

COMISION NACIONAL DE ENERGIA ATOMICA
DEPENDIENTE DE LA PRESIDENCIA DE LA NACION

SEPTIMO CURSO PANAMERICANO DE METALURGIA

Dentro del Programa Multinacional de Metalurgia
(Programa Regional de Ciencia y Tecnología - OEA)

ELEMENTOS DE TEORIA DE PLASTICIDAD II

Ing. Lucio Urman

Departamento de Metalurgia
Buenos Aires - Argentina
1971

**COMISION NACIONAL DE ENERGIA ATOMICA
DEPENDIENTE DE LA PRESIDENCIA DE LA NACION**

SEPTIMO CURSO PANAMERICANO DE METALURGIA

Dentro del Programa Multinacional de Metalurgia
(Programa Regional de Ciencia y Tecnología - OEA)

ELEMENTOS DE TEORIA DE PLASTICIDAD II

Ing. Lucio Iurman

Departamento de Metalurgia
Buenos Aires - Argentina
1971

BOLILLA VIMÉTODOS DE SOLUCIÓN DE PROBLEMAS DE TRABAJO. I.6.1 INTRODUCCIÓN

La solución completa de un problema de deformación plástica requiere hallar la distribución de las tensiones y de las deformaciones en todo el cuerpo que se deforma, tan to en las zonas elásticas como en las plásticas. Para ello se conocen las relaciones existentes entre tensiones y deformaciones analizadas en el punto anterior.

A continuación se verá que es matemáticamente posible hallar la solución completa de un problema plástico porque se dispone de tantas ecuaciones como incógnitas hay. Sin embargo, la complejidad que surgiría del manipuleo de estas ecuaciones, hace que se prefieran métodos aproximados de solución en la mayor parte de los casos. En este capítulo y en el próximo se analizan dichos métodos.

6.2 ECUACIONES BÁSICAS

En lo que sigue, se considera al material isótropo, continuo y homogéneo. Se ignora el efecto Bauschinger. Además, se supone que el material es rígido-plástico, o sea que las deformaciones son solamente plásticas.

En estas condiciones, la solución de un problema de deformación plástica estará dada por la resolución de las ecuaciones siguientes:

a) Ecuaciones de equilibrio estático

$$\begin{aligned}\frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial z} &= 0 \\ \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial z} &= 0 \\ \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_z}{\partial z} &= 0\end{aligned}\quad (6.1)$$

b) Ecuaciones de Levy-Mises

Se expresan éstas en función de las velocidades de deformación

$$\frac{\dot{\epsilon}_x}{\sigma_x} = \frac{\dot{\epsilon}_y}{\sigma_y} = \frac{\dot{\epsilon}_z}{\sigma_z} = \frac{\dot{\gamma}_{xy}}{\tau_{xy}} = \frac{\dot{\gamma}_{yz}}{\tau_{yz}} = \frac{\dot{\gamma}_{zx}}{\tau_{zx}} = \frac{d\lambda}{dt} \quad (6.2)$$

o) La condición de fluencia instantánea

$$(\sigma_x - \sigma_y)^2 + (\sigma_y - \sigma_z)^2 + (\sigma_z - \sigma_x)^2 + 6(\tau_{xy}^2 + \tau_{yz}^2 + \tau_{zx}^2) = 2\bar{\sigma}^2 \quad (6.3)$$

donde: $\bar{\sigma} = \text{cte.}$ para un material perfectamente plástico.
 $\bar{\sigma} = \bar{\sigma}(\dot{\epsilon})$ para un material plástico no endurecible cuya resistencia depende de la velocidad de deformación.
 $\bar{\sigma} = \bar{\sigma}(\bar{\epsilon})$ para un material plástico endurecible.

Las ecuaciones (1), (2) y (3) constituyen nueve ecuaciones independientes para las componentes incógnitas de tensiones y de velocidades de deformación. El número de estas incógnitas es también nueve, o sea seis componentes de tensiones y tres de velocidades. En efecto, si se indican con u, v y w las componentes de velocidades según tres direcciones coordenadas, se vio que:

$$\dot{\epsilon}_x = \frac{\partial u}{\partial x}, \quad \dot{\gamma}_{xy} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right), \text{ etc.} \quad (6.4)$$

Por consiguiente, es teóricamente posible hallar una solución analítica si se poseen suficientes datos por condiciones de borde. Sin embargo, como ya se señaló, ello es muy complejo y laborioso, por lo que se prefiere utilizar los métodos aproximados que se tratan a continuación.

6.3 METODO DE ENERGIA UNIFORME DE DEFORMACION PLASTICA

Se simplifica el mecanismo de la deformación. Se supone que ésta es uniforme y que se produce por la acción de las tensiones de corte máximas, determinadas por las diferencias de las tensiones principales. La cantidad de deformación está dada por la variación entre la forma final e inicial de un elemento.

Los efectos de la fricción se superponen a la distribución de las tensiones supuestas y se establece que no la afectan.

De este modo es posible calcular la energía interna o de deformación en la forma vista en el capítulo anterior. Así, la deformación específica es

$$\mu^P = \int_{\bar{\epsilon}_0}^{\bar{\epsilon}_1} \bar{\sigma} d\bar{\epsilon} \quad (6.5)$$

La introducción de $\bar{\sigma}$ en la expresión del trabajo permite tener en cuenta al material real, cuya resistencia puede estar influida por la cantidad de deformación o por la velocidad con que se la efectúa.

Para tener el trabajo total, es necesario multiplicar (6.5) por el volumen.

Cuando se trata de flujo estacionario, el volumen puede extraerse de la integral, no así en caso contrario. O sea

$$U^P = V \int_{\bar{\epsilon}_1}^{\bar{\epsilon}_2} \bar{\sigma} d\bar{\epsilon} \quad \text{para flujo estacionario} \quad (6.6)$$

$$U^P = \int_V (\bar{\sigma} d\bar{\epsilon}) dV \quad \text{para flujo no estacionario} \quad (6.7)$$

El trabajo ejercido por las fuerzas exteriores deberá ser por lo menos igual al de las tensiones internas. Igualados ambos se obtiene el resultado deseado, sea éste la tensión en el cuerpo o la fuerza aplicada.

Este método da valores medios de tensiones. Es el más simple pero el menos aproximado. A veces se corrigen los valores obtenidos de esta manera con coeficientes, en cuyo caso pasa a ser un método cuasi empírico.

6.4 METODO DE BLOQUE ("SLAB")

En este método de solución de problemas de deformación plástica, se supone que las tensiones sobre un plano o superficie esférica perpendicular a la dirección del flujo del material son tensiones principales. Sobre este plano o superficie las tensiones no pueden variar.

Las fuerzas externas de fricción se superponen al estado de tensiones existente en el cuerpo, cuya distribución se supone que no queda por ello alterada.

El procedimiento para resolver el problema es entonces el siguiente: se secciona un bloque de material, paralelo al plano en que las tensiones no varían, en un punto cualquiera del cuerpo. Se establece la ecuación de equilibrio estático de las fuerzas que actúan sobre dicho bloque. Esta ecuación de equilibrio es, por lo general, de la forma

$$\frac{d \sigma_{xi}}{d x_i} + \frac{1}{x_i} F(\sigma_{xi}, \sigma_{xj}) = 0 \quad (6.8)$$

donde x_i es una coordenada en la dirección en que las tensiones varían, σ_{xi} , σ_{xj} son las tensiones principales en las direcciones x_i , x_j . $F(\sigma_{xi}, \sigma_{xj})$ es una función lineal de σ_{xi} y de σ_{xj} que incluye a los efectos de fricción y parámetros de inclinación superficial con respecto a un eje principal.

La ecuación (6.8) puede integrarse con la ayuda de la condición de fluencia, que permite expresar unas tensiones en función de otras. De esta manera se obtienen soluciones que satisfagan a las condiciones de borde.

Aunque el método está basado en un estado de tensiones ficticio, los resultados obtenidos suelen constituir una primera aproximación razonable.

Los efectos de endurecimiento o de dependencia de la resistencia con la velocidad de deformación se pueden introducir a través de la tensión $\bar{\sigma}$ de la condición de fluencia.

6.5 DETERMINACION EXPERIMENTAL DE LAS VELOCIDADES DE DEFORMACION. METODO DE VISIO-PLASTICIDAD.

El campo de deformaciones existente en un material puede determinarse en forma experimental. Para ello se recurre al grabado de una grilla, a la inserción de materiales extraños, a modelos con plastilina de colores, etc.

Para la solución cuantitativa de problemas de trabajado plástico, los valores obtenidos de la experiencia deben ser muy precisos, por lo cual el método más aconsejable para la determinación del campo de deformaciones es el trazado de una grilla.

El procedimiento consiste entonces en cortar al material por el plano en que se desea medir la deformación y trazar una grilla sobre el mismo. Los planos que se pueden usar en este sentido son los meridianos en una pieza cilíndrica o los perpendiculares al movimiento del material en problemas de deformación plana. La grilla puede dibujarse con tinta especial, grabarse con un buril o, según el método más moderno, grabarse por medios fotográficos.

Seguidamente se produce en el material un incremento de deformación y se fotografía la grilla. Se obtiene así el conocimiento de los puntos nodales. Este proceso se repite hasta obtener el diagrama de flujo del material, que puede ser de la forma ilustrada en la Fig. 1.

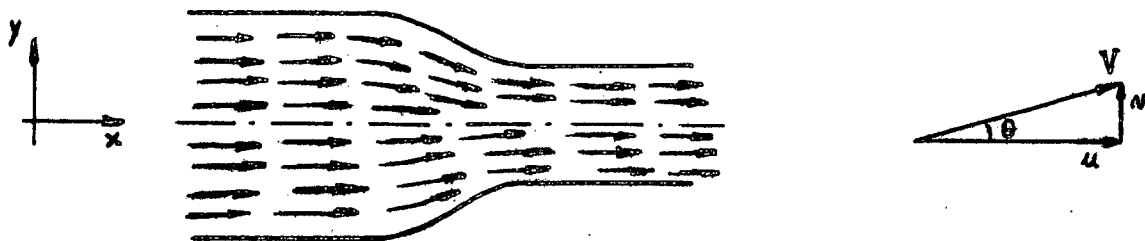


Fig. 1

Este diagrama permite conocer, en los puntos nodales, las componentes u y v de velocidades de deformación (o de incrementos que se expresan como velocidades por conveniencia). Si los puntos son suficientemente próximos, se puede graficar u y v en función de x e y . Ello permite determinar para cada punto las componentes de velocidad de deformación.

$$\dot{\epsilon}_x = \frac{\partial u}{\partial x} \quad \dot{\epsilon}_y = \frac{\partial v}{\partial y} \quad \dot{\gamma}_{xy} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) \quad (6.9)$$

La introducción de estos valores, determinados experimentalmente, en el cuadro de las ecuaciones básicas, permite disminuir el número de ecuaciones a utilizar dado que las incógnitas son ahora sólo el estado de tensiones. Es más fácil obtener entonces ahora una solución del problema.

Este método teórico-experimental se denomina visioelasticidad y se debe a Thomsen.

Debe destacarse que grillas deformadas en forma finita no pueden usarse en el análisis si la deformación no es uniforme.

BIBLIOGRAFIA:

- Mechanics of plastic deformation in metal processing
Homsen, Yang, Kobayashi (Mc Millan 1965)
- Plasticity for mechanical engineers
Johnson y Mellor (Van Nostrand 1962)
- Fundamentals of Deformation Processing
Proc. of the 9th Sagamore Army Materials Conference

BOLILLA VIIMÉTODOS DE SOLUCION DE PROBLEMAS DE TRABAJO II.7.1 Método de "líneas de deslizamiento"

Consiste en hallar las familias de curvas en que la tensión de corte es máxima y mínima. Estas familias de curvas forman un campo conocido como el de las líneas de corte o de deslizamiento. El método permite analizar deformaciones plásticas planas no homogéneas y generalmente se aplica a sólidos rígidos perfectamente plásticos, aunque la teoría contempla el endurecimiento por deformación y existen algunas soluciones que lo tienen en cuenta.

Las líneas de deslizamiento tienen la propiedad de satisfacer a las ecuaciones de equilibrio, a la condición de fluencia, y constituyen un campo de deformaciones posible.

Este método permite obtener primeras aproximaciones para ciertos procesos de conformado tales como el trefilado y la extrusión de chapas, el laminado plano y algunos tipos de forja. Además, conjuntamente con el de viscoplasticidad, da una idea de la distribución de tensiones en el interior del cuerpo, lo que no ocurre en los demás métodos.

Su aplicación requiere tener mucho sentido físico del problema que se está analizando. Sus principales desventajas residen en que sólo es válido para analizar problemas de deformación plana y en que la solución obtenida no es, en general, única.

7.1.1 Análisis de la deformación plástica plana. Líneas de deslizamiento

Se dice que un cuerpo está en deformación plana cuando:

- a) La deformación es en cualquier punto paralela a un plano dado que por comodidad se designará de aquí en adelante como plano (x, y) de una terna ortogonal (x, y, z) .
- b) La deformación es independiente de la dirección perpendicular a dicho plano, o sea de z en el sistema elegido.

Dado que con este método se tratan materiales rígidos plásticos, no existen deformaciones elásticas y, en el campo plástico, son válidas las relaciones entre tensiones y deformaciones dadas por Levy-Mises.

Las consideraciones hechas hasta aquí permiten hallar las ecuaciones básicas de plasticidad en deformación plana.

En efecto, por las características de la deformación se tiene que:

$$d\varepsilon_z = d\gamma_{xz} = d\gamma_{yz} = 0 \quad (7.1)$$

Si a este estado se aplican las ecuaciones de Levy-Mises vistas en el punto 4.3.2

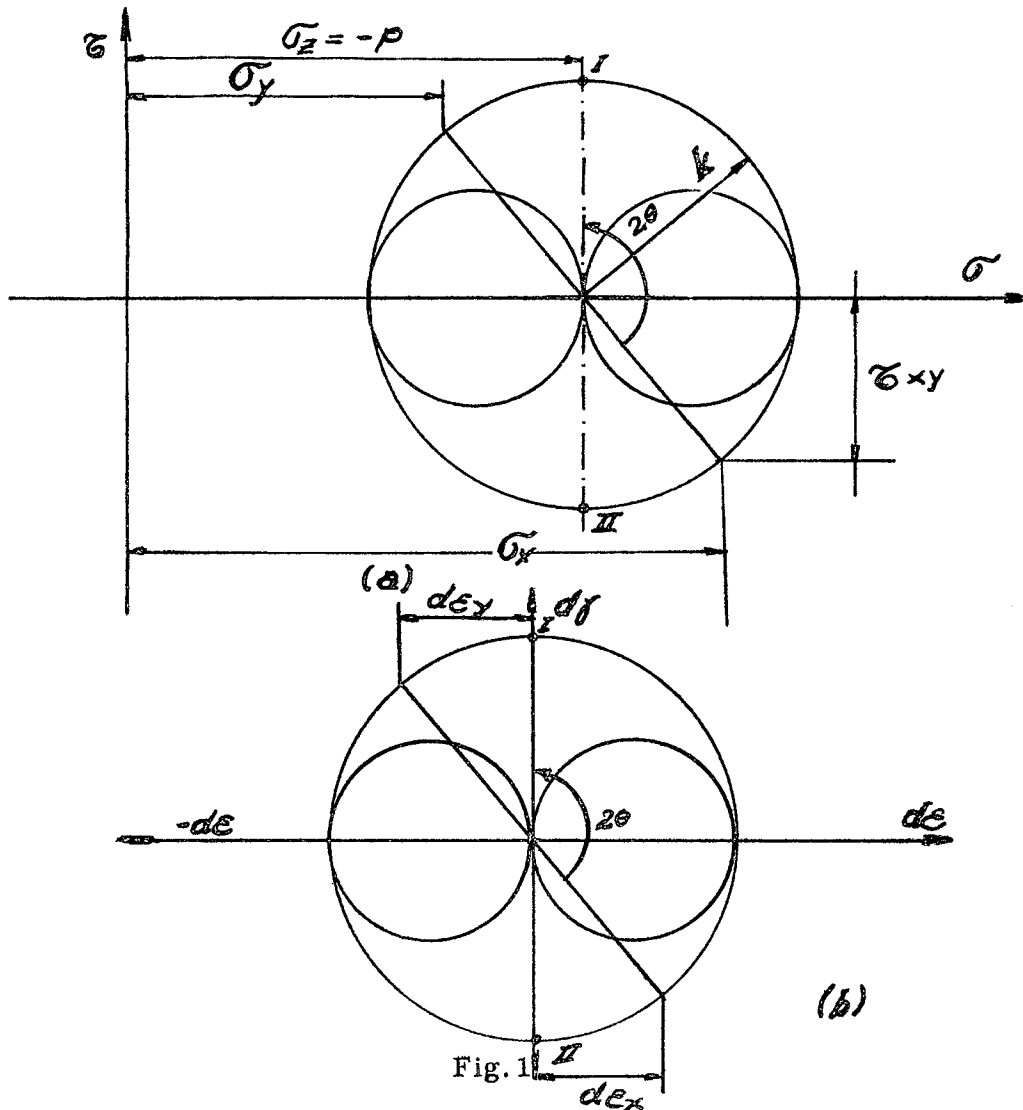
$$d\varepsilon_{ij} = \sigma'_{ij} d\lambda$$

resulta:

$$\begin{aligned} \tau_{xz} &= \tau_{yz} = 0 \\ \sigma_z &= \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} \end{aligned} \quad (7.2)$$

por lo que z es una dirección principal.

Para estas condiciones, los diagramas de Mohr de tensiones y de incrementos de deformación son como se ilustran en la Fig. 1



Con respecto a la Fig. 1 conviene destacar algunos hechos importantes. En primer lugar, el estado de tensiones no se ha elegido arbitrariamente sobre la circunferencia máxima, sino que dicha circunferencia es el único lugar de los posibles estados de tensiones. En efecto, la deformación plana se produce en direcciones normales al eje z . Por lo tanto, el único lugar posible de los estados de deformación es la circunferencia obtenida dando ese valor al ángulo correspondiente (recuérdese la deducción del diagrama de Mohr tridimensional). Además, por lo visto en el punto 4.3.1, los diagramas de incremento de deformación y los de tensiones son proporcionales en el campo plástico. Es por ello que el único lugar posible de los estados de tensiones es la circunferencia máxima y en las figuras que se hagan de aquí en adelante se omitirán las dos circunferencias internas.

Otro hecho a tenerse en cuenta es que la tensión intermedia, σ_z , es justamente el de la tensión esférica, o componente hidrostática, que se designa con $-p$.

Además, si a un ángulo 2θ en sentido antihorario respecto del plano en consideración se halla una dirección en que la distorsión es máxima y la velocidad de alargamiento nula (punto I en la Fig. 1b), debido a la coaxialidad de los tensores de tensiones y de incrementos de deformación, en la misma dirección el estado de tensiones se representa por el punto I en la Fig. 1a. O sea, la tensión tangencial alcanza su valor máximo y la normal el de la componente hidrostática. A 180° en los diagramas de Mohr, o sea a 90° en el plano físico, existe una dirección con características semejantes (punto II de ambos diagramas) en que la tensión tangencial y la distorsión alcanzan valores mínimos.

Interesa conocer ahora cuánto es el valor de la tensión tangencial máxima. Para ello se aplica el criterio de fluencia de von Mises al estado particular de tensiones existente, con lo que se obtiene:

$$\frac{1}{4} (\sigma_x - \sigma_y)^2 + \tau_{xy}^2 = k^2 \quad (7.3)$$

Para este estado de tensiones se tiene también que los valores máximo y mínimo están dados por:

$$\sigma_{\max}^{\min} = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} \pm \sqrt{\frac{(\sigma_x - \sigma_y)^2}{4} + \tau_{xy}^2} \quad (7.4.)$$

Aplicando el criterio de Tresca, resulta:

$$k = \sqrt{\frac{(\sigma_x - \sigma_y)^2}{4} + \tau_{xy}^2} \quad (7.5)$$

La expresión (7.5) es formalmente igual a la (7.3). Difieren en los valores de k , que valen $\sqrt{3}/2$ para el criterio de Tresca e $\sqrt{3}/3$ para el de Von Mises. De todos modos, esto refuerza la justificación del uso de la circunferencia máxima en el diagrama de Mohr, ignorando el efecto de la tensión σ_z .

De modo que los lugares I y II de los diagramas de tensiones y de incrementos de deformación darán dos familias de curvas ortogonales a lo largo de las cuales la tensión tangencial es la de fluencia y sobre las que la distorsión angular es máxima en valor absoluto. Estas dos familias de curvas se conocen como "líneas de deslizamiento". La solución de un problema de deformación plástica mediante este método implica, en primer lugar, hallar estas líneas de deslizamiento. Una vez halladas las mismas, se convierten en el sistema de referencia a usar. En efecto, los elementos de material plástico que se analizan no son los cartesianos sino los formados por líneas de deslizamiento próximas, como se ve en la Fig. 2.

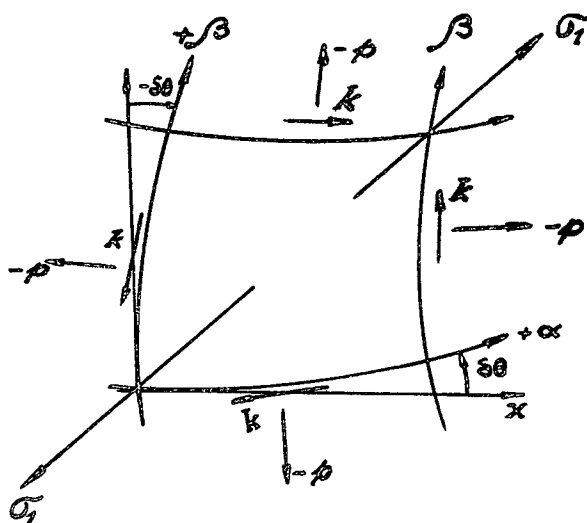


Fig. 2

En dicha figura se puede ver el estado de tensiones que actúa sobre las líneas de deslizamiento, definido por la componente hidrostática $-p$ y la tensión de fluencia por corte, k . Dado que esta última tiene un valor conocido, el segundo paso en la solución de un problema plástico con este método consiste en hallar el valor de $-p$ en los puntos en consideración.

Las dos familias de curvas se designan con α y β . Algunas veces se las identifica como primera y segunda línea de corte respectivamente. Es importante tener una convención que las distinga, por los motivos que se analizan más adelante. En lo que sigue, se adopta el siguiente criterio: si se pasa de la dirección positiva de una línea α a la positiva de una β mediante un giro antihorario (o sea si α y β forman un sistema dextrogiro), la tensión principal algebraicamente mayor (σ_1) debe yacer en el primero y tercer cuadrante del sistema formado por α y β .

Los ángulos antihorarios se consideran positivos.

7 1.2 Plano físico y plano de tensiones

Conocido el estado de tensiones en un punto, es factible hallar en el mismo las

direcciones de las líneas α y β por un procedimiento gráfico.

Supóngase que en el punto P el estado de tensiones es $\sigma_x, \sigma_y, \tau_{xy}$, representado en el diagrama de Mohr como ilustra la fig. 5b. Debe destacarse que en esta construcción las tensiones tangenciales se grafican con signo cambiado.

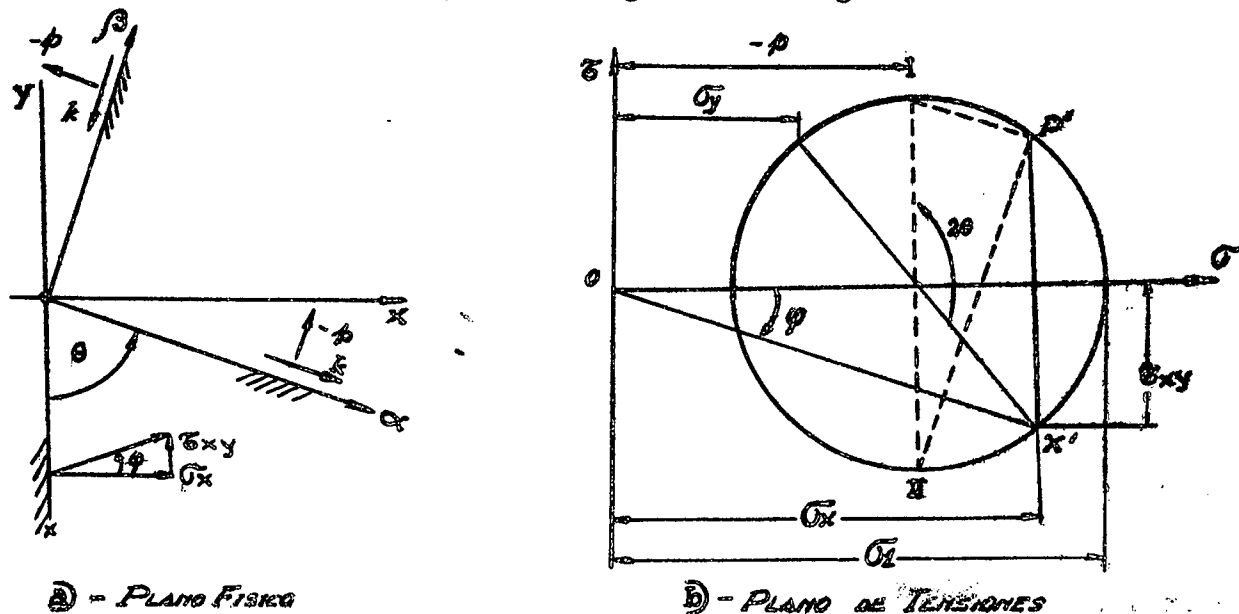


Fig. 3

Si X' es el punto que representa en el diagrama de Mohr a las tensiones actuales sobre el plano PX , una paralela a dicho plano trazada por X' corta al círculo de Mohr en un punto P' que se denomina polo. Su importancia radica en que si por ese punto se traza una paralela a cualquier plano, la intersección de esa paralela con el círculo de Mohr da el estado de tensiones actuante sobre el plano en cuestión. Recíprocamente, conocido un estado de tensiones, es posible obtener la dirección del plano sobre el que actúa. Además, el ángulo que forma la tensión resultante sobre un plano es de igual magnitud pero de sentido opuesto al que forma el vector posición del estado de tensiones con el eje positivo de las tensiones normales.

Estas propiedades se usan para hallar las direcciones de las líneas α y β y el sentido de la tensión de corte sobre las mismas, como se ve en la Fig. 3. Puede demostrarse que las paralelas a P'I y a P'II son líneas α y β respectivamente, porque de este modo se cumple la convención enunciada en el punto anterior, lo que también se puede demostrar con la Fig. 3, hallando el plano sobre el que actúa σ_1 .

El diagrama de Mohr, usado en la forma descrita, se denomina a veces plano de tensiones, y las relaciones vistas ligarían a dicho plano con el físico.

7 1.3 Ecuaciones de equilibrio en las líneas de deslizamiento

Puede verse en la Fig.1 que:

$$\begin{aligned}\sigma_x &= -p + k \sin 2\theta \\ \sigma_y &= -p - k \sin 2\theta \\ \tau_{xy} &= -k \cos 2\theta\end{aligned}\quad (7.6)$$

Las ecuaciones de equilibrio para el estado de deformación plana se reducen a:

$$\begin{aligned}\frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} &= 0 \\ \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} &= 0\end{aligned}\quad (7.7)$$

Si se aplican estas condiciones al estado definido por (6) se obtiene:

$$\begin{aligned}-\frac{\partial p}{\partial x} + 2k \cos 2\theta \frac{\partial \theta}{\partial x} + 2k \sin 2\theta \frac{\partial \theta}{\partial y} &= 0 \\ -\frac{\partial p}{\partial y} - 2k \cos 2\theta \frac{\partial \theta}{\partial y} + 2k \sin 2\theta \frac{\partial \theta}{\partial x} &= 0\end{aligned}\quad (7.8)$$

Dado que la elección de las coordenadas x , y es arbitraria puede suponerse que en el punto que se está analizando son tangentes a las líneas α y β respectivamente. Si se designan con dS_α y dS_β a dos elementos diferenciales de dichas líneas se obtiene para esta posición particular de los ejes (ver fig. 1 y 2):

$$dS_\alpha = dx \quad dS_\beta = dy \quad \theta = \frac{\pi}{2}\quad (7.9)$$

Esto implica que es lo mismo derivar con respecto a los ejes coordenados que sobre las líneas de deslizamiento. De esta manera las ecuaciones (7.8) se transforman en:

$$\begin{aligned}-\frac{\partial p}{\partial S_\alpha} - 2k \frac{\partial \theta}{\partial S_\alpha} &= 0 = \frac{\partial}{\partial S_\alpha} (-p - 2k \theta) \\ -\frac{\partial p}{\partial S_\beta} + 2k \frac{\partial \theta}{\partial S_\beta} &= 0 = \frac{\partial}{\partial S_\beta} (-p + 2k \theta)\end{aligned}\quad (7.10)$$

Puesto que no se hizo ninguna restricción sobre el punto en que se efectúa el análisis de las condiciones de equilibrio, las ecuaciones (7.10) son válidas a lo largo de todas las líneas de deslizamiento. Dichas ecuaciones se suelen expresar de la siguiente manera:

$$\begin{aligned}
 p + 2 k \theta &= C_1 = \text{constante} && \text{sobre una línea } \alpha \\
 p - 2 k \theta &= C_2 = \text{constante} && \text{sobre una línea } \beta
 \end{aligned}
 \tag{7.11}$$

Las ecuaciones (7.11) se deben a Hencky. Son muy útiles, por cuanto permiten determinar el valor de p en cualquier punto de la línea de deslizamiento, una vez conocida la constante de esa línea. Esta constante se puede determinar en un punto en que el estado de tensiones sea conocido.

7.1.4 Problemas estáticamente determinados

Las condiciones de equilibrio y el criterio de fluencia suministran un sistema de tres ecuaciones con tres incógnitas, σ_x , σ_y , τ_{xy} . Dadas condiciones de borde adecuadas, puede ser posible resolver estas ecuaciones sobre el área plástica en estudio y determinar de este modo la distribución de tensiones sin referencia a las leyes que relacionan a las tensiones con las deformaciones. Tales problemas se conocen como estáticamente determinados.

En la mayor parte de los problemas, sin embargo, las condiciones de borde no son expresables convenientemente como tensiones, sino que involucran velocidades. En estos casos, conocidos como estáticamente indeterminados, la solución puede obtenerse únicamente considerando en forma conjunta a las tensiones y a las velocidades.

Conviene destacar, de todos modos, que la solución de un problema mediante el método de líneas de deslizamiento no es en general, única, por los motivos que se verán al analizar los teoremas del límite

7.1.5 Propiedades de las líneas de deslizamiento

Las líneas de deslizamiento presentan algunas propiedades que son muy útiles para su construcción. En este punto se verán las determinadas por los dos teoremas de Hencky y Prandtl.

7.1.5.1 Primer Teorema de Hencky:

Este teorema establece lo siguiente: "El ángulo formado por la tangente de dos líneas dadas de una familia en sus puntos de intersección con las líneas de deslizamiento de la segunda familia es constante a lo largo de cada familia de líneas".

Para demostrar este teorema se hace uso de las ecuaciones (7.11). En la Fig. 4 se representa un elemento formado por cuatro líneas de deslizamiento.

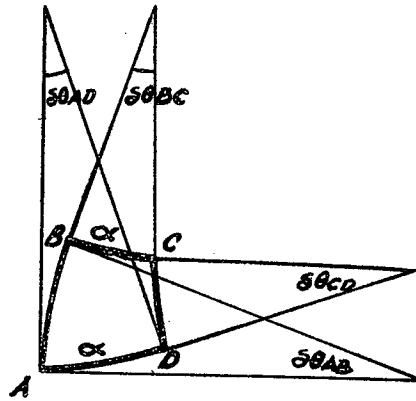


Fig. 4

Para demostrar el teorema se analiza la diferencia de presiones entre C y A. Esta diferencia debe ser única, no interesando por lo tanto la trayectoria recorrida para llegar de A hasta C.

Si la trayectoria es $A \rightarrow B, B \rightarrow C$, se tiene:

$$A \rightarrow B \text{ (línea } \beta \text{)}: \quad p_B - 2k \cdot \Theta_B = p_A - 2k \cdot \Theta_A$$

$$B \rightarrow C \text{ (línea } \alpha \text{)}: \quad p_C + 2k \cdot \Theta_C = p_B + 2k \cdot \Theta_B$$

Por lo tanto:

$$p_C - p_A = 2k (2 \Theta_B - \Theta_A - \Theta_C) \quad (7.12)$$

Si la trayectoria es $A \rightarrow D, D \rightarrow C$, se tiene:

$$A \rightarrow D \text{ (línea } \alpha \text{)}: \quad p_D + 2k \cdot \Theta_D = p_A + 2k \cdot \Theta_A$$

$$D \rightarrow C \text{ (línea } \beta \text{)}: \quad p_C - 2k \cdot \Theta_C = p_D - 2k \cdot \Theta_D$$

Por lo tanto:

$$p_C - p_A = 2k (\Theta_A + \Theta_C - 2 \Theta_D) \quad (7.13)$$

Iguando (7.12 y (7.13) se demuestra que

$$\Theta_D - \Theta_C = \Theta_A - \Theta_B \quad (7.14)$$

que es lo establecido por el primer teorema de Hencky.

7.1.5.2.

Segundo teorema de Hencky:

Establece que a medida que se recorre una línea de deslizamiento, los radios de curvatura de las líneas de deslizamiento de la otra familia en los puntos de intersección varían en una cantidad igual a la distancia recorrida.

Este teorema se puede demostrar analizando lo que ocurre en la Fig. 5

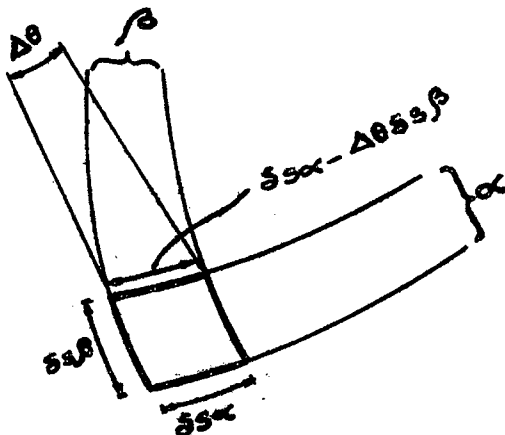


Fig. 5

Los radios de curvatura R_α y R_β de las líneas α y β están definidos por las ecuaciones:

$$\frac{1}{R_\alpha} = \frac{\partial \theta}{\partial S_\alpha} \quad \frac{1}{R_\beta} = - \frac{\partial \theta}{\partial S_\beta} \quad (7.15)$$

(debe tenerse en cuenta que los ángulos antihorarios son positivos y negativos los horarios)

Consideréanse dos líneas β próximas y sea $\Delta \theta$ el ángulo pequeño constante entre las mismas en los puntos de intersección con las líneas α , de acuerdo con lo visto en el primer teorema. Si δS_α es pequeño, puede asimilarse a un arco de círculo y por lo tanto.

$$R_\alpha \Delta \theta = \delta S_\alpha \quad (7.16)$$

De aquí surge que:

$$\frac{\partial}{\partial S_\beta} (R_\alpha \Delta \theta) = \frac{\partial}{\partial S_\beta} (\delta S_\alpha) = - \Delta \theta \quad (7.17)$$

como se puede desprender de la Fig. 5. Dado que $\Delta \theta$ es constante, como se vió en el punto anterior, puede sacarse fuera del operador en el primer miembro de (7.17), por lo que resulta

de deslizamiento por cuanto, una vez establecido el estado de tensiones, se puede aplicar la construcción de la Fig. 3, analizada en el punto 1.2.

7.1.7.1 Método numérico de construcción de campos de líneas de deslizamiento

Supóngase que se conocen las líneas de deslizamiento A-P y A-B y que deben construirse las líneas que pasen por el punto Q, cuyas coordenadas se desconocen. La construcción debe ser tal que se respete la constancia en los incrementos de ángulos, como se estableció en el primer teorema de Hencky.

El análisis se efectúa sobre un elemento ABPQ Como el indicado en la Fig. 8.

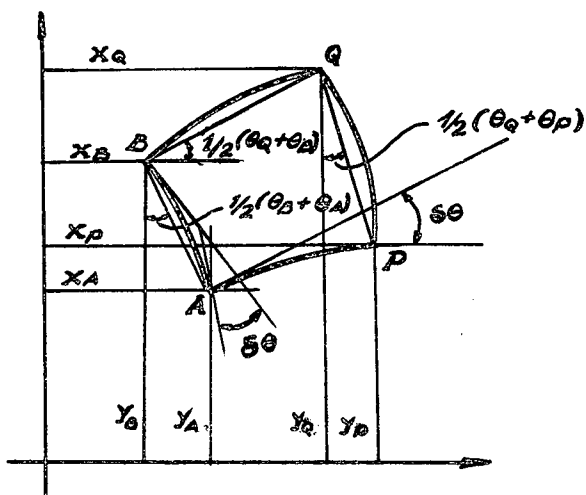


Fig. 8

Por el primer teorema de Hencky se puede determinar el ángulo θ_Q . En efecto, θ_Q debe ser tal que

$$\theta_Q - \theta_P = \theta_B - \theta_A$$

La posición del punto Q se determina entonces por la condición de que es el punto de intersección de dos pequeños arcos cuyas tangentes finales se conocen. La primera solución más simple consiste en reemplazar dicho arco por una cuerda cuya pendiente es la semisuma de las pendientes terminales. Es lo que se ha hecho en la Fig. 8. Por condiciones geométricas se tiene entonces que:

$$\begin{aligned} y_Q - y_P &= \left[-\cotg \frac{1}{2} (\theta_Q + \theta_P) \right] (x_Q - x_P) \\ y_Q - y_B &= \left[\tg \frac{1}{2} (\theta_Q + \theta_B) \right] (x_Q - x_B) \end{aligned} \quad (7.20)$$

De aquí pueden despejarse las coordenadas del punto Q, que resultan de la forma:

$$x_Q = \frac{Y_B - Y_P + ax_P - bx_B}{a - b}$$

(7. 21)

$$Y_Q = \frac{ay_B - by_P + abx_P - abx_B}{a - b}$$

donde: $a = \cotg \frac{1}{2} (\theta_Q + \theta_P)$

$$b = \tg \frac{1}{2} (\theta_Q + \theta_B)$$

(7. 22)

7 1.7.2 Método de la secante

Supóngase conocidas las líneas de deslizamiento A-P y A-B (ver Fig. 9). Se requiere hallar el punto Q de intersección de otras dos líneas que pasen por B y por P respectivamente.

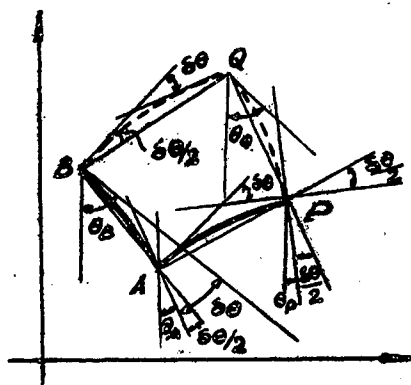


Fig. 9

Debe mantenerse, por lo ya visto, la constancia de $\delta\theta$.

Para hallar Q se trazan cuerdas que forman ángulos iguales a $\delta\theta/2$ con las normales en los puntos B y P. El signo de los ángulos depende de la curvatura de las líneas de deslizamiento. La intersección de las cuerdas da el punto Q.

7 1.7.3 Método de la cuña

Este método se debe a Thomsen. Consiste en reemplazar al cuadrado curvilíneo formado por líneas adyacentes en una red equiangular por cuñas (ver Fig.10).

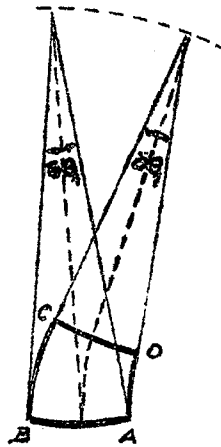


Fig. 10

De este modo, conocida la línea BC, se puede determinar la AD, haciendo rotar la cuña de manera tal que uno de sus lados permanezca siempre tangente a la línea BC.

7.1.8 Ecuaciones de velocidad a lo largo de las líneas de deslizamiento

En el punto 1.4 se vió que existen problemas estáticamente determinados y problemas en los que las condiciones de borde involucran a tensiones y a velocidades. En estos casos es, pues, necesario analizar las velocidades en el campo plástico trazado para ver si coinciden con algunas propiedades de las líneas de deslizamiento que se desarrollan a continuación y si cumplen con las condiciones de borde. En otros términos, es necesario establecer si el campo de velocidades asociado a una solución con líneas de deslizamiento es compatible con las condiciones del problema. Esto se analiza trazando la hodógrafa.

Las relaciones que se deben tener en cuenta al estudiar el campo de velocidades son:

- a) Ecuaciones de continuidad
- b) Discontinuidad de velocidades a lo largo de ciertas líneas

7.1.8.1 Ecuaciones de continuidad

Supóngase que en la Fig. 11, u y v sean las componentes de velocidades de una partícula en el punto O a lo largo de un par de líneas de deslizamiento α y β . La línea α forma un ángulo θ con el eje Ox .

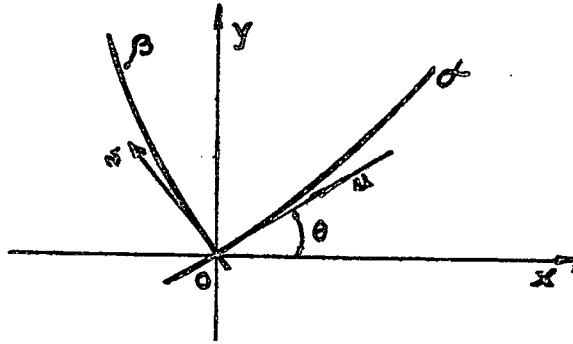


Fig. 11

Las componentes de las velocidades en las direcciones cartesianas son:

$$\left. \begin{aligned} u_x &= u \cos \theta - v \sin \theta \\ v_y &= u \sin \theta + v \cos \theta \end{aligned} \right\} \quad (7.23)$$

Si la línea α es tangente en O al eje Ox

$$\begin{aligned} \theta &= 0 \\ dx &= ds_\alpha \end{aligned} \quad (7.24)$$

Las derivadas de (6.23) en estas condiciones dan la variación de las velocidades a lo largo de las líneas. Esta variación debe ser tal que cumpla con las condiciones de deformación establecidas para las líneas de deslizamiento. Estas indican que sobre las mismas no puede haber ni alargamiento ni acortamiento (ver diagrama de Mohr de incrementos de deformación de la Fig.1). O sea:

$$\frac{\partial u_{s_\alpha}}{\partial s_\alpha} = 0 = \frac{\partial u}{\partial s_\alpha} - v \frac{\partial \theta}{\partial s_\alpha}$$

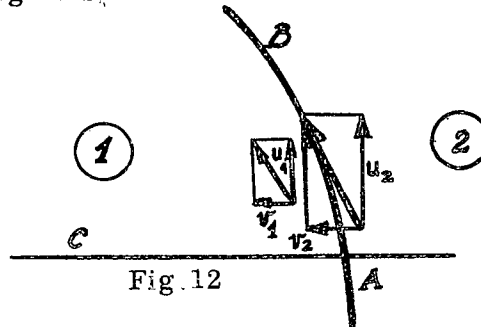
$$\begin{array}{ll} \text{O sea:} & du - v d\theta = 0 \quad \text{sobre una línea } \alpha \\ \text{Análogamente} & dv + u d\theta = 0 \quad \text{sobre una línea } \beta \end{array} \quad (7.25)$$

Las ecuaciones (7.25) se deben a Geiringer y se conocen con su nombre. Representan a las ecuaciones de continuidad sobre las líneas de deslizamiento, estableciendo que en las mismas no puede haber ni alargamiento ni acortamiento.

7.1.8.2 Discontinuidad de velocidades a lo largo de ciertas líneas

A continuación se analiza el estado de velocidades en dos regiones adyacentes de material, separadas por una línea de deslizamiento. La condición de incompresibilidad implica que las componentes normales de las velocidades a ambos lados de la línea deben ser iguales (ello se debe a que, al no haber alargamiento ni acortamiento en la dirección de las líneas, tampoco lo hay en dirección normal).

En la Fig. 12, AB es la línea de deslizamiento α y AC la línea β . Las regiones de material se designan con 1 y 2 y las velocidades correspondientes están descompuestas según las direcciones tangentes a ambas líneas



Por las razones expuestas: $V_1 = V_2$

Si a esta condición se aplica la ecuación de Geiringer (7.25) correspondiente a una línea α se obtiene:

$$du_1 = du_2$$

Esto implica que $u_2 = u_1 = \text{constante sobre una línea } \alpha$ (7.26 a)

Análogamente puede demostrarse que

$$V_2 - V_1 = \text{constante sobre una línea } \beta$$
 (7.26 b)

El significado físico de las ecuaciones (7.26) es el siguiente:

A lo largo de una línea de deslizamiento, la discontinuidad en la velocidad tangencial permanece constante. Para un campo dado, esta discontinuidad es nula en muchas líneas. Aquéllas en que no lo es se conocen como líneas de discontinuidad.

En realidad, una discontinuidad de velocidades no se produce bruscamente en una línea, sino que abarca una zona estrecha de material de la que la línea es el límite idealizado.

7.1.9. Solución completa

Cuando se analiza un problema mediante el método de las líneas de deslizamiento, es factible hallar más de una solución que satisfaga las relaciones vistas y las condiciones de velocidades. Indudablemente, sólo una es la solución correcta, conocida como solución completa.

Para probar que una solución es completa, es necesario demostrar:

- Que el incremento de trabajo plástico es positivo en todos los puntos del campo.
- Que el material adyacente al campo plástico propuesto es capaz de soportar las tensiones que éste le transmite.

La primera condición es evidente, puesto que debe entregarse trabajo a un material para poder deformarlo. Esto debe cumplirse en cualquier punto del campo analizado.

La segunda se debe a que en la teoría de los campos de líneas de deslizamiento se presupone que el material es rígido plástico. Esto implica que más allá de los límites del campo plástico el material se supone rígido y no afectado por las tensiones que se le transmiten a través de dichos límites. Esta condición se cumple en la medida en que en ninguna parte del cuerpo supuesto rígido se viole al criterio de fluencia.

Hay muy pocas soluciones completas halladas hasta la fecha. Sin embargo, los campos de líneas de deslizamiento que satisfagan a las condiciones de velocidad suelen ser lo bastante aproximadas como para servir en una gran parte de los procesos de trabajado en que exista deformación plana.

7 2 Teoremas del límite

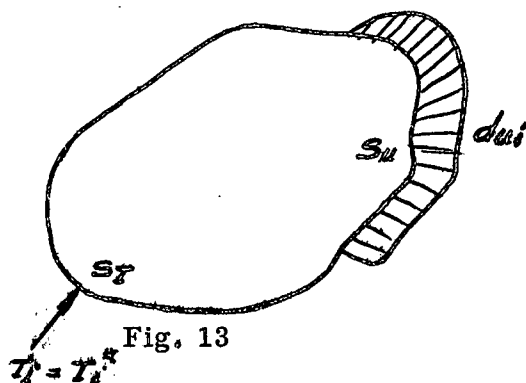
En muchos problemas de trabajado de metales es difícil hallar la solución exacta de la fuerza o del momento necesarios para efectuarlos, por las razones ya vistas.

Con los teoremas del límite se pretende acotar la carga necesaria entre dos valores. De éstos, se sabe que seguramente uno de ellos constituye una sobre-estimación -el límite superior- mientras que el otro es una subestimación -el límite inferior. De las dos, desde el punto de vista del conformado de los metales, el que más interesa es el límite superior. De este modo se pueden dimensionar las máquinas para ejecutar una operación determinada. Por supuesto que puede haber muchos límites superiores y muchos inferiores. Cuanto más próximos estén ambos, más acotada estará la carga.

En lo que sigue, se da una demostración de los dos teoremas del límite y se discute con un poco más de detalle la aplicación del superior. Se supone al material rígido-plástico.

7 2.1 Teorema del límite inferior

Supóngase que sobre un cuerpo de volumen V y de superficie total S estén especificadas las tensiones superficiales, dadas por las fuerzas T_i , sólo en una parte de la superficie que se designa con S_T . También están especificados los incrementos de desplazamiento, du_i , sobre una porción de la superficie S_u . Esto se indica en la Fig. 13.



Se designa con $\bar{\sigma}_{ij}^*$ a cualquier campo de tensiones definido en el cuerpo que satisfaga a las condiciones de equilibrio

$$\frac{\partial \bar{\sigma}_{ij}}{\partial x_i} = 0$$

a las condiciones de borde sobre S_T , y que en ninguna parte viola al criterio de fluencia.

El estado de tensiones realmente existente en el cuerpo se designa con $\bar{\sigma}_{ij}$. Este campo está en equilibrio en todo el cuerpo y en particular lo está con las fuerzas superficiales T_i sobre la superficie S_T .

Por el principio de los trabajos virtuales:

$$\int_S T_i du_i dS = \int_V \bar{\sigma}_{ij} d\epsilon_{ij} dV = \int_V \bar{\sigma}_{ij}' d\epsilon_{ij} dV \quad (7.27)$$

$\bar{\sigma}_{ij}'$ son las componentes desviadoras del estado de tensiones $\bar{\sigma}_{ij}$. La ecuación anterior establece por lo tanto, que el trabajo efectuado por las fuerzas exteriores es igual al trabajo plástico interno.

Se designa con T_i^* a cualquier sistema de fuerzas exteriores asociadas con el campo de tensiones ficticio $\bar{\sigma}_{ij}^*$. Este sistema debe ser tal que

$$T_i = T_i^* \quad \text{sobre } S_T \quad (7.28)$$

Si se aplica el principio de los trabajos virtuales a este sistema, se obtiene:

$$\int_S T_i^* du_i dS = \int_V \bar{\sigma}_{ij}^* d\epsilon_{ij} dV = \int_V \bar{\sigma}_{ij}' d\epsilon_{ij} dV \quad (7.29)$$

Es de recalcar que en ambos sistemas se supone que las deformaciones son las mismas. Ahora bien

$$\begin{aligned} \int_S T_i^* du_i dS &= \int_{S_u} T_i^* du_i dS + \int_{S_T} T_i^* du_i dS \\ &= \int_{S_u} T_i^* du_i dS + \int_{S_T} T_i du_i dS \end{aligned} \quad (7.30)$$

debido a (7.28).

La ecuación (7.27) puede escribirse también de la siguiente manera:

$$\int_{S_T} T_i du_i dS + \int_{S_u} T_i du_i dS = \int_V \bar{\sigma}_{ij}' d\epsilon_{ij} dV \quad (7.31)$$

y la ecuación (7.29) usando la (7.30) resulta:

$$\int_{S_u} T_i^* du_i dS + \int_{S_T} T_i du_i dS = \int_V \bar{\sigma}_{ij}' d\epsilon_{ij} dV \quad (7.32)$$

Restando (7.32) de (7.31) se obtiene:

$$\int_{S_u} (T_i - T_i^*) du_i dS = \int_V (\bar{\sigma}_{ij}' - \bar{\sigma}_{ij}^*) d\epsilon_{ij} dV \quad (7.33)$$

Por lo visto en el punto 4.7, el segundo miembro de la ecuación (33) es siempre mayor o igual que cero. Ello implica que:

$$\int_{S_u} T_i du_i dS \geq \int_{S_u} T_i^* du_i dS \quad (7.34)$$

La ecuación (7.34) provee el límite inferior. Por la misma se establece que: "Cuando un cuerpo está fluyendo y sufre pequeños incrementos de desplazamiento, el incremento de trabajo efectuado por las fuerzas reales sobre la superficie en que están definidos los desplazamientos es mayor o igual que el efectuado por las fuerzas superficiales de cualquier otro campo de tensiones estáticamente admisible".

7.2.2 Teorema del límite superior

En el teorema anterior se puso el énfasis en el estado de tensiones imaginario, que debía cumplir con las condiciones de equilibrio. No se planteó ninguna restricción al estado de deformaciones.

Cuando se analiza el límite superior se cambia el enfoque y se pone el acento sobre el estado de deformaciones, en la forma que se detalla a continuación. No se hace ninguna restricción al estado de tensiones, que puede no cumplir con las condiciones de equilibrio.

Se designa con du_i al campo de incrementos de desplazamiento existente en el cuerpo que se analiza. Cualquier otro campo supuesto se indica con du_i^* . Ese campo debe ser tal que

$$du_i^* = du_i \quad \text{sobre } S_u \quad (7.35)$$

siendo S_u una parte de la superficie, en que se conocen los incrementos de desplazamiento. Ambos campos deben ser tales que se cumpla la incompresibilidad del material porque en caso contrario las componentes esféricas de tensiones realizarían trabajo. O sea, se debe cumplir que:

$$\frac{\partial u_i^*}{\partial x_i} = 0 = \frac{\partial u_i}{\partial x_i} \quad (7.36)$$

Esta condición puede usarse para elegir un campo determinado de incrementos de desplazamiento. En un campo tal, que sea cinemáticamente admisible, puede haber discontinuidades en las componentes tangenciales a los largo de ciertas superficies S_D . Las componentes normales deben ser iguales a cada lado (como se vió en las líneas de deslizamiento), para que no se produzca cambio de volumen.

Se tiene, entonces, un cuerpo del que se conocen los incrementos de desplazamientos cinemáticamente admisible, con algunas superficies S_D^* (también supuestas),

sobre las cuales existen discontinuidades tangenciales. A partir de du_i^* se obtienen los incrementos de deformación plástica $d\epsilon_{ij}^*$ de la manera ya vista.

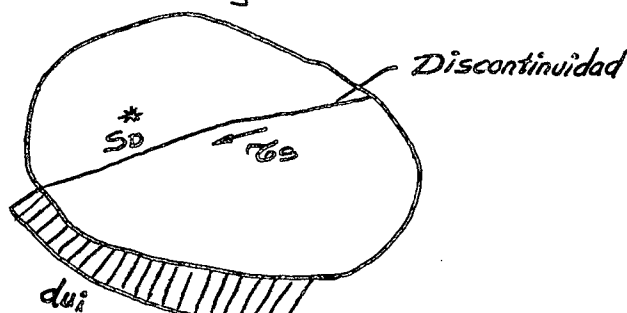


Fig. 14

Si se aplica el principio de los trabajos virtuales al campo de incrementos de desplazamiento cinemáticamente admisible y al de tensiones reales $\bar{\sigma}_{ij}$, se obtiene:

$$\int_S T_i du_i^* dS = \int_V \bar{\sigma}_{ij} d\epsilon_{ij}^* dV + \sum \int_{S_D^*} \tau_s |dr^*| / dS_D^* \quad (7.37)$$

donde dv^* es la discontinuidad en el incremento de desplazamiento tangencial sobre una superficie S_D^* . τ_s es la componente de corte de $\bar{\sigma}_{ij}$ en la dirección de dicha discontinuidad.

Si se designa con $\bar{\sigma}_{ij}^*$ a un campo de tensiones asociado al de deformaciones $d\epsilon_{ij}^*$ (o sea colineal), por lo visto en el punto 4.7, se cumple que:

$$\int_V (\bar{\sigma}_{ij}^* - \bar{\sigma}_{ij}) d\epsilon_{ij}^* dV \geq 0 \quad (7.38)$$

Aplicando (38) a (37), y reemplazando τ_s por el valor de k dado por el criterio de fluencia (para que exista deformación, debido a que se consideran cuerpos rígidos-plásticos), se obtiene:

$$\int_S T_i du_i^* dS \leq \int_V \bar{\sigma}_{ij}^* d\epsilon_{ij}^* dV + \sum \int_{S_D^*} k |dr^*| / dS_D^* \quad (7.39)$$

Por otra parte, por propiedad de las integrales y por (35)

$$\int_S T_i du_i^* dS = \int_{S_u} T_i du_i dS_u + \int_{S_T} T_i du_i^* dS_T \quad (7.40)$$

En consecuencia:

$$\int_{S_u} T_i du_i dS_u \leq \int_V \bar{\sigma}_{ij}^* d\epsilon_{ij}^* dV + \sum \int_{S_D^*} k |dr^*| / dS_D^* - \int_{S_T} T_i du_i^* dS_T \quad (7.41)$$

El segundo miembro de (7.41) establece así un límite superior para las cargas que han de deformar al cuerpo.

En la mayor parte de los problemas de conformado de los metales, el último término del segundo miembro de (7.41) se anula, dado que el cuerpo en consideración está

rodeado por una matriz rígida o por una parte rígida del mismo metal, o por superficies libres en que las fuerzas externas son nulas.

Además se suele tratar al cuerpo que se deforma como si estuviese formado por bloques rígidos de material separados por líneas de discontinuidad de desplazamiento tangencial. Esto hace que se anule la primera integral del segundo miembro de (7.11). De manera que la formulación del límite superior resulta de la siguiente manera :

$$\int_{S_u} T_i du_i ds < \sum \int_{S_D^*} k |dv^*/ds_D^*| \quad (7.12)$$

7.2.2.1

Ejemplo de aplicación del teorema del límite superior en deformación plana.

Considerese un paralelepípedo rígido de un material, de altura unitaria, definido por ABCD en la Fig. 15a, moviéndose hacia la izquierda con una velocidad unitaria. El espesor normal al plano de la figura se considera también unitario. Dado que se está produciendo deformación plana, ésta es igual en todos los planos paralelos al de la figura.

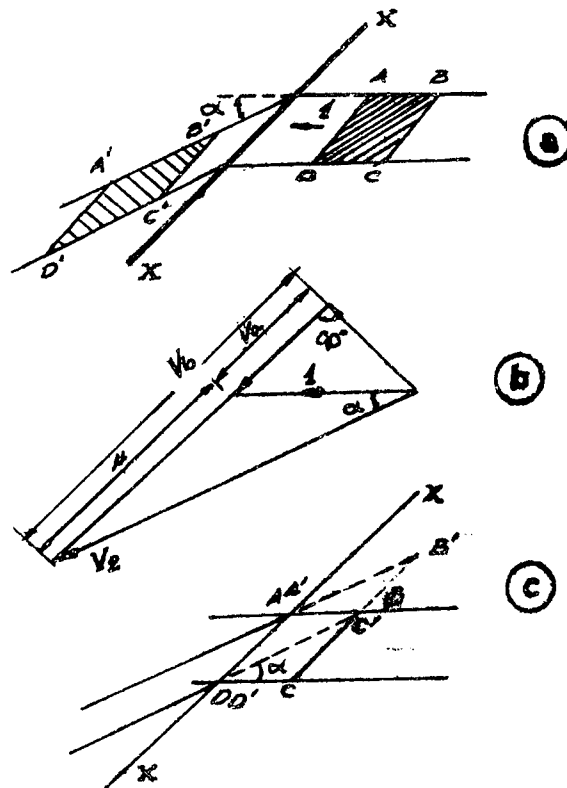


Fig. 15

Todo el material a la izquierda de XX es rígido. Luego de cruzar la línea XX, el paralelogramo ABCD se distorsiona a su nueva forma A'B'C'D', moviéndose en una nueva dirección que forma un ángulo α con la original a una velocidad v_2 . Se supone

que $\overline{AD}$ es paralelo a XX .

La hodógrafa de la Fig. 15b representa las velocidades. La velocidad unitaria original puede resolverse en las componentes v_p y v_a , perpendicular y paralela a XX respectivamente. Para cada partícula del material a la izquierda de XX , las componentes son respectivamente v_p y v_b . v_p debe ser la misma a ambos lados de XX por la condición de incomprensibilidad ya vista. La diferencia entre v_b y v_a representa a la discontinuidad de velocidad tangente a XX . Esta discontinuidad es la responsable del cambio de forma de $ABCD$ a $A'B'C'D'$. En la realidad no puede ser instantáneo el cambio de forma, sino que se produce en forma gradual a lo largo de una franja, cuyo límite idealizado es la línea XX .

A continuación se analiza el trabajo efectuado en el cambio de forma del bloque en consideración. Dado que $\overline{AD}$ es inicialmente paralelo a XX , este segmento, y todos los paralelos al mismo no variarán su posición al atravesar dicha línea. En la Fig. 15c se ubican $ABCD$ y $A'B'C'D'$ de manera tal que poseen un lado en común, AD . Si k es la tensión de corte sobre lados opuestos del bloque, el trabajo realizado es $(k \cdot \overline{BC}) \cdot \overline{CC'}$. Este trabajo, expresado en forma de velocidad de disipación de energía interna es $(k \cdot \overline{BC}) \cdot \overline{CC'}/t$, donde t es el tiempo que tarda $\overline{DC}$ en cruzar XX . Dado que el bloque se mueve con una velocidad unitaria, esto puede escribirse $(k \cdot \overline{BC}) \cdot \overline{CC'}/\overline{DC}$.

Si se compara el triángulo $C'DC$ y la hodógrafa, se observa que, por semejanza

$$\frac{\overline{CC'}}{\overline{DC}} = u$$

de modo que la velocidad de disipación de energía interna resulta:

$$\dot{E} = k \cdot \overline{BC} \cdot \frac{\overline{CC'}}{t} = k \cdot \overline{BC} \cdot \frac{\overline{CC'}}{\overline{DC}} = k \cdot \overline{BC} \cdot u = k \cdot \overline{AD} \cdot u \quad (7.43)$$

O sea, en general, considerando todo el material que se deforma a lo largo de la línea XX :

$$\dot{E} = k \cdot u \cdot s \quad (7.44)$$

donde s es la longitud de la línea XX . Si ésta fuese curva, u sería distinto en cada punto y se debería expresar la velocidad de disipación de la energía interna mediante

$$\dot{E} = \int k \cdot u \cdot ds \quad (7.45)$$

La forma de hallar un límite superior consiste en determinar líneas como la XX tales que el campo de desplazamientos resultante sea cinemáticamente admisible. El mejor valor del límite superior es, por supuesto, el mínimo.

Por lo visto se desprende que los campos de líneas de deslizamiento no son más que un tipo de solución de límite superior.

BIBLIOGRAFIA

- Mechanical of plastic deformation in metal processing, Thomsen, Yang, Kobayashi (Mc Millan 1965)
- Plasticity for mechanical engineers, Johnson y Mellor (Van Nostrand 1962)
- Advanced mechanics of materials, H. Ford-Alexander (Longmans 1963)
- Theory of plasticity, Hoffman y Sachs (Mc Graw Hill, 1953)