

01.74.22

VAI
AM
01.74.

ACCION DE FUERZAS INERCIALES SOBRE ONDAS

Norberto Vaieretti

T E S I S

Bariloche, 1974
Argentina

01.74.

ACCION DE FUERZAS INERCIALES SOBRE ONDAS

Norberto Vaieretti

Tesis presentada ante la Facultad de Ciencias de la Universidad Nacional de Cuyo, para optar al título de Doctor en Física.


Dr. Guido Beck
Asesor Científico


Lic. Norberto Vaieretti

Centro Atómico Bariloche
Instituto de Física "Dr. José A. Balseiro"
Comisión Nacional de Energía Atómica
Universidad Nacional de Cuyo
Bariloche, Argentina

Mi agradecimiento

Al Dr. Guido Beck por sugerir la idea para este trabajo y por su continua guía y estímulo en la realización del mismo.

A la Dra. Ana M. Platzek por útiles discusiones.
A la Comisión Nacional de Energía Atómica y a las autoridades y personal del Instituto de Física "Dr. J.A. Balseiro" y Centro Atómico Bariloche, en donde se realizó este trabajo.

I) I N T R O D U C C I O N

Las ecuaciones de movimiento de una partícula clásica libre son:

$$m \ddot{x}^i = 0 \tag{I-1}$$

donde x^i son coordenadas cartesianas.

Esta ecuación es matemáticamente equivalente a

$$m \ddot{\xi}^i = m \int_{j1}^j \xi^j \dot{\xi}^1 \tag{I-2}$$

Donde ξ^i son coordenadas no cartesianas.

Decimos entonces que la partícula estará sometida a fuerzas de inercia cuando sus ecuaciones de movimiento son las (I-2). En particular el sistema de coordenadas cartesiano es aquel en que las fuerzas de inercia se anulan.

Resulta trivial que la fuerza definida de esta manera (como la segunda derivada respecto al tiempo de la coordenada) no es un vector ante transformaciones generales de coordenadas.

Podemos decir entonces que, independientemente del sistema de coordenadas que usemos, una partícula estará, en general, sometida a la acción de fuerzas que tienen un carácter tensorial bien determinado (como es el caso de las fuerzas electromagnéticas) y a fuerzas que tienen otras leyes de transformación ante cambios de coordenadas, que llamaremos fuerzas inerciales o gravitacionales.

Considerando la propagación de ondas, descrita por la solución de la correspondiente ecuación de onda, podemos distinguir dos problemas diferentes:

a) La solución de la ecuación homogénea en el espacio libre infinito

$$\frac{1}{\sqrt{g}} \frac{\partial}{\partial \xi^i} \sqrt{g} g^{i1} \frac{\partial \psi}{\partial \xi^1} + k^2 \psi = 0$$

Estas fuerzas se manifiestan en esta ecuación a través de la dependen-

cia funcional(en las coordenadas) de las componentes del tensor métrico.-

b) Soluciones en sistemas donde debemos imponer condiciones de contorno con una dada geometría. Es aquí donde las fuerzas de inercia adquieren importancia, ya que si bien tenemos en general, un problema con soluciones unívocamente determinadas, para su solución rigurosa(salvo en casos sencillos) conviene determinar los modos de vibración en coordenadas curvilíneas. Esto implica considerar la acción de las fuerzas inerciales, que en muchos casos pueden ser determinadas independientemente en forma sencilla.

En estos casos por lo tanto, deberemos usar el formalismo de Einstein de la teoría general de la relatividad. Dicho formalismo había sido utilizado anteriormente por F. Kottler en la relatividad restringida.-

El proceso de reflexión de una partícula clásica puntiforme sobre una superficie dada es independiente de la curvatura de dicha superficie en el punto de choque, ya que el proceso se produce de la misma forma que lo haría en el plano tangente a la superficie en dicho punto.

Por el contrario, si estudiamos un paquete de ondas, la reflexión no se podrá describir solo sobre el plano tangente, sino que en el proceso interviene un dominio finito de la superficie. Por consiguiente las fuerzas de inercia actuarán sobre las ondas que componen el paquete. La influencia de estas fuerzas será mayor, cuanto mayor sea la curvatura de la superficie dentro de las dimensiones del paquete.

Es decir, estamos así frente a fenómenos que están, en parte, determinados por la geometría particular de la superficie; o lo que es lo mismo, fenómenos que están determinados por la acción conjunta de la superficie y de las fuerzas de inercia.

Su interpretación en términos de dichas fuerzas, nos provee un método sencillo para obtener una descripción cualitativa de problemas diversos, incluso en aquellos casos cuya solución rigurosa sea sumamente complicada.-

Como sabemos que las fuerzas de inercia intervienen en forma distinta en las ecuaciones para ondas de diferente carácter tensorial (escalar vectorial, espinorial etc.), es evidente que la acción de estas fuerzas dependerá de este carácter tensorial, es decir del espín de las partículas consideradas.-

II) PARTICULAS ESCALARES

Estamos interesados en estudiar la acción de las fuerzas de inercia sobre una partícula cuántica.

Tomaremos aquí el caso mas simple de la ecuación de Schrödinger en un espacio riemanniano de dimensión finita- Podremos así estudiar el movimiento del centro de gravedad de un paquete y poner de manifiesto la influencia de las fuerzas de inercia en la propagación del mismo. Veremos que la trayectoria del centro de gravedad del paquete libre se aparta de la geodésica, como consecuencia directa de la acción combinada de las fuerzas de inercia y el carácter ondulatorio de la partícula.

Una partícula clásica que se mueve en un espacio con métrica g_{ij} tiene un hamiltoniano dado por

$$H = \frac{1}{2m} g^{ij} p_i p_j \quad (\text{II-1})$$

Según Podolsky¹ el hamiltoniano cuánticamente correcto, es decir aquel que nos conduce a la ecuación de Schrödinger con las reglas usuales para la definición del impulso es

$$H = \frac{1}{2m \sqrt{g}} p_i \sqrt{g} g^{ij} p_j - \frac{1}{4 \sqrt{g}} \quad (\text{II-2})$$

Definiendo entonces el impulso como

$$p_i = \frac{\hbar}{2\pi i} \left(\frac{\partial}{\partial \xi^i} + \frac{1}{2\sqrt{g}} \frac{\partial \sqrt{g}}{\partial \xi^i} \right) \quad (\text{II-3})$$

reemplazando en (II-2) obtenemos la ecuación de onda

$$-\frac{2mi}{\hbar} \frac{\partial \Psi}{\partial t} = \frac{1}{\sqrt{g}} \frac{\partial}{\partial \xi^i} \sqrt{g} g^{ij} \frac{\partial \Psi}{\partial \xi^j} \quad (\text{II-4})$$

donde $i, j = 1, 2, 3, \dots, 3N$

La condición de normalización para la función escalar Ψ es

$$\int \Psi^\dagger \Psi \sqrt{g} d\xi^n = 1$$

con $d\xi^n = d\xi_1 d\xi_2 \dots d\xi_{3N}$

El operador impulso definido anteriormente es hermitiano y opera sobre la función escalar Ψ .

La acción de las fuerzas de inercia en la ecuación (II-4) se manifiesta a través de la dependencia en las coordenadas del tensor métrico. De esta ecuación y su conjugada se obtiene inmediatamente el teorema de conservación para la densidad de probabilidad

$$\frac{\partial}{\partial t} (\sqrt{g} \Psi^\dagger \Psi) + \frac{\partial}{\partial \xi^i} j^i = 0 \quad (\text{II-5})$$

En lo anterior hemos supuesto que las componentes del tensor métrico no dependen explícitamente del tiempo. La componente contravariante de la densidad de corriente está dada por

$$j^i = \frac{\hbar}{2mi} \sqrt{g} g^{ij} \left(\Psi^\dagger \frac{\partial \Psi}{\partial \xi^j} - \Psi \frac{\partial \Psi^\dagger}{\partial \xi^j} \right) \quad (\text{II-6})$$

Movimiento de un paquete

Definamos nuestro paquete por

$$\langle \xi^i \rangle = \langle \psi^\dagger | \xi^i | \psi \rangle$$

donde $\langle \psi^\dagger | \xi^i | \psi \rangle = \int \psi^\dagger \xi^i \psi \sqrt{g} d\xi^n$

Entonces

$$\frac{d}{dt} \langle \xi^i \rangle = \left\langle \frac{\partial \psi^\dagger}{\partial t} \middle| \xi^i \middle| \psi \right\rangle + \left\langle \psi^\dagger \middle| \xi^i \middle| \frac{\partial \psi}{\partial t} \right\rangle$$

Usando la ecuación (II-4) y su conjugada se obtiene

$$\frac{d}{dt} \langle \xi^i \rangle = \int j^i d\xi^n$$

Derivando nuevamente respecto al tiempo

$$\frac{d^2}{dt^2} \langle \xi^i \rangle = \int \frac{\partial j^i}{\partial t} d\xi^n \quad (\text{II-7})$$

El integrando es facilmente calculable usando la formulación lagrangeana para la descripción del campo de probabilidad.

Definamos la densidad lagrangeana por

$$L = \frac{\hbar^2}{2m} \sqrt{g} \left[g^{ij} \frac{\partial \psi^\dagger}{\partial \xi^i} \frac{\partial \psi}{\partial \xi^j} + \frac{mi}{\hbar} \left(\psi \frac{\partial \psi^\dagger}{\partial t} + \psi^\dagger \frac{\partial \psi}{\partial t} \right) \right] \quad (\text{II-8})$$

Es facilmente verificable que con esta definición, las ecuaciones de Euler reproducen la ecuación (II-4) y su conjugada.

La densidad del tensor de energía-impulso será

$$\bar{\tau}_\nu^\mu = \frac{\partial L}{\partial \left(\frac{\partial \Psi}{\partial \xi^\mu} \right)} \frac{\partial \Psi}{\partial \xi^\nu} + \frac{\partial L}{\partial \left(\frac{\partial \Psi^\dagger}{\partial \xi^\mu} \right)} \frac{\partial \Psi^\dagger}{\partial \xi^\nu} - \delta_\nu^\mu L \quad (\text{II-9})$$

$$\mu, \nu = 0, 1, 2, 3$$

Puede verificarse que este tensor es simétrico, por lo tanto se cumple el teorema general

$$\frac{\partial}{\partial \xi^\nu} \bar{\tau}_\mu^\nu + \frac{1}{2} \frac{\partial g^{\alpha\beta}}{\partial \xi^\mu} \bar{\tau}_{\alpha\beta} = 0 \quad (\text{II-10})$$

Como trabajamos con transformaciones espaciales será

$$g^{0i} = 0 \quad g^{00} = 1$$

donde índices latinos se refieren a coordenadas espaciales.

Por lo tanto la ecuación (II-10) puede ser escrita

$$\frac{\partial}{\partial \xi^\nu} \bar{\tau}_i^\nu + \frac{1}{2} \frac{\partial g^{jl}}{\partial \xi^i} \bar{\tau}_{jl} = 0 \quad (\text{II-11})$$

$$\frac{\partial}{\partial \xi^\nu} \bar{\tau}_0^\nu = 0 \quad (\text{II-12})$$

O también

$$\frac{\partial}{\partial \xi^\nu} \bar{\tau}^{i\nu} = -\sqrt{g}^{ij} \bar{\tau}^{jl} \quad (\text{II-13})$$

$$\frac{\partial}{\partial \xi^\nu} \bar{\tau}^{0\nu} = 0 \quad (\text{II-14})$$

Ante las transformaciones de que nos ocupamos, que no incluyen el tiempo, las cantidades $\bar{\tau}_\mu^\nu$ se transforman como

- \bar{T}_{ii}^0 Como una densidad vectorial covariante.
- \bar{T}_{i0} Como una densidad vectorial contravariante.
- \bar{T}_{ll} Como una densidad tensorial de rango dos.
- \bar{T}_0^0 Como una densidad escalar.

En nuestro caso se cumple

$$\begin{aligned} \bar{T}_i^0 &= m j_i \\ \bar{T}^{0i} &= m j^i \end{aligned} \tag{II-15}$$

Integrando (II-11) y (II-13) y teniendo en cuenta las relaciones (II-15) se obtiene inmediatamente

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \int j_i d\xi^n &= -\frac{1}{2m} \int \frac{\partial g_{jl}}{\partial \xi^i} \bar{T}_{jl} d\xi^n \\ \frac{d}{dt} \int j^i d\xi^n &= -\frac{1}{m} \int \sqrt{j}^i \bar{T}^{jl} d\xi^n \end{aligned}$$

De la segunda de estas ecuaciones y de acuerdo a (II-7) se concluye que la ecuación de movimiento del centro de gravedad del paquete será

$$\frac{d^2}{dt^2} \langle \xi^i \rangle = -\frac{1}{m} \int \sqrt{j}^i \bar{T}^{jl} d\xi^n \tag{II-16}$$

Si el espacio de configuraciones es euclídeo, existe un sistema de coordenadas cartesianas, con lo cual la ecuación (II-16) conduce inmediatamente al teorema de Erhenfest para una partícula libre

$$\frac{d^2}{dt^2} \langle x^i \rangle = 0$$

Podemos decir, entonces, que una partícula escalar cuántica evoluciona bajo la acción de fuerzas inerciales cuando se cumple la ecuación (II-16).

Cabe señalar que en el límite clásico ($\hbar \rightarrow 0$), de esa ecuación es posible obtener la (I-2) que habíamos usado anteriormente en la definición para partículas clásicas. Para mostrar esto pongamos

$$\Psi = A \exp\left(\frac{i}{\hbar} S\right)$$

donde A y S son funciones reales del tiempo y de las coordenadas espaciales.

Como

$$T^{ij} = g^{il} g^{js} T_{ls}$$

recordando la definición del tensor de energía-impulso y reemplazando en (II-16) obtenemos

$$\frac{d^2}{dt^2} \langle \xi^i \rangle = - \frac{1}{m^2} \int \sqrt{g} g^{nl} g^{sj} \frac{\partial S}{\partial \xi^l} \frac{\partial S}{\partial \xi^j} A^2 d\xi^n - \quad (II-18)$$

$$- \frac{\hbar^2}{2m^2} \left[\int \frac{\partial \sqrt{g}}{\partial \xi^l} g^{il} \left(\frac{H_A}{A} \right) A^2 d\xi^n - \int \sqrt{g} \left(g^{rs} g^{jl} - 2 g^{rl} g^{sj} \right) \frac{\partial A}{\partial \xi^j} \frac{\partial A}{\partial \xi^l} \sqrt{g} d\xi^n \right]$$

donde

$$H_A = \frac{1}{\sqrt{g}} \frac{\partial}{\partial \xi^l} \sqrt{g} g^{lj} \frac{\partial A}{\partial \xi^j}$$

Esta expresión se simplifica trabajando con los dos últimos sumandos, resultando finalmente

$$\frac{d^2}{dt^2} \langle \xi^i \rangle = - \frac{1}{m^2} \int \sqrt{g}^i{}_{rs} g^{rl} g^{sj} \frac{\partial S}{\partial \xi^j} \frac{\partial S}{\partial \xi^l} A^2 d\xi^n + \frac{\hbar^2}{2m} \int g^{il} \frac{\partial}{\partial \xi^l} \left(\frac{\hbar A}{A} \right) A^2 \sqrt{g} d\xi^n \quad (\text{II-19})$$

El segundo sumando del segundo miembro es un término puramente cuántico. Como se ve claramente es el valor medio de la fuerza contravariante, obtenida del potencial cuántico (ver Apéndice A). Cabe agregar que el valor medio de esta fuerza de inercia se anula en coordenadas cartesianas como resulta evidente de (II-18). Sin embargo en coordenadas curvilíneas es, en general distinto de cero. Estamos aquí en presencia de una fuerza de inercia que no tiene equivalente clásico, ya que está íntimamente ligada al carácter ondulatorio de la partícula.

Si consideramos un paquete deltipo delta la ec. (II-19) se reduce a

$$\frac{d^2}{dt^2} \langle \xi^i \rangle = - \frac{1}{m^2} \sqrt{g}^i{}_{rs} g^{rl} g^{sj} \frac{\partial S}{\partial \xi^j} \frac{\partial S}{\partial \xi^l} \quad (\text{II-20})$$

Como además es (ver Apéndice A)

$$v^i = \dot{\xi}^i = \frac{1}{m} g^{il} \frac{\partial S}{\partial \xi^l}$$

resulta

$$\frac{d^2}{dt^2} \langle \xi^i \rangle = - \sqrt{g}^i{}_{jl} \dot{\xi}^j \dot{\xi}^l$$

que es la fórmula clásica (I-2).

III) COORDENADAS ORTOGONALES Y SEPARABLES

En la sección anterior hemos tratado las fuerzas de inercia sobre una partícula escalar en un sistema de coordenadas arbitrario. Veremos aquí como, en coordenadas ortogonales y separables, la acción de dichas fuerzas se manifiesta en forma de potenciales inerciales en la ecuación de onda.

En la sección (I) hemos definido las fuerzas de inercia que actúan sobre una partícula clásica, como aquellas fuerzas que modifican el movimiento "libre"

$$\frac{d^2 \xi^i}{dt^2} = 0$$

Análogamente podemos decir que una onda "libre" es aquella cuya ecuación está dada por

$$\left[\sum_{i=1}^{3N} \frac{\partial^2}{\partial x^{i2}} + k^2 \right] u = 0 \quad (\text{III-1})$$

Hemos tomado la ecuación independiente del tiempo pues estamos interesados en estudiar la acción de las fuerzas sobre las autofunciones del problema, en un sistema inercial.

La ecuación (III-1) es matemáticamente equivalente a

$$\left[\frac{1}{\sqrt{g}} \frac{\partial}{\partial \xi^i} \sqrt{g} g^{ij} \frac{\partial}{\partial \xi^j} + k^2 \right] u = 0 \quad (\text{III-2})$$

donde ξ^i son coordenadas no cartesianas cualesquiera.

Si las coordenadas son ortogonales la ecuación anterior se reduce a

$$\left[\sum_i \left(g^{ii} \frac{\partial^2}{\partial \xi^{i2}} + \frac{1}{\sqrt{g}} \frac{\partial \sqrt{g} g^{ii}}{\partial \xi^i} \frac{\partial}{\partial \xi^i} \right) + k^2 \right] u = 0 \quad (\text{III-3})$$

Como es bien conocido en este caso podemos poner

$$u = \prod_i^N x^i(\xi^i) \quad (\text{III-4})$$

con lo cual la ecuación diferencial para x^i , en el caso separable será

$$\left[\frac{\partial^2}{\partial \xi^{i2}} + F(\xi^i) \frac{\partial}{\partial \xi^i} + G_1(\xi^i) + a_i \right] x^i(\xi^i) = 0 \quad (\text{III-5})$$

(índice repetido no indica sumación).

$F(\xi^i)$ es una función de las componentes del tensor métrico que queda determinada en cada caso particular al reemplazar (III-4) en (III-3).

$G_1(\xi^i)$ es un potencial inercial debido al movimiento en las otras coordenadas y a_i es una constante.

El término en derivada primera de (III-5) puede ser eliminado de la ecuación diferencial, escribiendo ésta para la parte de la solución que no contiene el factor de atenuación. Al hacer esto aparecerá un potencial inercial $G_2(\xi^i)$ que puede ser determinado de la siguiente manera

$$\text{Llamemos } x^i(\xi^i) = X(\xi)$$

$$\text{Poniendo } X(\xi) = A(\xi) \cdot W(\xi)$$

reemplazando en (III-5) y dividiendo por $A(\xi)$ llegamos a

$$\left[\frac{\partial^2}{\partial \xi^2} + 2 \frac{\partial \ln A}{\partial \xi} \frac{\partial}{\partial \xi} + \frac{1}{A} \frac{\partial^2 A}{\partial \xi^2} + F(\xi) \left(\frac{\partial}{\partial \xi} + \frac{\partial \ln A}{\partial \xi} \right) + G_1(\xi) + a \right] W = 0$$

Anulando el término en derivada primera se obtiene

$$2 \frac{\partial \ln A}{\partial \xi} + F(\xi) = 0$$

cuya solución es

$$A(\xi) = \exp\left(-\frac{F(\xi)}{2} d\xi\right)$$

con lo cual la ecuación (III-6) se reduce a

$$\left[\frac{d^2}{d\xi^2} + G_1(\xi) + G_2(\xi) + a \right] w = 0$$

donde

$$G_2(\xi) = \frac{1}{A} \frac{\partial^2 A}{\partial \xi^2} + F(\xi) \frac{\partial \ln A}{\partial \xi}$$

En los siguientes capítulos veremos ejemplos de aplicación de estos potenciales inerciales.

IV) PROBLEMAS PLANOS

En esta sección trataremos dos ejemplos en los que intervienen los potenciales inerciales de los que hablamos en la sección anterior. Consideremos un problema plano. La ecuación de Schrödinger para la partícula será

$$-\frac{2mi}{\hbar} \frac{\partial \Psi}{\partial t} = \frac{\partial^2 \Psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \Psi}{\partial y^2} \quad (\text{IV-1})$$

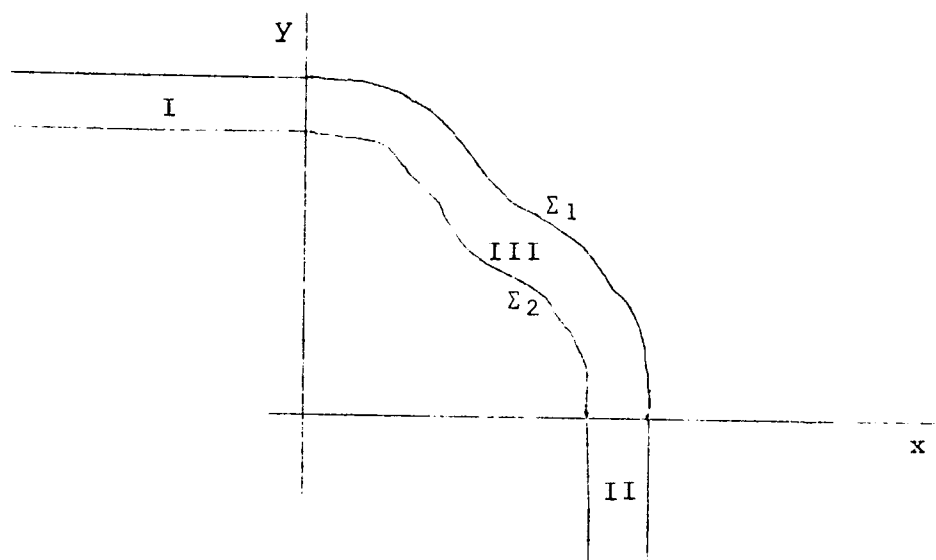
Poniendo $\Psi = u \exp \left(-\frac{i}{\hbar} E t \right)$

tenemos $\left[\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + k^2 \right] u = 0$

donde $k = \sqrt{2mE}$

Si tomamos una barrera de potencial, que para simplificar suponemos de altura infinita, como lo indica la fig. IV-1), la solución que nos interesa estará restringida a la zona delimitada por las curvas Σ_1 y Σ_2 , debiéndose cumplir la condición de contorno

$$u(\Sigma_1) = u(\Sigma_2) = 0$$



fig(IV-1)

El problema planteado puede interpretarse, asimismo, como el cho-

que de dos partículas de coordenadas $x_1 = x$ y $x_2 = y$ respectivamente, donde la interacción entre ellas está determinada por la geometría de las curvas Σ_1 y Σ_2 . En otras palabras, si el plano es el espacio de configuraciones de las partículas, la zona I indica que la partícula 1 es libre mientras que la partícula 2 está ligada. En II ocurre lo inverso, mientras que III es la zona de interacción de las partículas. La solución del problema de contorno, obviamente dependerá de la curvatura de Σ_1 y Σ_2 .

Tomemos como primer ejemplo cuartos de circunferencias como lo indica la fig. IV-2)

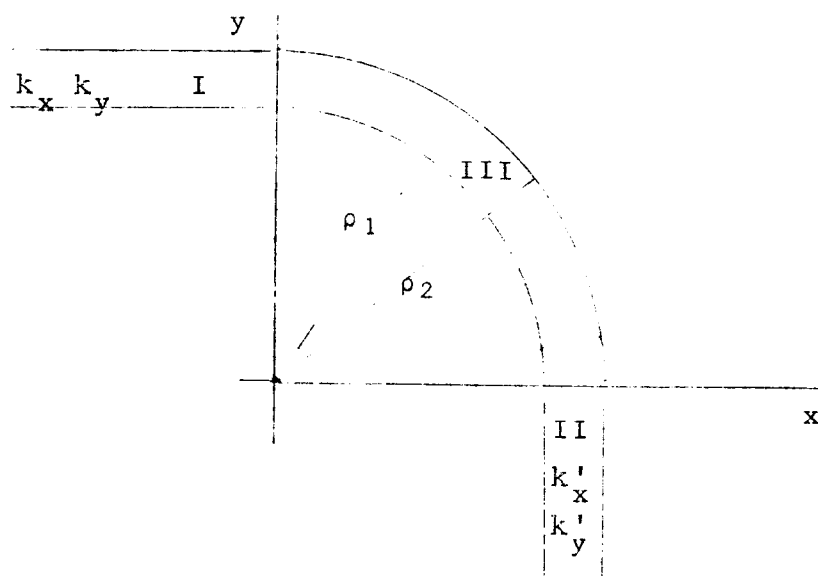


fig. (IV-2)

Es conveniente usar las siguientes coordenadas:

Zonas I y II : coordenadas cartesianas.

Zona. III : coordenadas cilíndricas.

La ecuación de ondas en las distintas zonas será

$$\left[\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + k^2 \right] u_{I,II} = 0 \tag{IV-3}$$

$$\left[\frac{\partial^2}{\partial \rho^2} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} + \frac{1}{\rho^2} \frac{\partial^2}{\partial \phi^2} + k^2 \right] u_{III}(\rho, \phi) = 0$$

debiendo cumplirse las condiciones de contorno

$$\begin{aligned}
 u_I(x, \rho_1) &= u_I(x, \rho_2) = 0 \\
 u_{II}(\rho_1, y) &= u_{II}(\rho_2, y) = 0 \\
 u_{III}(\rho_1, \phi) &= u_{III}(\rho_2, \phi) = 0
 \end{aligned}
 \tag{IV-4}$$

$$\begin{aligned}
 u_I(x=0) &= u_{III}(\rho, \frac{\pi}{2}) \\
 \left. \frac{\partial u_I}{\partial x} \right|_{x=0} &= \left. \frac{\partial u_{III}}{\partial x} \right|_{x=0}
 \end{aligned}$$

(IV-5)

$$\begin{aligned}
 u_{II}(y=0) &= u_{III}(\rho, 0) \\
 \left. \frac{\partial u_{II}}{\partial y} \right|_{y=0} &= \left. \frac{\partial u_{III}}{\partial y} \right|_{y=0}
 \end{aligned}$$

Las relaciones (IV-5) implican la continuidad de la corriente en los empalmes.

Como solución en la zona III podemos plantear

$$u_{III}(\rho, \phi) = \frac{V(\rho)}{\sqrt{\rho}} Q(\phi) = X(\rho) \cdot Q(\phi)$$

La última de las ecuaciones (IV-3) conduce al sistema

$$\frac{d^2}{d\rho^2} V(\rho) + \left[k^2 - \frac{\mu^2 - 1/4}{\rho^2} \right] V(\rho) = 0$$

(IV-6)

$$\frac{d^2}{d\phi^2} Q(\phi) + \mu^2 Q(\phi) = 0$$

Obviamente deberá cumplirse que

$$V(\rho_1) = V(\rho_2) = 0$$

a fin de satisfacer las condiciones (IV-4). Esta solución deberá además empalmar con las soluciones en I y II. Para ello debemos determinar el valor de μ^2 . Hagamos notar que este coeficiente puede tomar valores no enteros ya que no es necesario imponer condiciones de periodicidad a la solución $Q(\phi)$.

Las ecuaciones (IV-6) muestran que el movimiento en la coordenada ϕ es libre, mientras que en el movimiento según ρ actúa el potencial inercial

$$\frac{\mu^2 - 1/4}{\rho^2}$$

Restringiéndonos al caso en que $\frac{\Delta\rho}{\rho} \ll 1$

en la primera de las ecuaciones (IV-6) podemos reemplazar ρ por un valor constante $\bar{\rho}$ tal que

$$\rho_1 < \bar{\rho} < \rho_2$$

La solución en ρ será entonces

$$X(\rho) = \frac{1}{\sqrt{\rho}} \operatorname{sen} \left[\sqrt{k^2 - \frac{\mu^2 - 1/4}{\bar{\rho}^2}} (\rho - \rho_1) \right]$$

Para cumplir las condiciones (IV-4) deberá ser

$$\sqrt{k^2 - \frac{\mu^2 - 1/4}{\bar{\rho}^2}} \Delta\rho = n_1 \pi$$

con n_1 un número entero.

La solución en la zona III será

$$u_{III}(\rho, \phi) = \frac{1}{\sqrt{\bar{\rho}}} \operatorname{sen} \sqrt{k^2 - \frac{\mu^2 - 1/4}{\bar{\rho}^2}} (\rho - \rho_1) \left[D \exp(i\mu\phi) + E \exp(-i\mu\phi) \right]$$

donde D y E son constantes a determinar.

Como soluciones en las zonas I y II tomemos

$$\begin{aligned}
 u_{\text{I}}(x,y) &= \text{sen } k_y (y - \rho_1) \cdot C \exp(-ik_x x) \\
 u_{\text{II}}(x,y) &= \text{sen } k'_x (x - \rho_1) \left[\exp(ik'_y y) + A \exp(-ik'_y y) \right]
 \end{aligned}
 \tag{IV-9}$$

Para que se cumplan las condiciones (IV-4) deberá ser

$$\begin{aligned}
 k_y \Delta\rho &= n_2 \pi & n_2, n_3 \text{ números enteros} \\
 k'_x \Delta\rho &= n_3 \pi
 \end{aligned}$$

Imponiendo a las soluciones las condiciones (IV-5) se obtiene

$$\begin{aligned}
 k_y &= \sqrt{k^2 - \frac{\mu^2 - 1/4}{\bar{\rho}^2}} \\
 C &= D \exp(i\mu \frac{\Pi}{2}) + E \exp(-i\mu \frac{\Pi}{2}) \\
 k'_x &= \sqrt{k^2 - \frac{\mu^2 - 1/4}{\bar{\rho}^2}} \\
 1 &= D + E - A
 \end{aligned}
 \tag{IV-11}$$

Recordando que

$$\frac{\partial}{\partial \phi} = -\rho \text{ sen } \phi \frac{\partial}{\partial x} + \rho \text{ cos } \phi \frac{\partial}{\partial y}$$

y como además

$$\frac{\Delta\rho}{\rho} \ll 1$$

de imponer (IV-5) se tiene

$$\begin{aligned}
 -k_x C &= -\frac{\mu}{\bar{\rho}} \left[D \exp(i\mu \frac{\Pi}{2}) - E \exp(-i\mu \frac{\Pi}{2}) \right] \\
 k'_y (1 - A) &= \frac{\mu}{\bar{\rho}} [D - E]
 \end{aligned}
 \tag{IV-12}$$

De las relaciones (IV-11) se concluye inmediatamente que

$$k'_x = k_y$$

como además se conserva la energía total, es decir

$$k^2 = k_x^2 + k_y^2 = k_x'^2 + k_y'^2$$

se concluye que $k_y'^2 = k_x^2$ es decir la segunda partícula sale con la misma energía con que incidió la primera. Esto es consecuencia del hecho que en el ejemplo que hemos tomado los tubos I y II tienen el mismo ancho.

Teniendo en cuenta lo anterior, de (IV-10) se tiene $n_2 = n_3$ y de (IV-11) se obtiene finalmente

$$\mu^2 = k_y'^2 \bar{\rho}^2 + 1/4 \tag{IV-13}$$

De la solución del sistema de ecuaciones dado por (IV-11) y (IV-12) se obtiene la expresión de los coeficientes que nos interesan

$$A^2 = \frac{1}{1 + \frac{64 \mu^2 (\mu^2 - 1/4)}{\text{sen}^2 \mu \frac{\pi}{2}}}$$

$$C^2 = \frac{1}{1 + \frac{\text{sen}^2 \mu \pi / 2}{64 \mu^2 (\mu^2 - 1/4)}}$$

Vemos entonces que hay una pequeña reflexión de la onda en el empalme de las zonas II y III. Esta reflexión, debida al cambio de curvatura de la superficie, puede ser atribuida a la acción del potencial inercial actuante en la ecuación diferencial para el movimiento según la dirección de la coordenada ρ .

La expresión que hemos hallado para los coeficientes no es válida en todo el rango de energías, ya que hemos supuesto anteriormente que

el potencial era constante en todo el ancho del tubo. Desarrollando este potencial

$$\frac{\mu^2 - 1/4}{\rho^2} = \frac{\mu^2 - 1/4}{\bar{\rho}^2} + \frac{2(\mu^2 - 1/4)}{\bar{\rho}^3} \Delta\rho$$

Reemplazando en la primera de las relaciones (IV-6) vemos que nuestra aproximación tendrá validez si se cumple

$$k_y' \bar{\rho}^2 \ll \frac{n^2 \Pi^2}{2} \left(\frac{\bar{\rho}}{\Delta\rho} \right)^3$$

lo que implica un límite superior para la energía con que incide la partícula. Esto es comprensible pues para longitudes de onda muy cortas la trayectoria de la partícula deberá ser obtenida por las leyes clásicas de la reflexión sobre una pared infinitamente rígida. Dijimos anteriormente que la pequeña reflexión de la onda en la zona de empalme podía atribuirse a la acción conjunta de la superficie y del potencial inercial actuante. Sin embargo si en la zona III hubiéramos usado coordenadas cartesianas los potenciales inerciales serían cero y las fuerzas que ejerce la superficie sobre la onda se manifestarían en una expresión complicada de las condiciones de contorno y estarían localizadas en la misma superficie.

Por el contrario, en coordenadas curvilíneas los potenciales inerciales son diferentes de cero y ejercen su acción no solamente en la superficie, sino también en el espacio vecino a ella.

Es decir, el uso de distintas coordenadas para la descripción de un mismo proceso nos conduce a distintas localizaciones de las fuerzas actuantes.-

Tomemos como segundo ejemplo ilustrativo un caso en el cual el ancho de los tubos superior e inferior sea distinto. Para ello en la zona III de la fig. (IV-1) tomemos fragmentos de elipses, de manera que será:

$$\begin{aligned}x &= d \cosh \xi \cos \eta \\y &= d \sinh \xi \sen \eta\end{aligned}$$

Las soluciones en I y II serán del mismo tipo que en el ejemplo anterior

$$u_I(x,y) = \sen k_y (y - y_1) \left[\exp(ik_x x) + A \exp(-ik_x x) \right] \quad (IV-14)$$

$$u_{II}(x,y) = \sen k'_x (x - x_1) \cdot C \exp(-ik'_y y)$$

debiendo cumplirse que

$$k_y (y_2 - y_1) = n_1 \pi \quad (IV-15)$$

$$k'_x (x_2 - x_1) = n_2 \pi$$

relaciones necesarias para satisfacer las condiciones de contorno (IV-4). La función en la zona III será solución de la ecuación diferencial

$$\left[\frac{\partial^2}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2}{\partial \eta^2} + k^2 d^2 (\sinh^2 \xi + \sen^2 \eta) \right] u_{III}(\xi, \eta) = 0 \quad (IV-15b)$$

Planteando $u_{III}(\xi, \eta) = S(\xi) \cdot V(\eta)$

se obtiene el sistema de ecuaciones

$$\begin{aligned}\left[\frac{\partial^2}{\partial \xi^2} + k^2 d^2 \sinh^2 \xi - \mu^2 \right] S(\xi) &= 0 \\ \left[\frac{\partial^2}{\partial \eta^2} + \mu^2 + k^2 d^2 \sen^2 \eta \right] V(\eta) &= 0\end{aligned} \quad (IV-16)$$

La primera de estas ecuaciones debe ser resuelta con la condición de contorno

$$S(\xi_1) = S(\xi_2) = 0$$

Suponiendo que se cumple

$$\Delta\xi = \xi_2 - \xi_1 \ll \frac{\sinh \xi_1}{\sinh \xi_2}$$

podremos aproximar en la primera de las (IV-16) $\sinh^2 \xi$ por un valor constante de la función en el punto ξ_1 . La solución aproximada de la ecuación diferencial será entonces

$$S(\xi) \approx \text{sen} \sqrt{k^2 d^2 \sinh^2 \xi_1 - \mu^2} (\xi - \xi_1)$$

debiéndose cumplir que

$$\sqrt{k^2 d^2 \sinh^2 \xi_1 - \mu^2} \Delta\xi = n_3 \pi \quad (\text{IV-17})$$

De aplicar las condiciones de continuidad de la corriente de probabilidad en las zonas de empalme resulta

$$\begin{aligned} k_y d \cosh \xi_1 &= (k^2 d^2 \sinh^2 \xi_1 - \mu^2)^{1/2} \\ k'_x d \sinh \xi_1 &= (k^2 d^2 \sinh^2 \xi_1 - \mu^2)^{1/2} \end{aligned} \quad (\text{IV-18})$$

Además de las relaciones (IV-15) se obtiene

$$\begin{aligned} k_y d (\sinh \xi_2 - \sinh \xi_1) &= k_y d \cosh \xi_1 \Delta\xi = n_1 \pi \\ k'_x d (\cosh \xi_2 - \cosh \xi_1) &= k'_x d \sinh \xi_1 \Delta\xi = n_2 \pi \end{aligned} \quad (\text{IV-19})$$

por lo tanto resulta $n_1 = n_2 = n_3 = n$ y

$$\mu^2 = k_y'^2 d^2 \sinh^2 \xi_1 = k_x^2 d^2 \sinh^2 \xi_1 - k_y^2 d^2 \quad (\text{IV-20})$$

que es la expresión del coeficiente de separación de las variables. Como se cumple al igual que en el caso anterior que la energía total es constante, será

$$k_y'^2 = k_x^2 + \frac{n^2 \Pi^2}{d^2 (\Delta \xi)^2} \left[(\cosh^2 \xi_1)^{-1} - (\sinh^2 \xi_1)^{-1} \right] \quad (IV-21)$$

De esta expresión se ve que existen energías tales que k_y' resulta imaginario, es decir tendremos ondas evanescentes en el tubo II. Esto será mas visible al estudiar la solución en η . Reemplazando en la segunda de las (IV-16) el valor obtenido para el coeficiente de separación de las variables tenemos

$$\frac{\partial^2}{\partial \eta^2} V(\eta) + \left[k^2 d^2 \cosh^2 \xi_1 - k^2 d^2 \cos^2 \eta \right] V(\eta) = 0 \quad (IV-22)$$

con el simple cambio de escala $\bar{\eta} = \eta d \cosh \xi_1$ la ecuación anterior se reduce a

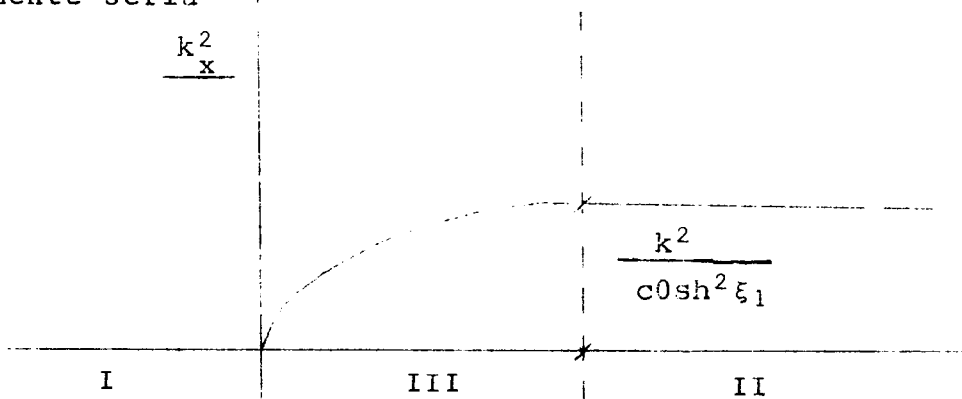
$$\frac{\partial^2}{\partial \bar{\eta}^2} V(\eta) + \left[k_x^2 - k^2 (\cosh^2 \xi_1)^{-1} \cdot \cos^2 \bar{\eta} (d \cosh \xi_1)^{-1} \right] V(\eta) = 0$$

Esta ecuación la podemos interpretar diciendo que en la dirección tangencial a la superficie tenemos un movimiento libre en el tubo I. En la zona III actúa el potencial inercial

$$k^2 (\cosh^2 \xi_1)^{-1} \cdot \cos^2 \bar{\eta} (d \cosh \xi_1)^{-1} \quad (IV-24)$$

mientras que en el tubo III tenemos un potencial constante dado por el valor de (IV-24) en $\bar{\eta} = 0$.

Graficamente sería



La condición

$$k_x^2 \begin{matrix} < \\ > \end{matrix} \frac{k^2}{\cosh^2 \xi_1}$$

es equivalente a

$$k_x^2 \begin{matrix} < \\ > \end{matrix} \Delta k = k_x'^2 - k_y^2$$

es decir, con estas condiciones estamos tomando los distintos casos en que hacemos incidir la partícula 1 con energía mayor, igual o menor que la diferencia de energías en los movimientos transversales en los tubos I y II.

Como se desprende inmediatamente de la fig. (IV-2) si:

$k_x^2 < \Delta k$ la partícula no se propagará en el tubo II, en el cual tendremos ondas evanescentes, ya que como lo muestra (IV-21) $k_y'^2$ resulta negativo.

$k_x^2 > \Delta k$ una parte de la onda se verá reflejada y la otra transmitida.

$k_x^2 \gg \Delta k$ fundamentalmente habrá onda transmitida.

Lo anterior muestra como la influencia de la curvatura de la superficie de contorno se traduce en una barrera inercial que nos permite obtener una descripción cualitativa del problema.

En forma similar al ejemplo anterior puede verificarse que la aproximación que hemos usado será válida siempre que

$$k_x^2 \ll \frac{n^2 \Pi^2}{2 \sinh \xi_1 (\cosh \xi_1)^2 (\Delta \xi)^3}$$

lo cual implica una cota superior para las energías con que hacemos incidir la partícula 1.

V) VIBRACIONES CUASIESTACIONARIAS

Hasta ahora hemos tratado casos simples en los que intervienen partículas descritas por ondas escalares de Schrödinger. En el caso electromagnético debemos trabajar con ondas vectoriales (cuadripotencial) en las cuales, como hemos visto anteriormente las fuerzas de inercia actúan en forma cuantitativamente diferente. Sin embargo veremos que los efectos de estas fuerzas serán del mismo tipo.

Elegiremos, para estudiar estos efectos, las ecuaciones de Maxwell en coordenadas esferoidales. Estas coordenadas revelan las características esenciales de coordenadas ortogonales y separables. Tienen además, la ventaja de contener los dos casos simples bien conocidos de una esfera y un cilindro como casos particulares. Desde el punto de vista físico, estas coordenadas nos permiten estudiar los casos de un esferoide perfectamente reflejante y el de una pantalla con un orificio circular, además de otros problemas de los cuales no nos ocuparemos en este trabajo.

Tomemos entonces un esferoide prolato de distancia focal $2d$ y una pantalla con el orificio de diámetro $2d$. Las coordenadas que usaremos serán:

Esferoidales prolato (Para el esferoide)

$$x = d \sqrt{(\xi^2 - 1)(1 - \eta^2)} \cos \phi$$

$$y = d \sqrt{(\xi^2 - 1)(1 - \eta^2)} \sin \phi$$

$$z = d \xi \eta$$

(V-1)

$$\xi = \left[\sqrt{\rho^2 + (z + d)^2} + \sqrt{\rho^2 + (z - d)^2} \right] \frac{1}{2d}$$

$$\eta = \left[\sqrt{\rho^2 + (z + d)^2} - \sqrt{\rho^2 + (z - d)^2} \right] \frac{1}{2d}$$

$$\rho = \sqrt{x^2 + y^2}$$

con $-1 \leq \eta \leq 1$; $1 \leq \xi < \infty$; $0 \leq \phi < 2\pi$

Esferoidales oblate (para la pantalla)

$$x = d \sqrt{(\xi^2 + 1)(1 - \eta^2)} \cos \phi$$

$$y = d \sqrt{(\xi^2 + 1)(1 - \eta^2)} \operatorname{sen} \phi$$

$$z = d \xi \eta$$

$$\xi = \left[\sqrt{\rho^2 + (z + id)^2} + \sqrt{\rho^2 + (z - id)^2} \right] \frac{1}{2d}$$

$$\eta = \left[\sqrt{\rho^2 + (z + id)^2} - \sqrt{\rho^2 + (z - id)^2} \right] \frac{1}{2d}$$

$$\rho = \sqrt{x^2 + y^2}$$

con $0 \leq \eta \leq 1$; $-\infty < \xi < \infty$; $0 \leq \phi < 2\pi$

Sean u, v, w coordenadas curvilíneas ortogonales. La longitud de arco está dada por

$$ds^2 = \frac{du^2}{U^2} + \frac{dv^2}{V^2} + \frac{dw^2}{W^2}$$

donde

$$\frac{1}{U} = \left[\left(\frac{\partial x}{\partial u} \right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial u} \right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial u} \right)^2 \right]^{1/2}$$

$$\frac{1}{V} = \left[\left(\frac{\partial x}{\partial v} \right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial v} \right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial v} \right)^2 \right]^{1/2}$$

$$\frac{1}{W} = \left[\left(\frac{\partial x}{\partial w} \right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial w} \right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial w} \right)^2 \right]^{1/2}$$

Si especificamos una superficie por $u = u_0 = \text{constante}$, sobre

ella debemos imponer las condiciones de contorno

$$E_w = E_v = H_u = 0$$

debiéndose cumplir

$$4 \pi \rho = E_u \quad 4 \pi j_v = H_w \quad 4 \pi j_w = - H_v \quad (V-4)$$

Se puede mostrar entonces que las ecuaciones de Maxwell (tabla V-1) conducen a las siguientes relaciones

$$\frac{1}{c} \frac{\partial \rho}{\partial t} + v w \left[\frac{\partial}{\partial v} \left(\frac{j_v}{w} \right) + \frac{\partial}{\partial w} \left(\frac{j_w}{v} \right) \right] = 0 \quad (V-5)$$

$$\frac{1}{c} \frac{\partial j_v}{\partial t} + u v \frac{\partial}{\partial v} \left(\frac{\rho}{u} \right) = \frac{uv}{4\pi} \frac{\partial}{\partial u} \left(\frac{E_v}{v} \right)_{u = u_0}$$

$$\frac{1}{c} \frac{\partial j_w}{\partial t} + u w \frac{\partial}{\partial w} \left(\frac{\rho}{u} \right) = \frac{uw}{4\pi} \frac{\partial}{\partial u} \left(\frac{E_w}{w} \right)_{u = u_0} \quad (V-6)$$

$$\frac{\partial}{\partial v} \left(\frac{j_w}{uw} \right) - \frac{\partial}{\partial w} \left(\frac{j_v}{uv} \right) = \frac{1}{4\pi} \frac{\partial}{\partial u} \left(\frac{H_u}{vw} \right)_{u = u_0}$$

donde U, V, W están evaluadas en $u = u_0$ y j_v, j_w son las componentes físicas del vector corriente.

Estas relaciones, que son las ecuaciones de movimiento para las cargas y corrientes sobre la superficie, son satisfechas por cualquier solución exacta del problema de contorno.

Sin embargo si deseamos soluciones aproximadas, reduciendo nuestro problema a vibraciones de cargas y corrientes sobre la superficie, solamente los términos de la izquierda de (V-6) permiten una interpretación en este sentido ya que los términos de la derecha se refieren a variaciones de los campos en el espacio, fuera de la superficie.

Despreciando los segundos miembros de (V-6) tendremos entonces

$$\frac{1}{c} \frac{\partial \rho}{\partial t} + v w \left[\frac{\partial}{\partial v} \left(\frac{j_v}{w} \right) + \frac{\partial}{\partial w} \left(\frac{j_w}{v} \right) \right] = 0$$

$$\frac{1}{c} \frac{\partial j_v}{\partial t} + u v \frac{\partial}{\partial v} \left(\frac{\rho}{u} \right) = 0$$

$$\frac{1}{c} \frac{\partial j_w}{\partial t} + u w \frac{\partial}{\partial w} \left(\frac{\rho}{u} \right) = 0 \quad (V-6b)$$

$$\frac{\partial}{\partial v} \left(\frac{j_w}{uw} \right) - \frac{\partial}{\partial w} \left(\frac{j_v}{uv} \right) = 0$$

ecuaciones que describen un problema determinado exclusivamente por las cargas y corrientes sobre la superficie.- Estas relaciones pueden ser satisfechas poniendo

$$\begin{aligned} \frac{\rho}{u} &= - \frac{1}{c} \frac{\partial \phi}{\partial t} \\ j_v &= u v \frac{\partial \phi}{\partial v} \\ j_w &= u w \frac{\partial \phi}{\partial w} \end{aligned} \quad (V-7)$$

donde ϕ es una función escalar que, como se desprende de las relaciones (V-5), satisface la ecuación diferencial

$$\frac{v w}{u} \left[\frac{\partial}{\partial v} \left(\frac{uv}{w} \frac{\partial \phi}{\partial v} \right) + \frac{\partial}{\partial w} \left(\frac{uw}{v} \frac{\partial \phi}{\partial w} \right) \right] - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} = 0 \quad (V-8)$$

Esta ecuación escalar no es la ecuación de onda sobre la superficie, sino que la presencia de la función U nos pone de manifiesto la influencia del carácter tridimensional del problema.

La ecuación (V-8) permite un conjunto discreto de vibraciones no

amortiguadas que corresponden a otros tantos valores de k .
 Por ejemplo en el caso sencillo de la esfera la (V-8) se reduce a

$$\frac{1}{r_0^2} \left[\frac{\partial}{\partial \theta} \operatorname{sen} \theta \frac{\partial}{\partial \theta} + \frac{1}{\operatorname{sen} \theta} \frac{\partial^2}{\partial \phi^2} \right] \phi - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} = 0 \quad (\text{V-9})$$

cuya solución es

$$\phi = P_{\ell}^m (\cos \theta) \exp(im \phi + kct)$$

debiendose cumplir

$$k r_0 = \pm \sqrt{\ell(\ell + 1)}$$

Mientras que en el límite ($d \rightarrow \infty$) del cilindro infinitamente largo tenemos

$$\left[\frac{\partial^2}{\partial z^2} + \frac{1}{\rho_0^2} \frac{\partial^2}{\partial \phi^2} \right] \phi - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} = 0 \quad (\text{V-10})$$

que tiene como solución

$$\phi = \exp i \left[m\phi + kct \pm \sqrt{k^2 - \frac{m^2}{\rho_0^2}} z \right]$$

en particular, para $m = 0$

$$\phi = \exp ik(z - ct)$$

Aquí tenemos un espectro continuo de k pues la superficie de que se trata no es cerrada.

Para coordenadas esferoidales tomemos como ejemplo la solución eléctrica axialmente simétrica ($m=0$), que nos será de utilidad mas adelante. En este caso la densidad de corriente inducida en la

superficie (componente según ϕ) es nula, mientras que la densidad de carga ρ resulta ser independiente de ϕ .

Las dos últimas relaciones de (V-6) se satisfacen idénticamente , mientras que las dos primeras conducen a la ecuación

$$\frac{d}{d\eta} (1 - \eta^2) \frac{d}{d\eta} j_\eta + \left[k^2 d^2 \xi_0^2 - k^2 d^2 \eta^2 - \frac{1}{1 - \eta^2} \right] j_\eta = 0 \quad (V-11)$$

comparando esta ecuación con

$$\frac{d}{d\eta} (1 - \eta^2) \frac{d}{d\eta} j_\eta + \left[\mu_\ell^1(kd) - k^2 d^2 \eta^2 - \frac{1}{1 - \eta^2} \right] j_\eta = 0$$

que representa un problema de autovalores para $\mu_\ell^1(kd)^*$, obtenemos la relación

$$\mu_\ell^1(kd) = k^2 d^2 \xi_0^2 \quad (V-12)$$

Vemos entonces que anulando los segundos miembros de las relaciones (V-6) llegamos a un conjunto discreto de vibraciones no amortiguadas. Es decir las ecuaciones (V-6b) no pueden aplicarse a un sistema que emite radiación.

La reacción de la radiación, que modifica el comportamiento de las densidades de carga y de corriente, está contenida en los segundos miembros de (V-6) que aquí hemos omitido.

La omisión de estos términos está permitida solamente si éstos son nulos o suficientemente chicos, lo que en general no sucede. No obstante las relaciones (V-6b) son de considerable interés.

Aún no anulándose los segundos miembros de (V-6) para todos los valores de k (espectro continuo), ellos pueden ser nulos en ciertos valores particulares k_i , formando así un espectro discreto (espectro de la teoría cuasiestacionaria). Para estos puntos las soluciones obtenidas de (V-6b) coinciden con las soluciones rigurosas del

* Este problema será tratado en el próximo capítulo. Ver (VI-1) y ref. 2

problema.

En el caso que estos valores k_i coincidan o estén muy próximos a las frecuencias características con las cuales el sistema emite radiación, las ecuaciones (V-6b) representan una buena aproximación para el proceso de radiación (radiación muy débil). Tal es el caso de un esferoide sumamente exéntrico que estudiaremos en el próximo capítulo. Sin embargo en general esto no ocurre; por ejemplo en el caso de una esfera las (V-6b) no son una buena aproximación del problema.

La comparación de las soluciones de las ecuaciones (V-6) y (V-6b) nos permiten, por lo tanto, estimar la influencia de la reacción de la radiación y nos provee de los criterios necesarios para determinar si esta radiación es o no pequeña. Además nos permite justificar, en el caso de radiación débil, el uso de la teoría cuasiestacionaria y determinar las pequeñas correcciones que a ella hay que agregar.

Dijimos anteriormente que en general los segundos miembros de (V-6) no se anulan para todo el espectro de k . Sin embargo tomemos ahora un ejemplo en el que estos términos son efectivamente nulos. Tal es el caso de un cilindro infinitamente largo para el cual existen soluciones rigurosas dadas por (V-6b). En este límite la reacción de la radiación es nula.

Si $d \rightarrow \infty$ las coordenadas serán

$$\eta \approx \frac{z}{d}$$

$$\xi^2 - 1 \approx \frac{\rho^2}{d^2}$$

de modo que las ecuaciones (V-6) se transforman en

$$\frac{1}{c} \frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \phi} j_\phi + \frac{\partial}{\partial z} j_z = 0$$

$$\frac{1}{c} \frac{\partial j_z}{\partial t} + \frac{\partial \rho}{\partial z} = \frac{1}{4\pi} \left(\frac{\partial E_z}{\partial \rho} \right)_{\rho = \rho_0}$$

$$\frac{1}{c} \frac{\partial j_\phi}{\partial t} + \frac{1}{\rho_0} \frac{\partial \rho}{\partial \phi} = \frac{1}{4\pi} \left(\frac{\partial E_\phi}{\partial \rho} \right)_{\rho = \rho_0} \quad (V-13)$$

$$\frac{1}{\rho} \frac{\partial j_z}{\partial \phi} - \frac{\partial j_\phi}{\partial z} = - \frac{1}{4\pi} \left(\frac{\partial H_\rho}{\partial \rho} \right)_{\rho = \rho_0}$$

aquí las corrientes quedan determinadas por las relaciones (V-4) donde se ha hecho

$$H_v \rightarrow H_z ; H_w \rightarrow H_\phi ; E_u \rightarrow E_\rho ; j_v \rightarrow j_z$$

Analicemos la solución eléctrica para la cual los campos están expresados por

$$\begin{array}{l} E_\rho = ik_z \frac{\partial}{\partial \rho} Z_m(k_\rho \rho) \\ E_\phi = -k_z \frac{m}{\rho} Z_m(k_\rho \rho) \\ E_z = k_\rho Z_m(k_\rho \rho) \end{array} \quad \left| \quad \begin{array}{l} H_\rho = \frac{\omega m}{c \rho} Z_m(k_\rho \rho) \\ H_\phi = i \frac{\omega}{c} \frac{\partial}{\partial \rho} Z_m(k_\rho \rho) \\ H_z = 0 \end{array} \right. \quad (V-14)$$

donde

$$Z_m(k_\rho \rho) = A H_m^{(1)}(k_\rho \rho) + B H_m^{(2)}(k_\rho \rho)$$

$$\frac{A}{B} = - \frac{H_m^{(2)}(k_\rho \rho)}{H_m^{(1)}(k_\rho \rho)}$$

$H_m^{(1)}$ y $H_m^{(2)}$ son las funciones de Hankel de primera y segunda especie.

En el caso particular de la solución de orden cero ($m = 0$) puede verse que las relaciones (V-13) se transforman en

$$\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 j_z}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 j_z}{\partial z^2} = \frac{1}{4\pi c} \frac{\partial}{\partial z} \left[\left(\frac{\partial E_z}{\partial \rho} \right)_{\rho = \rho_0} \right] \quad (V-15)$$

Para las soluciones con $k_\rho \rightarrow 0$, es decir ondas alámbricas que corren a lo largo del cilindro, la (V-15) se transforma en la ecuación del telegrafista

$$\left[\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} - \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right] j_z = 0 \quad (V-16)$$

que es satisfecha rigurosamente por la solución eléctrica de orden cero considerada. En este caso la transición de las ecuaciones de Maxwell a la aproximación de las corrientes cuasiestacionarias conduce a un espectro continuo de k , como consecuencia de ser rigurosamente cero la reacción de la radiación.

Concluimos entonces que la eliminación de los segundos miembros de (V-6) es posible en ciertos casos particulares, pero en general su omisión no solo es una aproximación matemática sino que implica modificar a fondo el carácter del problema cuando su valor es apreciable.

Digamos finalmente que para llegar a las ecuaciones (V-6b) hemos partido de las ecuaciones rigurosas del problema de contorno en tres dimensiones y lo hemos reducido a un problema sobre la superficie. Para comprender mejor el significado de estas relaciones podemos compararlas con otro sistema de ecuaciones semejantes. Una superficie bidimensional corresponde a un espacio riemaniano con métrica

$$ds^2 = \frac{dv^2}{V^2} + \frac{dw^2}{W^2}$$

la ecuación de onda en este espacio es

$$VW \left[\frac{\partial}{\partial v} \left(\frac{V}{W} \frac{\partial \Psi}{\partial v} \right) + \frac{\partial}{\partial w} \left(\frac{W}{V} \frac{\partial \Psi}{\partial w} \right) \right] - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \Psi}{\partial t^2} = 0 \quad (V-17)$$

y poniendo

$$\rho = - \frac{1}{c} \frac{\partial \Psi}{\partial t}$$

$$j_v = V \frac{\partial \Psi}{\partial v}$$

$$j_w = W \frac{\partial \Psi}{\partial w}$$

obtenemos

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + VW \left[\frac{\partial}{\partial v} \left(\frac{j_v}{W} \right) + \frac{\partial}{\partial w} \left(\frac{j_w}{V} \right) \right] = 0$$

$$\frac{1}{c} \frac{\partial j_v}{\partial t} + V \frac{\partial \rho}{\partial v} = 0$$

$$\frac{1}{c} \frac{\partial j_w}{\partial t} + W \frac{\partial \rho}{\partial w} = 0$$

(V-18)

$$\frac{\partial}{\partial v} \left(\frac{j_w}{W} \right) - \frac{\partial}{\partial w} \left(\frac{j_v}{V} \right) = 0$$

Estas ecuaciones determinan el movimiento de cargas y corrientes derivables de un potencial que se propaga sobre la superficie con velocidad c , según la ecuación (V-17). Por consiguiente ellas obedecen a la dinámica determinada por la geometría de la superficie. Las ecuaciones (V-18) difieren de las (V-6b) solamente por la presencia de la función U .

Tabla V-1

Ecuaciones de Maxwell en coordenadas curvilíneas ortogonales

$$UVW \left\langle \frac{\partial}{\partial u} \left(\frac{E_u}{VW} \right) + \frac{\partial}{\partial v} \left(\frac{E_v}{UW} \right) + \frac{\partial}{\partial w} \left(\frac{E_w}{UV} \right) \right\rangle = 4\pi \rho$$

$$VW \left[\frac{\partial}{\partial w} \left(\frac{H_v}{V} \right) - \frac{\partial}{\partial v} \left(\frac{H_w}{W} \right) \right] = \frac{1}{c} \frac{\partial E_u}{\partial t} + 4\pi j_u$$

$$UW \left[\frac{\partial}{\partial u} \left(\frac{H_w}{W} \right) - \frac{\partial}{\partial w} \left(\frac{H_u}{U} \right) \right] = \frac{1}{c} \frac{\partial E_v}{\partial t} + 4\pi j_v$$

$$UV \left[\frac{\partial}{\partial v} \left(\frac{H_u}{U} \right) - \frac{\partial}{\partial u} \left(\frac{H_v}{V} \right) \right] = \frac{1}{c} \frac{\partial E_w}{\partial t} + 4\pi j_w$$

$$VW \left[\frac{\partial}{\partial w} \left(\frac{E_v}{V} \right) - \frac{\partial}{\partial v} \left(\frac{E_w}{W} \right) \right] = - \frac{1}{c} \frac{\partial H_u}{\partial t}$$

$$UW \left[\frac{\partial}{\partial u} \left(\frac{E_w}{W} \right) - \frac{\partial}{\partial w} \left(\frac{E_u}{U} \right) \right] = - \frac{1}{c} \frac{\partial H_v}{\partial t}$$

$$UV \left[\frac{\partial}{\partial v} \left(\frac{E_u}{U} \right) - \frac{\partial}{\partial u} \left(\frac{E_v}{V} \right) \right] = - \frac{1}{c} \frac{\partial H_w}{\partial t}$$

VI) COORDENADAS ESFEROIDALES

VI-a) Onda escalar

Antes de entrar en el estudio de la antena, analicemos las fuerzas de inercia que aparecen en coordenadas esferoidales para el caso de una onda escalar.

La separación de variables en la ecuación de onda conduce a las siguientes ecuaciones

$$\left[\frac{d}{d\xi} (\xi^2 - 1) \frac{d}{d\xi} + k^2 d^2 \xi^2 - \mu_\ell^m(kd) - \frac{m^2}{\xi^2 - 1} \right] v_\ell^m(\xi) = 0 \quad (VI-1)$$

$$\left[\frac{d}{d\eta} (1 - \eta^2) \frac{d}{d\eta} + \mu_\ell^m(kd) - k^2 d^2 \eta^2 - \frac{m^2}{1 - \eta^2} \right] w_\ell^m(\eta) = 0$$

donde se ha puesto

$$\Psi = v_\ell^m(\xi) \cdot w_\ell^m(\eta) \cdot \exp i(m\phi - kct)$$

$\mu_\ell^m(kd)$ es el coeficiente de separación de las variables que queda determinado como autovalor de la segunda ecuación (VI-1), por la condición que $w_\ell^m(\eta)$ sea una función continua e unívoca de la variable η .

Para ellos se conocen desarrollos en serie en potencias de $k^2 d^2$

Si $kd \ll \ell$

$$\mu_\ell^m(kd) = \ell(\ell + 1) + \frac{1}{2} \left[1 - \frac{(2m - 1)(2m + 1)}{(2\ell - 1)(2\ell + 3)} \right] k^2 d^2 + \quad (VI-2)$$

Si $kd \gg \ell$

$$\mu_\ell^m(kd) = \left[2(\ell - m) + 1 \right] kd + m^2 - \frac{1}{8} \left[\left(2(\ell - m) + 1 \right)^2 + 5 \right] + o\left(\frac{1}{kd}\right)$$

Las soluciones matemáticas rigurosas de las ecuaciones (VI-1) fueron extensamente tratadas, principalmente por Meixner y Scháfke.² El caso particular de $m = 1$, y en relación con las oscilaciones eléctricas de un esferoide idealmente conductor está tratado en los trabajos, entre otros de Abraham³, Page y Adams^{4,5}, Ryder⁶, L.V. King⁷ etc.

Asimismo se han realizado estudios de las ecuaciones del campo electromagnético en coordenadas separables, para otras superficies de geometría simple: paraboloides, por Abraham; de un cilindro infinitamente largo por Sommerfield⁸; de una esfera por Mie⁹; Debye¹⁰; y G.Beck-M.Nussenveig¹¹.

Por otro lado, en la extensa literatura sobre la antena (E.Hullén y otros) generalmente se ha usado el método de suponer una determinada distribución de corrientes en la superficie y obtener un campo compatible con ella. Esto conduce a dificultades matemáticas considerables para resolver el problema.

En este trabajo nos interesamos, principalmente, en estudiar la influencia de las fuerzas de inercia en la reflexión de una onda sobre una superficie. Tomaremos un esferoide prolato muy exéntrico pues ello nos permite evitar complicaciones matemáticas, a la vez que hacer un análisis de las distintas resonancias de la antena y el comportamiento de las corrientes sobre la superficie. Los máximos que se observan en estas corrientes en las proximidades de las frecuencias de resonancia, dependen de la geometría de la superficie y por ende de las fuerzas inerciales del problema. A los efectos de estudiar los casos límites de la esfera y el cilindro infinitamente largo resulta útil el cambio de variable

$$\zeta = \sqrt{\xi^2 - 1}$$

Aplicando lo visto en la sección III) para la eliminación del factor de atenuación, pongamos

$$\begin{aligned}
 v_{\ell}^m(\xi) &= (\xi^2 - 1)^{-1/2} u_{\ell}^m(\xi) \\
 v_{\ell}^m(\zeta) &= \left[\zeta \sqrt{\zeta^2 + 1} \right]^{-1/2} S_{\ell}^m(\zeta) \\
 w_{\ell}^m(\eta) &= (1 - \eta^2)^{-1/2} T_{\ell}^m(\eta)
 \end{aligned}
 \tag{VI-3}$$

con esto las ecuaciones (VI-1) se transforman en

$$\left[\frac{d^2}{d\xi^2} + k^2 d^2 + \frac{k^2 d^2 - \mu_{\ell}^m}{\xi^2 - 1} + \frac{m^2 - 1}{(\xi^2 - 1)^2} \right] u_{\ell}^m(\xi) = 0$$

(VI-4)

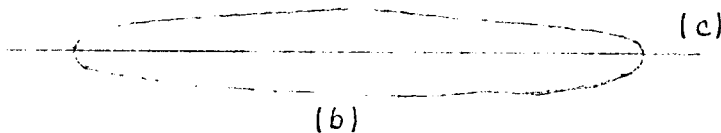
$$\left[\frac{d^2}{d\zeta^2} + k^2 d^2 - \frac{\mu_{\ell}^m}{1 + \zeta^2} + \frac{1 - 2\zeta^2}{4\zeta^2(1 + \zeta^2)^2} - \frac{m^2}{\zeta^2(1 + \zeta^2)} \right] S_{\ell}^m(\zeta) = 0$$

$$\left[\frac{d^2}{d\eta^2} + \mu_{\ell}^m + \frac{(\mu_{\ell}^m - k^2 d^2) \eta^2}{1 - \eta^2} + \frac{1 - m^2}{(1 - \eta^2)^2} \right] T_{\ell}^m(\eta) = 0$$

Estas ecuaciones exhiben la acción de los potenciales inerciales. Ellas determinan el comportamiento de las soluciones que no contienen el factor de atenuación. En los límites $d \rightarrow 0$ y $d \rightarrow \infty$ se reducen a casos bien conocidos.

Consideremos en general, tres dominios en el esferoide

(a)



- (a) $\zeta \gg 1$
- (b) $\zeta \ll 1$; $\eta \ll 1$
- (c) $\zeta \ll 1$ $\eta \approx 1$

Como en el dominio (a) es $r = \zeta d$ la segunda de las ecuaciones (VI-4) se reduce, en este dominio, a

$$\left[\frac{d^2}{dr^2} + k^2 - \frac{\mu_\ell^m}{r^2} \right] S_\ell^m(r) = 0$$

(VI-5a)

y luego
$$V_\ell^m(kr) = X \sqrt{\mu_\ell^m + 1/4} - 1/2 (kr)$$

que representan ondas esféricas de Bessel.

Mientras que en el dominio (b) resulta

$$\rho = d \zeta$$

$$\left[\frac{d^2}{d\rho^2} + k^2 - d^{-2}(\mu_\ell^m + m^2 - 1) - \frac{m^2 - 1/4}{\rho^2} \right] S_\ell^m(\rho) = 0$$

(VI-5b)

$$V_\ell^m \approx Z_m \left(\sqrt{k^2 - d^{-2}(\mu_\ell^m + m^2 - 1)} \rho \right)$$

que son ondas cilíndricas.

De estas expresiones podemos ver que el potencial inercial

$$- d^{-2}(\mu_\ell^m + m^2 - 1) - \frac{m^2 - 1/4}{\rho^2}$$

es repulsivo para todos los valores de m mayores que cero.

VI-b) Ondas vectoriales. Soluciones generales.

En el caso de la antena, que a los fines prácticos interesa en el dominio

$$(d\xi_0)^{-1} > k > d^{-1}$$

nos ocuparemos principalmente de la solución axialmente simétrica. No obstante veremos primeramente el planteo general del problema de contorno.

Sea un esferoide idealmente conductor que especificamos con

$$\xi = \xi_0 = \text{cte.}$$

El problema general consiste en resolver las ecuaciones de Maxwell

$$\begin{aligned} \text{div } \vec{E} &= 0 & \text{div } \vec{B} &= 0 \\ \text{rot } \vec{B} - \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} &= 0 & \text{rot } \vec{E} + \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} &= 0 \end{aligned} \tag{VI-6}$$

con las condiciones de contorno

$$E_\phi = E_\eta = H_\xi = 0 \tag{VI-7}$$

sobre la superficie del esferoide. Tomando el vector potencial de Debye

$$\vec{\mathcal{A}} = \vec{\mathcal{A}} Q(\xi, \eta, \phi)$$

donde Q es una función escalar y $\vec{\mathcal{A}}$ indica el vector posición y escribiendo las soluciones eléctricas (índice ϵ) y magnéticas (índice μ) como

$$\vec{H}^\epsilon = \frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} \text{rot } \vec{\mathcal{A}}^\epsilon \qquad \vec{E}^\epsilon = \text{rot rot } \vec{\mathcal{A}}^\epsilon$$

$$\vec{E}^\mu = -\frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} \text{rot } \vec{\Pi}^\mu \quad \vec{H}^\mu = \text{rot rot } \vec{\Pi}^\mu$$

se puede mostrar que las ecuaciones de Maxwell se cumplen siempre que Q satisfaga la ecuación diferencial

$$\left[\Delta + k^2 \right] Q(\xi, \eta, \phi) = 0 \quad (\text{VI-8})$$

Aquí hemos supuesto una dependencia temporal $\exp(-ikct)$ para los campos.

Teniendo en cuenta las relaciones (V-1) y la definición del potencial de Debye, las componentes de éste en coordenadas esferoidales prolata serán

$$\Pi_\xi = \xi \sqrt{\xi^2 - 1} Q_\ell^m(\xi, \eta) \exp i(m\phi - kct)$$

$$\Pi_\eta = \eta \sqrt{\frac{1 - \eta^2}{\xi^2 - \eta^2}} Q_\ell^m(\xi, \eta) \exp i(m\phi - kct)$$

$$\Pi_\phi = 0$$

donde

$$Q_\ell^m(\xi, \eta) = v_\ell^m(\xi) \cdot w_\ell^m(\eta)$$

Aquí v_ℓ^m y w_ℓ^m son soluciones de las ecuaciones (VI-1). Los campos estarán entonces expresados por

$$- E_\xi^{\mu m} = H_\xi^{\epsilon m} = \frac{km\eta}{\sqrt{(\xi^2 - \eta^2)(\xi^2 - 1)}} Q_\ell^m(\xi, \eta) \quad (\text{VI-9})$$

$$- E_\eta^{\mu m} = H_\eta^{\epsilon m} = \frac{km\xi}{\sqrt{(\xi^2 - \eta^2)(1 - \eta^2)}} Q_\ell^m(\xi, \eta)$$

$$-E_{\phi}^{\mu m} = H_{\phi}^{\epsilon m} = -\frac{ik\sqrt{(\xi^2 - 1)(1 - \eta^2)}}{\xi^2 - \eta^2} \left(\eta \frac{\partial Q_{\ell}^m}{\partial \xi} - \xi \frac{\partial Q_{\ell}^m}{\partial \eta} \right)$$

$$E_{\xi}^{\epsilon m} = H_{\xi}^{\mu m} = \sqrt{\frac{(\xi^2 - 1)}{(\xi^2 - \eta^2)}} \left\{ \frac{\partial}{\partial \eta} \left[\frac{1 - \eta^2}{\xi^2 - \eta^2} \left(\eta \frac{\partial Q_{\ell}^m}{\partial \xi} - \xi \frac{\partial Q_{\ell}^m}{\partial \eta} \right) \right] - \frac{m^2 \xi}{(\xi^2 - 1)(1 - \eta^2)} Q_{\ell}^m \right\} \quad (VI-10)$$

$$E_{\eta}^{\epsilon m} = H_{\eta}^{\mu m} = \sqrt{\frac{(1 - \eta^2)}{(\xi^2 - \eta^2)}} \left\{ \frac{\partial}{\partial \xi} \left[\frac{\xi^2 - 1}{\xi^2 - \eta^2} \left(\eta \frac{\partial Q_{\ell}^m}{\partial \xi} - \xi \frac{\partial Q_{\ell}^m}{\partial \eta} \right) \right] - \frac{m^2 \eta}{(\xi^2 - 1)(1 - \eta^2)} Q_{\ell}^m \right\}$$

$$E_{\phi}^{\epsilon m} = H_{\phi}^{\mu m} = \frac{im}{\xi^2 - \eta^2} \left[\sqrt{\frac{\xi^2 - 1}{1 - \eta^2}} \frac{\partial}{\partial \xi} (\xi Q_{\ell}^m) + \sqrt{\frac{1 - \eta^2}{\xi^2 - 1}} \frac{\partial}{\partial \eta} (\eta Q_{\ell}^m) \right]$$

se deben además cumplir las condiciones

$$E_{\eta}(\xi_0) = E_{\phi}(\xi_0) = H_{\xi}(\xi_0) = 0 \quad (VI-11)$$

La solución general para m fijo será de la forma

$$\vec{H}^m = \sum_{\ell} \left[a_{\ell}^m(k) \vec{H}_{\ell}^{\epsilon m} + b_{\ell}^m(k) \vec{H}_{\ell}^{\mu m} \right] \quad (VI-12)$$

$$\vec{E}^m = \sum_{\ell} \left[a_{\ell}^m(k) \vec{E}_{\ell}^{\epsilon m} + b_{\ell}^m(k) \vec{E}_{\ell}^{\mu m} \right]$$

Restringiéndonos al interior del esferoide deberemos tomar solamente las soluciones regulares de (VI-8).

Al aplicar las condiciones de contorno (VI-7) las expresiones de los campos en este dominio quedan formalmente expresadas por

$$E_n = \sum_{\ell} \left\{ \left[a_{\ell}^m f_{\ell}(\xi, \eta) + b_{\ell}^m h_{\ell}(\xi, \eta) \right] w_{\ell}^m(\eta) + a_{\ell}^m g_{\ell}(\xi, \eta) \frac{d w_{\ell}^m}{d\eta} \right\}$$

(VI-13)

$$E_{\phi} = \sum_{\ell} \left\{ \left[a_{\ell}^m \bar{f}_{\ell}(\xi, \eta) + b_{\ell}^m \bar{h}_{\ell}(\xi, \eta) \right] w_{\ell}^m(\eta) + \left[a_{\ell}^m \bar{g}_{\ell}(\xi, \eta) + b_{\ell}^m \bar{t}_{\ell}(\xi, \eta) \right] \frac{d w_{\ell}^m}{d\eta} \right\}$$

donde f_{ℓ} , g_{ℓ} , h_{ℓ} , \bar{f}_{ℓ} , \bar{g}_{ℓ} , \bar{h}_{ℓ} , \bar{t}_{ℓ} son funciones que se obtienen de las expresiones (VI-9) y (VI-10).

Sobre la superficie del esferoide estas funciones dependen solamente de la coordenada η y pueden ser desarrolladas en un sistema ortonormal cualquiera.

Por ejemplo tomando el sistema determinado por las soluciones de la segunda de las ecuaciones (VI-1) para un valor de m fijo tendremos

$$f_{\ell}(\xi_0, \eta) w_{\ell}^m(\eta) + g_{\ell}(\xi_0, \eta) \frac{d w_{\ell}^m}{d\eta} = \sum_{\ell'} A_{\ell\ell'}(\xi_0) w_{\ell'}^M(\eta)$$

$$h_{\ell}(\xi_0, \eta) \frac{d w_{\ell}^m}{d\eta} = \sum_{\ell'} B_{\ell\ell'}(\xi_0) w_{\ell'}^M(\eta) \quad (VI-14)$$

$$\bar{f}_{\ell}(\xi_0, \eta) w_{\ell}^m(\eta) + \bar{g}_{\ell}(\xi_0, \eta) \frac{d w_{\ell}^m}{d\eta} = \sum_{\ell'} A_{\ell\ell'}(\xi_0) w_{\ell'}^M(\eta)$$

$$\bar{h}_{\ell}(\xi_0, \eta) w_{\ell}^m(\eta) + \bar{t}_{\ell}(\xi_0, \eta) \frac{d w_{\ell}^m}{d\eta} = \sum_{\ell'} B_{\ell\ell'}(\xi_0) w_{\ell'}^M(\eta)$$

Es evidente que para cada ℓ' se deberá cumplir

$$\sum_{\ell} \left[a_{\ell}^M A_{\ell\ell'}(\xi_0) + b_{\ell}^M B_{\ell\ell'}(\xi_0) \right] = 0 \quad (VI-15)$$

$$\sum_{\ell} \left[a_{\ell}^M \bar{A}_{\ell\ell'}(\xi_0) + b_{\ell}^M \bar{B}_{\ell\ell'}(\xi_0) \right] = 0$$

Hemos llegado así a un sistema infinito de ecuaciones lineales homogéneas en las variables a_{ℓ}^M y b_{ℓ}^M . Para que exista solución, lógicamente, se debe anular el determinante de dicho sistema. De esta condición se obtiene el espectro de autovalores del problema.

Notemos que en el caso general las soluciones ya no serán funciones separables en las variables ξ y η .

Para la solución externa tenemos un problema análogo al anterior salvo que deberemos reemplazar las soluciones regulares de la ecuación (VI-1) por combinaciones lineales de soluciones emergentes e incidentes en ξ . Como ser

$$\left[a_{\ell}^{-} v_{\ell}^m(\xi) + a_{\ell}^{+} v_{\ell}^m(\xi) \right] \cdot w_{\ell}^m(\eta)$$

de modo que las condiciones de contorno se escribirán

$$\sum_{\ell} \left[a_{\ell}^{-} A_{\ell\ell'}^{-}(\xi_0) + a_{\ell}^{+} A_{\ell\ell'}^{+}(\xi_0) + b_{\ell}^{-} B_{\ell\ell'}^{-}(\xi_0) + b_{\ell}^{+} B_{\ell\ell'}^{+}(\xi_0) \right] = 0$$

$$\sum_{\ell} \left[a_{\ell}^{-} \bar{A}_{\ell\ell'}^{-}(\xi_0) + a_{\ell}^{+} \bar{A}_{\ell\ell'}^{+}(\xi_0) + b_{\ell}^{-} \bar{B}_{\ell\ell'}^{-}(\xi_0) + b_{\ell}^{+} \bar{B}_{\ell\ell'}^{+}(\xi_0) \right] = 0 \quad (VI-16)$$

Este sistema de ecuaciones no homogéneo permite un espectro continuo de k . Para construir estas soluciones pongamos por ejemplo

$$a_{\bar{\ell}}^- = \delta_{\ell\bar{\ell}} \quad b_{\bar{\ell}}^- = 0$$

elección que corresponde a una onda eléctrica incidente de índice $\bar{\ell}$. Las ecuaciones (VI-16) permiten determinar las ondas emergentes resultantes

$$\sum_{\ell} \left[a_{\ell}^+ A_{\ell\ell'}^+ + b_{\ell}^+ B_{\ell\ell'}^+ \right] = - A_{\ell',\bar{\ell}}^- \quad (VI-18)$$

$$\sum_{\ell} \left| a_{\ell}^+ \bar{A}_{\ell\ell'}^+ + b_{\ell}^+ \bar{B}_{\ell\ell'}^+ \right| = - \bar{A}_{\ell',\bar{\ell}}^-$$

Estas ecuaciones tendrán solución, en general, para todos los valores de k . En el caso particular que se anule el determinante del sistema de ecuaciones (VI-18), éstas tendrán soluciones solo para

$$a_{\bar{\ell}}^- = b_{\bar{\ell}}^- = 0$$

es decir, soluciones puramente emergentes que corresponden a los polos de la matriz S de nuestro problema.

Notemos todavía que según (VI-18) las ondas emergentes contendrán en general, todos los valores de ℓ , con lo que se concluye que el valor del índice $\bar{\ell}$ de la onda incidente no se conserva durante la reflexión, a diferencia de lo que ocurre en casos separables.

Para cálculos efectivos estos sistemas infinitos de ecuaciones son sumamente complicados. No obstante, si nos limitamos a la aproximación cuasiestacionaria, la ecuación (V-8) permite una orientación, aún en el caso general de m diferente de cero.

La localización del proceso de reflexión requiere todavía un comentario. Podemos evidentemente atribuir la reflexión de la onda, a la superficie del esferoide. Sin embargo, salvo en los dominios de resonancia, las amplitudes de las ondas en y cerca de la superficie serán pequeñas, de modo que la mayor parte del campo no llega hasta la superficie.

Es, por lo tanto, igualmente correcto y físicamente más adecuado a la situación, decir que la onda se refleja en el potencial inercial vecino a la superficie y que ésta, conjuntamente con dichas fuerzas inerciales son las responsables del cambio del índice $\bar{\ell}$.

VI-c) Solución axialmente simétrica

Restrinjamos ahora a la solución eléctrica axialmente simétrica que nos interesa en la antena. Para ello tomemos $m = 0$. El potencial de Debye será

$$\pi_{\xi} = \xi \sqrt{\xi^2 - 1} Q_{\ell}^0(\xi, \eta) \exp(-ikct)$$

$$\pi_{\eta} = \eta \sqrt{\frac{1 - \eta^2}{\xi^2 - \eta^2}} Q_{\ell}^0(\xi, \eta) \exp(-ikct) \quad (\text{VI-19})$$

$$\pi_{\phi} = 0$$

De (VI-9) y (VI-10) los campos resultan

$$H_{\xi}^{\epsilon} = H_{\eta}^{\epsilon} = E_{\phi}^{\epsilon} = 0$$

$$H_{\phi}^{\epsilon} = - \frac{ik \sqrt{(\xi^2 - 1)(1 - \eta^2)}}{(\xi^2 - \eta^2)} \left(\eta \frac{\partial Q_{\ell}^{\circ}}{\partial \xi} - \xi \frac{\partial Q_{\ell}^{\circ}}{\partial \eta} \right)$$

$$-ik E_{\xi}^{\epsilon} = d^{-1} (\xi^2 - \eta^2)^{-1/2} \frac{\partial}{\partial \eta} \left(\sqrt{1 - \eta^2} \cdot H_{\phi}^{\epsilon} \right) \quad (\text{VI-20})$$

$$ik E_{\eta}^{\epsilon} = d^{-1} (\xi^2 - \eta^2)^{-1/2} \frac{\partial}{\partial \xi} \left(\sqrt{\xi^2 - 1} \cdot H_{\phi}^{\epsilon} \right)$$

Para satisfacer las condiciones de contorno se deberá anular la última de estas expresiones.

Definiendo los operadores diferenciales

$$D = \frac{\partial}{\partial \xi} (\xi^2 - 1) \frac{\partial}{\partial \xi} + \frac{\partial}{\partial \eta} (1 - \eta^2) \frac{\partial}{\partial \eta}$$

$$S = \sqrt{(\xi^2 - 1)(1 - \eta^2)} \left(\eta \frac{\partial}{\partial \xi} - \xi \frac{\partial}{\partial \eta} \right)$$

puede verificarse que se cumple la identidad

$$S \frac{1}{\xi^2 - \eta^2} D - D \frac{1}{\xi^2 - \eta^2} S = - \frac{1}{(\xi^2 - 1)(1 - \eta^2)} S \quad (\text{VI-21})$$

Como además es

$$H_{\phi} = - \frac{ik}{\xi^2 - \eta^2} S Q_{\ell}^{\circ}$$

y Q_{ℓ}° es solución de la ecuación

$$\left[\frac{1}{\xi^2 - \eta^2} D + k^2 \right] Q_{\ell}^{\circ} = 0$$

de (VI-21) se concluye que H_ϕ es solución de la ecuación diferencial

$$\left[\frac{\partial}{\partial \xi} (\xi^2 - 1) \frac{\partial}{\partial \xi} + \frac{\partial}{\partial \eta} (1 - \eta^2) \frac{\partial}{\partial \eta} + k^2 d^2 (\xi^2 - \eta^2) - \frac{\xi^2 - \eta^2}{(\xi^2 - 1)(1 - \eta^2)} \right] H_\phi = 0$$

(VI-22)

Planteando como solución

$$H_\phi = v_\ell^{m'}(\xi) \cdot w_\ell^{m'}(\eta)$$

se concluye inmediatamente que las funciones $v_\ell^{m'}$ y $w_\ell^{m'}$ satisfacen las ecuaciones (VI-1) para el caso particular de $m = 1$. Escribiendo las relaciones (VI-4) para este caso, tenemos

$$\left[\frac{d^2}{d\xi^2} + k^2 d^2 + \frac{k^2 d^2 - \mu^1(kd)}{\xi^2 - 1} \right] u_\ell^1(\xi) = 0$$

(VI-23)

$$\left[\frac{d^2}{d\xi^2} + \mu_\ell^1(kd) - \frac{(k^2 d^2 - \mu^1(kd)) \eta^2}{1 - \eta^2} \right] T_\ell^1(\eta) = 0$$

Ryder encuentra las soluciones de estas ecuaciones siguiendo el método de Abraham. Basado en teoremas matemáticos generales para ecuaciones de este tipo obtiene el comportamiento cualitativo de las soluciones afuera de la resonancia.

Nosotros interpretaremos esos teoremas en términos de potenciales inerciales, que tienen la ventaja de permitirnos obtener las mismas conclusiones, pero con un razonamiento físico más intuitivo.

Para valores pequeños de η la solución angular representa ondas

propagándose en la dirección η con un vector de onda

$$k_{\eta} = \frac{\sqrt{\mu_{\ell}^1}}{d} \quad (\text{VI-24})$$

En las proximidades de los extremos del esferoide ($\eta = \pm 1$) estas ondas son fuertemente influenciadas por el potencial inercial

$$\frac{(\mu_{\ell}^1(kd) - k^2 d^2) \eta^2}{1 - \eta^2} \quad (\text{VI-25})$$

que es atractivo para $kd \ll \ell$ y repulsivo para $kd \gg \ell$. DE (VI-5b) resulta que a distancias cercanas a la superficie del esferoide (dominio (b)) las soluciones en ζ se comportan como ondas cilíndricas con un vector de onda

$$k_{\zeta} = \sqrt{k^2 - k_{\eta}^2} \quad (\text{VI-26})$$

De las relaciones (VI-2) para $m = 1$ se puede verificar que la expresión

$$\gamma_{\ell}^1(kd) = k^2 d^2 - \mu_{\ell}^1(kd)$$

toma valores positivos o negativos según sea $kd \gg \ell$ o $kd \ll \ell$. Existirá entonces un valor \bar{k}_{ℓ} tal que esta expresión sea nula, de modo que

$$\bar{k}_{\ell}^2 d^2 = \mu_{\ell}^1 \quad (\text{VI-27})$$

Para estos valores de k tendremos soluciones características que determinan las resonancias inerciales de la antena, que veremos mas adelante.

De la relación (VI-24) y de la segunda de las ecuaciones (VI-23) se concluye que, en el dominio de la resonancia inercial, las soluciones que consideramos son aquellas en que, cerca de la superficie, la energía se propaga principalmente en dirección paralela a la misma. En particular si se cumple (VI-27) será

$$k_{\zeta} = 0 \quad k_{\eta} = \bar{k}_{\ell}$$

Como bajo estas condiciones se anula el potencial inercial (VI-25) la dependencia angular de la solución se expresa

$$w_{\ell}^1(\eta) = \frac{\cos \bar{k}_{\ell} d \eta}{\sqrt{1 - \eta^2}} \quad w_{\ell}^1(\eta) = \frac{\text{sen } \bar{k}_{\ell} d \eta}{\sqrt{1 - \eta^2}}$$

Como estas funciones deben ser regulares en los puntos ($\eta = \pm 1$) debemos imponer la condición

$$\begin{aligned} \cos \bar{k}_{\ell} d = 0 & \quad \longrightarrow \quad \bar{k}_{\ell} d = (2n_1 + 1) \Pi/2 \\ \text{sen } \bar{k}_{\ell} d = 0 & \quad \longrightarrow \quad \bar{k}_{\ell} d = n_2 \Pi/2 \end{aligned}$$

con n_1 y n_2 números enteros.

Tomando

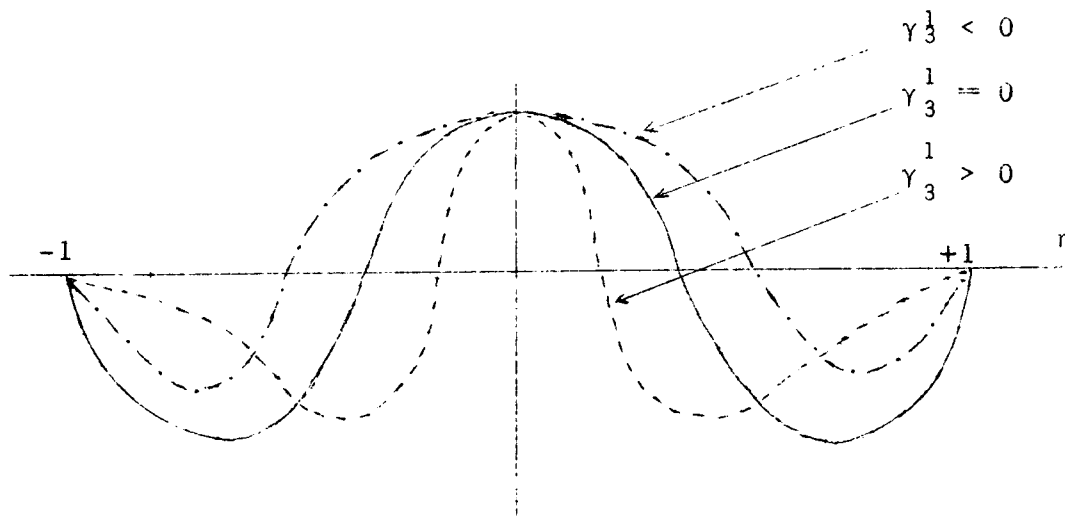
$$\bar{k}_{\ell} d = \ell \Pi/2$$

las soluciones angulares serán pares para ℓ impar e impares para ℓ par. Estas funciones, para valores de γ_{ℓ}^1 no nulos, están ~~están~~ influenciadas, como dijimos anteriormente, por el potencial inercial (VI-25). Por consiguiente, cerca de los extremos del

esferoide, la amplitud de la onda será menor que la correspondiente a resonancia inercial.

Además, para $\gamma_\ell^1 > 0$, en la zona donde el potencial repulsivo tiene un valor apreciable la función oscilará con un número de onda menor que el correspondiente a resonancia, mientras que para $\gamma_\ell^1 < 0$ lo hará con uno mayor. Esto se traduce, obviamente, en un corrimiento de los nodos hacia el centro y los extremos del esferoide respectivamente.

En la figura se ilustra el caso de $\ell = 3$



Pasando ahora a la solución en ξ , vemos que, como en resonancia se anula el potencial inercial en la primera de las ecuaciones (VI-23), la solución de esta ecuación que cumple las condiciones de contorno es

$$u_{\ell R}^1(\xi) = \cos \ell \Pi/2 (\xi - \xi_0) \quad (\text{VI-33})$$

Se concluye entonces que la expresión rigurosa de los campos, en resonancia inercial, para la vibración axialmente simétrica es

$$\begin{aligned}
 H_{\phi}^{\epsilon} &= \frac{\cos \ell \Pi/2 (\xi - \xi_0)}{\sqrt{(\xi^2 - 1)(1 - \eta^2)}} \begin{cases} \cos \ell \Pi/2 \eta & \ell \text{ impar} \\ \text{sen } \ell \Pi/2 \eta & \ell \text{ par} \end{cases} \\
 -ik E_{\xi}^{\epsilon} &= \frac{\ell \Pi}{2d} \frac{\cos \ell \Pi/2 (\xi - \xi_0)}{\sqrt{(\xi^2 - \eta^2)(\xi^2 - 1)}} \begin{cases} - \text{sen } \ell \Pi/2 \eta \\ \cos \ell \Pi/2 \eta \end{cases} \\
 ik E_{\eta}^{\epsilon} &= - \frac{\ell \Pi}{2d} \frac{\text{sen } \ell \Pi/2 (\xi - \xi_0)}{\sqrt{(\xi^2 - \eta^2)(1 - \eta^2)}} \begin{cases} \cos \ell \Pi/2 \eta \\ \text{sen } \ell \Pi/2 \eta \end{cases}
 \end{aligned} \tag{VI-34}$$

Para los valores de kd dados por (VI-27), hemos obtenido así soluciones rigurosas simples que nos permitirán estudiar el comportamiento analítico de las soluciones en las proximidades de aquellos valores.

Podemos, entonces, definir los puntos

$$\bar{k}_{\ell} d = \ell \Pi/2$$

como los puntos de resonancia de nuestro sistema. Los hemos llamado puntos de "resonancia inercial". Están caracterizados, como hemos visto, por el hecho que en ellos se anulan las fuerzas inerciales, dando acceso libre a las ondas incidentes para llegar a la superficie donde se propagan paralelamente a la misma.

Para esferoides muy poco exéncricos estas resonancias corresponden a valores muy grandes de k . En el caso particular de la esfera ($d = 0$) desaparecen en el infinito. Es decir, una esfera no tiene "resonancias inerciales".

Sin embargo, si adoptamos como definición de los puntos de resonancia los de la teoría cuasiestacionaria obtenemos

$$\bar{k}_\ell^2 d^2 \xi_0^2 = \mu_\ell^1(kd)$$

que para esferoides muy exéncricos ($\xi_0 \approx 1$) están muy cerca de las resonancias inerciales. En particular para la esfera son

$$\bar{k}_\ell a = \sqrt{\ell(\ell + 1)}$$

Adoptando como punto de resonancia aquella longitud de onda que al incidir una onda desde afuera, produce la corriente máxima en la superficie del esferoide, llegamos a una tercera definición de resonancia. Sin embargo esta definición depende de las condiciones de excitación. Especificamos por eso, que las ondas del modo considerado (ℓ , $m' = 1$) tienen en el infinito la amplitud

$$\text{amp} | v_\ell(\xi \rightarrow \infty) = (\xi^2 - 1)^{-1/2}$$

y buscamos el máximo de H_ϕ sobre la superficie en función de k . Esta definición es, sin duda, la que más corresponde físicamente a lo que se mide experimentalmente. La llamaremos "resonancia de máximo" y la calcularemos mas adelante. Encontraremos que para esferoides muy exéncricos coincide mejor con la resonancia inercial que con las otras.

Una última definición de los puntos de resonancia, obviamente, fluye de los polos de la matriz S de nuestro problema.

Para los fines que nos interesa es suficiente restringirnos al caso en que se cumple

$$\xi_0 \approx 1 \qquad \zeta_0 \ll 1 \qquad \text{(VI-36)}$$

Las soluciones linealmente independientes de (VI-23) pueden ser desarrolladas en la variable ζ . La función $u_\ell^1(\zeta)$ obedecerá

la ecuación diferencial

$$\left[\frac{d^2}{d\zeta^2} - \frac{1}{\zeta} \frac{d}{d\zeta} + \frac{\gamma_\ell^1 + k^2 d^2 \zeta^2}{1 + \zeta^2} \right] u_\ell^1(\zeta) = 0 \quad (\text{VI-37})$$

cuyas soluciones linealmente independientes son

$$u_\ell^{1(1)}(\zeta) \cong \zeta^2 - \frac{1}{8} (\gamma_\ell^1 + 2) \zeta^4 - \frac{1}{24} \left[k^2 d^2 - \frac{1}{8} (\gamma_\ell^1 + 2) (\gamma_\ell^1 + 12) \right] \zeta^4$$

$$u_\ell^{1(2)}(\zeta) \cong \sqrt{1 + \zeta^2} - \frac{\gamma_\ell^1}{4} u_\ell^{1(1)} \ln \frac{\sqrt{1 + \zeta^2} - 1}{\sqrt{1 + \zeta^2} + 1} - \frac{\sqrt{1 + \zeta^2}}{8} \left[k^2 d^2 + \frac{3}{4} \gamma_\ell^1 (\gamma_\ell^1 + 1) \right] \zeta^4 \quad (\text{VI-38})$$

Planteando

$$u_\ell^{1(1)} = A u_\ell^{1(1)} + B u_\ell^{1(2)}$$

de imponer las condiciones de contorno resulta

$$A = (2\zeta_0 - \zeta_0^3)^{-1} \left\{ \frac{\gamma_\ell^1}{2} \ln \zeta_0 \left[2\zeta_0 - \frac{\gamma_\ell^1 + 2}{2} \zeta_0^3 \right] + \frac{\gamma_\ell^1}{2} \zeta_0 + \left[k^2 d^2 - \gamma_\ell^1 \left(1 - \frac{\gamma_\ell^1}{4} \right) \right] \zeta_0^3 \right\}$$

$$B = (2\zeta_0 - \zeta_0^3)^{-1} \cdot \left[2\zeta_0 - \frac{1}{2} (\gamma_\ell^1 + 2) \zeta_0^3 \right]$$

Como estamos en las condiciones (VI-36) se tiene

$$u_{\ell}^1 \approx 1 + \frac{\gamma_{\ell}^1}{2} \ln\left(\frac{\sqrt{\epsilon} \zeta_0}{\zeta}\right) \zeta^2 - \frac{1}{8} \left[k^2 d^2 - \frac{\gamma_{\ell}^1}{4} \left(1 - \frac{5\gamma_{\ell}^1}{2}\right) \right] \zeta^4 + \dots$$

(VI-39)

$$\frac{d}{d\zeta} u_{\ell}^1 \approx \gamma_{\ell}^1 \ln\left(\frac{\zeta_0}{\zeta}\right) \cdot \zeta - \frac{1}{2} \left[k^2 d^2 - \frac{\gamma_{\ell}^1}{4} \left(1 - \frac{5\gamma_{\ell}^1}{4}\right) \right] \zeta^3 + \dots$$

Estos desarrollos cumplen las condiciones de contorno sobre el esferoide solo en forma aproximada, pero con precisión suficiente para nuestros fines.

Notemos que el punto de inflexión de la solución de la primera de las ecuaciones (VI-23) es

$$\bar{\zeta} = \sqrt{\bar{\xi}^2 - 1} = \frac{\sqrt{\gamma_{\ell}^1}}{kd} \quad (VI-40)$$

Podemos empalmar la función (VI-39) con la solución asintótica en un punto $\bar{\zeta}$, que deberemos tomar suficientemente pequeño para que los desarrollos (VI-39) aproximen bien a la solución. Por con siguiente, para que nuestra aproximación sea válida nos restringiremos a valores de γ_{ℓ}^1 que cumplan

$$\frac{\sqrt{\gamma_{\ell}^1}}{kd} \ll \bar{\zeta} \ll 1 \quad (VI-41)$$

Esta condición puede, evidentemente, ser satisfecha tomando valores de ζ_0 suficientemente chicos. En estas condiciones podemos poner

$$u_{\ell}^1(\bar{\zeta}) = u_{\ell R}^1(\bar{\zeta}) + \frac{\gamma_{\ell}^1}{2} \ln\left(\sqrt{\epsilon} \zeta_0\right) \bar{\zeta}^2 \quad (VI-42)$$

$$\left. \frac{d}{d\zeta} u_{\ell}^1 \right|_{\zeta=\bar{\zeta}} \approx \left. \frac{d}{d\zeta} u_{\ell R}^1 \right|_{\zeta=\bar{\zeta}} + \gamma_{\ell}^1 (\ln \zeta_0) \bar{\zeta}$$

La condición (VI-41) nos permite aplicar la aproximación W K B para la solución asintótica, de manera que

$$u_{\ell}^1(\zeta) \approx C \sqrt{\zeta} (\epsilon^2 + \zeta^2)^{-1/4} \cos \left[kd \int_{\bar{\zeta}}^{\zeta} \sqrt{\frac{\epsilon^2 + \zeta^2}{1 + \zeta^2}} d\zeta + \delta \right]$$

$$\begin{aligned} \frac{d}{d\zeta} u_{\ell}^1(\zeta) \approx & - \frac{C kd (\epsilon^2 + \zeta^2)^{1/4}}{(1 + \zeta^2)^{1/2}} \operatorname{sen} \left[kd \int_{\bar{\zeta}}^{\zeta} \sqrt{\frac{\epsilon^2 + \zeta^2}{1 + \zeta^2}} d\zeta + \delta \right] + \\ & + \frac{C \epsilon^2}{2 \sqrt{\zeta} (\epsilon^2 + \zeta^2)^{5/4}} \cos \left[kd \int_{\bar{\zeta}}^{\zeta} \sqrt{\frac{\epsilon^2 + \zeta^2}{1 + \zeta^2}} d\zeta + \delta \right] \end{aligned}$$

donde $\epsilon^2 = \frac{\gamma_{\ell}^1}{(kd)^2}$

De estas relaciones obtenemos facilmente la amplitud

$$\begin{aligned} |C|^2 \approx & \sqrt{\frac{\epsilon^2 + \bar{\zeta}^2}{\bar{\zeta}}} \left[u_{\ell}^1(\bar{\zeta}) \right]^2 + \frac{1 + \bar{\zeta}^2}{k^2 d^2 \bar{\zeta} (\epsilon^2 + \bar{\zeta}^2)^{1/2}} \left[\left. \frac{d}{d\zeta} u_{\ell}^1 \right|_{\zeta=\bar{\zeta}} \right]^2 - \\ & - \frac{\epsilon^2}{2 \bar{\zeta} (\epsilon^2 + \bar{\zeta}^2)} \left[u_{\ell}^1(\bar{\zeta}) \right]^2 \quad (\text{VI-44}) \end{aligned}$$

Dado que en resonancia inercial ($\epsilon = 0$) la amplitud de la so-

lución rigurosa es la unidad, como se desprende de (VI-34), tenemos

$$1 = \left| u_{\ell R}^1 \right|^2 + \frac{4(1 + \bar{\zeta}^2)}{\ell^2 \pi^2 \bar{\zeta}^2} \left| \frac{d}{d\zeta} u_{\ell R}^1 \right|^2 \quad (\text{VI-45})$$

Por otra parte, usando las expresiones (VI-42) y (VI-45) es fácil mostrar que cumpliéndose (VI-41) la expresión (VI-44) se reduce a

$$|C|^2 \approx \left| u_{\ell}^1(\bar{\zeta}) \right|^2 + \frac{1 + \bar{\zeta}^2}{k^2 d^2 \bar{\zeta}^2} \left| \frac{d}{d\zeta} u_{\ell}^1 \right|_{\zeta=\bar{\zeta}} \right|^2 \quad (\text{VI-46})$$

lo que equivale a admitir que la amplitud no depende del punto de empalme. Reemplazando en esta ecuación las expresiones dadas por (VI-42)

$$|C|^2 \approx \left[u_{\ell R}^1(\bar{\zeta}) + \frac{\bar{\zeta}^2}{2} \gamma_{\ell}^1 \ln \zeta_0 \right]^2 + \left[\frac{d}{d\zeta} u_{\ell R}^1 \right]_{\zeta=\bar{\zeta}} + \gamma_{\ell}^1 \ln \zeta_0 \cdot \bar{\zeta} \right]^2 \times \\ \times \left[\frac{1 + \bar{\zeta}^2}{k^2 d^2 \bar{\zeta}^2} \right]$$

Despreciando términos en cuartas potencias y recordando que para valores suficientemente chicos del punto de empalme la función toma valores muy próximos a la unidad, tenemos

$$|C|^2 \approx \left[u_{\ell R}^1(\bar{\zeta}) \right]^2 + \left[\frac{d}{d\zeta} u_{\ell R}^1 \right]_{\zeta=\bar{\zeta}} \right]^2 \frac{4(1 + \bar{\zeta}^2)}{\ell^2 \pi^2 \bar{\zeta}^2} + (\ln \zeta_0) \bar{\zeta}^2 + \\ + 2 \frac{\gamma_{\ell}^1 \ln \zeta_0 d}{k^2 d^2 \bar{\zeta}^2} \left(\frac{d}{d\zeta} u_{\ell R}^1 \right)_{\zeta=\bar{\zeta}} + \left[\frac{\gamma_{\ell}^1 \ln \zeta_0}{kd} \right]^2 \quad (\text{VI-48})$$

Para resonancia inercial, de (VI-39) se obtiene

$$\left. \frac{d}{d\zeta} u_{\ell R}^1 \right)_{\zeta = \bar{\zeta}} \approx - \frac{1}{2} k^2 d^2 \bar{\zeta}^3$$

Reemplazando esta expresión en (VI-48) y recordando las relaciones (VI-45) llegamos a

$$|C|^2 \approx 1 + \left[\frac{1}{k d} \gamma_{\ell}^1 \ln \zeta_0 \right]^2 \quad (\text{VI-49})$$

Por otra parte de la segunda de las ecuaciones (VI-23) es posible obtener, en primera aproximación

$$\gamma_{\ell}^1 \approx b_{\ell} \left(k^2 d^2 - \frac{1}{4} \ell^2 \pi^2 \right) \quad (\text{VI-50})$$

donde

$$b_{\ell} = \left[\int_{-1}^{+1} \frac{\cos^2 \ell/2 \pi t}{1 - t^2} dt \right]^{-1} \quad \ell \text{ impar}$$

$$b_{\ell} = \left[\int_{-1}^{+1} \frac{\sin^2 \ell/2 \pi t}{1 - t^2} dt \right]^{-1} \quad \ell \text{ par}$$

de manera que el cuadrado de la amplitud queda finalmente expresado por

$$|C|^2 \approx 1 + \frac{b_{\ell}^2 \ln^2 \zeta_0}{k_{\ell}^2 d^2} \left(k_{\ell}^2 d^2 - \bar{k}_{\ell}^2 d^2 \right)$$

con $\bar{k}_{\ell}^2 d^2 = \frac{1}{4} \ell^2 \pi^2$

Si normalizamos con amplitud unidad en el infinito, entonces el cuadrado de la amplitud de las corrientes $j\eta$ sobre el esferoide será

$$| A |^2 \approx \frac{b_{\ell}^2 d^2 (b_{\ell}^2 \ln^2 \zeta_0)^{-1}}{(k_{\ell}^2 d^2 - \bar{k}_{\ell}^2 d^2)^2 + k_{\ell}^2 d^2 (b_{\ell}^2 \ln^2 \zeta_0)^{-1}} \quad (\text{VI-51})$$

En el caso que hemos considerado, (esferoide muy exéncrico) esta fórmula abarca el dominio de resonancia y es del tipo de la expresión de Lorentz convencional para un perfil de línea. Notemos que las corrientes presentan su máximo valor para $\gamma_{\ell}^1 = 0$. Es decir la resonancia de máximo y la resonancia inercial son coincidentes. Sin embargo, esto se debe a la insuficiente precisión con que hemos satisfecho las condiciones de contorno. Tomemos valores muy pequeños de γ_{ℓ}^1 tal que

$$\frac{\sqrt{\gamma_{\ell}^1}}{kd} \ll \zeta_0$$

En este caso podemos tomar como punto de empalme el punto ζ_0 , donde conocemos los valores exactos de la función y su derivada. De la aplicación de (VI-44) se concluye que el punto de resonancia de máximo está desplazado del correspondiente a resonancia inercial en una cantidad muy pequeña dentro del intervalo

$$0 < \epsilon^2 \leq \frac{1}{2} \ell^2 \pi^2 \zeta_0^6$$

Para fines prácticos las fórmulas obtenidas son insuficientes, ya que para valores realizables de largo $2a$ y diámetro $2b$ de

un hilo

$$\ln \zeta_0 = \ln \left(1 + \frac{b^2}{a^2} \right)$$

no será un valor suficientemente grande para poder aplicar nuestra aproximación. En este caso la expresión (VI-51) no será válida, es decir el perfil de línea ya no estará expresado por una fórmula de Lorentz con dos constantes solamente.

Para obtener expresiones mas completas se puede incluir un mayor número de términos en los desarrollos (VI-39) y (VI-44). Sin embargo, como lo muestra Page, estos desarrollos convergen muy lentamente. No obstante las ecuaciones diferenciales (VI-23) permiten, por cálculo numérico, obtener las amplitudes en la aproximación deseada

Pasemos ahora a analizar los polos de la matriz S de nuestro problema. De (VI-43) se obtiene

$$\text{tang } \delta = \frac{1}{k d} \sqrt{\frac{1 + \bar{\zeta}^2}{\epsilon^2 + \bar{\zeta}^2}} \frac{1}{u_\ell^1(\bar{\zeta})} \left[\frac{u_\ell^1(\bar{\zeta}) \epsilon^2}{2\bar{\zeta}(\epsilon^2 + \bar{\zeta}^2)} - \frac{d}{d\zeta} u_\ell^1 \right]_{\zeta=\bar{\zeta}}$$

(VI-52)

Recordando la condición (VI-41) y como además es

$$v_\ell^1(\zeta) = \frac{u_\ell^1(\zeta)}{\zeta}$$

tendremos

$$\text{tang } \delta = - \frac{1}{k d \bar{\zeta}} \frac{1}{u_\ell^1(\bar{\zeta})} \left. \frac{d}{d\zeta} u_\ell^1 \right|_{\zeta=\bar{\zeta}} \quad \text{(VI-53)}$$

Reemplazando los valores de la función y su derivada dados por (VI-42)

$$\text{tang } \delta \approx -\frac{1}{k d} \gamma_{\ell}^1 \ln \zeta_0$$

imponiendo la condición $\text{tang } \delta = -i$ que nos da para la solución una onda puramente emergente y recordando (VI-50) resulta

$$b_{\ell} (k_{\ell}^2 d^2 - \frac{1}{4} \ell^2 \Pi^2) = \frac{i k d}{\ln \zeta_0} \quad (\text{VI-54})$$

con lo cual los polos de la matriz S serán

$$\bar{k}_{\ell} d \approx \pm \frac{\ell \Pi}{2} \sqrt{1 - \frac{1}{\ell^2 \Pi^2 b_{\ell}^2 \ln^2 \zeta_0}} + \frac{i}{b_{\ell} \ln \zeta_0} \quad (\text{VI-55})$$

La matriz S nos indica como decaen las amplitudes de las corrientes y el campo en un punto fijo, si el sistema es excitado en el instante inicial $t = 0$ por un pulso infinitamente angosto. Dado el carácter lineal de nuestras ecuaciones este decaimiento será exponencial y, como es bien conocido, tiene el espectro

$$\frac{1}{(k^2 - k_{\ell}^2)^2 + (\Gamma)^2} \quad (\text{VI-56})$$

Sin embargo, los polos de la matriz S nos dan solamente una descripción global del perfil de la línea de emisión en el caso de líneas muy estrechas (donde podemos olvidarnos de las diferencias que existen entre los puntos de resonancias inerciales, cuasiestacionarias y de máximo). Es decir, los polos de la matriz S no son suficientes para describir, en detalle, el comportamiento del sistema y de las cargas y corrientes en su superficie.

En el ejemplo que hemos tratado, hemos tenido cuatro definiciones de resonancia:

a) Resonancia inercial

$$\bar{k}_\ell d = \frac{1}{2} \ell \Pi$$

b) Resonancia cuasiestacionaria

$$\bar{k}_\ell d = \frac{1}{2} \ell \Pi \sqrt{1 - b_\ell^{-1} \zeta_0^2}$$

c) Polo de la matriz S

$$\bar{\bar{k}}_\ell d = \frac{1}{2} \ell \Pi \sqrt{1 - (\ell^2 \Pi^2 b_\ell^2 \ln^2 \zeta_0)^{-1}}$$

d) Resonancia de máximo.

Como hemos visto, para esferoides sumamente exéncricos, las líneas son suficientemente finas y las cuatro definiciones conducen a valores de k muy peóximos entre si.

Los polos de la matriz S y las resonancias cuasiestacionarias conducen a valores finitos de k aún en el caso límite de una esfera, aunque difieren considerablemente entre si. El máximo de la amplitud y la resonancia inercial, sin embargo, ya no tienen sentido en este límite.

Tratando entonces con líneas anchas, (En nuestro caso con esferoides poco exéncricos) debemos especificar bien que entendemos por resonancia del sistema.

VI-d) Soluciones magnéticas.

Estudiaremos ahora, sintéticamente, las soluciones magné

ticas de nuestro esferoide. Nos restringiremos a la solución con $m = 0$, es decir $m' = 1$. En este caso de (VI-9) y (VI-10) se obtiene

$$E_{\xi}^{\mu} = E_{\eta}^{\mu} = H_{\phi}^{\mu} = 0 \quad (\text{VI-56})$$

Además como $H_{\phi}^{\varepsilon} = -E_{\phi}^{\mu}$

se concluye que E_{ϕ}^{μ} será solución de la ecuación diferencial (VI-22), mientras que las otras componentes del campo estarán expresadas por

$$E_{\phi}^{\mu} = -V_{\ell}^1(\xi) \cdot \omega_{\ell}^1(\eta)$$

$$H_{\eta}^{\mu} = d^{-1}(\xi^2 - \eta^2)^{-1/2} \frac{\partial}{\partial \eta} \left(\sqrt{1 - \eta^2} E_{\phi}^{\mu} \right) \quad (\text{VI-57})$$

$$-ik H_{\phi}^{\mu} = d^{-1}(\xi^2 - \eta^2)^{-1/2} \frac{\partial}{\partial \xi} \left(\sqrt{\xi^2 - 1} E_{\phi}^{\mu} \right)$$

donde las funciones $\omega_{\ell}^1(\eta)$ y $V_{\ell}^1(\xi)$ son soluciones de la ecuación diferencial (VI-23). La condición de contorno sobre la superficie del esferoide se expresa, en este caso, por

$$V_{\ell}^1(\xi_0) = 0 \quad (\text{VI-58})$$

que nos asegura que la componente tangencial del campo eléctrico sobre la superficie es nula.

Como mostraremos a continuación para las soluciones magnéticas, no tenemos resonancias cuasiestacionarias ni resonancia de máximo. En cuanto a los polos de la matriz S, (en el caso sencillo de

$m = 0$ y $\ell = 1$), para esferoides muy exéntricos algunos de ellos estarán en el eje imaginario a una distancia muy grande del origen.

Por otra parte, similarmente a lo que ocurre para las soluciones eléctricas, las fuerzas de inercia también se anulan en las proximidades de los k correspondientes a las resonancias inerciales.

Si bien aquí no podemos hablar de resonancias, podemos decir que al ser nulas las fuerzas de inercia las ondas pueden llegar libremente a la superficie. Esto se ve comprobado, como lo mostraremos mas adelante, por el hecho que las corrientes j_ϕ inducidas en el centro del esferoide, son comparables en magnitud, a las corrientes j_η de la solución eléctrica vista anteriormente. Como se cumple (VI-58), para la solución magnética será

$$\rho = j_\eta = 0 \qquad j_\phi = \frac{-1}{4\pi} H_\eta^\mu$$

De las ecuaciones de Maxwell se desprende que podemos, también en este caso, describir el problema en términos de vibraciones de cargas y corrientes sobre la superficie, llegando a las ecuaciones

$$\frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} j_\phi = \frac{1}{4\pi} \sqrt{\frac{\xi_0^2 - 1}{\xi_0^2 - \eta^2}} \left(\frac{\partial E_\phi^\mu}{\partial \xi} \right)_{\xi = \xi_0} \qquad \text{(VI-59)}$$

$$\frac{\partial}{\partial \eta} \sqrt{1 - \eta^2} j_\phi = \frac{1}{4\pi} \sqrt{\frac{\xi_0^2 - 1}{\xi_0^2 - \eta^2}} \left(\frac{\partial H_\xi^\mu}{\partial \xi} \right)_{\xi = \xi_0}$$

Como se ve de estas ecuaciones de movimiento para la corriente

j_ϕ , no podemos definir resonancias cuasiestacionarias ya que anulando el segundo miembro de (VI-59) no obtenemos un conjunto discreto de vibraciones.

En cuanto a las funciones $\omega_\ell^1(\eta)$ son en todo similares a las tenidas para la solución eléctrica. Mientras que las soluciones $v_\ell^1(\zeta)$ serán

$$v_\ell^1(\zeta) = \frac{u_\ell^1(\zeta)}{\zeta}$$

siendo $\zeta \ll 1$

$$u_\ell^{1(1)}(\zeta) = \zeta^2 - \frac{\gamma_\ell^1 + 2}{8} \zeta^4 + \dots \quad (\text{VI-60})$$

$$u_\ell^{1(2)}(\zeta) = 1 - \frac{1}{2} \gamma_\ell^1 \ln \zeta \cdot u_\ell^{1(1)}(\zeta) - \frac{1}{8} \left[k^2 d^2 - \frac{3}{4} \gamma_\ell^1 \left(1 - \frac{\gamma_\ell^1}{2}\right) \right] \zeta^4$$

Planteando
$$u_\ell^1(\zeta) = A u_\ell^{1(1)}(\zeta) + B u_\ell^{1(2)}(\zeta)$$

e imponiendo las condiciones de contorno (VI-58) y eligiendo además

$$\left. \frac{d}{d\zeta} u_\ell^1(\zeta) \right|_{\zeta = \zeta_0} = 1$$

se pueden determinar los valores de A y B, resultando

$$A = u_\ell^{1(2)} \left[\frac{d}{d\zeta} u_\ell^{1(1)} \cdot u_\ell^{1(2)} - \frac{d}{d\zeta} u_\ell^{1(2)} \cdot u_\ell^{1(1)} \right]^{-1} \approx \frac{1}{2\zeta_0} - \frac{\gamma_\ell^1}{4} \ln \zeta_0$$

$$B = -u_\ell^{1(1)} \left[\frac{d}{d\zeta} u_\ell^{1(1)} \cdot u_\ell^{1(2)} - \frac{d}{d\zeta} u_\ell^{1(2)} \cdot u_\ell^{1(1)} \right]^{-1} \approx \frac{-\zeta_0}{2} \quad (\text{VI-63})$$

Con esto, los desarrollos de las soluciones son

$$u_{\ell}^1(\zeta) \approx -\frac{1}{2} \zeta_0 + \frac{\zeta^2}{2\zeta_0} + \dots \quad (\text{VI-63})$$

$$\frac{d}{d\zeta} u_{\ell}^1(\zeta) \approx \frac{\zeta}{\zeta_0} + \dots$$

Como en la aproximación en que hemos trabajado (ζ_0 suficientemente chicos) estas soluciones son independientes de γ_{ℓ}^1 , que es un parámetro que nos indica cuanto nos apartamos de la resonancia, resulta obvio que para las soluciones magnéticas que consideramos no tenemos resonancia de máximo.

En cuanto a los polos de la matriz S debemos imponer la condición

$$\text{tang } \delta = -i$$

donde δ es la fase en el infinito. De (VI-53) resulta

$$\text{tang } \delta = - \left. \frac{1}{kd} \frac{1}{\bar{\zeta} u_{\ell}^1(\bar{\zeta})} \frac{d}{d\zeta} u_{\ell}^1(\zeta) \right|_{\zeta = \bar{\zeta}} \quad (\text{VI-64})$$

donde $\bar{\zeta}$ es el punto de empalme con la solución asintótica. Reemplazando la derivada por la expresión dada por (VI-63) tenemos

$$kd \approx -i \left(\zeta_0 \cdot u_{\ell}^1(\bar{\zeta}) \right)^{-1} \quad (\text{VI-65})$$

relación que muestra lo que dijimos anteriormente sobre la ubicación del polo de la matriz S.

Finalmente digamos que como es

$$j_{\phi} = \frac{-H_{\eta}}{4\pi} = - \frac{i}{kd} \left. \frac{w_{\ell}^1(\eta)}{\sqrt{\xi_0^2 - \eta^2}} \frac{\partial}{\partial \xi} u_{\ell}^1(\xi) \right|_{\xi = \xi_0}$$

aplicando (VI-63) se tiene

$$j_{\phi} \approx - \frac{i}{kd} \frac{w_{\ell}^1(\eta)}{\sqrt{\xi_0^2 - \eta^2}}$$

Comparando esta expresión con la corriente j_{η} de la solución eléctrica se concluye que ambas corrientes son comparables, lo que corrobora lo dicho anteriormente sobre la influencia de las fuerzas de inercia.

VI-e) En el ejemplo de la antena que desarrollamos anteriormente, hemos puesto énfasis, principalmente, en la influencia de las fuerzas de inercia.

Sin embargo este estudio nos ha conducido a una mejor comprensión del carácter de las soluciones cuasiestacionarias y de la reacción de la radiación que hemos tratado en las secciones V y VI.

De aquí podemos esperar que el análisis de estos resultados nos permita comprender el origen de las dificultades que se oponen a una descripción adecuada del acoplamiento entre cargas y campo electromagnético.

Efectivamente, dado un sistema de cargas cuasiestacionarias con un espectro de frecuencias discreto, se conocen reglas útiles que permiten, en el caso límite de resonancias estrechas, determinar la vida media y los anchos de tales estados aproximadamente.¹² Estas reglas se usan, en particular, en el caso de los estados cuasiestacionarios de sistemas atómicos.

En nuestro caso, sin embargo, conocemos no solamente los estados cuasiestacionarios de nuestro sistema, sino también las soluciones completas del campo electromagnético que los genera.

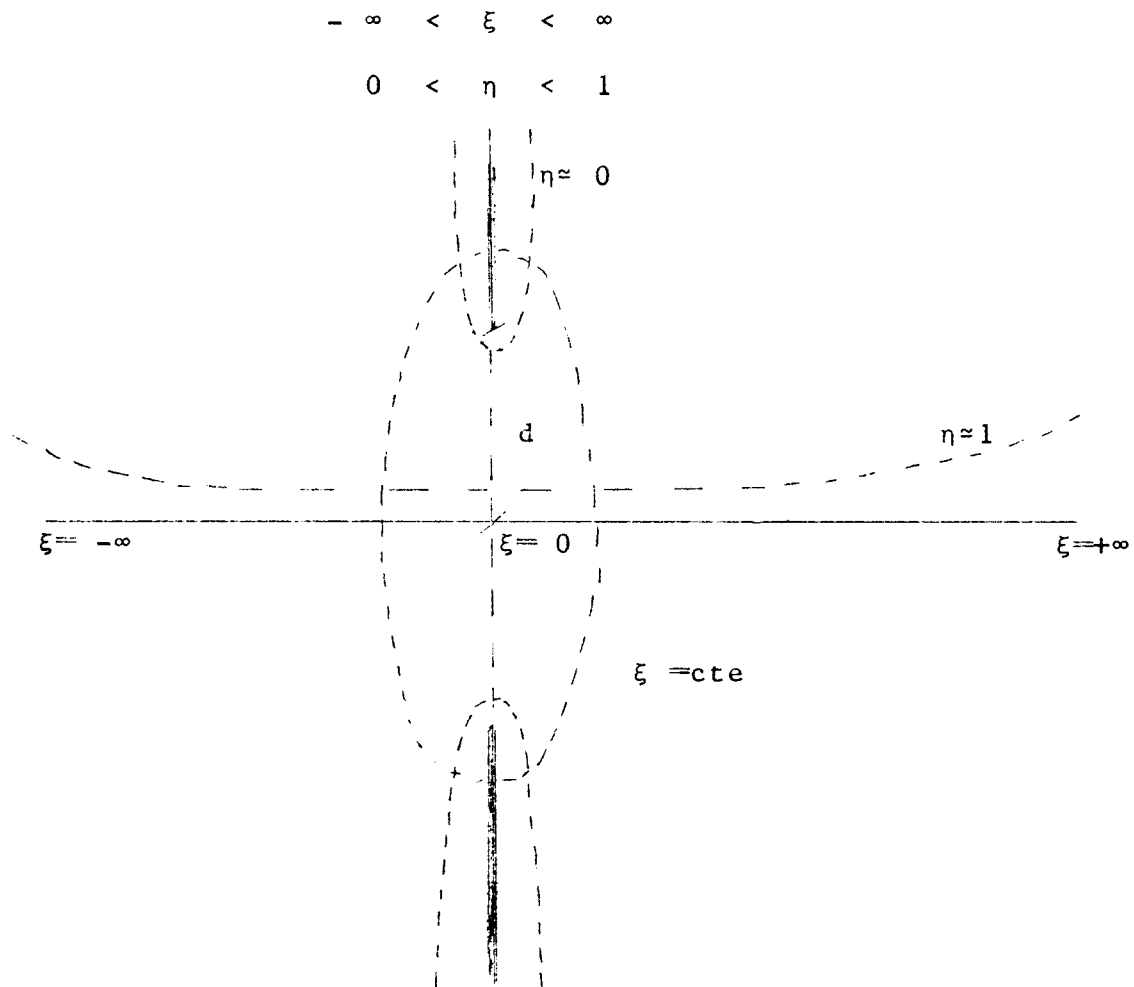
Este, aunque se trate de un ejemplo aislado, nos da la posibilidad de comparar las reglas de acoplamiento con una teoría mas completa, que ya contiene la radiación y su reacción sobre las cargas. Esta comparación puede ser útil para determinar el alcance y los límites de validez de dichas reglas a la vez que para encontrar el origen de la necesidad de renormalización que ellas implican.

Este análisis, sin embargo, será tratado en un próximo trabajo.

VII - ORIFICIO CIRCULAR EN UNA PANTALLA

Solamente a título de ejemplo ilustrativo, veamos como al incidir una onda sobre una pantalla en la que hemos practicado un orificio circular, los potenciales inerciales se oponen al paso de la misma.

Las coordenadas adecuadas al problema son las esferoidales oblate cuyas fórmulas de transformación fueron dadas en la pág.25. Las superficies $\xi = \text{constante}$ y $\eta = \text{constante}$ se indican en la figura para el rango de las variables



Tomemos una onda escalar

$$u_{\ell}^m(\xi, \eta, \phi) = v_{\ell}^m(\xi) \cdot w_{\ell}^m(\eta) \cdot \exp(im\phi)$$

Las funciones $v_{\ell}^m(\xi)$ y $w_{\ell}^m(\eta)$ serán soluciones de las siguientes ecuaciones diferenciales

$$\left[\frac{d}{d\xi} (1 + \xi^2) \frac{d}{d\xi} + k^2 d^2 \xi^2 - v_{\ell}^1(kd) + \frac{m^2}{1 + \xi^2} \right] v_{\ell}^m(\xi) = 0$$

(VII-1)

$$\left[\frac{d}{d\eta} (1 - \eta^2) \frac{d}{d\eta} + k^2 d^2 \eta^2 + v_{\ell}^1(kd) - \frac{m^2}{1 - \eta^2} \right] w_{\ell}^m(\eta) = 0$$

donde $v_{\ell}^m(kd) = \mu_{\ell}^m(-k^2 d^2)$ es el coeficiente de separación de las variables. Para él se conocen desarrollos en serie

para $kd \rightarrow \infty$

$$v_{\ell}^m \approx -k^2 d^2 + 2(\ell + 1) kd \quad \ell = m, m + 2, \dots$$

$$v_{\ell}^m \approx -k^2 d^2 + 2\ell kd \quad \ell = m + 1, m + 3, \dots$$

para $kd \rightarrow 0$

(VII-2)

$$v_{\ell}^m \approx \ell(\ell + 1) - \frac{1}{2} \left[1 - \frac{(2m - 1)(2m + 1)}{(2 - 1)(2 + 3)} \right] k^2 d^2$$

Haciendo el cambio de funciones

$$v_{\ell}^m(\xi) = (1 + \xi^2)^{-1/2} u_{\ell}^m(\xi)$$

$$w_{\ell}^m(\eta) = (1 - \eta^2)^{-1/2} T_{\ell}^m(\eta)$$

las ecuaciones (VII-1) se transforman en

$$\left[\frac{d^2}{d\xi^2} + k^2 d^2 - \frac{k^2 d^2 + v_{\ell}^m}{1 + \xi^2} + \frac{m^2 - 1}{(1 + \xi^2)^2} \right] u_{\ell}^m(\xi) = 0 \quad (\text{VII-4})$$

$$\left[\frac{d^2}{d\eta^2} + \frac{k^2 d^2 \eta^2 - v_{\ell}^m}{1 - \eta^2} - \frac{m^2 - 1}{(1 - \eta^2)^2} \right] T_{\ell}^m(\eta) = 0$$

La solución de la segunda de estas ecuaciones, deberá cumplir la condición de contorno

$$T_{\ell}^m(\eta_0) = 0 \quad (\eta_0 \ll 1) \quad (\text{VII-5})$$

Tomemos como ejemplo el caso de una onda con $m = 1$. Restringiéndonos a puntos cercanos al centro del agujero tenemos

$$\rho = 0 \quad \eta \approx 1 \quad z = d \xi$$

La primera de las ecuaciones (VII-5) se transforma entonces en

$$\left[\frac{d^2}{dz^2} + k^2 - \frac{k^2 d^2 + v_{\ell}^1}{z^2 + d^2} \right] u_{\ell}^1(z) = 0 \quad (\text{VII-6})$$

Evidentemente para valores grandes de z la onda es libre, mien-

tras que cerca de la pantalla comienza a ser influenciada por el potencial inercial repulsivo

$$\frac{k^2 d^2 + v_{\ell}^1(kd)}{z^2 + d^2} \quad \text{(VII-6)}$$

que se opone a que la onda pase por el agujero.

Del comportamiento de v_{ℓ}^1 dado por las relaciones (VII-2) se ve claramente que cuando $kd \rightarrow \infty$ (es decir el diámetro del agujero es mucho mayor que la longitud de onda) el potencial inercial (VII-6) tiende a cero, con lo cual la onda puede pasar libremente. Por el contrario, si $kd \rightarrow 0$ (longitud de onda mayor que el diámetro del agujero) la "energía" k resulta ser mucho menor que el potencial repulsivo

$$\frac{\ell(\ell + 1)}{z^2 + d^2}$$

con lo cual la onda se verá casi totalmente reflejada en dicho potencial.

Digamos finalmente que si bien la aproximación de Kirchhoff, puede dar la distribución angular asintótica correcta para la onda difractada, nuestras ecuaciones para un agujero chico ($kd \ll 1$) invalidan dicha aproximación.

Efectivamente, en la aproximación de Kirchhoff, la amplitud de la onda en $z = 0$ se toma igual a la de la onda incidente. Sin embargo, como hemos visto, la acción de las fuerzas de inercia implica que la onda llega al plano $z = 0$ con una amplitud exponencialmente disminuida.

Digamos también que el ejemplo que hemos desarrollado es aplicable al caso de una onda plana incidiendo en dirección perpendicular a la pantalla ($m = 0$); y a la solución eléctrica axialmente simétrica en el caso electromagnético ($m = 1$).

VIII) FUERZAS DE INERCIA EN EL ESPACIO DE CONFIGURACIONES

Hasta ahora nos hemos ocupado principalmente de las fuerzas de inercia de origen geométrico, actuando sobre ondas escalares y electromagnéticas.

En esta sección veremos que, en la mecánica cuántica, fuerzas semejantes aparecen en el espacio de configuraciones. Un ejemplo sencillo de este caso ya fue tratado en la sección IV), al interpretar los problemas planos como el choque de dos partículas unidimensionales, con interacción dada por las curvas Σ_1 y Σ_2 . En este caso el plano es el espacio de configuraciones de las partículas y las fuerzas de inercia que aparecen en el problema deben ser ahora interpretadas en ese espacio.

Sin embargo trataremos ahora un problema mas general:

Consideremos un sistema de partículas cargadas, no relativistas, con interacciones electrostáticas y magnetostáticas. Supongamos velocidades y aceleraciones pequeñas de manera que el sistema emita una radiación electromagnética muy débil, que despreciamos.

En esta aproximación, tanto la interacción eléctrica como la magnética dependen, en cada instante, solamente de las posiciones relativas y velocidades de las partículas. Es decir las interacciones se propagan con velocidad infinita.

La energía del sistema será entonces

$$\begin{aligned}
 E = & \sum_{\alpha}^N \frac{1}{2} m_{\alpha} |\dot{\vec{v}}_{\alpha}|^2 + \sum_{\alpha \neq \beta}^N \frac{1}{4c^2} e_{\alpha} e_{\beta} \left[\frac{\dot{\vec{v}}_{\alpha} \cdot \dot{\vec{v}}_{\beta}}{|\vec{r}_{\alpha\beta}|} + \frac{(\vec{r}_{\alpha\beta} \cdot \dot{\vec{v}}_{\alpha})(\vec{r}_{\alpha\beta} \cdot \dot{\vec{v}}_{\beta})}{|\vec{r}_{\alpha\beta}|^3} \right] + \\
 & + \sum_{\alpha \neq \beta}^N e_{\alpha} e_{\beta} \frac{1}{2|\vec{r}_{\alpha\beta}|} \qquad \qquad \qquad \text{(VIII-1)}
 \end{aligned}$$

donde $\vec{r}_{\alpha\beta} = \vec{r}_{\alpha} - \vec{r}_{\beta}$

El primer, y tercer término dan cuenta de la energía cinética y de la interacción electrostática respectivamente. El segundo término de la derecha es la interacción magnética (energía del campo eléctrico y magnético excluida energía propia).

Podemos plantear el Lagrangeano del sistema

$$L = K - V$$

con

$$V = \sum_{\alpha \neq \beta}^N e_{\alpha} e_{\beta} \frac{1}{2 |\vec{r}_{\alpha\beta}|} \tag{VIII-2}$$

$$K = \sum_{\alpha \neq \beta}^N \sum_{i,j=1}^3 \frac{1}{2} \left[\delta_{\alpha\beta} \delta_{ij} m_{\alpha} + (1 - \delta_{\alpha\beta}) \frac{1}{2} \alpha_{\beta} A_{ij} v_{\alpha}^i \cdot v_{\beta}^j \right] \tag{VIII-3}$$

Aquí $\alpha, \beta = 1, 2, 3 \dots \dots N$

$i, j = 1, 2, 3.$

Además es

$$\alpha_{\beta} A_{ij} = \frac{e_{\alpha} \cdot e_{\beta}}{c^2 |\vec{r}_{\alpha\beta}|} \begin{pmatrix} 1 + (\alpha_{\beta} n_1)^2 & \alpha_{\beta} n_1 \cdot \alpha_{\beta} n_2 & \alpha_{\beta} n_1 \cdot \alpha_{\beta} n_3 \\ & 1 + (\alpha_{\beta} n_2)^2 & \alpha_{\beta} n_2 \cdot \alpha_{\beta} n_3 \\ & & 1 + (\alpha_{\beta} n_3)^2 \end{pmatrix}$$

donde
$$\alpha_{\beta}^{\vec{n}} = \frac{\vec{r}_{\alpha\beta}}{|\vec{r}_{\alpha\beta}|}$$

Tomemos la siguiente numeración para las coordenadas de las partículas

$$i = 3 (\alpha - 1) + i \quad \text{(VIII-5)}$$

$$j = 3 (\beta - 1) + j \quad i, j = 1, 2 \dots 3N$$

las inversas serán

$$\begin{aligned} \alpha &= \text{p.e} \left(\frac{i-1}{3} \right) + 1 & i &= i - 3 \text{p.e} \left(\frac{i-1}{3} \right) \\ \beta &= \text{p.e} \left(\frac{j-1}{3} \right) + 1 & j &= j - 3 \text{p.e} \left(\frac{j-1}{3} \right) \end{aligned} \quad \text{(VIII-6)}$$

(donde p.e indica parte entera)

Entonces podemos poner

$$a_{\nu}^i = v^i$$

Con lo cual, como se ve de (VIII-3) y (VIII-2) el Lagrangeano puede ser escrito

$$L = \frac{1}{2} g_{ij} v^i v^j - V \quad \text{(VIII-7)}$$

donde índices repetidos indican sumación. Además g_{ij} está dado por la expresión

$$g_{ij} = \sum_{\alpha\beta} \sum_{ij} m_{\alpha} + (1 - \sum_{\alpha\beta}) \alpha_{\beta}^A \alpha_{ij} \quad \text{(VIII-8)}$$

donde $B'_{\alpha\beta}$ será no diagonal y sus elementos dependerán de las nuevas coordenadas. Estas $B'_{\alpha\beta}$ dan origen a lo que llamamos las fuerzas de inercia de origen geométrico, mientras que los $A'_{\alpha\beta}$ contienen las fuerzas de inercia de origen magnético. Incluyendo ahora transformaciones en el espacio de configuraciones ($3N$ dimensional), vemos que v^i se comporta como un vector contravariante (ya que el tiempo interviene como un parámetro escalar).

Como el lagrangeano del sistema debe ser un escalar ante este tipo de transformaciones, resulta que los elementos de g_{ij} son componentes de un tensor dos veces covariante.

Definiendo los impulsos canónicos

$$p_i = \frac{\partial L}{\partial v^i} = g_{ij} v^j \quad (\text{VIII-11})$$

y formando los cocientes

$$g^{ij} = \frac{\text{adj } g_{ij}}{|g_{\ell k}|}$$

se puede mostrar que los g^{ij} son componentes de un tensor dos veces contravariante y que se cumple además que

$$g_{ij} g^{j\ell} = \delta_i^\ell$$

con lo cual

$$v^i = g^{ij} p_j$$

De manera que el hamiltoniano de nuestro sistema será

$$H = \frac{1}{2} g^{ij} p_i p_j + V \quad (\text{VIII-12})$$

lo que da lugar a la ecuación de Schroedinger

$$-\frac{2mi}{\hbar} \frac{\partial \psi}{\partial t} = \frac{1}{\sqrt{g}} \frac{\partial}{\partial \xi^i} \sqrt{g} g^{ij} \frac{\partial \psi}{\partial \xi^j} \quad (\text{VIII-13})$$

con lo cual llegamos al caso estudiado en la sección II. Para el caso particular en que la matriz g^{ij} contiene solamente las submatrices de la diagonal, es decir despreciando las interacciones magnéticas, el hamiltoniano de nuestro problema se reduce al hamiltoniano que describe la materia, en la aproximación de W. Thirring¹³ (para ello debemos incluir en V las interacciones gravitacionales entre partículas). Sin embargo nosotros nos interesamos en sistemas para los cuales las interacciones magnéticas tienen un peso considerable de modo que el potencial de interacción electrostática pueda ser supuesto pequeño. Tal es el caso, por ejemplo de un sistema neutro

$$\sum_{\alpha=1}^N e_{\alpha} = 0$$

con las velocidades de las partículas dirigidas, principalmente, en una dirección, es decir en presencia de corrientes eléctricas.

En este sistema el tercer término de (VIII-1) tendrá $N(N-1)$ sumandos con signos alternados, de manera que dicho término resulta muy pequeño frente al segundo término, el cual, (si bien contiene sumandos del orden $\frac{v^2}{c^2}$) para valores de N suficientemente grandes tendrá un valor apreciablemente mayor que V .

En esta aproximación

$$H = \frac{1}{2} g^{ij} p_i p_j \quad (\text{VIII-13})$$

Podemos decir entonces que la evolución del sistema estará da da por la evolución de un punto en el espacio de configuraciones, que tiene una métrica g_{ij} y la longitud de arco es

$$ds^2 = g_{ij} d\xi^i d\xi^j$$

Es de hacer notar que este espacio de configuraciones resulta ser un espacio riemaniano con tensor de curvatura distinto de cero. Esto es consecuencia del hecho que las interacciones mag néticas hacen que los espacios individuales de las partículas ya no sean ortogonales entre si. Sin embargo pueden estudiarse modelos en los cuales el espacio de configuraciones es euclídeo como es el caso si tomamos los $A_{\alpha\beta}$ constantes.¹⁴ Estos modelos conducen a problemas de corrientes cuasiestaciona rias. Las ecuaciones (VIII-13), sin embargo contienen, en adición, los fenómenos de fluctuaciones de densidades de carga y de corriente.

APENDICE A

Tomemos la ecuación de Schroedinger

$$-\frac{2mi}{\hbar} \frac{\partial \Psi}{\partial t} = \frac{1}{\sqrt{g}} \frac{\partial}{\partial \xi^i} \sqrt{g} g^{ij} \frac{\partial \Psi}{\partial \xi^j} \quad (\text{A-1})$$

Propongamos como solución

$$\Psi = A \exp \left(\frac{i}{\hbar} S \right)$$

donde A y S son funciones reales .

Reemplazando en (A-1) e igualando parte real e imaginaria tenemos

$$-\frac{2mi}{\hbar} \frac{\partial A}{\partial t} = \frac{A HS}{\hbar} + \frac{2}{\hbar} g^{ij} \frac{\partial A}{\partial \xi^i} \frac{\partial S}{\partial \xi^j} \quad (\text{A-2})$$

$$A \frac{2m}{\hbar^2} \frac{\partial S}{\partial t} = HA - \frac{A}{\hbar^2} g^{ij} \frac{\partial S}{\partial \xi^i} \frac{\partial S}{\partial \xi^j} \quad (\text{A-3})$$

donde H es el operador

$$H = \frac{1}{\sqrt{g}} \frac{\partial}{\partial \xi^i} \sqrt{g} g^{ij} \frac{\partial}{\partial \xi^j}$$

La ecuación (A-3) se puede reescribir

$$2m \frac{\partial S}{\partial t} = \hbar^2 \frac{HA}{A} - g^{ij} \frac{\partial S}{\partial \xi^i} \frac{\partial S}{\partial \xi^j}$$

que es la ecuación de Hamilton Jacobi en un espacio general y donde

$$n^2 \frac{HA}{A}$$

es el potencial cuántico.

A partir de (A-2) y (A-3) se puede obtener el teorema de conservación de la densidad de probabilidad

$$\frac{\partial}{\partial t} (\sqrt{g} A^2) + \frac{\partial}{\partial \xi^i} \left(\sqrt{g} \frac{A^2}{m} g^{ij} \frac{\partial S}{\partial \xi^j} \right) = 0$$

donde se ha supuesto que el determinante del tensor métrico no depende explícitamente del tiempo.

Teniendo en cuenta que podemos poner

$$j^i = \rho v^i \quad \text{donde} \quad \rho = \sqrt{g} A^2$$

tendremos

$$j^i = \rho v^i = \frac{A^2}{m} \sqrt{g} g^{ij} \frac{\partial S}{\partial \xi^j}$$

con lo que resulta

$$v^i = \frac{1}{m} g^{ij} \frac{\partial S}{\partial \xi^j}$$

REFERENCIAS

- (1) B. Podolsky Phys.Rev. 32 , 812 (1928)
- (2) J. Meixner - F.W. Schäfke Mathieusche Funktionen und Sphäroidfunktionen, Springen-Verlag/ Berlín- Göttingen - Heidelberg (1954)
- (3) M. Abraham Ann. Phys. 66 , 435 (1898).
- (4) L. Page - N.I. Adams Jr. Phys. Rew. 53 , 819 (1938).
- (5) L. Page - N.I. Adams Jr. Phys. Rew. 65 , 98 (1944).
- (6) R. M. Ryder J. Appl. Phys. 13 , 327 (1942).
- (7) L. V. King Phil. Trans. Roy. Soc. A 236 , 381 (1937).
- (8) A. Sommerfeld Die Differential und Integralgleichungen 2 , 526 (1925).
- (9) G. Mie Ann. d. Physik 25 , 377 (1908).
- (10) P. Debye Ann. d. Physik 30 , 56 (1909).
- (11) G. Beck- M. Nussensweig Il nuovo Cimento X 16 , 416 (1960).
- (12) E. M. Ferreira Anais da Acad. Bras. de Ciências 28 , 83 (1956)
- (13) W. Thirring Exact Results on the Structure of Matter - Lecture given at the XII Internationalen Hochschulwochen für Kernphysik. Schladming 1973.
- (14) G. Beck Il Nuovo Cimento S X 60B , 8 (1969).