, hay una única solución para el sistema que las ecuaciones forman (o bien no hay ninguna). Así por ejemplo para el sistema de ecuaciones :

$$x + y = 1$$

$$x - y = 1$$

el único par de valores de x y de y que satisface a ambas ecuaciones es $x = 1$; $y = 0$. Reemplacemos:

$$1 + 0 = 1$$

$$1 - 0 = 1$$

Vemos que las igualdades se cumplen, de donde la indicada es efectivamente la solución. No hay otro par de valores de x y de y que resuelvan el sistema, si bien cada ecuación por separado tienen infinitas soluciones.

Interesa disponer de un método que permita hallar sistemáticamente la solución de cualquier sistema de dos ecuaciones lineales con dos incógnitas. Hay cuatro métodos clásicos de resolución, de los cuales nos limitaremos a uno: el de sustitución. Lo ilustramos con un ejemplo. Sea el sistema:

$$2x + 3y - 2 = 0$$

$$5x - 2y + 3 = 0$$

- a) De una cualquiera de las ecuaciones, despejamos una cualquiera de las incógnitas: por ejemplo, despejemos x de la primera:

$$x = \frac{-3y + 2}{2} = \frac{-3}{2}y + 1$$

- b) En la otra ecuación, reemplazamos a x por este valor obtenido de la primera ecuación:

$$5\left(\frac{-3}{2}y + 1\right) - 2y + 3 = 0$$

con lo que nos queda una ecuación lineal de una incógnita: y . Operando:

$$\frac{-15}{2}y + 5 - 2y + 3 = 0$$

$$\frac{-15}{2}y - \frac{4}{2}y = -3 - 5$$

$$\frac{-19}{2}y = -8$$

$$\frac{19}{2}y = 8$$

$$y = 8 \frac{2}{19} = \frac{16}{19}$$

con lo que hallamos el valor de una de las incógnitas.

- c) Ahora reemplazamos a y por su valor hallado en b, en la expresión obtenida en el paso a):

$$x = \frac{-3}{2} \cdot \frac{16}{19} + 1 = \frac{-48}{38} + 1 = \frac{-48 + 38}{38} = -10/38$$

$$x = -5/19$$

Luego la solución del sistema es: $x = -5/19$; $y = 16/19$

1.13.0. VARIABLE. VARIABLE INDEPENDIENTE. FUNCION.-

Se dice que una magnitud física, geométrica, etc., es variable, cuando puede tomar diversos valores en un fenómeno o proceso determinado. Así la posición instantánea de un cuerpo en movimiento, la presión barométrica, el ritmo cardíaco, son magnitudes variables.

Ocurre frecuentemente que en un fenómeno físico aparecen dos o más variables ligadas entre sí por una relación de dependencia, de modo tal que a cada valor de una de ellas corresponde un valor de cada una de las otras. Así por ejemplo para un cuerpo en caída libre en el vacío que ha partido del reposo, para cada valor del tiempo transcurrido hay un valor de la velocidad instantánea alcanzada y uno de la altura perdida hasta ese instante en la caída.

En esos casos, se dice que entre las variables en juego hay una relación funcional, según la cual unas variables dependen de otra u otras. Para el caso concreto de tener sólo dos variables, una se designa variable independiente y la otra variable dependiente o función. La variable independiente se caracteriza porque a la misma puede asignársele cualquier valor a voluntad. La dependiente, porque para cada valor de la variable independiente, tiene en general un valor.

único que depende o se condiciona al de la variable independiente. Así en el ejemplo visto del cuerpo en caída libre en el vacío, el tiempo es la variable independiente, y la velocidad alcanzada, la función. Se dice entonces, que la velocidad es función del tiempo de caída; y ello se expresa sintéticamente:

$$v = f(t)$$

Esta expresión se lee "v es igual a f de t"

1.13.1. Representación gráfica de funciones.

Las funciones admiten en general una representación gráfica. Un ejemplo familiar al profesional de la medicina, de representación gráfica, es el gráfico temperatura-tiempo que se lleva de un enfermo, y cuya forma de confección es conocida. Prácticamente toda representación gráfica implica la previa confección de una tabla de valores de la variable independiente y de la función. La tabla de

valores es un conjunto de pares de valores correspondientes de ambas variables, y cada par de valores correspondientes representa un punto de la representación gráfica.

Un gráfico puede resultar de una tabla de valores obtenida experimentalmente (caso de la temperatura del enfermo), o bien responder a una cierta ecuación, que precisamente representa la relación funcional entre las variables en juego. En general, de este modo toda ecuación tiene una representación gráfica.

Consideremos un ejemplo:

$$y = 2x + 1$$

que como sabemos es una ecuación lineal con dos incógnitas, que ahora llamaremos variables. Para hacer la tabla de valores de la función y , damos valores cualesquiera a x y calculamos con la ecuación los correspondientes de y .

Para $x = 0$, es $y = 1$

$$x = 1, \quad y = 3$$

$$x = 2, \quad y = 5$$

$$x = 3, \quad y = 7$$

$$x = 4, \quad y = 9$$

$$x = -1, \quad y = -1$$

$$x = -2, \quad y = -3$$

$$x = -3, \quad y = -5$$

----- Etc.

Ya en disposición de la tabla de valores, para hacer la representación gráfica, tomamos un par de ejes perpendiculares, que llamamos ejes coordenados. Sobre cada eje coordenado, que designamos con las letras x e y , marcamos escalas de representación: Ver figura 1

Al eje x lo llamamos eje de abscisas. Al eje y , eje de ordenadas. Cada par de valores correspondientes de x y de y , tomados de la tabla de valores, constituyen las coordenadas de un punto del gráfico. Así el par de valores $x = 2$; $y = 5$, son respectivamente la abscisa y la ordenada del punto $P(2; 5)$. Es decir que la abscisa del punto, (x), es la distancia entre el punto, y el eje y . Y la ordenada del punto, (y), es la distancia entre el punto y el eje x .

Entonces para representar el punto P de coordenadas $(2; 5)$:

a) **Modifiquemos 2** sobre el eje x, desde la intersección de los ejes y hacia la derecha (la intersección de los ejes se designa origen de coordenadas u origen).

b) Por ese punto levantamos una vertical.

c) Sobre la vertical, desde el eje x y hacia arriba, medimos 5. Al extremo de esta segmento vertical de 5 de longitud, marcamos el punto P de coordenadas 2; 5.

De este modo pueden representarse los puntos restantes de la tabla de valores. Uniéndolos, se obtiene la representación gráfica, que en el caso del ejemplo es una recta.

Obtenemos así una conclusión relacional: toda ecuación lineal con dos incógnitas, representa una recta.

$$ax + by + c = 0 \quad \text{-----} \quad \text{recta}$$

Entonces, cada una de las infinitas soluciones de la ecuación, constituye el par de coordenadas de un punto de la recta, lo que está de acuerdo con el hecho de que la recta tiene infinitos puntos.

1.13.3. La función exponencial negativa.

De las innumerables funciones existentes y que pueden representarse gráficamente, destacamos en especial a las que se llaman la función exponencial de exponente negativo, o función exponencial negativa.

$$y = a \cdot e^{-bx}$$

y es la función o variante dependiente.

x es la variable independiente.

e es la base de los logaritmos naturales; $e \approx 2,72$.

a y b son números.

Así por ejemplo:

$$y = 5,5 \cdot e^{-2x}$$

es una función exponencial negativa, en la que la expresión anterior es la forma más general. Su representación gráfica:

(Ver Figura 2)

Para $x = 0$, es $y = a$. Para x tendiendo a infinito, la función tiende a cero, como indica el gráfico, éste puede construirse a partir de una tabla de valores obtenida con la ecuación (ello es laborioso de oncular, por lo que el alumno dispondrá de una tabla de valores ya calculada).

En la función exponencial negativa interesa un valor particular de la variable independiente, conocido como período. Este es el valor de x para el cual y toma el valor $a/2$. Es decir, es el valor de la variable independiente, para el cual la función vale la mitad que para $x = 0$.

La fórmula del período se deduce precisamente imponiendo en la ecuación de la exponencial, la condición que establece su definición:

$$y = a \cdot e^{-bx}$$

Llamando X al período:

$$a/2 = a \cdot e^{-bX}$$

$$1/2 = e^{-bX}$$

$$2 = \frac{1}{e^{-bX}}$$

$$2 = e^{bX}$$

Tomamos logaritmos:

$$\ln 2 = bX \cdot \ln e = bX \cdot 1$$

luego:

$$X = \frac{\ln 2}{b} = \frac{0,693}{b}$$

El período toma diferentes sentidos físicos de acuerdo con el problema de que se trate. Así en el caso del decaimiento de una fuente radiactiva, se lo llama período de semidesintegración o

$$T = \frac{0,693}{\lambda}$$

y es el tiempo en el cual la actividad (potencia) de la fuente radiactiva, que decrece exponencialmente con el tiempo, se reduce a la mitad de su valor original.

Lambda (λ) es la constante de desintegración de la sustancia radiactiva que se considera.

El concepto de período se vincula también con la absorción y dispersión de

radiación gamma en espesores delgados de materia; y en ese caso es el espesor de materia a atravesar para que la intensidad de radiación se reduzca a la mitad.

1.13.3. La función exponencial en gráfico semilogarítmico.

Consideremos nuevamente la ecuación de la función exponencial negativa:

$$y = a \cdot e^{-bx}$$

Tomemos logaritmos naturales en ambos miembros:

$$\ln y = \ln a - bx \cdot \ln e$$

$$\ln y = \ln a - bx$$

si consideramos que nuestras variables son x y $\ln y$, es inmediato que estamos en presencia de una ecuación lineal con dos variables, es decir, se trata de la ecuación de una recta.

Quiere decir que si la exponencial se representa en un gráfico $x - \ln y$, se transforma en una recta, mucho más fácil de representar que la exponencial en un gráfico común $x - y$.

Al efecto se emplea el papel semilogarítmico, papel impreso que presenta una escala lineal en abscisas y una escala logarítmica en ordenadas. Esta última se reconoce porque en ella aparecen regularmente espaciadas las sucesivas potencias de 10: 1; 10; 100; 1000; etc.

Como para trazar una recta basta con conocer dos de sus puntos lo práctico en el caso que nos ocupa es tomar los puntos que corresponden a $x = 0$ y el período:

$$P_1 (0; a)$$

$$P_2 (X; a/2) \quad (\text{Ver figura 3})$$

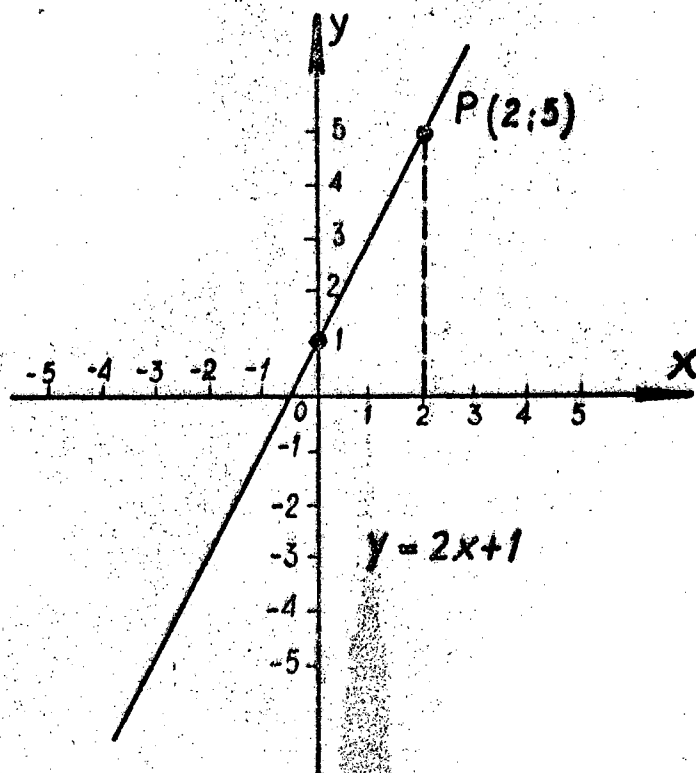


Figura 1

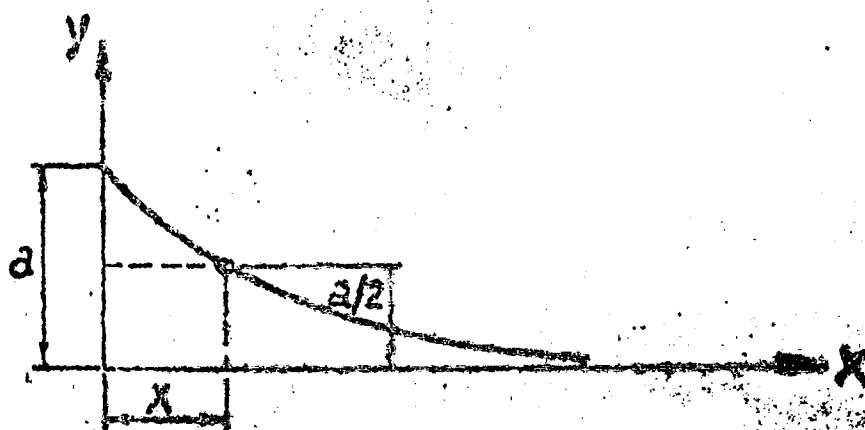


Figura 2.

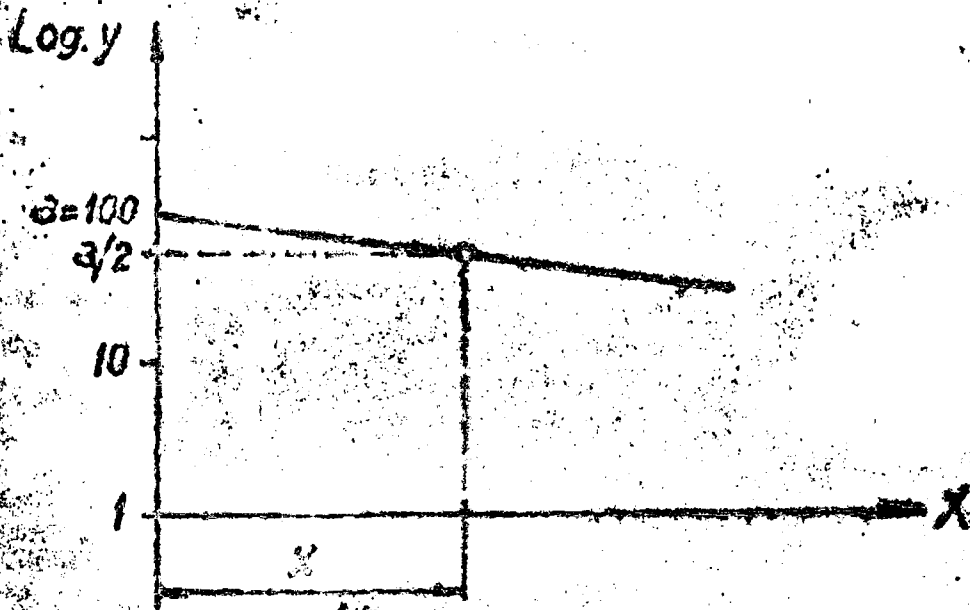


Figura 3