

UNIVERSIDAD NACIONAL DE GENERAL SAN MARTIN
COMISION NACIONAL DE ENERGIA ATOMICA
INSTITUTO DE TECNOLOGIA
“Prof. Jorge A. Sabato”

Hacia una interpretación semiclásica de los sistemas de scattering caóticos (*)

por Lic. Juan M. Pedrosa

Directores

Dr. Gabriel Carlo
Dr. Diego Wisniacki

(*) Tesis para optar por el título de *Doctor en Ciencia y Tecnología,*
mención Física

República Argentina

2012

Resumen

El concepto de resonancia surge del estudio de sistemas oscilatorios en mecánica clásica, ampliándose sus aplicaciones a teorías físicas como el electromagnetismo, la óptica, la acústica y la mecánica cuántica. En este contexto, se define una resonancia como la excitación de un sistema físico al coincidir la frecuencia de una fuerza externa aplicada, con una frecuencia característica del sistema. En problemas de scattering, al estudiar el tránsito de una partícula (proyectil) por una región donde la presencia de otra partícula (objetivo) genera un potencial atractivo, se encuentra que, dependiendo de su energía, el proyectil puede quedar *atrapado* en la región de interacción. La *captura* del proyectil por el objetivo es una manifestación de la resonancia entre las energías de los mismos.

En el contexto de los sistemas cuánticos de scattering, cuya mecánica clásica es caótica, es que se desarrolla este trabajo. Los modelos más sencillos para estos sistemas son los denominados mapas cuánticos.

En este trabajo se desarrolló una teoría de órbitas periódicas cortas en sistemas de scattering, para poder describir semiclásicamente sus autoestados cuánticos (resonancias). Con este fin se construyó una base de funciones de onda localizadas en las inmediaciones de las órbitas periódicas cortas del sistema clásico. A estos entes matemáticos se los denominan funciones de cicatriz. El conjunto formado por las trayectorias es fractal y se denomina repeller. Una de las principales características de esta teoría consiste en la posibilidad de calcular autovalores y autovectores, haciendo uso de las órbitas periódicas más cortas solamente [16].

Nuestra aproximación semiclásica a las resonancias encuentra su mayor virtud en el hecho de reducir considerablemente la dimensionalidad del problema, ya que el número de funciones de cicatriz necesarias en la descripción de estados semiclásicos es un número $N_s < N$, donde N es la dimensión del espacio de Hilbert. Este número proviene de una suerte de densidad de estados en sistemas caóticos de scattering, denominada ley de Weyl fractal, y que nos brinda el número de estados cuánticos que tienen un tiempo de vida mayor. De este modo, construimos semiclásicamente estados como combinación lineal de funciones de cicatriz. Se testeó la eficacia del método cualitativa y cuantitativamente, con resultados alentadores de cara a su aplicación en sistemas realistas y de importancia tecnológica, como los sistemas de microondas o microcavidades ópticas.

Palabras clave: órbitas periódicas cortas, funciones de cicatriz, teoría semiclásica.

Towards a semiclassical approximation of chaotic scattering systems

Abstract

The concept of resonance arises from the study of oscillating systems in classical mechanics and extends its applications to physical theories like electromagnetism, optics, acoustics, and quantum mechanics. In this context, resonance may be defined as the excitation of a system by matching the frequency of an applied force to a characteristic frequency of the system. By studying the movement of a particle (projectile) in a region where the presence of another particle (target) is manifested by an attractive potential, one finds that, depending on their energy, the projectile can be *trapped* in the interaction region. The *capture* of the projectile by the target is a manifestation of resonance between the energies of both.

In the context of scattering systems, whose classical mechanics is chaotic, is that this work is developed. The simplest models for these systems are called quantum maps.

In this paper we've developed a theory of short periodic orbits in open systems, in order to describe semiclassically their quantum eigenstates. For this purpose, we've built a wave functions basis, each of them located at the vicinity of short periodic orbits of the classical system. These mathematical entities are called scar functions. The fractal trapped set formed by the trajectories is known as the repeller. A major feature of this theory is the possibility of calculating eigenvalues and eigenvectors, using only the shortest periodic orbits [16].

Our semiclassical approximation to the eigenfunctions of quantum system finds its greatest virtue in the fact that significantly reduces the dimensionality of the problem, since the necessary number of scar functions in the description of semiclassical states is $N_s < N$, where N is the dimension of the Hilbert space.

This number comes from a kind of density of states in chaotic scattering systems, which is known as the fractal Weyl law and that gives us the number of quantum states with a longer lifetime. Thus, we've built states as a linear combination of functions of scar, following a semiclassical way. We have tested the effectiveness of the method both qualitatively and quantitatively, with encouraging results on its applications in realistic systems, with important technological development like microwave systems or optical microcavities.

Keywords: short periodic orbits, scar functions, semiclassical theory.

a Néstor y Cristina...

Índice general

1. Introducción	4
 I Descripción de los sistemas abiertos	 11
2. Sistemas caóticos de scattering	12
2.1. Secciones o Mapas de Poincaré	13
2.2. Mapas cuánticos	19
2.3. Mapas del panadero	23
2.3.1. Panadero de dos bandas	28
2.4. Mapas del gato	30
3. Leyes de Weyl para la densidad de estados	34
3.1. Densidad de estados	35
3.2. Análisis espectral	37
3.2.1. Resonancias en el plano complejo	38
3.3. Cálculo del número de resonancias	46
3.4. Mapas lineales por partes	49
3.4.1. Ley de Weyl fractal y discontinuidades	50
 II Aproximación semiclásica de órbitas periódicas cortas a las resonancias cuánticas	 54
4. Funciones de scar	55
4.1. <i>Scarring</i>	56
4.2. Construcción de funciones de scar	59
4.2.1. Modos en órbitas periódicas	60
4.2.2. Funciones de scar	62
4.2.3. Funciones de scar en sistemas abiertos	63

5. Método semiclásico de órbitas periódicas cortas	69
5.1. Descripción del método	69
5.2. Autovalores	71
5.3. Autovectores	75
5.4. Análisis cuantitativo del método	82
5.4.1. Eficiencia del método	84
6. Conclusiones	87
Agradecimientos	89
A. Distribución de Husimi en $\mathbb{T}^2$	91
Bibliografía	92

Capítulo 1

Introducción

En 1889, en conmemoración del cumpleaños número 60 del rey Oscar II de Suecia y Noruega, se abrió un concurso con la intención de premiar a la mejor investigación en mecánica celeste en temas referidos a la estabilidad del sistema solar, caso particular de un problema de n cuerpos. Fue declarado ganador el matemático y físico teórico Henri Poincaré, profesor de la Universidad de París, quien proclamó que no era posible predecir el movimiento a tiempos largos de sistemas con algunas partículas interactuando de manera gravitatoria [1]. Nos referimos aquí al famoso *problema de tres cuerpos*. Si bien Poincaré no brindó la solución a dicho problema, quedó planteada la existencia de una nueva especie de sistemas físicos, con evoluciones altamente complejas¹.

Los sistemas que presentan el comportamiento esbozado por Poincaré son denominados caóticos. Tales sistemas continuaron siendo estudiados a la par de dos nuevas teorías que irrumpían en la hegemonía de la física clásica, la mecánica cuántica y la relatividad especial. Su principal característica es la sensibilidad ante variaciones en las condiciones iniciales, ésto es, dos trayectorias cercanas inicialmente en el espacio de fases se separan exponencialmente a una tasa λ , denominada exponente de Lyapunov. Veinte años después del trabajo de Poincaré, Einstein [2] notó que si se dispone de un sistema integrable la relación entre la mecánica clásica y la cuántica puede entenderse fácilmente (fórmulas EBK^2), cuestión que no ocurre si se dispone de un sistema caótico. Esta incompatibilidad entre caos y mecánica cuántica radica fundamentalmente en que el principio de incertidumbre de Heisenberg impi-

¹El matemático Karl Weierstrass, jurado del concurso, opinó acerca del trabajo de Poincaré: “*This work cannot indeed be considered as furnishing the complete solution of the question proposed, but that it is nevertheless of such importance that its publication will inaugurate a new era in the history of celestial mechanics.*”

²Debidas a A. Einstein, L. Brillouin y J.B. Keller.

de definir trayectorias cuánticas, y que la distancia entre estados iniciales se preserva en el tiempo dada la evolución unitaria de los sistemas cuánticos,

$$|\langle \psi_0 | \phi_0 \rangle| = |\langle \psi_0 | U^\dagger(t) U(t) | \phi_0 \rangle| = |\langle \psi_t | \phi_t \rangle|. \quad (1.1)$$

Se define entonces al **Caos Cuántico** como el estudio de la mecánica cuántica de sistemas cuyo correspondiente clásico es caótico. La correspondencia clásico-cuántica entre estos sistemas no es simple y hubo que esperar muchos años para que pudiera establecerse formalmente. En [3] M. Aguiar distingue al método *WKB*³ como pionero en descripciones semiclásicas de sistemas integrables en una dimensión y a J.H. Van Vleck [5] como su extensor natural a una cantidad mayor de grados de libertad. El paso fundamental hacia sistemas caóticos fue dado por Martin Gutzwiller [6], quien relacionó la densidad de estados cuánticos con las órbitas periódicas del sistema clásico mediante la fórmula de trazas que lleva su nombre. Puede considerarse este hecho como el nacimiento (o renacimiento) del caos cuántico, ya que se inició a partir de allí una imponente actividad en el tema, que continúa hasta nuestros días [7].

El principal enfoque que se dio en esa dirección fue el estudio exhaustivo de las distribuciones de los niveles de energía (propiedades espectrales) y las autofunciones de tales sistemas. En la década de 1980 se produjeron dos aportes fundamentales en este campo; uno fue la conjetura de O. Bohigas, M.J. Giannoni y C. Schmit [8], que vinculó a los autovalores de Hamiltonianos *caóticos* con los espectros dados por la teoría de matrices aleatorias [9]. El otro trabajo relevante fue el publicado por Eric J. Heller [10], que detectó la presencia de autofunciones de sistemas cuánticos localizadas en las órbitas periódicas cortas⁴ del sistema clásico, en contraposición al teorema de Schnirelman (o de Ergodicidad Cuántica) que pregona una distribución uniforme sobre una superficie de energía en el espacio de fases [11, 12]. Dichas localizaciones *accidentales* fueron denominadas *scars* (cicatrices) y fueron las musas del estudio de un nuevo fenómeno denominado *scarring* (cicatrización) [13]⁵. Este fenómeno representa un problema interesante de estudio en la actualidad, ya que no se han podido explicar ni su origen preciso ni sus características de mayor relevancia, aun cuando crecen las evidencias experimentales de su existencia en sistemas como por ejemplo fibras ópticas y monocapas de grafeno [14].

³Debido a G. Wentzel, H.A. Kramers y L. Brillouin [4].

⁴Extendiéndose también a lo largo de sus variedades correspondientes.

⁵Estrictamente no se viola lo sugerido Schnirelman pues la ergodicidad se cumple a menos de conjuntos de medida nula, como resultan las órbitas periódicas de un sistema. Luego, el *scarring* es un fenómeno extraño pero que no contradice el teorema de ergodicidad cuántica.

Bajo estos lineamientos, E. Vergini y G.G. Carlo construyeron funciones de onda localizadas en inmediaciones de órbitas periódicas cortas, de vida media extensa, lo cual implica pequeñas dispersiones en energía [15]. Las denominaron funciones de scar o de cicatriz. Dichas funciones reflejan, en el límite semiclásico, la estructura hiperbólica característica de las órbitas inestables. Esta construcción semiclásica se llevó a cabo en el marco de una *teoría de órbitas periódicas cortas* [16, 17], desarrollada para obtener toda la información cuántica de un sistema hamiltoniano ligado cuya contraparte clásica es caótica. Ésto representó una solución al inconveniente generado por el hecho de que el número de órbitas periódicas requerido para calcular niveles de energía vía fórmulas de trazas, creciera exponencialmente con la energía del autoestado, $N_{OP} \simeq \exp(hT_H)/(hT_H)$, siendo h la entropía topológica ⁶ y T_H el tiempo de Heisenberg del sistema ⁷. En cambio, la teoría semiclásica de órbitas periódicas cortas predice que si L_1 es el período de la órbita más corta de todas, L_2 el período de la siguiente y así, el número de órbitas periódicas N_{OP} requerido para el cálculo es tal que $L_1 + L_2 + \dots + L_{N_{OP}} \simeq T_H$. Como resultado, $N_{OP} \simeq hT_H / \ln(hT_H)$. El sistema físico utilizado en la descripción anterior corresponde a un Hamiltoniano autónomo con condiciones de contorno dadas por el billar denominado estadio de Bunimovich [18]. En dicho sistema, los autores obtuvieron expresiones explícitas y sencillas de las primeras 25 autofunciones, usando únicamente las 5 trayectorias periódicas más cortas. Años más tarde E. Vergini, A.M.F. Rivas y D. Schneider [19] y M. Saraceno y L. Ermann [20] extendieron la formulación [16] a mapas lineales en el toro.

En la naturaleza los sistemas no están aislados. Aún en un laboratorio es muy difícil separar completamente un sistema ya que siempre existen interacciones con un ambiente externo, generándose de este modo algún tipo de disipación. Por lo tanto, entender el comportamiento de los sistemas abiertos resulta fundamental. Las propiedades de dichos sistemas no han sido estudiadas en detalle como las de sus contrapartes cerradas, aunque sean de gran importancia en muchas áreas de la física, a saber, puntos cuánticos (balísticos) semiconductores [21], fotoionización de átomos de Rydberg [22], sistemas de microondas [9, 23] y microcavidades ópticas [24]. La diversidad de interacciones y entornos genera una amplia gama de sistemas abiertos, que abarcan a los sistemas difusivos, a los disipativos y a los que no conservan probabilidad (tipo scattering, [25]). En este último caso, la gran diferencia con los sistemas cerrados desde el punto de vista fundamental es que en los sistemas

⁶La entropía topológica da una medida del crecimiento del número de órbitas periódicas con el período.

⁷Puede definirse sencillamente al tiempo de Heisenberg como el tiempo límite de la validez de la aproximación semiclásica.

abiertos el conjunto invariante es generalmente fractal y la correspondencia clásico-cuántica continúa siendo un problema abierto.

El comportamiento de este tipo de sistemas encuentra en los mapas cuánticos [26] a sus modelos matemáticos más sencillos, permitiendo así un estudio menos complejo y una aproximación más simple a sus propiedades espectrales y autofunciones. La evolución temporal de tales sistemas viene dada por un operador no unitario, cuyas autofunciones son no ortogonales y sus autovalores (resonancias) son complejos, de módulo menor o igual a uno. Una de las principales conjeturas sobre las propiedades de los espectros de los sistemas abiertos es que la densidad media de resonancias sigue la ley de Weyl fractal, que proclama que el número de autofunciones con mayor vida media se comporta como $N_\Gamma \sim \hbar^{d/2}$, donde d es una dimensión fractal del repeller clásico [71]. Con esta ley se puede distinguir entre las resonancias de decaimiento instantáneo y las de mayor vida (o menor decaimiento), las cuales contienen la información clásica más relevante, como por ejemplo el conjunto de trayectorias atrapadas a todo tiempo pasado o futuro.

Si bien el fenómeno de *scarring* o cicatrización ha sido descubierto en sistemas cerrados, en 2006 J. Wiersig postuló que en los sistemas abiertos el *scarring* pareciera ser la regla y no la excepción [27]. D. Wisniacki y G.G. Carlo (2008) tomaron la posta de este trabajo y observaron el *scarring* en un punto fijo del mapa del gato cuántico abierto [28].

El interés del fenómeno de cicatrización en estos sistemas de scattering reside en que pueden modelar correctamente muchos experimentos de distintas áreas de la física que presentan un alto grado de desarrollo en la actualidad. Algunos de los ejemplos que queremos enumerar son los microláseres [24, 29] y el scattering caótico [30], donde la distribución de probabilidad de la partícula abandona la región de interés al atravesar una barrera, ya sea porque el potencial es finito o por la existencia de un agujero.

En esta tesis estudiamos propiedades de los sistemas abiertos cuya dinámica clásica es de naturaleza caótica. En particular, nos focalizamos en los sistemas denominados de scattering, donde un conjunto de trayectorias atrapadas forman un conjunto fractal que determina el ADN de la física clásica, pues es el único invariante del sistema. Con este fin nos abocamos a obtener una descripción simple y adecuada tanto de las propiedades clásicas como cuánticas de los mismos. Seleccionamos los modelos más simples que representan a dichos sistemas, como son los mapas cuánticos⁸. Se hizo hincapié en el proceso de apertura del espacio de fases clásico y de las propiedades que de él se desprenden, como por ejemplo la tasa de escape γ y los conjuntos

⁸En particular, nuestro estudio se centró en el mapa del gato y el mapa del panadero de dos y tres bandas.

invariantes hacia adelante $\mathcal{K}^-$ y hacia atrás $\mathcal{K}^+$ en el tiempo, culminando con su intersección: el *repeller* $\mathcal{K}$. Se calcularon las dimensiones fractales de dichos conjuntos para nuestros sistemas. La contraparte cuántica nos llevó a estudiar las propiedades de los operadores no normales, que generan la evolución no unitaria que conlleva a autoestados no ortogonales y autovalores complejos. Estudiamos en detalle las propiedades de los espectros de dichos operadores para diferentes casos de aperturas clásicas (variación de tamaños y localización de las mismas), pudiendo definir en cada sistema un régimen de aperturas pequeñas (clásicamente) y otro de estados de vida larga (cuánticamente). Todo el estudio también incluyó la comparación permanente con sus análogos cerrados. Quedó claro de este modo cómo los autovalores de módulo uno se introducen dentro del círculo unidad al realizar una apertura en el sistema, pudiéndose distinguir los autovalores z_i que forman un subespacio donde sus módulos se anulan ($|z_i| = 0$), los de vida corta y los de mayor tiempo de vida o menor decaimiento.

Por otro lado, se inició el estudio semiclásico vinculando las propiedades clásicas y cuánticas mencionadas anteriormente. Partiendo de la densidad de estados cuántica definida por H. Weyl, que se relaciona con la hipersuperficie de energía albergada en el espacio de fases, se comprobó la conjetura que predice la cantidad de estados con mayor vida media, denominada ley de Weyl fractal. Esta cantidad es proporcional a $N^{d/2}$ donde N es la dimensión del espacio de Hilbert y d la dimensión fractal del repeller $\mathcal{K}$. La validación de la conjetura se llevó a cabo en el tripanadero, en el mapa del gato y en un mapa lineal por partes, a saber, el panadero de dos bandas, donde se cumple de igual modo a pesar de que a priori podrían pensarse anomalías por formar parte la discontinuidad de la apertura misma.

Esta primera parte sirvió al objetivo de conocer y comprender las propiedades de los estados de mayor vida de los sistemas de scattering, predichos por la ley de Weyl fractal, y que tiene sentido estudiar pues son los que sobreviven al escape (tiempos mayores al de Ehrenfest) y tienen codificada la información del conjunto invariante clásico.

Una vez presentadas y estudiadas en detalle las propiedades espectrales de los sistemas abiertos y los autoestados de vida larga, se introdujo un método para reproducir éstas últimas y sus correspondientes autovalores. Este método o aproximación semiclásica, consiste en la construcción de funciones de onda semiclásicas como combinaciones lineales de funciones de cicatriz [15], éstas últimas adaptadas de las construcciones en mapas cerrados definidas en [19, 20]. El método se basa en la construcción de la matriz del propagador en una base truncada de funciones de scar y la posterior resolución de un problema de autovalores generalizado. Lo notable del método es que, al querer reproducir sólo los estados de vida larga, alcanza con un número proporcional

al predicho por la ley de Weyl fractal de funciones de scar para construir las resonancias semiclásicas, reduciéndose ampliamente la dimensión del problema matricial. Se comprobó la validez del método para emular los espectros cuánticos en ambos sistemas. Con respecto a los autoestados, se hizo uso de una representación compleja de funciones de onda en el espacio de fases [108] para efectuar una comparación entre los vectores cuánticos y semiclásicos. Los autoestados exactos se localizan en las variedades estable o inestable del sistema clásico [54] mientras que nuestras resonancias viven en el conjunto invariante. Por esto mismo acudimos a la representación mencionada puesto que proyecta la probabilidad cuántica en el conjunto $\mathcal{K}$. Con esta medida, se verificó la calidad del método para reproducir los autoestados de vida larga a partir de productos internos entre las distribuciones aplicadas a los casos exactos y semiclásicos.

Los problemas que quedan abiertos corresponden a reproducir esta misma construcción en sistemas más realistas, como por ejemplo los billares cuánticos. Con esta construcción podría encararse en profundidad la emisión dirigida en microcavidades o resonadores dieléctricos. Por otra parte es importante poder establecer el límite de aplicación de nuestra aproximación semiclásica, pensando en aspectos tales como los tamaños de las aperturas por ejemplo. Dichas problemáticas comenzaron a estudiarse en [109] y se continúa en esa dirección [110, 111].

Este trabajo se divide en dos grandes partes: la primera está abocada al estudio de las propiedades espectrales de los sistemas abiertos (caóticos), en su versión cuántica y los vínculos con los invariantes clásicos. La segunda parte encara el estudio de la localización de autoestados en sistemas de scattering, la construcción de funciones de cicatriz en estos casos y se propone un método de aproximación semiclásica a las resonancias cuánticas, basado en la teoría de órbitas periódicas cortas.

En el Capítulo 2 se introducirán los modelos paradigmáticos con los que se trabajará a lo largo de la tesis. Se describirán allí las propiedades de tales sistemas, analizando cómo se ven afectadas, en el límite semiclásico, las propiedades cuánticas para diferentes situaciones del mundo clásico.

En el Capítulo 3 se estudiarán las propiedades de los espectros de los propagadores no unitarios asociados a los mapas clásicos abiertos correspondientes. Se analizarán cómo varían estas propiedades para diferentes tipos y localizaciones de las aperturas realizadas en el espacio de fases clásico. También se probará la validez de la ley de Weyl fractal, obteniendo así una suerte de densidad de estados para sistemas caóticos de scattering.

En el Capítulo 4 se presentará el fenómeno de *scarring* y las pruebas de su aumento en sistemas abiertos. Posteriormente adaptaremos la formulación de funciones cicatrices de Ermann y Saraceno [20] y Vergini, Schneider y Rivas

[19] a los mapas definidos en el Capítulo 2.

En el Capítulo 5 se detallarán los pasos del método semiclásico de aproximación a las resonancias cuánticas, a partir de combinaciones lineales de las funciones de cicatriz presentadas anteriormente, y que tiene su origen en la teoría de órbitas periódicas cortas presentada en [16].

Finalmente en el Capítulo 6 se resumirán los resultados más importantes y se esbozarán las conclusiones de todo el trabajo.

De este trabajo surgió una serie de publicaciones, presentadas a continuación:

- Juan M. Pedrosa, Gabriel G. Carlo, Diego A. Wisniacki y Leonardo Ermann,
Distribution of resonances in the quantum open baker map,
Phys. Rev. E **79**, 016215 (2009).
- M. Novaes, J.M. Pedrosa, D.A. Wisniacki , G.G. Carlo y J.P. Keating,
Quantum chaotic resonances from short periodic orbits,
Phys. Rev. E **80** (R), 035202 (2009).
- Juan M. Pedrosa, Gabriel G. Carlo, Diego A. Wisniacki y Marcel Novaes,
Short periodic orbit approach to resonances and the fractal Weyl law,
Phys. Rev. E **85**, 036203 (2012).
- Leonardo Ermann, Gabriel G. Carlo, Juan M. Pedrosa y Marcos Saraceno,
Transient features of quantum open maps,
Phys. Rev. E **85**, 066204 (2012).

Parte I

Descripción de los sistemas abiertos

Capítulo 2

Sistemas caóticos de scattering

A pesar de que sus propiedades no han sido estudiadas tan a fondo como en el caso de sus análogos cerrados, existe un notable interés en la actualidad por los sistemas cuánticos abiertos. Ésto se debe a que los sistemas reales son abiertos y tienen variadas aplicaciones en diferentes áreas de la física. Algunos ejemplos con realizaciones experimentales vienen dados por los microláseres, *quantum dots*, cavidades de microondas, entre otras. Una de las aplicaciones más estudiadas son los sistemas caóticos de scattering [31].

Un sistema de scattering típico consiste en partículas de energía positiva provenientes *del infinito* que interactúan con un potencial localizado o confinado y luego escapan al infinito [25, 32, 33, 34]. Cuánticamente, la dispersión de ondas en sistemas caóticos es estudiada por medio de Hamiltonianos no hermíticos $\tilde{H} = H_0 - iW(q)$, donde $W(q)$ potencial de absorción suave similar al utilizado por el modelo óptico en física nuclear [35]. Las autoenergías (también llamadas resonancias) son complejas, de la forma $z_n = E_n - i\frac{\Gamma_n}{2}$ donde E_n es la energía y $\Gamma_n > 0$ se denomina tasa de decaimiento. Las autofunciones correspondientes $\psi_n(q)$ representan físicamente un estado metaestable con tiempo de vida medio $\tau_n = 1/\Gamma_n$. Diremos que una resonancia es “de vida larga” si su decaimiento Γ_n toma valores finitos, en el límite $\hbar \rightarrow 0$.

Nuestros sistemas de interés son aquellos donde una serie de trayectorias atrapadas forman un conjunto fractal e hiperbólico. Existe una extensa referencia bibliográfica sobre los aspectos clásicos y cuánticos de dichos sistemas [25, 33], destacándose los casos del sistema de tres discos [37], las cuestas de potencial circulares y simétricas [38] y la partícula eléctricamente cargada en el campo generado por un dipolo magnético [39]. En la Fig. (2.1) puede observarse una esquematización de lo anterior.

El estudio de la dispersión de ondas en sistemas caóticos realistas representa una tarea muy compleja. Para un mejor entendimiento, estos sistemas son modelados a través de los denominados mapas cuánticos [26, 40, 43].

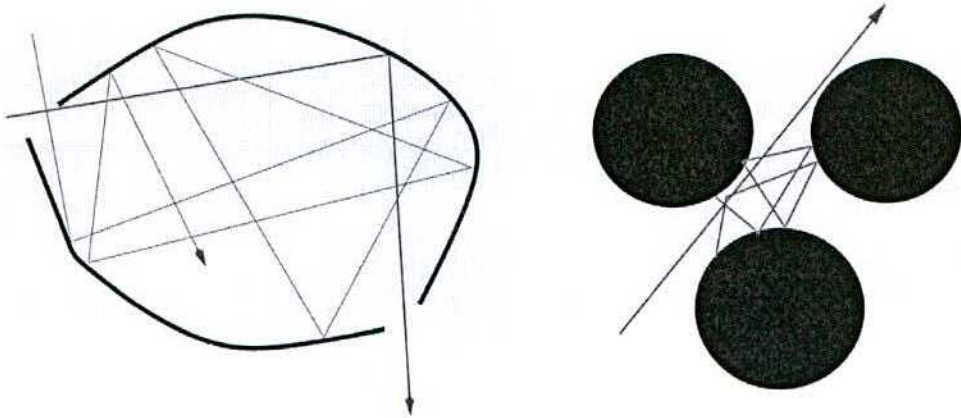


Figura 2.1: Esquematzación de los sistemas de scattering modelados por mapas cuánticos. En ambos casos un conjunto de trayectorias llegan al sistema y logran escapar (líneas rojas) mientras que otro conjunto permanece en la zona de interés (líneas verdes). Los sistemas que se estudiarán aquí corresponden a conjuntos de trayectorias atrapadas de naturaleza fractal. La figura ubicada a la izquierda puede corresponder a rayos de luz en una cavidad, mientras que el otro es un sistema de tres discos [37].

Dichos modelos simples pueden emular la dinámica no hermítica de los Hamiltonianos de scattering (dados por $\tilde{H}$), en el caso en que el flujo clásico sea caótico en la región de interacción entre el blanco y el proyectil. A continuación se estudiarán las propiedades fundamentales de los modelos mencionados, considerando su naturaleza clásica y su posterior cuantización.

2.1. Secciones o Mapas de Poincaré

Desde mediados del siglo XIX, cuando aparecieron los primeros trabajos de Joseph Louis Lagrange y Sir William Rowan Hamilton, el espacio de fases $\mathcal{P}$ se convirtió en el escenario natural de la mecánica clásica. Las variables dinámicas de dicho espacio son las denominadas coordenadas generalizadas $\mathbf{q}_i$, y sus momentos canónicos asociados $\mathbf{p}_i$. El índice $i = 1, \dots, N$ considera al sistema compuesto por N partículas clásicas, de este modo, $\mathcal{P}$ es un espacio $6N$ -dimensional. La evolución del sistema viene dada por las expresiones (2.1), denominadas ecuaciones de Hamilton,

$$\begin{cases} \frac{dq_i}{dt} = \frac{\partial H}{\partial p_i} \\ \frac{dp_i}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial q_i} \end{cases} \quad (2.1)$$

La función $H(\mathbf{q}_1, \dots, \mathbf{q}_N, \mathbf{p}_1, \dots, \mathbf{p}_N, t)$ se denomina función de Hamilton o simplemente, Hamiltoniano. De aquí se decodifica toda la información del sistema necesaria para conocer el estado del sistema en cierto instante t , definido unívocamente ¹ por el punto $P_t \equiv (\mathbf{q}_1(t), \dots, \mathbf{q}_N(t), \mathbf{p}_1(t), \dots, \mathbf{p}_N(t))$. Esto implica que, si se conoce el punto P_t , se puede caracterizar al sistema de manera completa en ese instante. Una colección de puntos en diferentes instantes $(P_0, P_1, \dots, P_t, \dots)$ se denomina órbita o trayectoria del espacio de fases, generándose una familia continua de las mismas si se consideran todas las historias posibles ².

La aparición del marco formal de la mecánica clásica descripto anteriormente, abrió el juego para que comenzara a relacionarse con los sistemas dinámicos [44]. Se define un *sistema dinámico* como un conjunto de estados posibles, junto con una regla que determina el estado presente en función de estados pasados [45]. Dicho de otro modo,

$$X(t) = \phi_t(X_0), \quad (2.2)$$

donde $X(t)$ denota el estado del sistema a tiempo t , y X_0 es la condición o estado inicial. La integración directa de las ecuaciones de Hamilton en sistemas con varios grados de libertad, resulta en general una tarea muy compleja. La idea de reducir el estudio de sistemas temporales continuos (flujos hamiltonianos) al estudio de un sistema temporal discreto asociado (mapas) se debe a Poincaré [1], quien fue el primero en utilizarla para el estudio de un problema de tres cuerpos en mecánica celeste. A continuación describiremos este proceso. Consideremos un sistema dinámico d -dimensional

$$\dot{x} = f(x) \text{ con } x \in \mathbb{R}^d. \quad (2.3)$$

Sea Σ una superficie de dimensión $d - 1$, transversa al flujo. El mapa de Poincaré $\mathcal{M}$ consiste en un mapeo de Σ sobre sí misma, obtenido siguiendo las trayectorias desde una intersección con Σ a la siguiente (siempre manteniendo la misma dirección del flujo). Si x_k denota la intersección k -ésima, el mapa de Poincaré queda definido como:

$$x_{k+1} = \mathcal{M}(x_k). \quad (2.4)$$

¹En cada punto del espacio de fases $\mathcal{P}$ pasa sólo una solución del Hamiltoniano H .

²Nos referimos a todos los instantes de tiempo t .

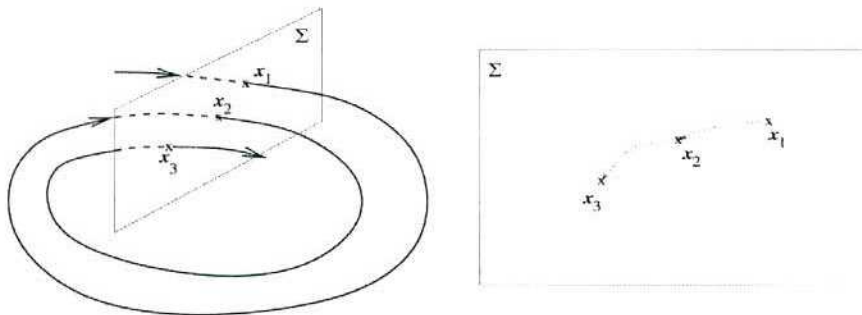


Figura 2.2: Esquema de generación de un mapa de Poincaré. Los puntos x_i son las sucesivas intersecciones de una órbita con una superficie Σ transversal al flujo. Aquí puede observarse cómo una trayectoria cualquiera se va encontrando con la sección Σ en intervalos constantes de tiempo, y se va generando una trayectoria del mapa $\mathcal{M}$.

En la Fig. (2.2) se observa la generación de un mapa de Poincaré a partir de un flujo hamiltoniano.

Posteriormente a la definición original, todo sistema discreto asociado a un sistema de ecuaciones diferenciales es referido como un mapa de Poincaré. Esta técnica ofrece numerosas ventajas respecto al estudio directo del sistema de ecuaciones diferenciales ya que permite disminuir al menos en una las variables del problema, reduciendo así la dimensionalidad del mismo.

El artículo pionero de E.N. Lorenz en meteorología [46], abrió las puertas al estudio de una nueva categoría de sistemas: los caóticos. Los trabajos subsiguientes se encargaron de refinar la definición de caos y dejaron establecido que en todo sistema donde existiera una divergencia exponencial entre trayectorias vecinas (en el espacio de fases), se denominarían caóticos. De este modo, el más simple de los sistemas que uno puede estudiar es uno unidimensional con un espacio de fase de dos dimensiones. Luego para que el mapa resulte caótico, debe cumplirse que el mapa provenga de un Hamiltoniano dependiente del tiempo $H(q, p, t)$ o que no exista tal Hamiltoniano que exprese la evolución del mapa. Es justamente esta última la situación en donde se debe inventar un mapa cuya evolución temporal sea una sucesión de transformaciones canónicas discretas [26, 40].

Para ilustrar lo desarrollado en los párrafos anteriores, tomemos como ejemplo un modelo de mucha importancia en el caos cuántico, como es el mapa estándar o de Chirikov [41], que proviene del Hamiltoniano dependiente del tiempo,

$$H(\theta, p, t) = \frac{p^2}{2} + K \cos \theta \delta(t), \quad (2.5)$$

donde $\delta(t)$ es una función periódica en el tiempo y K es un parámetro adimensional que regula el grado de caoticidad del sistema. Si $K = 0$, el mapa es lineal y sólo admite órbitas periódicas o cuasiperiódicas (ambas estables), donde las primeras son curvas cerradas y las restantes pueden verse como *collares* de curvas cerradas, cuyos centros se encuentran en otra curva cerrada más grande. La no linealidad del mapa se incrementa con el parámetro K , así como también la dinámica caótica del sistema. En [41] se presenta la receta para encontrar la sección de Poincaré a partir de la expresión de la energía del sistema (2.5),

$$\begin{cases} p' = p + K \sin \theta \\ \theta' = \theta + p'. \end{cases} \quad (2.6)$$

La periodicidad de la función $\cos \theta$ del Hamiltoniano (2.5), genera que la dinámica de su mapa de Poincaré asociado pueda definirse en un espacio de fase dado por el cilindro o por el 2-toro, si se aplica la operación *mod* 2π . Si se parte de un conjunto de condiciones iniciales (θ_i, p_i) en el toro bidimensional, pueden encontrarse las secciones de Poincaré para diferentes valores del parámetro K . La Fig. (2.3) muestra cómo son dichas secciones del mapa (2.6) (trayectorias del sistema) en cuatro situaciones distintas del parámetro K .

Para modelar sistemas de scattering es necesario generar zonas en el espacio de fases donde ciertas trayectorias puedan permanecer a tiempos infinitos (evolucionando hacia adelante y hacia atrás en el tiempo), y agujeros por donde otras órbitas dispersadas puedan escapar. Consideraremos al 2-toro o cuadrado unidad $T^2 = [0, 1) \times [0, 1)$ como espacio de fases donde se definirán los mapas con los que trabajaremos. Este espacio compacto³ presenta condiciones periódicas de contorno y simboliza el marco más sencillo para definir transformaciones difeomórficas [47]. Los mapas que estudiaremos en este trabajo se corresponden con el escenario planteado párrafos atrás: mientras que el mapa del gato tien asociado un Hamiltoniano determinado, no existe tal vínculo en el caso del mapa del panadero. Estos difeomorfismos se denominan “de Anosov”, es decir, que poseen marcadas direcciones locales de expansión y contracción⁴. Los mapas $\mathcal{M}$ que forman parte de dicha fa-

³Un conjunto compacto cumple con las condiciones de ser cerrado y acotado.

⁴A los mapas de Anosov también se los llama completamente caóticos, a diferencia de otros que pueden presentar una dinámica mixta, que es regular o caótica dependiendo de ciertos parámetros. El mapa (2.6) es un buen ejemplo de esto último.

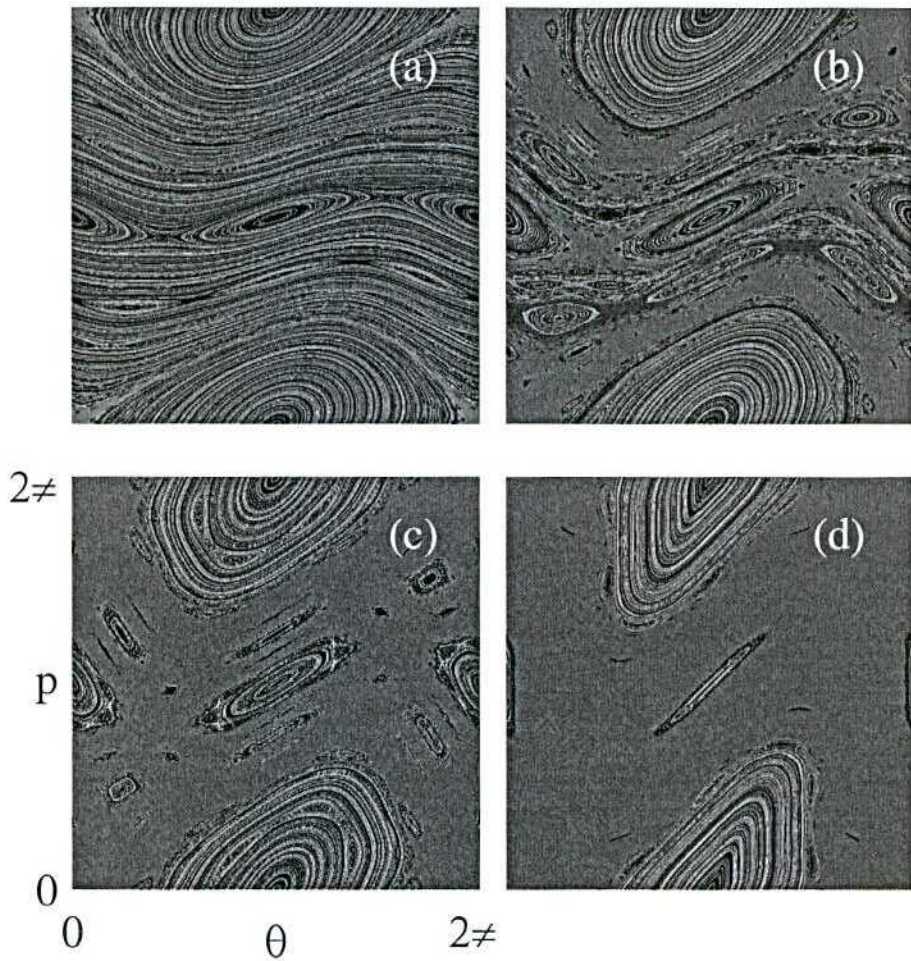


Figura 2.3: Secciones de Poincaré del mapa de Chirikov (2.6) definidas en un espacio de fases con condiciones de contorno periódicas. Se consideraron cuatro valores diferentes del parámetro adimensional K , que regula cuán caótico deviene el mapa: (a) $K = 0.6$, (b) $K = 0.971635$, (c) $K = 1.2$, (d) $K = 2$. En todos los casos las órbitas esquematizadas son periódicas o cuasiperiódicas, con excepción de las de color verde, de naturaleza caótica y que se despliegan con mayor extensión en el espacio de fases a medida que aumenta el valor de K . Las secciones mostradas aquí se generaron con un código libre, extraído de [42].

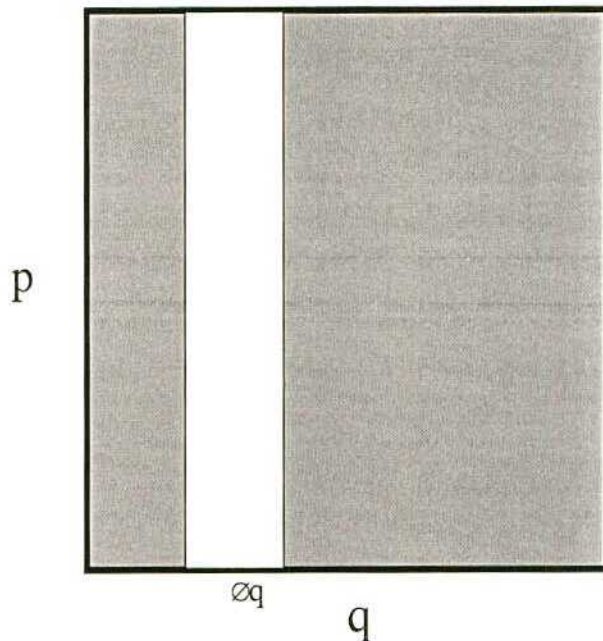


Figura 2.4: Esquema del procedimiento de apertura del 2-toro utilizado en este trabajo. Se extrae una banda vertical, paralela a la dirección $\mathbf{p}$ y de ancho Δq . Luego el agujero $\mathbb{H}$ queda delimitado por la región $\Delta q \times [0; 1)$. Los puntos mapeados en esa zona no vuelven a ser iterados.

milia, consisten en transformaciones invertibles y simplécticas sobre $\mathbb{T}^2$ con exponente de Lyapunov⁵ constante y ergódicas.

Comencemos a describir el mapa con el que modelaremos la dinámica de dispersión de rayos, el mapa abierto $\tilde{\mathcal{M}}$. El escape de las trayectorias de scattering es introducido *realizando un agujero* en el espacio de fases. Este hueco consiste en un subconjunto $\mathbb{H} \subset \mathbb{T}^2$, y el mapa queda definido decidiendo que los puntos que caigan en $\mathbb{H}$ no serán iterados de ahí en adelante, y se dice que *desaparecen o se van al infinito*. La apertura más usual consiste en quitar una banda vertical del espacio de fases, paralela a la dirección de los momentos, como se observa en la Fig. (2.4)⁶.

Considerando el conjunto $\mathbb{O} = \mathbb{T}^2 \setminus \mathbb{H}$, estamos en condiciones de definir

⁵El exponente de Lyapunov es el indicador de caoticidad por excelencia. Un índice de Lyapunov mayor indica una mayor divergencia exponencial entre trayectorias vecinas en $\mathbb{T}^2$.

⁶Si estuviéramos trabajando con billares caóticos, esta apertura sería análoga a quitar una porción del contorno, por donde algunas órbitas pudiesen escapar. Cualquier modo de apertura del espacio de fases es válido, nuestra selección se debe a la simpleza del mismo a la hora de escribir los proyectores y propagadores cuánticos.

el mapa abierto $\tilde{\mathcal{M}} = \mathcal{M}|_{\mathbb{O}} : \mathbb{O} \rightarrow \mathbb{T}^2$, que equivale a decir que $\tilde{\mathcal{M}}$ envía los puntos del hoyo al infinito. Por sucesivas iteraciones de $\tilde{\mathcal{M}}$, se observa que cada punto $x = (q, p) \in \mathbb{T}^2$ tiene un cierto tiempo de escape $n(x)$, que consiste en el menor número entero tal que $\mathcal{M}^n(x) \in \mathbb{H}$ (este tiempo puede ser infinito). A continuación se esbozarán una serie de definiciones fundamentales en la dinámica clásica de los mapas abiertos.

Se denomina conjunto atrapado hacia adelante $\mathcal{K}^-$ a la colección de puntos que nunca escapan en el futuro. Asimismo, se denomina conjunto atrapado hacia atrás $\mathcal{K}^+$ a las órbitas que no escapan si se invierte la dirección temporal. La intersección de ambos se denomina conjunto atrapado $\mathcal{K}$ o repeller. En el caso en que el mapa estudiado sea caótico, $\mathcal{K}$ se denomina repeller extraño y es de naturaleza fractal [25].

$$\begin{aligned} x \in \mathcal{K}^- &\iff \forall n \geq 0, \quad \tilde{\mathcal{M}}^n(x) \in \mathbb{O}, \\ x \in \mathcal{K}^+ &\iff \forall n \geq 0, \quad \tilde{\mathcal{M}}^{-n}(x) \in \tilde{\mathcal{M}}(\mathbb{O}), \end{aligned} \quad (2.7)$$

y $\mathcal{K} = \mathcal{K}^- \cap \mathcal{K}^+$.

En la Fig. (2.5) se muestra el conjunto atrapado correspondiente al mapa estándar (2.6) definido en un espacio de fases dado por el cilindro. El modo de cortar el espacio es en esencia el mismo, ya que se define una zona del cilindro por donde las trayectorias pueden pasar, descartando los puntos que escapen de ese entorno.

En sistemas fuertemente caóticos como los mapas de Anosov, la probabilidad $P(t)$ de que un punto permanezca en el sistema decae exponencialmente en el tiempo [25, 48], quedando definida la tasa de escape γ como

$$\gamma = - \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \ln P(t). \quad (2.8)$$

2.2. Mapas cuánticos

Los mapas cuánticos tienen su origen en las representaciones unitarias de transformaciones canónicas lineales [49]. Posteriormente Hannay y Berry describieron la cuantización de mapas lineales definidos en el cuadrado unidad $\mathbb{T}^2$ [40], considerando su periodicidad. Si se imponen las condiciones de contorno del toro se obtienen las siguientes restricciones sobre las funciones de onda en representación de coordenadas y de momentos,

$$\begin{aligned} \psi(q+1) &= e^{2\pi i \chi_q} \psi(q) \\ \tilde{\psi}(p+1) &= e^{-2\pi i \chi_p} \tilde{\psi}(p) \end{aligned} \quad (2.9)$$

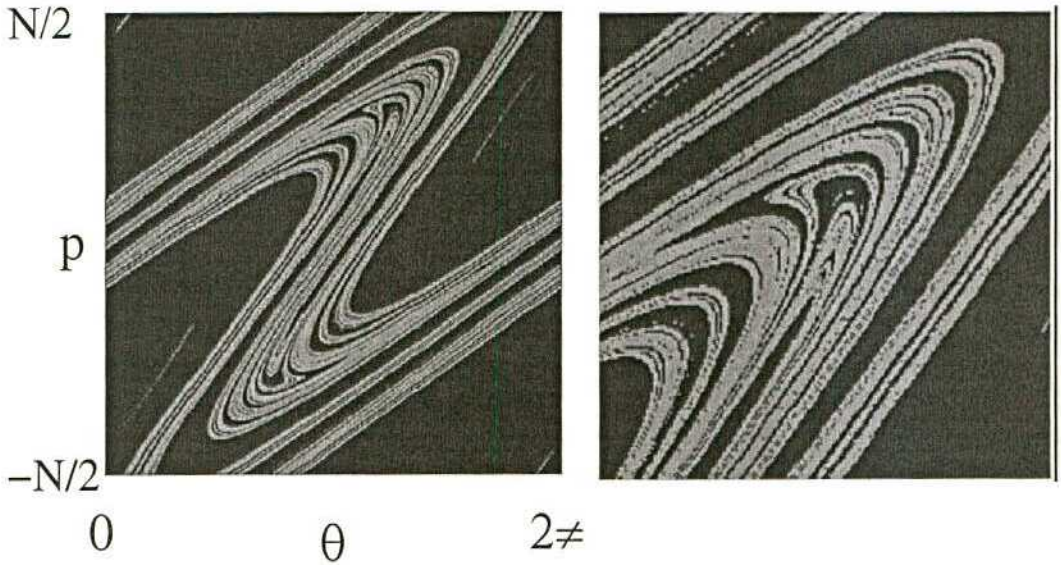


Figura 2.5: Esquema del conjunto atrapado $\mathcal{K}$ (*repeller*) del mapa estándar de Chirikov (2.6), extraído de [80]. Dicha versión del mapa se queda con valores del momento canónico $-N/2 \leq p < N/2$, con $N = 2$, y deja escapar cualquier trayectoria con valores de p fuera de ese intervalo. En el panel izquierdo se observan las órbitas que sobreviven a dicho corte, y que determinan la estructura fractal del conjunto atrapado. En el panel derecho se hace *zoom* a dicho conjunto para observar mejor sus propiedades. El espacio de fases es el cilindro infinito, con un corte la dirección de los momentos.

donde χ_q y χ_p son dos números enteros entre $0 \leq \chi_q, \chi_p < 1$ y se denominan ángulos de Floquet⁷.

El cambio de base entre ambas funciones de onda viene dado por la transformada de Fourier

$$\tilde{\psi}(p) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\hbar}} \int e^{-i\frac{pq}{\hbar}} \psi(q) dq. \quad (2.10)$$

La solución de la Ec. (2.9) sólo existe para espacios de Hilbert con dimensión finita y entera N , que satisfacen la siguiente relación con la constante de Planck efectiva,

$$N = \frac{1}{2\pi\hbar}. \quad (2.11)$$

Las bases de posición y momento del espacio de Hilbert pueden ser consideradas como las columnas y filas respectivamente, de una grilla de $N \times N$ puntos

⁷Estrictamente los ángulos de Floquet son $2\pi\chi_q$ y $2\pi\chi_p$.

en el toro, con un pequeño corrimiento dado por los ángulos de Floquet,

$$\begin{aligned} |q_j\rangle &= \left| \frac{j+2\pi\chi_q}{N} \right\rangle \\ |p_k\rangle &= \left| \frac{k+2\pi\chi_p}{N} \right\rangle, \end{aligned} \quad (2.12)$$

donde $j, k = 0, 1, \dots, N-1$. De esta manera las bases de posiciones y momentos son ortonormales ($\langle q_j | q_k \rangle = \langle p_j | p_k \rangle = \delta_{jk}$), mutuamente no sesgadas ($|\langle q_j | p_k \rangle| = \sqrt{1/N}$), y el cambio de base entre ellas viene dado por la transformada de Fourier discreta con condiciones de contorno dependiendo de los ángulos de Floquet

$$\langle p_k | q_j \rangle = \frac{1}{\sqrt{N}} e^{-i \frac{2\pi}{N} (j+2\pi\chi_p)(k+2\pi\chi_q)} \equiv (G_N^{\chi_q, \chi_p})_{jk}. \quad (2.13)$$

Una vez definido el espacio de Hilbert, la cuantización del mapa se puede llevar a cabo a través de un operador unitario que describa su dinámica clásica en el límite $\hbar \rightarrow 0$. En el proceso de cuantización de mapas lineales en el toro [40], se llega a diferentes expresiones del propagador cuántico (unitario) dependiendo de cuál función generatriz clásica se parta. Si la función generatriz es de tipo $\mathcal{F}_1(q, q')$, la expresión del mapa cuántico correspondiente es

$$U(q', q) = (-1)^r \left(\frac{-i\partial S(q', q)}{\hbar \partial q \partial q'} \right)^{1/2} e^{\frac{i}{\hbar} S(q, q')}, \quad (2.14)$$

donde r es la signatura del mapa y $S(q', q)$ es la acción clásica del sistema. Por lo tanto, queda definido el mapa cuántico a través de la matriz unitaria $U \in \mathbb{C}^{N \times N}$, con autovectores $|\psi_n\rangle$ (vectores complejos en $\mathbb{C}^N$) y autovalores de módulo igual a uno, de la forma $z_n = e^{i\alpha_n}$.

Cuánticamente, el scattering es introducido por medio de proyectores Π ⁸. En la representación de posición, dichos proyectores cancelan M columnas de la matriz unitaria de $N \times N$. De este modo la matriz resultante $\tilde{U} = U\Pi$ resulta no normal ($[\tilde{U}, \tilde{U}^\dagger] \neq 0$) y tiene como corolario la pérdida de ortogonalidad de los autovectores, como así también el hecho de que un cierto número de autovalores (resonancias) se vuelvan degenerados, con sus módulos iguales a cero⁹. Estas resonancias se denominan *de vida corta* y no pueden asociarse a ninguna trayectoria atrapada clásica. Por el contrario, los autovalores con módulos cercanos a la unidad (*de vida larga*) contienen la información clásica más relevante. Ésto se estudiará en detalle en el Cap. 3. La construcción de este tipo de mapas ha sido discutida en detalle en [51] y [52].

⁸Un proyector es un operador Π idempotente ($\Pi^2 = \Pi$) y hermítico. Para estudiar más propiedades de estos proyectores ver [50].

⁹El subespacio de autovalores con módulo nulo es de dimensión $N\Delta q$.

Puede expresarse el módulo de los autovalores como $|z_n| = e^{-\Gamma_n/2}$, donde Γ_n se interpreta como la tasa de decaimiento de cada resonancia. Así, si $\Gamma_n \rightarrow \infty$ la resonancia será de vida corta y sobrevivirá mayor tiempo si Γ_n se mantiene finito. Esta tasa de decaimiento por resonancia es la inversa del tiempo de vida medio $\Gamma_n = 1/\tau_n$; otra forma de describir la vida de los estados es a partir del tiempo de Ehrenfest τ_E [53]. Esta cantidad puede interpretarse como el límite superior para el cual un paquete de ondas cuántico es descrito por soluciones de ecuaciones de movimiento de la mecánica clásica sin acudir a una construcción semiclásica del paquete de ondas¹⁰. Se lo define como $\tau_E = \frac{1}{2\lambda} \ln N$, donde λ es el exponente de Lyapunov del sistema. Los estados de mayor (menor) vida serán aquellos que escapen del sistema en tiempos superiores (inferiores) al tiempo de Ehrenfest. En la Fig. (2.6) se observa cómo las resonancias se introducen en el círculo unidad, luego de haber actuado un proyector.

Otra característica importante de los mapas abiertos es la existencia de autovectores a izquierda y a derecha,

$$\begin{aligned}\tilde{U}|\psi_n^R\rangle &= z_n|\psi_n^R\rangle \\ \langle\psi_n^L|\tilde{U} &= z_n\langle\psi_n^L|,\end{aligned}\tag{2.15}$$

que nos permite seleccionar la siguiente condición de normalización¹¹:

$$\langle\psi_n^L|\psi_m^L\rangle = \langle\psi_n^R|\psi_m^R\rangle = 1.\tag{2.16}$$

En [54], los autores demostraron que los autoestados de mayor vida (decaimientos Γ_n pequeños) a izquierda (derecha) se localizan, en el límite $N \rightarrow \infty$, en el conjunto atrapado hacia adelante K_- (atrás, K_+). Estos conjuntos, como también el repeller, tienen una geometría fractal, por eso las autofunciones de los mapas cuánticos abiertos han sido denominadas “autoestados cuánticos fractales” [55].

Quedaron definidas en estas secciones las cantidades clásicas y cuánticas más importantes de los mapas abiertos. A continuación se presentarán los modelos paradigmáticos con los que se trabajará a lo largo de la tesis. Se trata de dos mapas muy conocidos en el caos cuántico, el del panadero de tres bandas y el del gato. También se hará mención del mapa del panadero de dos bandas, que servirá como ejemplo de mapa con discontinuidades.

¹⁰Una definición menos formal coloca a τ_E como el tiempo límite para el cual es aplicable el método WKB dependiente del tiempo. Para tiempos superiores a τ_E , sólo una descripción desde el punto de vista de la mecánica cuántica resulta válida.

¹¹También se cumple que $\langle\psi_n^L|\psi_m^R\rangle = 0$ si $n \neq m$.

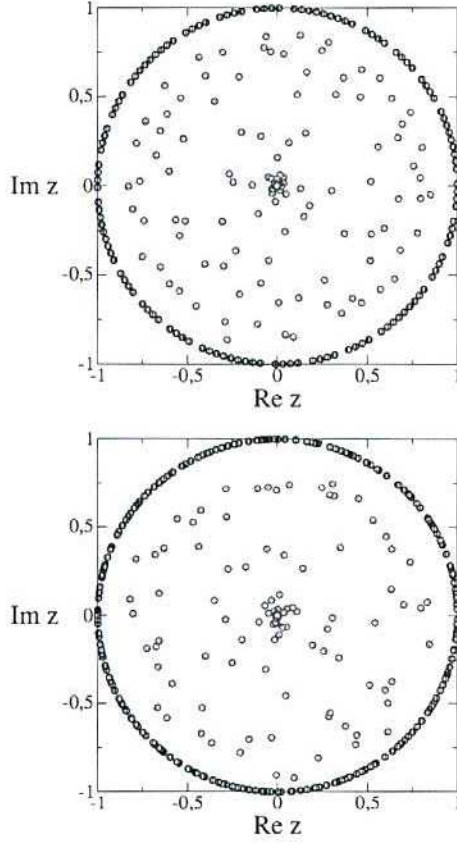


Figura 2.6: Espectros correspondientes a los operadores de evolución cuánticos, en los casos cerrado (unitario, círculos negros) y abierto (círculos rojos), para los mapas del panadero de tres bandas (abajo, $N = 243$) y del gato (arriba, $N = 250$ y $\Delta q \equiv [0.3; 0.6]$). Se observa cómo al perder unitariedad, los autovalores de los mapas abiertos contraen sus módulos ingresando a la superficie del círculo unidad.

2.3. Mapas del panadero

El mapa del panadero de tres bandas (o tripanadero) es una transformación lineal en T^2 definida de la siguiente manera:

$$(q', p') = \mathcal{B}_3(q, p) = \begin{cases} (3q, p/3) & \text{si } 0 \leq q < 1/3 \\ (3q - 1, (p + 1)/3) & \text{si } 1/3 \leq q < 2/3 \\ (3q - 2, (p + 2)/3) & \text{si } 2/3 \leq q < 1. \end{cases} \quad (2.17)$$

Este mapa puede ser representado geoméricamente en el espacio de fases como estiramientos al triple en la dirección $\mathbf{q}$, contracciones al tercio en la

dirección $\mathbf{p}$, y dos cortes que reubican los puntos dentro del toro de manera que la transformación preserve el área y es invertible¹². La acción geométrica del mapa permite visualizar fácilmente que existe un exponente de Lyapunov uniforme $\lambda = \ln(3)$, y que las variedades estables e inestables de las órbitas periódicas son líneas paralelas al eje de los momentos ($q = \text{cte}$) y al de coordenadas ($p = \text{cte}$), respectivamente.

Una de las grandes ventajas de este mapa es que sus órbitas periódicas pueden ser descritas en forma sencilla, debido a que existe una dinámica simbólica completa a través de desplazamientos de Bernoulli [56]. La construcción explícita de esta dinámica se logra reescribiendo a q y p en representación ternaria, dada por

$$\begin{aligned} q &= 0.\epsilon_0\epsilon_1\epsilon_2\dots = \sum_{k=0}^{\infty} \epsilon_k 3^{-k-1} \\ p &= 0.\epsilon_{-1}\epsilon_{-2}\epsilon_{-3}\dots = \sum_{k=1}^{\infty} \epsilon_{-k} 3^{-k}, \end{aligned} \tag{2.18}$$

donde $\epsilon_i \in \{0, 1, 2\}$ es el i -ésimo trit. De esta manera un punto perteneciente al espacio de fases queda representado por una tira infinita de trits, con un punto separando al momento de la posición

$$(p, q) = \dots \epsilon_{-2}\epsilon_{-1} \bullet \epsilon_0\epsilon_1 \dots \tag{2.19}$$

El trit principal $\epsilon_0 = [3q]$, donde los corchetes denotan la parte entera. Con esta notación puede reescribirse de una manera más simple la transformación (2.17) como:

$$\begin{aligned} q' &= 3q - [3q] = 3q - \epsilon_0 \\ p' &= \frac{p + [3q]}{3} = \frac{p + \epsilon_0}{3}, \end{aligned} \tag{2.20}$$

y se observa claramente que la acción del mapa consiste en el corrimiento del punto un lugar hacia la derecha

$$(p, q) \rightarrow (p', q') = \dots \epsilon_{-2}\epsilon_{-1}\epsilon_0 \bullet \epsilon_1 \dots \tag{2.21}$$

La representación anterior permite encontrar las órbitas periódicas (OP) en forma directa. Por ejemplo, una tira infinita de ceros (o de unos) es invariante respecto a la aplicación del mapa, y por lo tanto es un punto fijo. Por otro lado

¹²La preservación del área remite a las propiedades de ergodicidad y flujo Liouvilleano o conservativo.

podemos notar que estos son los únicos puntos fijos, ya que la representación ternaria es completa. La generalización del punto fijo a una órbita periódica cualquiera es trivial. Si se quieren hallar las OP de período L_ν , es necesario identificar las tiras ternarias infinitas invariantes ante L_ν corrimientos del punto. Esto puede ser representado por una tira de L_ν números ternarios, ν , que etiqueta los primeros L_ν trits de q . Las OP primitivas de período L_ν se definen como las OP que no pueden escribirse como repeticiones de OP de períodos menores. Por ejemplo, para el caso de período $L_\nu = 2$ existe sólo una órbita periódica primitiva $\nu = 02$, ya que $\nu = 02$ es otro punto de la misma trayectoria, y tanto $\nu = 00$ como $\nu = 11$ representan al punto fijo. De esta manera, las coordenadas de las OP en notación decimal vienen dadas por

$$\begin{aligned} q &= .\nu\nu\nu\dots = \frac{\nu}{3^{L_\nu}-1} \\ p &= .\nu^\dagger\nu^\dagger\nu^\dagger\dots = \frac{\nu^\dagger}{3^{L_\nu}-1}, \end{aligned} \tag{2.22}$$

donde $\nu^\dagger$ simboliza el intercambio en el orden de los trits de ν y ν representa el valor entero de la tira ternaria ν .

Un invariante clásico no definido en (2.1) y que caracteriza a un sistema caótico viene dado por el crecimiento del número de OP a medida que su periodo aumenta. En los sistemas caóticos este crecimiento es exponencial y viene cuantificado por la entropía topológica h_T , $\#(OP) = e^{h_T}$. En el caso del mapa del tripanadero, a través de la dinámica simbólica, podemos calcular que el número de puntos periódicos crece como L_ν , y por lo tanto la cantidad de OP lo hace como $3^{L_\nu}/L_\nu$, dando como resultado una entropía topológica $h_T = \ln(3)$.

Finalmente, mencionaremos que para todas las OP , las acciones, S_ν pueden obtenerse en forma sencilla a través la función generatriz mixta $\mathcal{F}_2(q_0, p_1) = 3q_0p_1 - \epsilon_0p_1 - \epsilon_0q_0$ ¹³. El valor de la acción en este caso resulta

$$S_\nu = \sum_{j=0}^{L_\nu-1} \epsilon_0(q_j) \left(\frac{q_j}{2} + \frac{p_j}{6} + \frac{1}{3} \right) = \sum_{j=0}^{L_\nu-1} [3q_j] \left(\frac{q_j}{2} + \frac{p_j}{6} + \frac{1}{3} \right). \tag{2.23}$$

Esta expresión de la acción total se obtiene a partir de un cálculo semiclásico, originalmente publicado en [57] y que será explicado en el Cap. 4.

El proceso de apertura, tal como se explicó en (2.1), consiste en extraer una banda vertical del toro de ancho Δq y paralela a la dirección de los momentos p . El hueco $\mathbb{H}$ coincide en este caso con el tercio central, de manera

¹³Se puede comprobar fácilmente que la transformación canónica asociada a dicha función generatriz es $q_1 = \partial\mathcal{F}_2/\partial p_1 = 3q_0 - \epsilon_0$ y $p_1 = \partial\mathcal{F}_2/\partial q_0 = 3p_1 - \epsilon_0$.

tal de extraer aproximadamente el 33 % del total del área del espacio de fases,

$$\mathbb{H} = [1/3; 2/3] \times [0; 1]. \quad (2.24)$$

Es una discusión actual el hecho de qué significa que una apertura sea pequeña. Algunas teorías que puedan establecerse sobre sistemas abiertos pierden su validez si el porcentaje de área extraída es muy considerable respecto del total, como también puede extenderse el rango de apertura si se estudian otras situaciones. Nosotros definiremos que una apertura es pequeña si puede aproximarse su tasa de escape clásica con el ancho de la apertura, ésto es

$$\gamma \sim \Delta q. \quad (2.25)$$

El mapa del panadero abierto tiene un manejo analítico accesible, que permite calcular sus propiedades clásicas de manera muy simple. Aquí el escape es de un tercio del total de puntos que se mapean inicialmente, si se llena el 2-toro de condiciones iniciales. Luego podemos pensar que no estamos del lado de las aperturas grandes todavía.

El nuevo espacio de fases queda determinado por $\mathbb{O} = \mathbb{T}^2 \setminus \mathbb{H}$, y fácilmente se puede reescribir la transformación (2.17) en su versión abierta

$$(q', p') = \tilde{\mathcal{B}}_3(q, p) = \begin{cases} (3q, p/3) & \text{si } 0 \leq q < 1/3 \\ \infty & \text{si } 1/3 \leq q < 2/3 \\ (3q - 2, (p + 2)/3) & \text{si } 2/3 \leq q < 1. \end{cases} \quad (2.26)$$

En la Fig. (2.7) se observa cómo se generan los conjuntos definidos en (2.1) para esta transformación. Las tres primeras iteraciones (hacia adelante y hacia atrás) reflejan los conjuntos fractales que determinarán a tiempos infinitos los conjuntos $\mathcal{K}_-$ y $\mathcal{K}_+$.

Ambas direcciones temporales de evolución confluyen en conjuntos de Cantor $\mathcal{C}_3$. El conjunto atrapado hacia adelante viene dado por $\mathcal{K}_- = \mathcal{C}_3 \times [0; 1]$, mientras que $\mathcal{K}_+ = [0; 1] \times \mathcal{C}_3$. De este modo, la intersección ambos (el repeller) queda definido como

$$\mathcal{K} = \mathcal{C}_3 \times \mathcal{C}_3 \equiv \mathcal{S}, \quad (2.27)$$

y es el fractal conocido como *la alfombra de Sierpinski* $\mathcal{S}$ [25, 45]. En la Fig. (2.8) se esquematiza las generaciones de los conjuntos atrapados vía iteraciones y la intersección de ambos. El conjunto de Cantor $\mathcal{C}_3$ tiene la propiedad de que todas sus dimensiones fractales coinciden [25] y tienen un valor $d = \ln 2 / \ln 3$.

En el caso cerrado (2.17) podemos notar que la iteración del mapa estira al triple en la dirección q y contrae al tercio en la dirección p , colocando

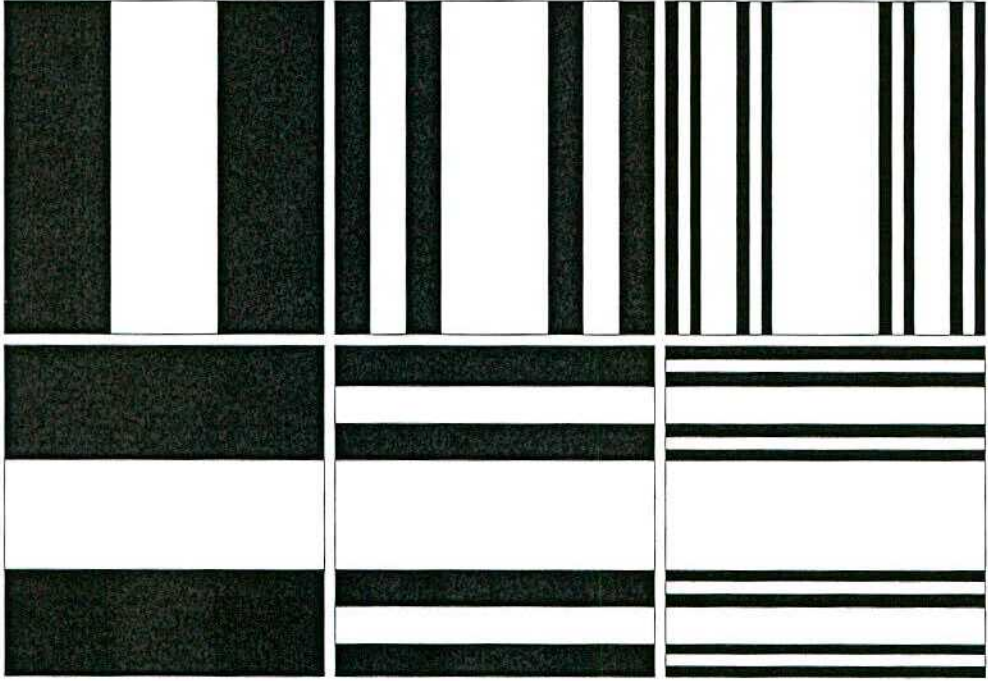


Figura 2.7: Tres primeras iteraciones del mapa del panadero de tres bandas, que van determinando la estructura fractal de los conjuntos atrapados. Los paneles superiores muestran la evolución hacia atrás (de izquierda a derecha aumenta el tiempo), mientras que abajo se observa lo mismo para iteraciones hacia el pasado.

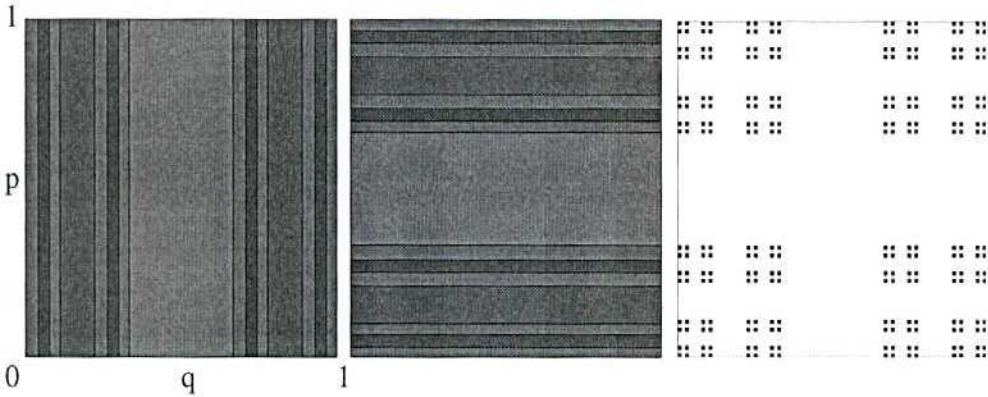


Figura 2.8: Conjuntos atrapados hacia atrás (izquierda), hacia adelante (centro) e intersección de ambos (derecha). En el panel izquierdo (y el central) la escala de magentas (de claro a oscuro) corresponde a puntos que escapan en tiempos sucesivos en el futuro (y pasado), en 4 iteraciones, $n = 0, 1, 2, 3$.

las regiones mapeadas fuera del espacio de fases nuevamente en el dominio. Esta misma dinámica puede ser representada en el caso cuántico a través del cambio de bases entre posición y momento. Esta cuantización fue realizada por primer vez por Balazs y Voros [58] para dimensiones del espacio de Hilbert múltiplos de tres. En su representación mixta (de posición a momentos) la versión cuántica del mapa actúa transformando los tres tercios de posición independientemente por medio de transformadas de Fourier discretas de dimensiones $N/3$. La representación de posición del mapa del panadero se consigue aplicando una antitransformada de Fourier en todo el espacio de Hilbert,

$$\hat{B}_3^{\chi_q, \chi_p} = G_N^{-1} \begin{pmatrix} G_{N/3} & 0 & 0 \\ 0 & G_{N/3} & 0 \\ 0 & 0 & G_{N/3} \end{pmatrix}. \quad (2.28)$$

Las simetrías del mapa clásico pueden ser recuperadas eligiendo los valores de los parámetros $\chi_q = \chi_p = 1/2$. Estas constantes se denominan *ángulos de Floquet* y puede encontrarse una buena explicación de su origen y relación con las simetrías en [59]. Los elementos de matriz $G_{N/3}$, surgidos de la transformada de Fourier discreta, así como la antitransformada G_N^{-1} , tienen la forma dada en (2.13).

La traducción del hueco en el espacio de fases clásico $\mathbb{H}$ a un proyector que actúa en un espacio de Hilbert es sencilla en este caso ¹⁴. Recordando que $\Delta q = 1/3$ y que el número de columnas que se anulan al proyectar es $N\Delta q$, el propagador cuántico no unitario queda determinado por

$$\tilde{B}_3^{\chi_q, \chi_p} = G_N^{-1} \begin{pmatrix} G_{N/3} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & G_{N/3} \end{pmatrix}, \quad (2.29)$$

con $N \in 3\mathbb{N}$.

2.3.1. Panadero de dos bandas

El mapa del panadero de dos bandas es un modelo de juguete muy estudiado en el campo del caos cuántico. Nuestro enfoque sobre el mismo recae en su discontinuidad central y en cómo se ven afectadas las propiedades semiclásicas de este sistema cuando está incluida dentro de la apertura. No

¹⁴El proyector en este caso está dado por

$$\Pi = \begin{pmatrix} \mathbb{1}_{N/3} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \mathbb{1}_{N/3} \end{pmatrix}.$$

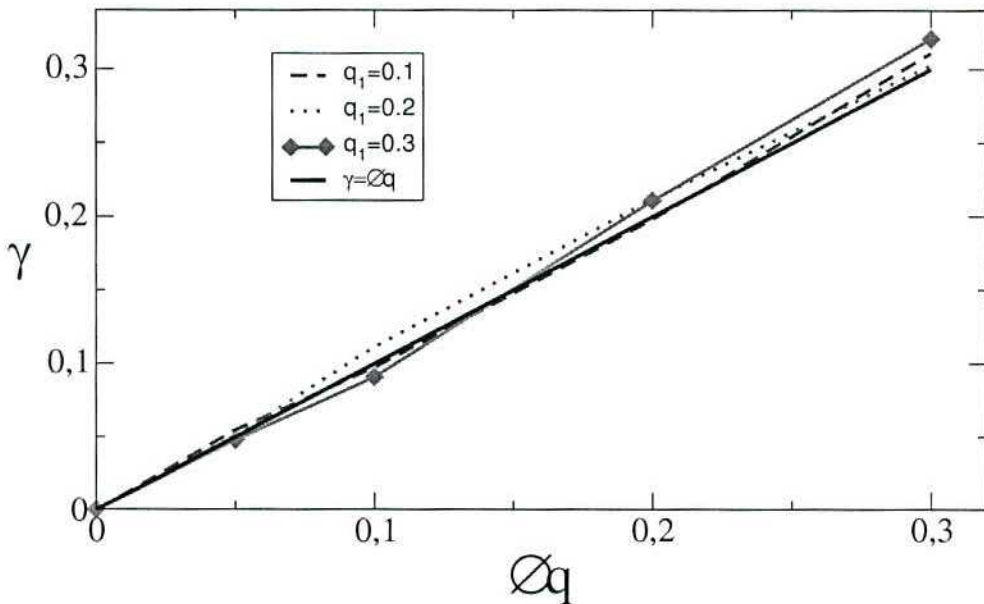


Figura 2.9: Decaimiento clásico γ en función del ancho Δq para el panadero de dos bandas. Puede notarse la relación lineal en rango $[0; 0.3]$. Los mayores apartamientos de la recta $\gamma = \Delta q$ se dan para un porcentaje de área extraída del 30 %. $q_1 = q_f - \Delta q/2$ representa el valor de coordenada media en cada intervalo $[q_i; q_f]$.

nos detendremos en detalles del mismo, sólo será presentado para estudiar en capítulos posteriores los efectos mencionados. En el caso anterior eliminamos directamente un subconjunto del dominio de definición de tal manera de olvidar el problema de las discontinuidades. Veamos cómo está definida esta transformación en el toro:

$$(q', p') = \mathcal{B}_2(q, p) = \begin{cases} (2q, p/2) & \text{si } 0 \leq q < 1/2 \\ (2q - 1, (p + 1)/2) & \text{si } 1/2 \leq q < 1. \end{cases} \quad (2.30)$$

El origen de la caoticidad del mapa radica en la discontinuidad en $q = 1/2$. La transformación (2.30) es ergódica, uniformemente hiperbólica, preserva área y su exponente de Lyapunov es $\ln 2$. Puede definirse una dinámica simbólica (binaria, en este caso) que con facilidad nos permite obtener sus órbitas periódicas.

Las aperturas se realizan del mismo modo descrito en (2.1), y el régimen de aperturas pequeñas definido en (2.3) se cumple de acuerdo a lo que se observa en la Fig. (2.9).

El decaimiento exponencial de una serie de puntos colocados inicialmente en el toro (2.8) se observa en la Fig. (2.10), junto con la distribución para el

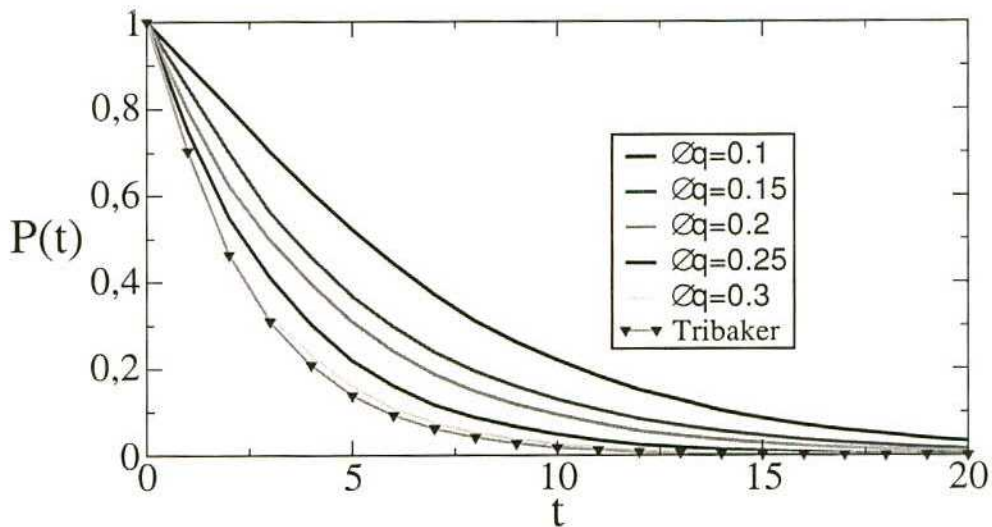


Figura 2.10: $P(t)$ vs t en los casos de los mapas del panadero de 2 y 3 bandas. Se observa el comportamiento hasta los primeros veinte pasos en el tiempo. Son notables los cambios en los decaimientos a medida que aumenta el tamaño del ancho de apertura Δq .

panadero de tres bandas. De los ajustes de dichos decaimientos se obtienen los valores de las tasas de escape.

Los fractales que se forman al evolucionar hacia adelante y hacia atrás en el tiempo este mapa dependen del tamaño y la ubicación de la banda vertical de apertura, y los cálculos de sus dimensiones fractales no resultan tan sencillos como en el sistema (2.26).

La cuantización de (2.30) se lleva a cabo del mismo modo que en el caso de tres bandas pero para dimensiones pares del espacio de Hilbert, obteniéndose la siguiente representación de posición del propagador cuántico

$$\hat{B}_2^{X_q, X_p} = G_N^{-1} \begin{pmatrix} G_{N/2} & 0 \\ 0 & G_{N/2} \end{pmatrix}, \quad (2.31)$$

y su versión abierta $\tilde{B}_2^{X_q, X_p}$ dependerá de la forma que tome el proyector Π dadas los agujeros clásicos correspondientes.

2.4. Mapas del gato

La familia de mapas del gato son difeomorfismos completamente caóticos (en el sentido de Anosov, [43]) definidos en el cuadrado unidad T^2 . Dichas transformaciones lineales son biyectivas, sus elementos de matriz son enteros

como también los de su transformación inversa. Del mismo modo que en los mapas estudiados con anterioridad, preservan área y cumplen con el teorema de Birkhoff respecto de la ergodicidad (y mezcla). Como las transformaciones lineales que definen los mapas son hiperbólicas, sus autovalores resultan dos números irracionales, uno mayor y otro menor a uno (en valor absoluto), por lo que están asociados respectivamente a subespacios de direcciones expansivas y contractivas, que coinciden con las direcciones de las variedades estables e inestables. El conjunto de órbitas periódicas forman un conjunto denso en el espacio de fases. La denominación de estos mapas se debe a V.I. Arnold, que los llamó así por esquematizar la acción de estos mapas en un conjunto de condiciones iniciales en el toro que describían el contorno de un gato [60].

La forma más general en que pueden escribirse es

$$\begin{pmatrix} q' \\ p' \end{pmatrix} = \mathcal{C} \begin{pmatrix} q \\ p \end{pmatrix} \pmod{1} = \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} \\ c_{21} & c_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} q \\ p \end{pmatrix} \pmod{1}, \quad (2.32)$$

donde los elementos de matriz c_{ij} son enteros asegurando la continuidad del mapa. Las condiciones $Tr\mathcal{C} > 2$ y $\det\mathcal{C} = 1$, garantizan hiperbolicidad¹⁵ y preservación de área¹⁶. Aquí consideraremos el caso

$$\mathcal{C} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}, \quad (2.33)$$

para el cual el exponente de Lyapunov es $\log(2 + \sqrt{3})$ y las direcciones de las variedades estable e inestable son $\mathbf{s} = (-\sqrt{3}, 1)$ y $\mathbf{u} = (\sqrt{3}, 1)$, respectivamente.

El proceso de apertura coincide con los anteriores (ver Fig. (2.4)), aunque la definición del hueco $\mathbb{H}$ no es unívoca como en el tripanadero, si no que depende del ancho y ubicación seleccionada. El mapa (2.33) abierto también se inscribe dentro del régimen de aperturas pequeñas (2.25), como puede apreciarse en la Fig. (2.11)¹⁷.

Este mapa corresponde a mirar estroboscópicamente en intervalos de tiempo τ , el movimiento generado por el Hamiltoniano cuadrático

$$H(q, p) = \frac{\lambda}{2} \left[\left(\frac{p^2}{\alpha} - (\alpha q)^2 \right) \right], \quad (2.34)$$

tomando q y p módulo 1 en cada iteración. λ es el exponente de Lyapunov del mapa y $\alpha = 3^{1/4}$. La función generatriz correspondiente es del tipo

¹⁵El hecho de que $Tr\mathcal{C} > 2$ implica que $\mathcal{C}$ es un mapa de Anosov.

¹⁶El determinante unitario surge de la biyectividad de la transformación.

¹⁷Puede comprobarse que el régimen de aperturas pequeñas en el mapa del gato, puede extenderse hasta un agujero equivalente al 40 % del espacio de fases.

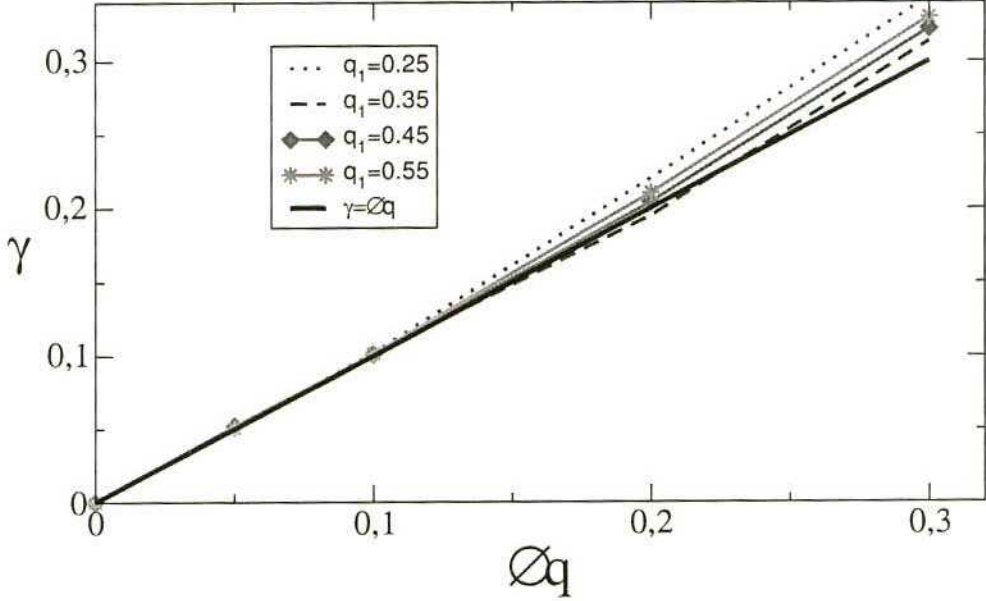


Figura 2.11: Tasa de decaimiento clásica γ en función del ancho de la apertura realizada Δq en el caso del mapa del gato (2.33). Puede notarse claramente la relación lineal entre ambas cantidades, en el rango $[0; 0.3]$. $q_1 = q_f - \Delta q/2$ representa el valor de coordenada media en cada intervalo $[q_i; q_f]$.

$-\mathcal{F}_1(q, q') = S = q^2 - q(q' + m) + (q' + m)^2 - nq'^{18}$, de la cual el mapa se obtiene calculando $p = -\partial S/\partial q$ y $p' = \partial S/\partial q'$.

La cuantización del mapa del gato así como la operación de proyección (apertura) en un espacio de Hilbert discreto se llevan a cabo semiclásicamente siguiendo los procedimientos detallados en la sección (2.2). Se han propuesto dos análogos cuánticos diferentes para este sistema [61]. El primer mapa del gato cuántico fue propuesto por Hannay y Berry [40], vía “cuantización canónica”¹⁹. Dicha cuantización tiene una interpretación en términos de un sistema óptico y su matriz unitaria asociada a la transformación clásica puede obtenerse conociendo la función generatriz $\mathcal{F}_1(q, q')$ de la transformación canónica (2.33). Luego, el propagador cuántico viene dado por la expresión

$$U^c(Q', Q) = \sqrt{\frac{-i}{N}} e^{2i\pi(Q^2 - Q'Q + Q'^2)/N}, \quad (2.35)$$

donde $q = Q/N$ y $q' = Q'/N$. La matriz $U^c \in \mathbb{C}^{N \times N}$ tiene las mismas

¹⁸ m y n son enteros que salen de aplicar la operación mod 1.

¹⁹Tal denominación se debe a la similitud entre el proceso de cuantización del mapa (2.33) con la mecánica cuántica tradicional de sistemas con un número de grados de libertad finito (uno en este caso).

propiedades generales que (2.28) y (2.31), y los detalles particulares surgen de la dinámica clásica generada por (2.33). Esta cuantización fue discutida en profundidad en [62].

La otra interpretación es más reciente y se denomina “cuantización algebraica” [63]. Este proceso pone énfasis en el álgebra de los observables, definidos como álgebras de von Neumann, tanto en sus versiones clásicas como cuánticas. El álgebra cuántica consiste en una deformación de la clásica, proveyendo un nexo con la geometría no conmutativa [64]. Es sólo en este sentido en que el procedimiento es visto como una cuantificación. Siguiendo con la formulación usual de los sistemas dinámicos no conmutativos, los estados son considerados funcionales en estas álgebras y la dinámica viene dada por un grupo discreto de automorfismos de las mismas.

Capítulo 3

Leyes de Weyl para la densidad de estados

Desde el advenimiento de la mecánica cuántica ha sido de permanente interés el estudio de la correlación cuántico-clásica, es decir, cuál es el comportamiento de diferentes sistemas físicos en el límite semiclásico. En este marco, los primeros sistemas físicos comprendidos fueron los denominados integrales o regulares [65], extendiéndose posteriormente su estudio a los sistemas caóticos [2, 66], donde las dificultades fueron superiores. El caos cuántico encuentra un campo de investigación interesante en dicho límite, siendo uno de sus objetos fundamentales de estudio, la estructura de las autofunciones de sistemas cuánticamente sencillos y con dinámica clásica caótica.

La introducción del aparato formal de la mecánica cuántica dentro de la mecánica estadística clásica, ha sido de gran ayuda para contestar con rigurosidad cuestiones acerca de las propiedades de los sistemas cerrados de dinámica regular, en el límite semiclásico. A principios del siglo XX, los trabajos de Hermann Weyl [67] brindaron expresiones asintóticas para el número de estados cuánticos condensados en las hipersuperficies de energía ¹. A esta cantidad se la denomina usualmente *densidad de estados* y a su expresión matemática, *ley de Weyl*. En el caso de sistemas caóticos existen también resultados semiclásicos precisos para las expresiones de sus autofunciones. El teorema de ergodicidad cuántica revela que en el límite semiclásico, las distribuciones de Wigner de la mayoría de los autoestados están concentradas en la superficie de energía del espacio de fases [11]. En dicha región se ubican las órbitas periódicas del sistema clásico [68] que, en 1970, Martin Gutzwiller relacionó con la densidad de estados cuánticos mediante la fórmula de trazas

¹En dichas superficies, de topología toroidal, es donde queda restringido clásicamente el movimiento de los sistemas hamiltonianos e integrales.

que lleva su nombre [6].

Nuestra atención está centrada en aquellos sistemas definidos en el Capítulo 2, denominados de scattering. Un estudio exhaustivo de las resonancias de estos sistemas caóticos, nos obligaría a plantear una serie de interrogantes acerca de las propiedades de las mismas en el límite semiclásico: ¿Cómo se distribuyen sus estados correspondientes en el espacio de fases? ¿Cuántos de estos estados, correspondientes a una dada energía, existen? ¿Cuáles son los objetos clásicos involucrados en dichas situaciones? Contestar estas cuestiones requiere primero de hacer un repaso de las propiedades espectrales² de los sistemas cerrados y profundizar el estudio y análisis de sus contrapartes abiertas.

Tal como se describió en el capítulo anterior, en los sistemas abiertos encontramos conjuntos de autofunciones con decaimientos instantáneos³, con un alto grado de degeneración, acompañado de un notable alejamiento de la ortogonalidad entre ellas. Esta no ortogonalidad de los estados ha sido identificada como el principal obstáculo para formular leyes que describan fehacientemente la densidad de estados, es decir, que cuenten con precisión el número de los mismos para determinadas energías [69, 70, 71]. Los autoestados de vida larga se localizan en los conjuntos atrapados (invariantes clásicos) que, al ser de naturaleza fractal, generan una mayor complejidad en el cálculo [54]. Existe una conjetura, denominada ley de Weyl fractal, que asocia el número de estados de vida larga de un sistema abierto con la constante de Planck y la dimensión fractal del repeller clásico [72].

En lo que sigue del capítulo, describiremos formalmente la ley de Weyl en sistemas cerrados, haremos un análisis espectral de los sistemas abiertos y finalmente verificaremos la conjetura que nos lleva a una ley de Weyl fractal para los sistemas paradigmáticos (2.28), (2.31) y (2.35).

3.1. Densidad de estados

El *postulado de igual probabilidad a priori* nos dice que en un sistema aislado con energía E , la probabilidad de que dicho sistema se encuentre en un microestado es la misma para todos los microestados compatibles con los vínculos macroscópicos, e igual a la inversa del número total de microestados. Así, dado el Hamiltoniano del sistema podemos calcular la distribución de probabilidad. Una vez conocida la distribución de probabilidad, se pueden calcular promedios de magnitudes tales como la energía, magnetización,

²Nos referimos al estudio de los autovalores del Hamiltoniano u operador de energía.

³Éstos son los denominados estados de vida corta.

etc. Esta es la base del ensamble microcanónico, sobreviviente de la antigua mecánica estadística⁴ de Gibbs, que tendría años más tarde su correlato cuántico [73].

El número de estados cuánticos correspondientes a una dada energía, en un sistema cerrado y macroscópico, es uno de los primeros ejemplos de cantidades calculadas en el límite semiclásico, inaugurando una nueva rama de la física, de enorme interés a finales del siglo XX [75]. Si clásicamente el número de estados accesibles corresponde a un volumen $\mathcal{V}$ en el espacio de fases $\mathcal{P}(q, p)$, y conociendo la restricción impuesta por el principio de incertidumbre de Heisenberg, donde la máxima precisión que podemos tener en una determinación simultánea de cada componente de posición y momento es $\Delta q \Delta p \approx \hbar$, resulta razonable suponer que $\mathcal{P}(q, p)$ está dividido en celdas⁵ de volumen $(2\pi\hbar)^d$, siendo d el número de grados de libertad del sistema, y que cada estado ocupa sólo una de ellas.

Por lo tanto, el número de estados correspondientes a una cierta energía puede pensarse como el número de celdas de volumen $2\pi\hbar^d$ que caben en el volumen accesible en el espacio de fases del correspondiente sistema clásico. En una aproximación cualitativa lo podemos expresar como

$$\mathcal{N}(E) \sim \frac{\mathcal{V}}{\hbar^d} \sim \hbar^{-d}, \quad (3.1)$$

con $d \in \mathbb{N}$.

Una expresión más formal viene dada por la distribución de Thomas-Fermi, o fórmula de Weyl, para la densidad de estados

$$\frac{\Delta \mathcal{N}}{\Delta E} = \bar{\rho}(E) \sim \frac{1}{(2\pi\hbar)^d} \int d^d q d^d p \delta(E - H(q, p)) \text{ cuando } \hbar \rightarrow 0, \quad (3.2)$$

donde $\delta(z)$ es la distribución delta de Dirac⁶.

Con la ley de Weyl bien establecida en sistemas cerrados, tanto en sistemas integrables como en caóticos, la pregunta que surge naturalmente es cómo se modifican los resultados anteriores en el caso de los sistemas abiertos. En los primeros, donde los Hamiltonianos que intervienen son hermíticos (sus autovalores son reales), está bien determinado, en el límite clásico ($E \rightarrow \infty$), el número de autoenergías con valores menores a E [69],

⁴El número de estados accesibles de un sistema clásico, está dado por el volumen de la hipersuperficie de energía constante en el espacio de fases.

⁵Se las denomina celdas de Planck.

⁶La fórmula (3.2) da un término promedio (suavizado) de la densidad de estados $\bar{\rho}(E)$. En sistemas caóticos, aparecen términos oscilatorios, que representan fluctuaciones descriptas por la fórmula de trazas de Gutzwiller, $\rho(E) = \bar{\rho}(E) + \frac{1}{i\hbar} \sum_{OP} T_0 / 2e^{(\frac{1}{\hbar} S(E) - i\nu\pi/2)}$.

$$\mathcal{N}(E) \equiv \#\{E_n : E_n \leq E; n \in \mathbb{N}\} = \frac{VE^D}{(\frac{D}{2})!} (4\pi)^{\frac{D}{2}} + \dots \quad (3.3)$$

para un sistema cuántico confinado en una región $\mathcal{R}$ de volumen V , en un espacio D -dimensional. En el caso de los sistemas abiertos, caracterizados por resonancias z_n tal que $|z_n| \leq 1$, y con estados asociados de vida media finita τ , es decir, con decaimientos cuánticos Γ finitos, existe una conjetura [74] que establece,

$$\mathcal{N}(E, \Gamma) \equiv \#\{E_n : |Re(E_n)| \leq E, Im(E_n) \leq \Gamma\} = f(\Gamma)E^d, \quad (3.4)$$

donde $Re(E_n) = E_0$, $Im(E_n) = -\Gamma_n/2$ y el exponente no entero $d = \dim(\mathcal{K})/2$. Aquí queda clara la relación entre la densidad de estados cuánticos con el conjunto invariante de la dinámica clásica $\mathcal{K}$. La función $f(\Gamma)$ depende únicamente del parámetro de corte Γ . Recordando que $E \sim \hbar$, resulta que

$$\mathcal{N}(E) \sim \frac{\mathcal{V}}{\hbar^d} \sim \hbar^{-d}, \quad (3.5)$$

pero ahora $d \notin \mathbb{N}$ ⁷.

En los trabajos matemáticos de M. Zworski [72], basados en conteos de resonancias de operadores no normales, se denominó *ley de Weyl fractal* a la conjetura (3.4). En [70] se da una prueba de cómo surge una ley de Weyl fractal utilizando argumentos semiclásicos, aunque no corresponde a una deducción formal sino heurística. Esta conjetura fue mostrada en diferentes sistemas como los tres discos [69], flujos hamiltonianos suaves [76], billares ópticos (microcavidades) [77, 78], mapas cuánticos [70, 79, 80, 81] y sólo deducida para un sistema particular [47].

3.2. Análisis espectral

La importancia de estudiar los espectros de los mapas presentados en la sección (2.2), radica no sólo en comprender las propiedades cuánticas de los sistemas abiertos sino también en entender su relación con propiedades invariantes clásicas, lo cual facilita el análisis de los límites semiclásicos. El caso más emblemático de vínculo estrecho entre los espectros y los invariantes clásicos, corresponde a la ley de Weyl fractal, que relaciona una cierta cantidad de autovalores (resonancias) con la dimensión fractal del conjunto

⁷Ésto se debe a que el conjunto atrapado $\mathcal{K}$, en el caso de los sistemas abiertos es de naturaleza fractal. En (3.3) se extenderá la discusión acerca de la dimensión fractal d .

atrapado $\mathcal{K}$. Esta ley es el objeto de la sección siguiente, donde se hará un estudio exhaustivo de la misma. Aquí nos detendremos a analizar diferentes propiedades de los autovalores intentando dilucidar, desde diferentes enfoques, cómo se alteran cuando se modifican condiciones del espacio de fases clásico. Estudiaremos cómo están distribuidas las resonancias en el plano complejo, tratando de distinguir entre el comportamiento de las de mayor vida y las de más rápido decaimiento. Ésto es de gran importancia para lo que sigue pues son los estados *long-lived* los contemplados en la ley de Weyl fractal, y que se intentarán reproducir semiclásicamente en la parte II de este trabajo.

Finalizando esta sección, se observarán en detalle los mapas lineales por partes haciendo foco en cómo una discontinuidad en la transformación clásica, genera cambios en el espectro cuántico.

3.2.1. Resonancias en el plano complejo

El primer sistema paradigmático que analizaremos es el mapa del panadero de tres bandas (2.29). Mostraremos la distribución de los autovalores en el plano complejo, indicando cómo se apartan del círculo unidad. Para una mejor visualización de lo anterior, cada espectro en el plano complejo irá acompañado de un gráfico anexo con la misma información pero considerada desde el punto de vista de módulos y fases. Se estudiarán diferentes dimensiones del espacio de Hilbert N , sabiendo que en todos los casos la apertura corresponde al tercio central del 2-toro⁸. Éste representa el primer paso hacia la comprensión del comportamiento de las resonancias de mayor supervivencia.

En la Fig. (3.1) se observan los espectros del tripanadero para tres tamaños diferentes del espacio de Hilbert. La elección de las dimensiones fue arbitraria, y puede observarse una distribución casi uniforme de los autovalores en el plano complejo. No parecen divisarse zonas de mayor concentración que otras si nos alejamos de las resonancias de vida corta. Los casos seleccionados fueron $N = 99$, $N = 300$ y $N = 900$.

En el caso del panadero de tres bandas no cambiamos el tamaño de la apertura ni la ubicación de la misma. Por lo tanto, no existen en tal aspecto, alteraciones en el espacio de fases clásico con potenciales efectos cuánticos. Sin embargo se debe considerar una variable adicional en este caso: las dimensiones del tipo $N = 3^l$ del espacio de Hilbert ($l \in \mathbb{N}$). Se ha informado en diferentes trabajos [59, 84, 85] acerca de anomalías en el comportamiento

⁸También se estudiaron cortes de $\Delta q = 1/3$ tanto en el primer tercio como en el último, con resultados idénticos a los presentados para el tercio central.

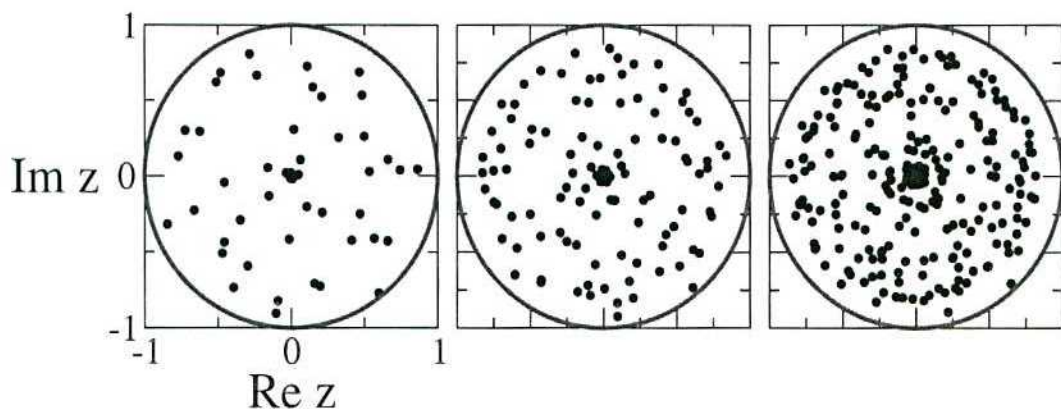


Figura 3.1: Espectros correspondientes al mapa del panadero de tres bandas cuántico, para tres dimensiones del espacio de Hilbert diferentes, $N = 99$ (izquierda), $N = 300$ (centro) y $N = 900$ (derecha). En todos los casos se ve una homogeneidad en la distribución de los mismos en $\mathbb{C}$.

de los autovalores y las autofunciones de los mapas del panadero de dos y tres bandas, cuando se los estudia en dimensiones $N = 2^l$ y $N = 3^l$, respectivamente. Sin embargo nunca se ha hecho conjetura alguna y sólo se han remitido a casos particulares. Veamos en nuestro sistema qué repercusión tiene en los espectros el hecho de considerar dimensiones de este tipo.

En la Fig. (3.2) se muestran los autovalores para tres tamaños *paradigmáticos* diferentes del espacio de Hilbert: $N = 3^l$, con $l = 4, 5, 6$. No se observa aquí la uniformidad de las distribuciones anteriores (Fig. (3.1)) y notamos que los autovalores de mayor módulo se agolpan en un anillo externo (cercano al círculo unidad) y otro interior, pero distanciado de los de decaimiento instantáneo. La diferencia entre los espectros de las Figs. (3.1) y (3.2) resulta más clara en la Fig (3.3), donde se mezclan ambos tipos de dimensiones cuánticas y observamos sus módulos y fases. Resaltan nuevamente aquí los anillos externos marcados anteriormente en las dimensiones 3^l , contra la homogeneidad del resto.

Si bien ambas clases de distribuciones resultan diferentes, no se observa una situación crítica que lleve por ejemplo a extender notoriamente el subespacio de vida corta, sino que las resonancias ocupan diferentes regiones del plano complejo pero manteniéndose estable la cantidad de ellos dado un cierto módulo de corte. Es por eso que no se esperan encontrar saltos ni anomalías cuando estudiemos la ley de Weyl fractal para dimensiones del tipo $N = 3^l$. Con respecto a los autovectores, quedan dudas planteadas para ser resueltas en el próximo capítulo.

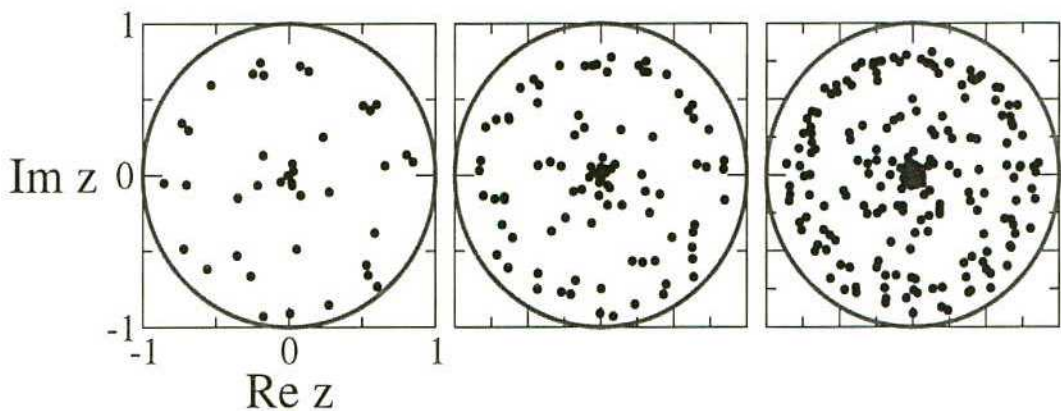


Figura 3.2: Espectros correspondientes al mapa del panadero de tres bandas cuántico, para dimensiones del espacio de Hilbert de la forma $N = 3^l$. $l = 4$ (izquierda), $l = 5$ (centro) y $l = 6$ (derecha).

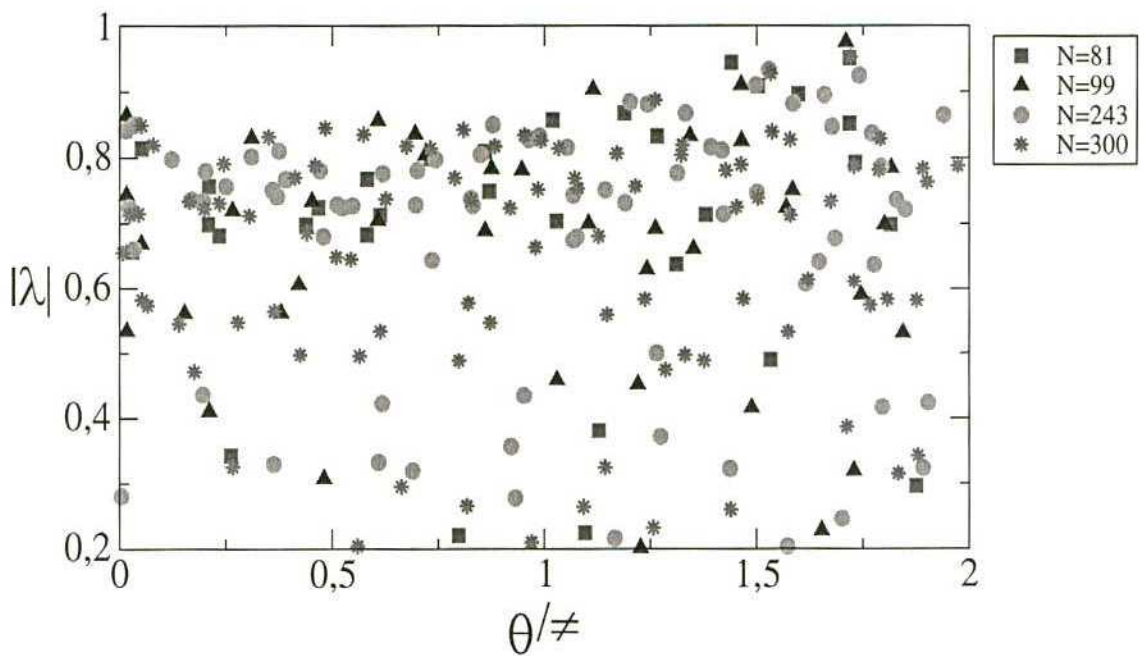


Figura 3.3: Distribución en módulo y fase de algunos conjuntos de las Figs. (3.1) y (3.2). Puede notarse lo observado en las figuras anteriores. Las dimensiones del espacio de Hilbert del tipo 3^l son $N = 81$ (cuadrados rojos) y $N = 243$ (círculos verdes). Del resto, se muestran $N = 99$ (triángulos azules) y $N = 300$ (estrellas magentas).

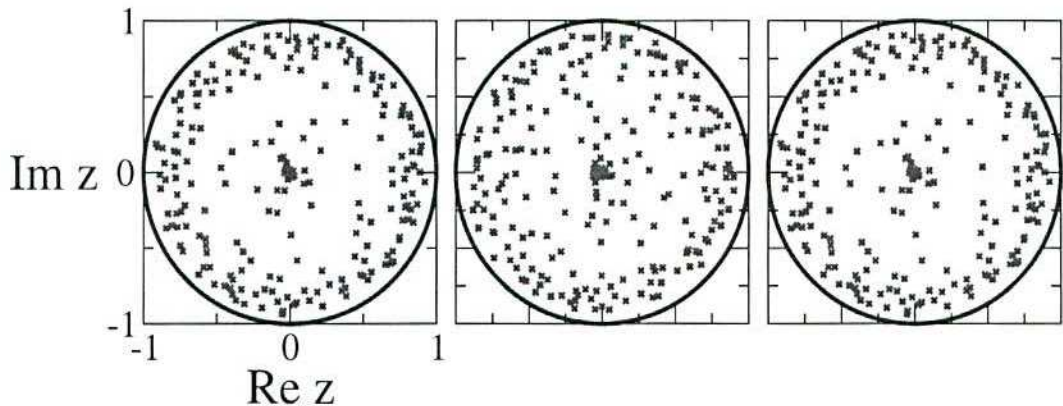


Figura 3.4: Espectros del mapa del gato cuántico, correspondientes a aperturas del 20 % del espacio de fases clásico, ubicadas en diferentes regiones. $\Delta q \equiv [0.15; 0.35]$ (izquierda), $\Delta q \equiv [0.4; 0.6]$ (centro), $\Delta q \equiv [0.65; 0.85]$ (derecha). $N = 400$.

A la hora de estudiar el espectro del mapa del gato cuántico, las variables clásicas a considerar aumentan. Se debe jugar con los tamaños de las aperturas, las ubicaciones de las mismas y las dimensiones de los espacios de Hilbert correspondientes, para poder describir el panorama completo de sus resonancias. Aplicaremos la misma lógica de análisis espectral que para el tripanadero, es decir, observaremos para los diferentes casos las distribuciones en el plano complejo de los autovalores y clarificaremos dicha situación observándolas en módulo y fase.

Comenzamos considerando aperturas del espacio de fases clásico del 20 % de su total, ubicadas en tres regiones diferentes del toro: dos de ellas simétricas respecto de $q = 1/2$, para un mismo espacio de Hilbert ($N = 400$). La primera apertura está dada por la banda vertical $[0.15; 0.35] \times [0; 1)$ y su simétrica corresponde al conjunto $[0.65; 0.85] \times [0; 1)$. El tercer agujero pasa por el centro $(q, p) = (1/2, 1/2)$ y queda determinado por $[0.4; 0.6] \times [0; 1)$. En la Fig. (3.4) se muestran los resultados de las diagonalizaciones correspondientes. Se observan distribuciones localizadas principalmente en anillos cercanos al círculo unidad, de cierto radio. El *gap* entre los autovalores externos y los de mayor tasa de decaimiento es mayor para aperturas alejadas del centro. Los espectros que corresponden a aperturas simétricas resultan idénticos; éste es un resultado esperado dadas las condiciones de periodicidad impuestas a la topología toroidal del espacio de fases. Éstos tres grandes rasgos destacados se observan con mayor precisión en la Fig. (3.5).

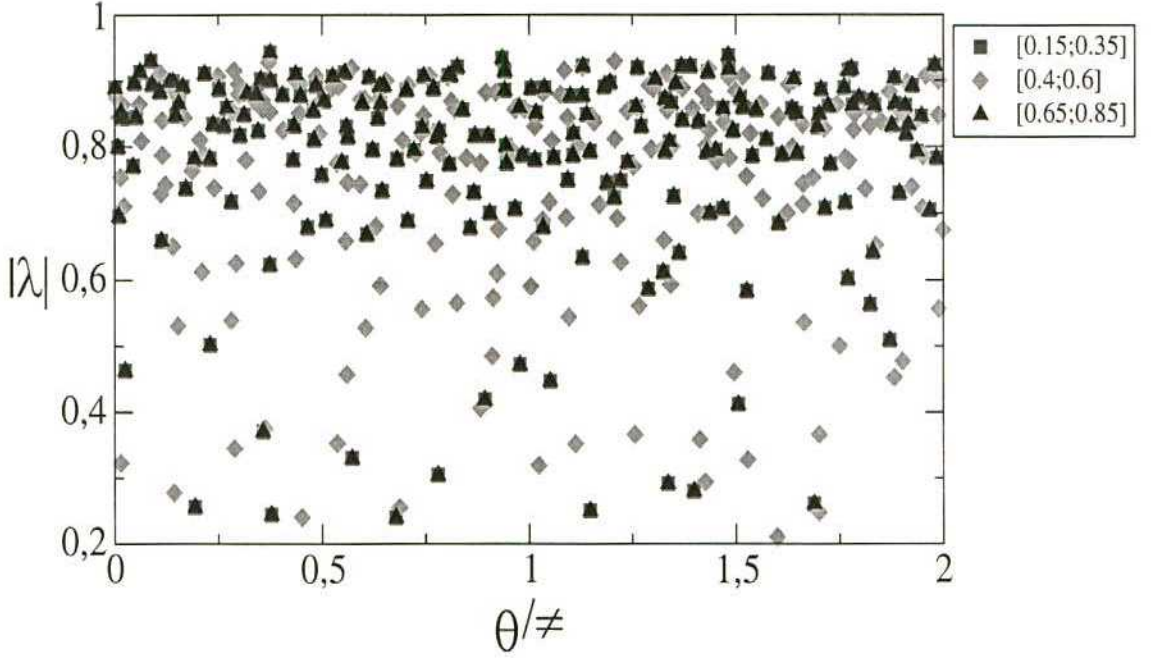


Figura 3.5: Distribución en módulo y fase de los espectros de la Fig. (3.4). Puede notarse la tendencia a ocupar posiciones de mayor módulo. Se aprecia la coincidencia entre los autovalores que corresponden a aperturas simétricas en el toro (cuadrados rojos y círculos azules), $\Delta q \equiv [0.15;0.35]$ y $\Delta q \equiv [0.65;0.85]$. La brecha entre las resonancias de mayor y menor vida es una función más suave en el caso de la apertura central $\Delta q \equiv [0.4;0.6]$. La dimensión del espacio de Hilbert es $N = 400$.

Consideremos ahora un segundo modo de aperturas en el toro. Situémonos en la región $\{q = 0.5\} \times \{p \equiv [0; 1]\}$ del espacio de fases y, simétricamente respecto de esta región generamos agujeros de áreas 20 %, 30 % y 40 % del total. Por lo tanto los nuevos huecos $\mathbb{H}$ quedan determinados por:

1. $[0.4; 0.6] \times [0; 1]$
2. $[0.35; 0.65] \times [0; 1]$
3. $[0.3; 0.7] \times [0; 1]$

En los tres casos trabajaremos con la misma dimensión del espacio de Hilbert, $N = 400$, para poder observar en detalle qué efectos se producen sobre los espectros al ir ensanchando la apertura. Los resultados se observan en la Fig. (3.6), donde notamos nuevamente que los autovalores encuentran afinidad en

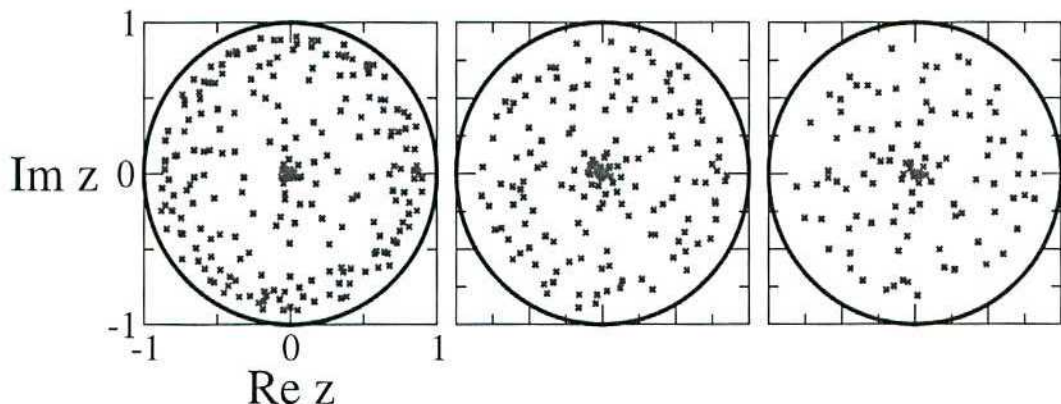


Figura 3.6: Espectros correspondientes al mapa del gato cuántico para una dimensión del espacio de Hilbert $N = 400$. Las aperturas se realizan de modo tal que resultan simétricas respecto de $q = 0.5$ y el tamaño de la misma aumenta en las figuras de izquierda a derecha. $\Delta q = 0.2$ (izquierda), $\Delta q = 0.3$ (centro), $\Delta q = 0.4$ (derecha).

un anillo cercano al círculo unidad, y que a medida que se va aumentando el tamaño del agujero ese anillo tiene un radio menor y se va alejando de dicha circunferencia (disminuye el valor de los módulos de las resonancias de mayor vida). Este descenso en módulo de las distribuciones en función del tamaño de H está representado con claridad en la Fig. (3.7)

Finalmente nos encontramos con la misma situación que en el mapa del panadero de tres bandas, ésto es, estudiar los conjuntos de autovalores que corresponden a una misma área abierta en el espacio de fases, en función de la dimensión del espacio de Hilbert. En particular, trabajaremos con una apertura del 40 % del tamaño total y tomaremos tres dimensiones diferentes del espacio de Hilbert para poder también establecer una analogía con el sistema estudiado anteriormente. El resultado obtenido puede observarse en la Fig. (3.8), donde se aprecia el mismo fenómeno encontrado en el tripanadero: a medida que incrementamos el valor de la dimensión del espacio de Hilbert, no se producen cambios en las distribuciones de las resonancias. Y análogamente a lo observado en el tripanadero, aparece remarcado un anillo externo donde se amontonan los autovalores de decaimiento más lento.

En la Fig. (3.9) presentamos una forma diferente de analizar los mismos resultados obtenidos en la Fig. (3.8). Las diferentes dimensiones del espacio de Hilbert denotan comportamientos análogos en las distribuciones de las resonancias, con una tendencia a agruparse cerca del valor $|\lambda| = 1$.

En resumen, con la intención de estudiar y comprender las propiedades

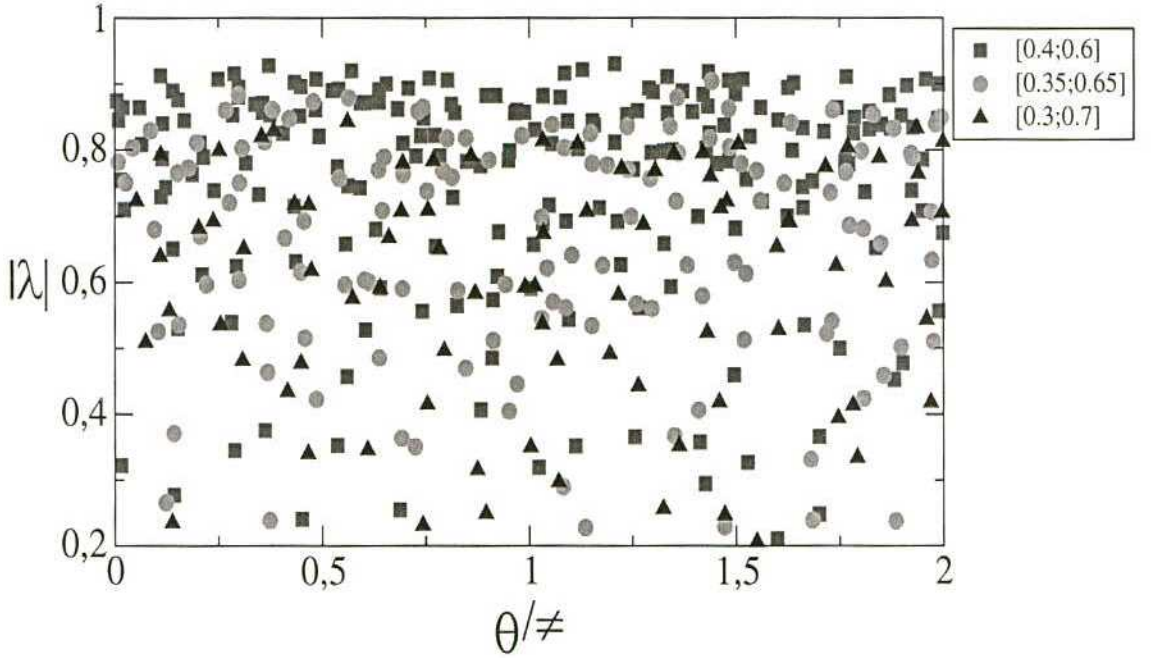


Figura 3.7: Distribución en módulo y fase de los espectros de la Fig. (3.6). Los máximos valores de los módulos de los autovalores disminuye a medida que aumenta el ancho de la apertura, siendo los mayores los correspondientes a $\Delta q = 0.2$ (cuadrados rojos), siguiendo en descenso $\Delta q = 0.3$ (círculos verdes) y $\Delta q = 0.4$ (triángulos azules). La dimensión del espacio de Hilbert es $N = 400$.

de los estados de mayor vida τ , nos abocamos al análisis de los autovalores de los propagadores (2.29) y (2.35). Se llevaron a cabo diferentes variedades de aperturas (por tamaño, localización, etc.) en el espacio de fases, y se estudiaron los efectos producidos en la mecánica cuántica de dichos sistemas, a partir de la observación de sus espectros correspondientes. Se encontró que una misma alteración clásica produce el mismo resultado cuántico en ambos sistemas y que también en ambos casos, se pueden distinguir cualitativamente resonancias de vida corta y larga. Los espectros varían a medida que se trastoca la geometría del espacio de fases pero siempre puede vislumbrarse una marcada “frontera” entre tales resonancias.

Con la intención de dar una descripción cuantitativa de las resonancias de mayor vida, y de comprender la conexión con la dinámica clásica del sistema, en la sección siguiente se presentará la conjetura conocida como ley de Weyl fractal.

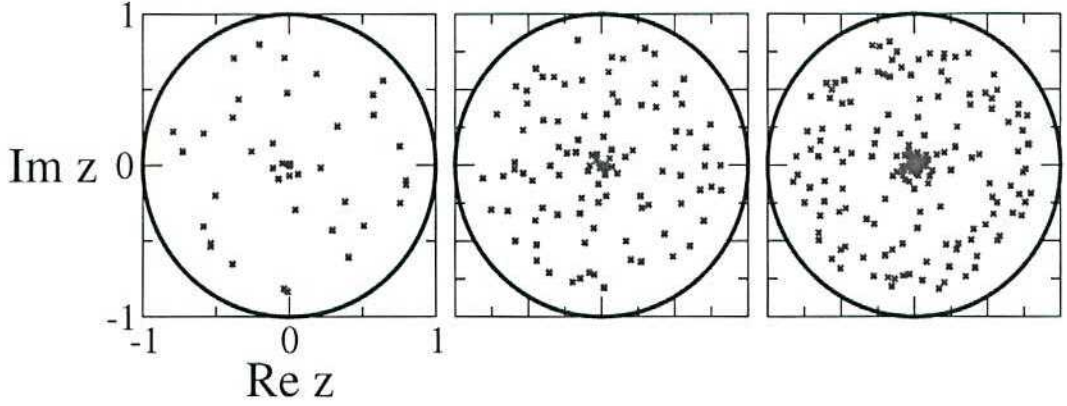


Figura 3.8: Espectros correspondientes al mapa del gato cuántico para una apertura del 40 % del espacio de fases, en la región $\Delta q \equiv [0.3; 0.7] \times [0; 1]$. El tamaño del espacio de Hilbert en cada caso es: $N = 120$ (izquierda), $N = 400$ (centro) y $N = 800$ (derecha).

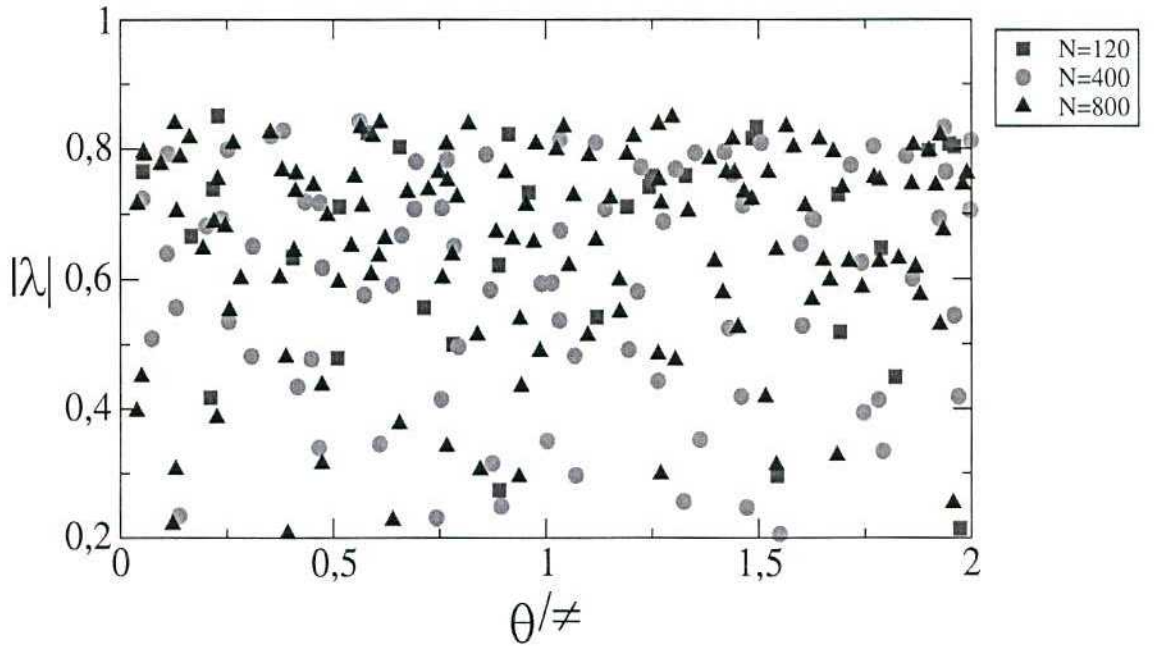


Figura 3.9: Distribución en módulo y fase de los espectros de la Fig. (3.8). La zona del espacio de fases afectada por la apertura es $[0.3; 0.7] \times [0; 1]$. Las dimensiones del espacio de Hilbert son $N = 120$ (cuadrados rojos), $N = 400$ (círculos verdes) y $N = 800$ (triángulos azules).

3.3. Cálculo del número de resonancias

Una vez estudiados los espectros de los sistemas de scattering (2.28) y (2.35), que nos brindó un acercamiento a las distribuciones de sus niveles de energía, nos encontramos en condiciones de verificar la validez de la ley de Weyl fractal (3.5).

En el Capítulo 2 encontramos que realizar una apertura en el espacio de fases clásico equivalía cuánticamente a aplicar un proyector al propagador, $\tilde{U}_N = \hat{U}_N \hat{\Pi}$. Los autovalores correspondientes ingresan al círculo unidad, $z_n = \exp(-i\alpha_n)$ donde $\alpha_n \in \mathbb{C}$ se denominan cuasienergías y son de la forma $\alpha_n = E_n - i\Gamma_n/2$. De este modo $|z_n|^2 = \exp(-\Gamma_n)$, con $\Gamma_n = 1/\tau_n$ la tasa de decaimiento de cada autoestado y τ_n su tiempo de vida media.

Verificaremos entonces la validez de la ley de Weyl fractal (3.5), contando las resonancias de un sistema con una dimensión del espacio de Hilbert dada, con tasas de decaimiento menores a cierto valor límite⁹ $\Gamma_n < -2 \ln \nu$. Luego, se puede pensar dicha ley como el conteo de las resonancias en el plano complejo cuyos módulos sean mayores a cierto valor de corte $\nu_n > \nu$ y, recordando que $\hbar = 1/2\pi N$, reescribimos la ley como $N_\nu \propto N^{d/2}$ donde d es una dimensión fractal del conjunto atrapado $\mathcal{K}$. Es aun una discusión abierta el hecho de cuál es la dimensión fractal que corresponde ubicar en el exponente de la expresión anterior [47]. Diferentes dimensiones como la box-counting, de información, Minkowski, Hausdorff, etc se han registrado en los trabajos que analizaron la conjetura. En el caso del mapa del panadero de tres bandas (2.17), esta discusión pierde sentido pues su conjunto atrapado clásico coincide con el fractal conocido como *alfombra de Sierpinski*, que tiene la particularidad de que todas sus dimensiones fractales son iguales. Para el resto de los sistemas, utilizaremos la dimensión de información d_I ¹⁰ [25, 31, 48] que puede expresarse, en función de cantidades clásicas conocidas, como

$$d_I = 2 - \frac{\gamma}{\lambda}, \quad (3.6)$$

donde γ es la tasa de escape clásica y λ el exponente de Lyapunov del sistema. La expresión (3.6) es válida en mapas de Anosov y en el régimen de aperturas pequeñas, por lo que representa una vía muy accesible de cálculo de dimensiones fractales, justificando así nuestra elección.

En la Fig. (3.10) se presenta un gráfico en escala logarítmica de N_ν en función de N en el caso del mapa del panadero de tres bandas. Aquí el tamaño

⁹Por la relación entre la tasa de decaimiento y la vida media, es análogo a considerar las resonancias que vivan más que un cierto tiempo límite.

¹⁰Esta dimensión lleva el nombre de *información* pues su definición está basada en una entropía de primer orden de Shannon.

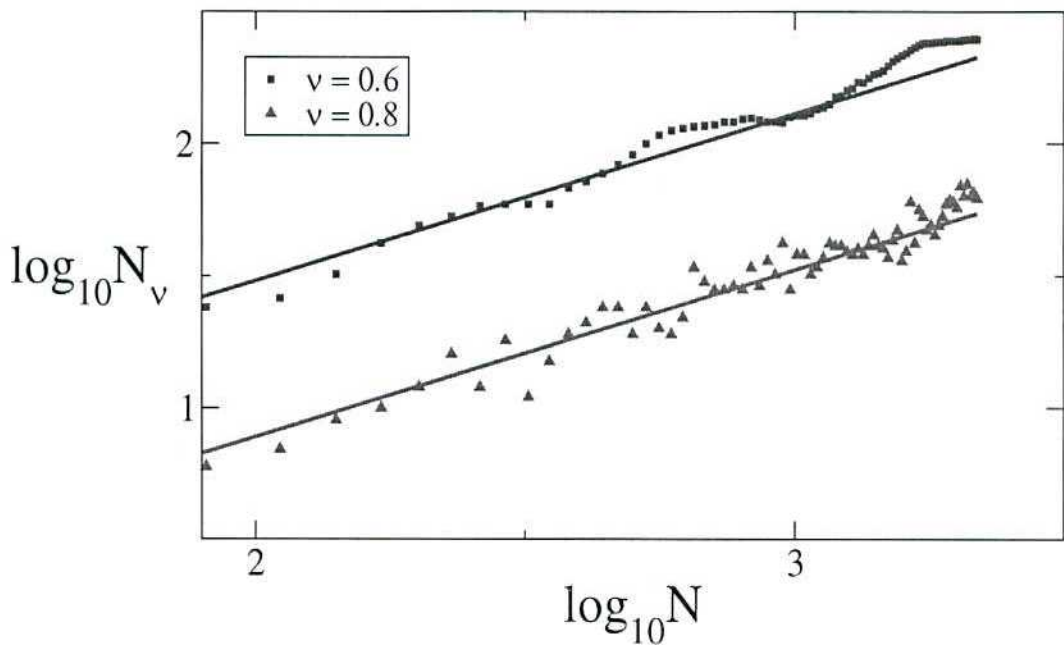


Figura 3.10: Gráfico en escala logarítmica de la fracción de resonancias N_ν en función de la dimensión del espacio de Hilbert N , para $\nu > 0.6$ (cuadrados rojos) y $\nu > 0.8$ (triángulos magenta), en el mapa del panadero de tres bandas. Las líneas rectas de igual color corresponden a los ajustes hechos con las predicciones teóricas de la ley de Weyl. La dimensión fractal de información es $\ln 2 / \ln 3$ para una apertura del espacio de fases $\Delta q = 1/3$.

de la apertura es fijo e idéntico en los dos casos mostrados, $\Delta q \equiv [1/3; 2/3]$, y lo que variamos es el valor del módulo de los autovalores hasta dónde contamos. Se muestran dos situaciones, la primera con resonancias cuyos módulos son mayores a 0.6 y la segunda, mayores a 0.8. En ambos casos se grafican las predicciones de la ley de Weyl fractal $\ln(N_\nu) = \ln(N)(d_I/2) + A$ (donde A es una constante), y se adecua el valor de dicha constante de modo de ajustar los datos. La dimensión fractal de $\mathcal{K}$ es $d_I = \ln 2 / \ln 3$. Observamos que aun en regímenes de aperturas grandes (se está abriendo más del 33 % del espacio de fases) los datos acuerdan con las predicciones teóricas. Ésto es, se conoce el número de estados que viven más de un cierto tiempo τ , celebrando una suerte de densidad de estados para los sistemas de scattering.

El mapa del gato presenta *a priori* algunas dificultades extras. Los fractales que determinan el repeller para diferentes aperturas del toro no resultan conocidos ni tratables analíticamente con facilidad¹¹. Pero si se considera

¹¹Nos referimos aquí a la dificultad en el cálculo de las dimensiones fractales correspon-

un régimen donde la tasa de escape clásica pueda ajustarse con la apertura (ver Figs. (2.9) y (2.11)), la ecuación (3.6) nos aproxima a la dimensión de información.

En este caso, el valor umbral seleccionado del módulo fue $\nu = 0.71$, aplicándose tres diferentes aperturas en el espacio de fases: una del 10 % con $\Delta q = [0.25; 0.35]$, otra del 20 % con $\Delta q = [0.25; 0.45]$ y una tercera del 30 % con $\Delta q = [0.15; 0.45]$. En la Fig. (3.11) presentamos el mismo gráfico en escala logarítmica que se hizo con el panadero de tres bandas, en el caso del gato. Los ajustes se hacen del mismo modo y las dimensiones fractales de información son $d_I = 1,91957$ (para el 10 %), $d_I = 1,82966$ (20 %) y $d_I = 1.7277$ (30 %)¹². Los datos coinciden con las predicciones teóricas produciéndose una leve separación de ambos conjuntos a medida que el tamaño de la apertura incrementa su valor. De este modo, se identifican de manera clara las resonancias de mayor vida y se exhibe que la conjetura (3.5) no distingue el modo en que se lleva a cabo el proceso de apertura del espacio de fases clásico, sino que sólo resulta trascendente el tamaño del fractal que da el conjunto atrapado $\mathcal{K}$.

En esta sección se comprobó la validez de la ley de Weyl fractal (3.5). Ésto se llevó a cabo en nuestros modelos paradigmáticos (2.28) y (2.35). De este modo se pudo observar que, en sistemas de scattering, existe una suerte de densidad de estados, en analogía con la de los sistemas cerrados (3.1). Los estados de mayor vida pueden ser identificados con precisión, dado un valor de corte para la vida media¹³.

Por otro lado, se mostró que la ley (3.5) depende de cantidades cuánticas como lo es el tamaño del espacio de Hilbert N , y que clásicamente sólo tiene dependencia con el tamaño del conjunto atrapado $\mathcal{K}$, que viene dado por su dimensión fractal d . Ésto implica que no importan los métodos de generación del subespacio $\mathbb{H}$ en $\mathbb{T}^2$, sino únicamente cuán grande es el repeller.

El hecho de poder identificar con claridad los estados de mayor vida, es de suma importancia pues son éstos quienes definen la dinámica del sistema a tiempos largos, y que pueden asociarse a invariantes clásicos. En la parte II de este trabajo se llevará a cabo una aproximación semiclásica con la intención de reproducir los autovectores *long-lived*, a partir de una base truncada del espacio de Hilbert. La dimensión de la misma se relaciona con el número que resulta de la ley de Weyl fractal, lo cual implicará una notoria reducción de

dientes.

¹²En la Fig. (3.11) se seleccionaron intervalos Δq simétricos respecto de $q = 0.5$. Cabe destacar que aperturas del mismo tamaño pero localizadas en diferentes regiones de $\mathcal{P}(q, p)$ nos conducen a idénticas dimensiones fractales, lo cual simplifica el tratamiento del problema y la figura mencionada muestra información completa de la situación.

¹³El mismo puede venir dado por $\Gamma = 1/\tau = -2 \ln \nu$.

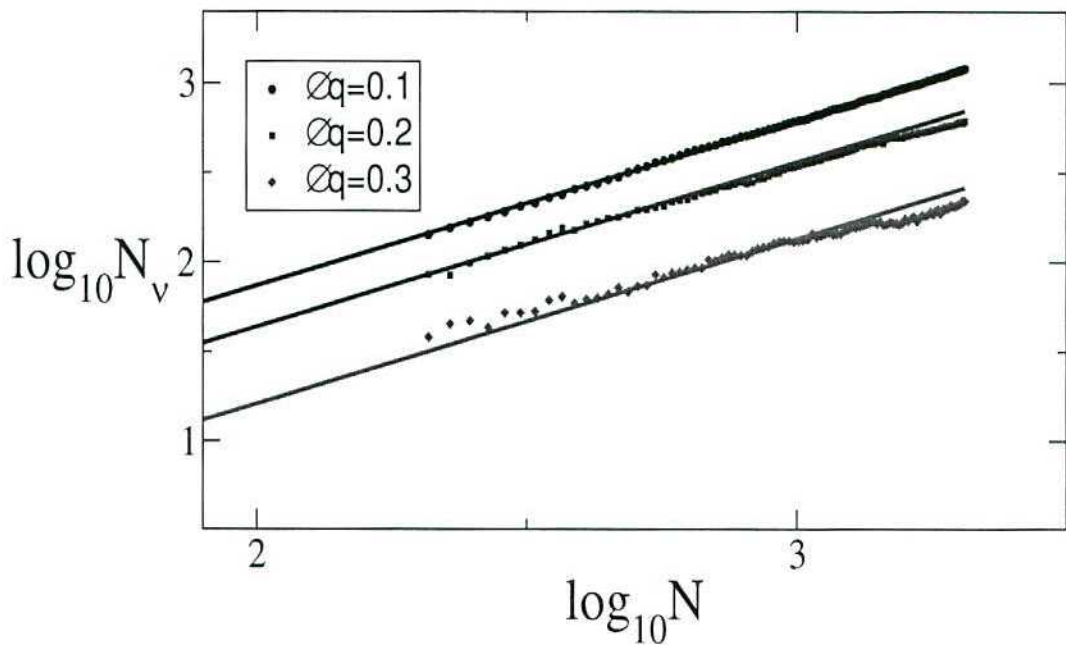


Figura 3.11: Gráfico en escala logarítmica de la fracción de resonancias N_v en función de la dimensión del espacio de Hilbert N , para $\nu > 0.71$ en el caso del mapa del gato cuántico. El color negro corresponde a una apertura $\Delta q = 0.1$, los círculos representan las resonancias contadas y la línea recta, la predicción teórica. Análogamente, en color azul y rojo, están representadas las resonancias y predicciones teóricas en los casos $\Delta q = 0.2$ y $\Delta q = 0.3$, respectivamente.

la dimensionalidad del problema matricial.

3.4. Mapas lineales por partes

En (2.3.1) se definió la transformación conocida como mapa del panadero de dos bandas (2.30). Este sistema paradigmático es una función definida lineal en dos tramos diferentes del 2-toro $\mathbb{T}^2$, a un lado y otro del valor de coordenada $q = 1/2$. Como fue mencionado en el Capítulo 2, este mapa cerrado ha sido uno de los modelos más estudiados en el área del caos cuántico por su simple manejo analítico, pero muy poco se conoce acerca de sus propiedades si se lleva a cabo un proceso de apertura. Mucho mayor es el desconocimiento que se tiene acerca de los efectos que genera la discontinuidad mencionada, si forma parte del hueco realizado en el espacio de fases clásico.

Clásicamente la injerencia de la discontinuidad al solaparse con la apertura genera mayor cantidad de canales de escape, es decir, un incremento en el valor de la tasa de escape γ , para idénticos anchos Δq , si $q = 1/2$ forma parte del hueco H. El corolario de lo anterior es la reducción de volumen del fractal que representa al conjunto atrapado $\mathcal{K}$.

Las consecuencias desde el punto de vista cuántico se esquematizan en la Fig. (3.12). Se tomaron en cuenta dos tamaños diferentes de espacios de Hilbert, $N = 2048 = 2^{11}$ y $N = 602$, para despejar dudas de posibles efectos anómalos [59, 84]. Se llevó a cabo una apertura del 10 % del espacio de fases ($\Delta q = 0.1$) en intervalos $[q_c - \Delta q/2, q_c + \Delta q/2]$, para dos valores diferentes de la coordenada central, $q_c = 0.3$ y $q_c = 0.5$ (éste último incluye la discontinuidad). Luego los huecos quedaron determinados como:

1. $[0.25; 0.35] \times [0; 1]$
2. $[0.45; 0.55] \times [0; 1]$

En el caso 1 la tasa de escape medida fue $\gamma = 0.0973$ y en 2, $\gamma = 0.16488$.

Puede verse para los dos valores de N que las resonancias se agrupan cerca del origen y en un anillo cercano a $r = 1$, si la apertura está centrada en $q_c = 0.3$ (paneles izquierdos). En los paneles derechos, donde el hueco está centrado en la discontinuidad, la descripción cualitativa es análoga a la anterior pero hay un notorio crecimiento de la densidad de autovalores cerca del origen (subespacio nulo), en desmedro de la del anillo exterior.

3.4.1. Ley de Weyl fractal y discontinuidades

Haremos aquí un análisis de lo que ocurre con la ley de Weyl fractal (3.5), en el caso de mapas lineales por partes. Analizamos con anterioridad cómo variaban las propiedades espectrales y las distribuciones de los niveles de energía en mapas donde la apertura se ubicaba en una discontinuidad del mismo. El efecto más notable observado fue una incremento del subespacio nulo y de los estados de vida corta, en desmedro de las resonancias con decaimiento menor. En otras palabras, si la apertura tiene incluida a la discontinuidad del mapa, la tasa de escape de órbitas clásicas es mayor que cuando no, alterándose en estos casos la relación $\Delta q \sim \gamma$. Por lo tanto el volumen del fractal generado es mucho menor o, lo que es lo mismo, la dimensión de información disminuye notablemente para un mismo valor de Δq . Veamos primero qué ocurre con el número de resonancias en el mapa del panadero de dos bandas cuando la apertura está alejada de la discontinuidad. Realizamos tres aperturas distintas ($\Delta q = 0.05, 0.1$ y 0.2) comenzando

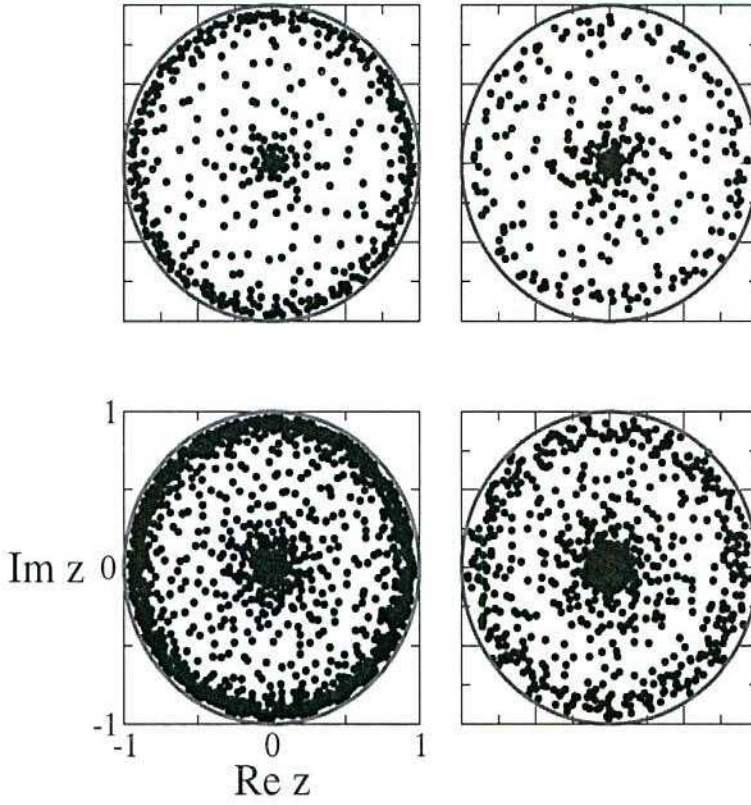


Figura 3.12: Autovalores del mapa del panadero de dos bandas abierto en el plano complejo. En los paneles superiores se muestra el caso $N = 602$ y en los inferiores, $N = 2048$. En los paneles de la izquierda, la apertura está centrada en $q_c = 0.3$ mientras que en los de la derecha en $q_c = 0.5$; $\Delta q = 0.1$ en todos los casos.

desde $q = 0.25$, es decir que los tres agujeros quedaron definidos como

$$[0.25; 0.25 + \Delta q] \times [0; 1].$$

Las dimensiones fractales de información de los conjuntos atrapados $\mathcal{K}$ son $d_I = 1.925999419$ (si $\Delta q = 0.05$), $d_I = 1.847996907$ (si $\Delta q = 0.1$) y $d_I = 1.67807$ (si $\Delta q = 0.2$). En la Fig. (3.13) podemos observar la validez de la ley de Weyl fractal en este mapa lineal por partes, cuando las aperturas realizadas evaden la discontinuidad.

Consideremos ahora también tres cortes de diferentes tamaños. Los llevamos a cabo situándonos en un lugar fijo q_c del eje de las coordenadas y generamos simétricamente respecto de él las aperturas. Elegimos $q_c = 0.3$ y $q_c = 0.5$. En el primer caso, el punto no está en la zona de influencia de la discontinuidad, por lo tanto, generando cortes pequeños (hasta el 20%)

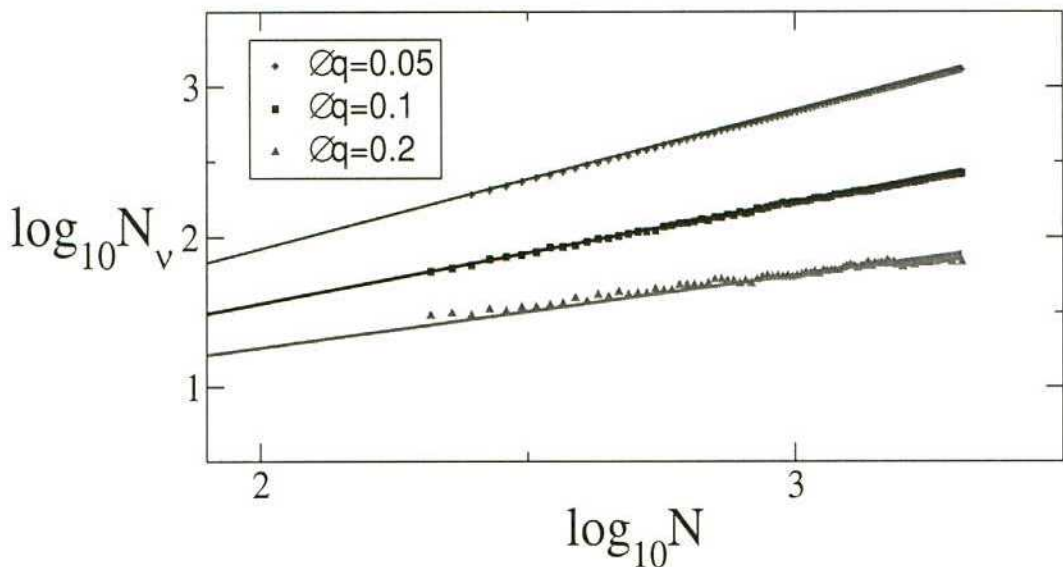


Figura 3.13: Fracción de resonancias N_ν en función de la dimensión del espacio de Hilbert N , para $\nu > 0.3$ para el mapa del panadero de dos bandas cuántico (escala logarítmica). Las líneas rectas representan las predicciones teóricas para las tres aperturas realizadas, cada una correspondiente a un color: rojo, $\Delta q = 0.05$ (círculos); azul, $\Delta q = 0.1$ (cuadrados) y magenta, $\Delta q = 0.2$ (triángulos).

conocemos las dimensiones de información pues los fractales que se generan son muy parecidos a los estudiados en la sección (3.3). Verificaremos la conjetura que lleva a la ley de Weyl fractal en este caso, pero con la intención de comparar su validez con otro caso con aperturas idénticas pero que incluyen la discontinuidad del mapa. Consideramos ahora $q_c = 0.5$ y del mismo modo que antes efectuamos aperturas del 5, 10 y 20 %. Al estar inmersa la discontinuidad en el agujero realizado en el toro, ya dijimos que la tasa de escape clásica aumenta generando fractales más flacos (de menor volumen). Para los mismos tamaños de aperturas que antes, las nuevas dimensiones fractales resultan: $d_I = 1.90589$ (si $\Delta q = 0.05$), $d_I = 1.762137$ (si $\Delta q = 0.1$) y $d_I = 1.1112$ (si $\Delta q = 0.2$).

En la Fig. (3.14) podemos verificar que el efecto de la discontinuidad en la apertura, que altera determinadas propiedades clásicas y cuánticas por separado ¹⁴, no afecta la validez de la ley de Weyl fractal. En esta sección se investigó el comportamiento de los mapas lineales por partes. Observamos

¹⁴Nos referimos a la tasa de escape clásica γ y a la de decaimiento de cada autoestado cuántico Γ_n .

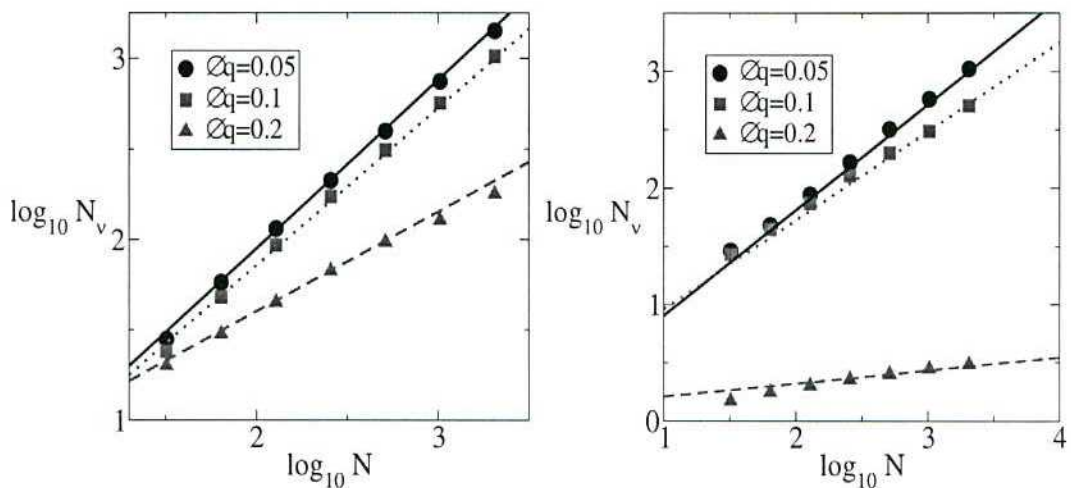


Figura 3.14: Fracción de estados N_ν para valores $\nu > 0.3$ como función de la dimensión del espacio de Hilbert N , en escala logarítmica. Las líneas corresponden a la predicción dada por la ley de Weyl fractal. Los símbolos corresponden a los valores numéricos calculados. En el panel izquierdo $q_c = 0.3$ y en el derecho $q_c = 0.5$. En ambos casos las líneas sólidas y círculos negros corresponden a $\Delta q = 0.05$, las líneas punteadas y cuadrados rojos a $\Delta q = 0.1$ y las líneas segmentadas y triángulos verdes a $\Delta q = 0.2$.

que el rol jugado por la discontinuidad central en el mapa del panadero de dos bandas es crucial. Verificamos que las distribuciones de sus autovalores con mayor información clásica (ésto es, con mayor valor de ν) muestran un comportamiento similar en diferentes casos de N , cuando la apertura está situada fuera de la zona de influencia de la discontinuidad central. Pero cuando ese no es el caso, los autovalores se comportan de manera diferente exhibiendo distribuciones donde los subespacios nulos se incrementan, en desmedro de los anillos exteriores, cercanos al círculo unidad.

Por último, hay que destacar que la ley de Weyl fractal se obedece con gran precisión en todos los casos.

Parte II

Aproximación semiclásica de órbitas periódicas cortas a las resonancias cuánticas

Capítulo 4

Funciones de scar

En esta segunda parte nos disponemos a construir una base del espacio de Hilbert consistente de funciones suaves, localizadas en las inmediaciones de las órbitas periódicas de los mapas presentados, y que se extienden a lo largo de sus variedades. Estas funciones, denominadas funciones de *scar* o funciones de cicatriz, dieron una solución semiclásica al problema de reproducir los autoestados de un sistema caótico [15], en el caso de sistemas cerrados.

La construcción de funciones de onda en las inmediaciones de órbitas periódicas no es casual, sino el resultado de muchos años de estudio de un fenómeno consistente en la localización accidental de autoestados, en contraposición al teorema de ergodicidad cuántica, que asegura una distribución uniforme sobre una capa de energía de acuerdo con un ensamble microcanónico [11]. Asimismo, estos entes tienen conexión con trabajos más antiguos a su primera formulación [90].

En 1988, E. Bogomolny [91] representó a una función de onda al cuadrado promediada como la suma sobre un número finito de órbitas periódicas. La contribución de cada órbita periódica (*contribución de scar*, [10]) poseía los elementos característicos de las estructuras hiperbólicas, aunque su implementación numérica no resultase del todo factible. Un año más tarde, Michael Berry [92] presentó una versión mejorada de las ideas de Bogomolny trabajando en el espacio de fases¹. Los dos autores aproximaron el movimiento en la vecindad de una órbita periódica mediante un mapa lineal sobre una sección de Poincaré transversal. Cabe destacar que en cada sección transversal a la órbita periódica, sus expresiones son aproximaciones a las autofunciones de un Hamiltoniano cuadrático hiperbólico. Dichas autofunciones fueron estudiadas por S. Nonnenmacher y A. Voros en el caso de un grado de libertad [93].

¹El trabajo de Berry consistió en obtener la función de Wigner espectral para cada contribución de scar.

G.G. de Polavieja, F. Borondo y R. Benito construyeron funciones de onda localizadas sobre órbitas periódicas de manera numérica [94]. Las mismas eran una combinación lineal de autofunciones del sistema donde los coeficientes venían dados por sus respectivos overlaps con un paquete de onda localizado en la vecindad de un punto de la órbita periódica². Otra construcción numérica con resultados similares fue presentada en [95]. Finalmente E.J. Heller y L. Kaplan [13] computaron estructuras localizadas de manera satisfactoria trabajando con una versión modificada del mapa del panadero.

A continuación presentaremos el fenómeno de *scarring*, que derivó en las construcciones mencionadas anteriormente. Este capítulo finaliza con la inclusión formal de las funciones de scar. En primera instancia se mencionará su desarrollo para flujos Hamiltonianos, continuando con su construcción en mapas cerrados, y finalizaremos presentando las funciones de scar en sistemas abiertos.

4.1. *Scarring*

Uno de los fenómenos más curiosos que presentan los sistemas cuánticos cuya dinámica clásica es caótica, es el de *scarring*. No se conoce su origen preciso y por lo tanto representa un objeto de constante estudio.

Una primera aproximación al fenómeno indica que las autofunciones de sistemas caóticos presentan máximos de densidad de probabilidad, dispuestos a lo largo de las trayectorias periódicas del sistema clásico correspondiente. Dichos máximos son denominados *scars* o cicatrices. La primera observación de este tipo de manifestaciones se debe a S.W. Mc Donald [97]. Esta observación llamó la atención debido a que iba en contra de lo conjeturado primero por M.V. Berry [68] y reafirmado luego por A. Voros [98], donde sostenían que los autoestados estaban asociados a toda la superficie de energía explorada ergódicamente por las trayectorias, y entonces deberían asemejarse localmente a superposiciones aleatorias de ondas planas. Esta conjetura tiene su contraparte formal y matemáticamente rigurosa en lo que se denomina el teorema de ergodicidad cuántica o de Schnirelman³ [11].

En 1984, Eric Heller presentó una visualización clara del incipiente fenómeno [10], donde podían visualizarse las cicatrices de los autoestados correspondientes al billar de Bunimovich o el estadio. Estudios posteriores lo llevaron a dar en 1989 una definición un poco más precisa de *scarring* [99]: “*Un au-*

²Estos coeficientes están modulados con una distribución Gaussiana, de manera que se minimice la dispersión en energía.

³Usualmente no nos referimos a la conjetura sino directamente a su desarrollo matemático dado por dicho teorema.

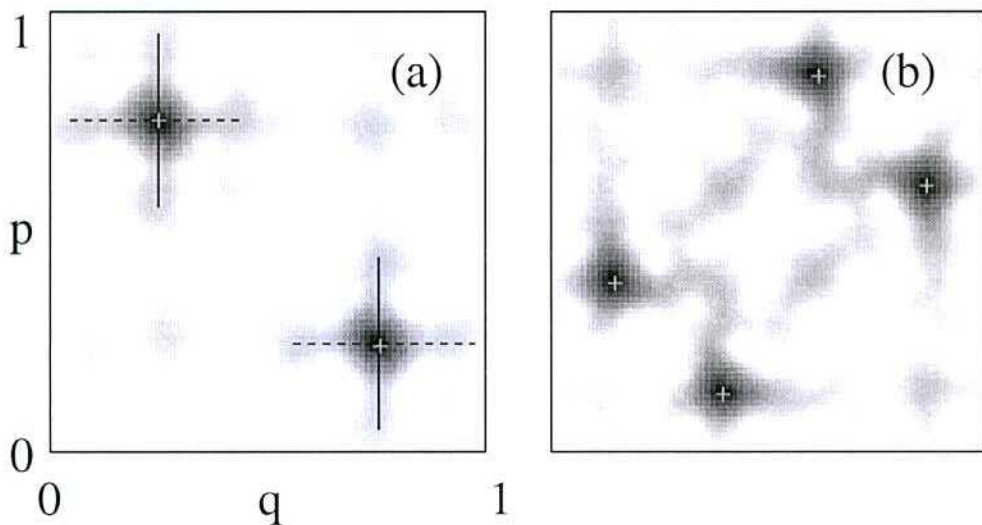


Figura 4.1: Representación de Husimi de dos autoestados del mapa del panadero cuántico de tres bandas cerrado. El tamaño del espacio de Hilbert es $N = 81$. Los estados muestran cicatrices en distintas órbitas periódicas, que se extienden sobre sus variedades estables e inestables: (a) órbita de período 2, (b) órbita de período 4. En el caso (b), no se muestran las variedades pero corresponden a las mismas direcciones que en (a).

*toestado cuántico de un sistema clásicamente caótico tiene un scar de una órbita periódica si su densidad sobre las variedades clásicas invariantes, cerca de la órbita periódica se ve aumentada por sobre la densidad esperada estadísticamente*⁴. Esta definición nos brinda las dos características esenciales de las cicatrices, la existencia de una densidad extra de probabilidad y su morfología en el espacio de fases. En este marco fue que se dieron las construcciones mencionadas en la introducción de este capítulo. En la Sec. (4.2) se discutirá la construcción de las funciones de scar, debidas a E. Vergini [16], que representaron un avance notorio en la comprensión del fenómeno descripto. También se extenderá dicha formulación a mapas cuánticos. En las Figs. (4.1) y (4.2) se muestran las representaciones de Husimi (ver Apéndice A) de diferentes autoestados de los mapas del tripanadero y el gato cerrados (unitarios) respectivamente. Se puede apreciar en ambos casos cómo los estados tienden a posarse en las órbitas periódicas de las transformaciones clásicas, generando las cicatrices mencionadas con anterioridad.

Tal como observamos en los Caps. 2 y 3, los sistemas de scattering permiten el escape de trayectorias a través de un hueco realizado en el espacio de fa-

⁴Estadísticamente se espera lo conjeturado por Berry y Voros.

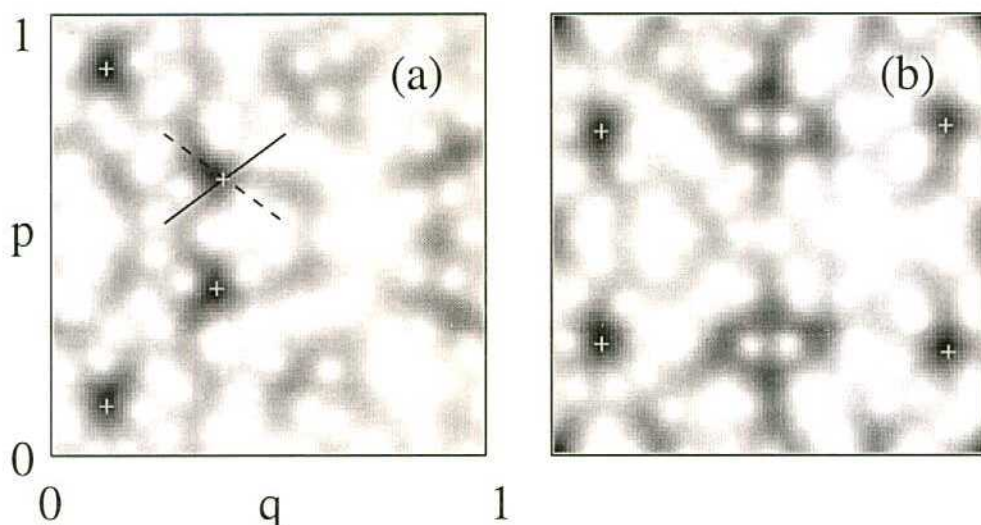


Figura 4.2: Representación de Husimi de dos autoestados del mapa del gato cuántico unitario. El tamaño del espacio de Hilbert es $N = 100$. Los estados muestran cicatrices en distintas órbitas periódicas, extendidos sobre las variedades estables e inestables: (a) órbita de período 4, (b) órbitas de períodos 1 ($q = 0$ y $p = 0$) y 4. En el caso (b), no se muestran las variedades pero corresponden a las mismas direcciones que en (a).

ses clásico. Ésto podría representar un claro indicio de que no se encontrarían autofunciones cuánticas de dichos sistemas localizadas en las inmediaciones de las órbitas periódicas cortas. Sin embargo, a partir de un estudio realizado en el estadio, Akis *et al* [100] conjeturaron que los autoestados cuánticos de sistemas clásicamente caóticos y abiertos, deberían presentar cicatrices en las órbitas periódicas cortas. H. Ishio y J.P. Keating [101] mostraron años más tarde y en el mismo sistema, que efectivamente se observaban dichas cicatrices pero únicamente en las órbitas de scattering⁵. Un estudio más extenso de diferentes sistemas (billares elípticos, rectangulares y semiestadios) llevó a J. Wiersig a sugerir que el scarring en sistemas abiertos pareciera ser la regla y no la excepción [27]. Los sistemas allí estudiados resultan de gran importancia por sus aplicaciones experimentales y tecnológicas [29] y el fenómeno de cicatrizado cobra relevancia en la comprensión de las estructuras que se forman en dichos dispositivos. En 2008, D. Wisniacki y G.G. Carlo hicieron extensivo este fenómeno a los mapas abiertos [28]; en particular, observaron cicatrices en una órbita de período uno del mapa del gato.

⁵Los autores llamaron órbitas o trayectorias de scattering a aquellas pertenecientes al repeller.

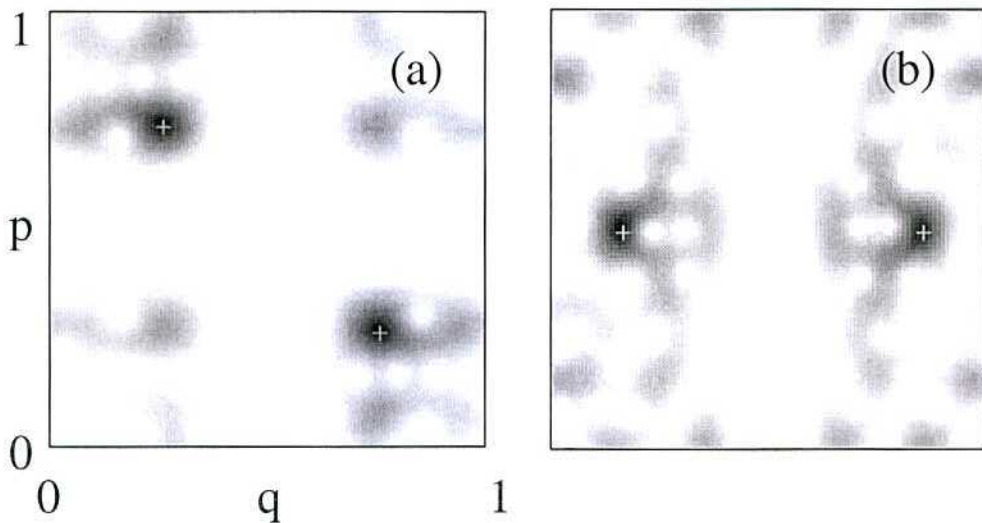


Figura 4.3: Representación de Husimi de dos autoestados correspondientes a diferentes mapas abiertos. (a): mapa del panadero cuántico de tres bandas, (b): mapa del gato. En el primer caso el tamaño del espacio de Hilbert es $N = 243$ y se observa una cicatriz en una órbita periódica de período $L = 2$. En el caso del mapa del gato, la apertura consiste en una banda vertical de ancho 0.2, que se extiende del centro simétricamente. El autoestado seleccionado tiene una cicatriz en una órbita de período $L = 2$.

Estos últimos trabajos representaron una enorme motivación para el estudio del scarring en sistemas abiertos. En la Fig. (4.3) se pueden visualizar las cicatrices en órbitas periódicas del repeller $\mathcal{K}$, correspondientes a dos autovectores de los mapas del panadero de tres bandas y del gato abiertos (no unitarios).

En la próxima sección presentaremos la formulación histórica de las funciones de scar en sistemas cerrados, y propondremos una adaptación a sistemas de scattering.

4.2. Construcción de funciones de scar

Como mencionamos anteriormente, el nacimiento de las funciones de scar fue obra de E. Vergini y G.G. Carlo en 2001 [15], cuando presentaron una teoría donde fueron construidos estos entes matemáticos en las inmediaciones de trayectorias periódicas cortas, correspondientes a flujos Hamiltonianos caóticos. Los autores aplicaron dicha teoría semiclásica al billar de Bunimovich.

vich⁶. El éxito de estos trabajos radicó en haber podido reducir notablemente el número de órbitas periódicas necesarias para la construcción de funciones de onda asociadas a las mismas, respecto del requerido por la fórmula de trazas de Gutzwiller⁷. Contemporáneamente, D. Wisniacki, F. Borondo, E. Vergini y R. Benito [96] construyeron funciones localizadas usando el método descrito en [94], en órbitas periódicas hiperbólicas, y extendiéndose a lo largo de sus variedades correspondientes. Posteriormente, S. Nonnenmacher, F. Faure y S. De Bièvre dedujeron analíticamente un conjunto de autoestados del mapa del gato de Arnold, que mostraban un alto grado de *scarring* en las órbitas periódicas clásicas [104].

En el año 2008, dos trabajos extendieron la construcción descrita en [15] a mapas cuánticos. Primero E. Vergini, D. Schneider y A. Rivas [19] propusieron una construcción de funciones cicatriz en el mapa del gato (2.35) y posteriormente L. Ermann y M. Saraceno [20] hicieron lo propio en el mapa del panadero (2.31). A continuación detallaremos la construcción de funciones de scar en mapas cuánticos, comenzando con el caso de propagadores unitarios (sistemas cerrados) y continuando con los mapas abiertos.

4.2.1. Modos en órbitas periódicas

La construcción de funciones cicatriz se realiza sobre las órbitas periódicas del mapa clásico. El modo más sencillo de asegurarnos probabilidad cuántica no nula en dichos invariantes clásicos, es por medio de paquetes coherentes centrados en los puntos pertenecientes a la OP ; es decir, si γ_j es una órbita de período L , definida por $\{(q_0, p_0), (q_1, p_1), \dots, (q_{L-1}, p_{L-1})\}$, colocaremos L paquetes coherentes en el espacio de fases clásico⁸ $|q_k, p_k\rangle$ con $k = 0, \dots, L-1$.

Una vez ubicados los paquetes coherentes en los puntos fijos de período L , realizaremos una superposición de los mismos con coeficientes que involucren a la acción generada por cada paso del mapa. A esta superposición la denominaremos *Modos en órbitas periódicas*[20]. Los estados coherentes no son ortogonales, pero pueden considerarse cuasi-ortogonales si su separación en el espacio de fases es mucho mayor que el ancho de los mismos, $l \simeq \sqrt{\hbar}$. Ésto claramente se cumple para los puntos periódicos en el límite clásico pues son puntos aislados y consideraremos que es altamente satisfactoria para los

⁶Se la conoce usualmente como Teoría semiclásica de órbitas periódicas cortas, esbozada originalmente en [16] y [17].

⁷El número de OP requerido en el caso de la fórmula de trazas es del orden $N_{OP} \sim \exp hT_H / (\hbar T_H)$. En el caso de la teoría semiclásica de OP cortas se reduce a $N_{OP} \sim \hbar T_H / \ln \hbar T_H$. T_H es el tiempo de Heisenberg y h es la entropía topológica del sistema.

⁸Las propiedades de los estados coherentes en el cuadrado unidad se estudian en detalle en [102, 103].

valores de N y L que utilizaremos,

$$\langle q_{j+1}, p_{j+1} | q_j, p_j \rangle \simeq \delta_{j+1,j} \quad (4.1)$$

$$\hat{U}_{j,j+1} \equiv \langle q_{j+1}, p_{j+1} | \hat{U} | q_j, p_j \rangle \simeq \frac{e^{i2\pi N S_j}}{\sqrt{\cosh \lambda}}, \quad (4.2)$$

donde λ es el exponente de Lyapunov del sistema y la fase adquirida involucra a la acción S_j en un paso del mapa. Con la definición de estados coherentes usada en este trabajo, las acciones clásicas vienen dadas por⁹

$$S_j \equiv S_{q_j, p_j} = [3q_j] \left(\frac{q_j}{2} + \frac{p_j}{6} + \frac{1}{6} \right), \quad (4.3)$$

en el caso del panadero de tres bandas (2.17), y

$$S_j \equiv S_{q_j, p_j} = q^2 - q(q' + m) + (q' + m)^2 - nq', \quad (4.4)$$

en el caso del mapa del gato (2.32).

El operador $\hat{U}_{ij}$ puede diagonalizarse con la transformada de Fourier discreta en el límite clásico¹⁰. Se pueden expresar los autovalores de dicho operador como

$$\langle \phi_\gamma^k | \hat{U} | \phi_\gamma^k \rangle \simeq \frac{e^{i2\pi A_\gamma^k}}{\sqrt{\lambda}}, \quad (4.5)$$

donde

$$A_\gamma^k = \frac{N S_\gamma + k}{L}. \quad (4.6)$$

La acción total de la órbita $S_\gamma = \sum_{j=0}^{L-1} S_j$ forma parte de la fase de los autovalores junto con el índice k , que es un parámetro del tipo Bohr-Sommerfeld, que toma valores $k = 0, \dots, L-1$. Esto implica que se pueden construir L estados por órbita γ_j . Los autoestados de esa matriz se corresponden con los denominados *Modos en órbitas periódicas* o *Funciones de tubo*, mencionados al comienzo:

$$|\phi_\gamma^k\rangle = \frac{1}{\sqrt{L}} \sum_{j=0}^{L-1} \exp \left(-i \frac{2\pi(N S_\gamma + k)j}{L} + i\theta_j \right) |q_j, p_j\rangle \quad (4.7)$$

donde $\theta_j = 2\pi N \sum_{l=0}^{j-1} S_l$.

En el límite semiclásico los estados (4.7) están normalizados y si suponemos que son válidas las condiciones (4.1) y (4.2), pueden considerarse ortogonales.

⁹En el caso del panadero de dos bandas el valor correspondiente es $S_j = [2q_j] \left(\frac{q_j}{2} + \frac{p_j}{4} + \right.$

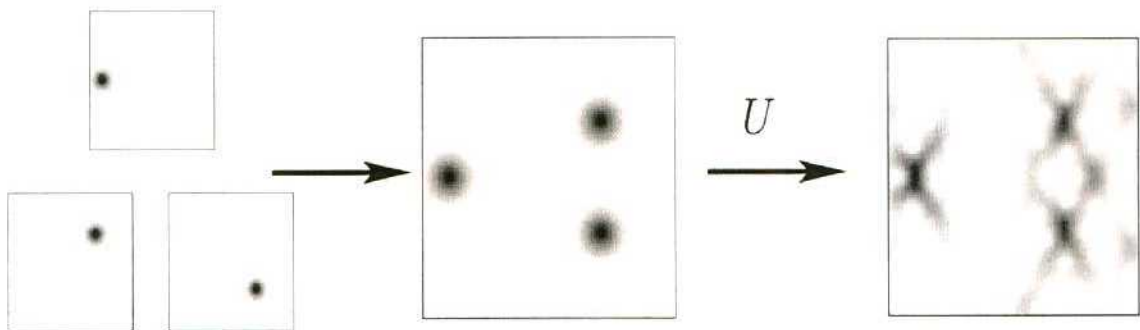


Figura 4.4: Esquema de la receta para construir funciones de scar a partir de la localización de paquetes coherentes en los puntos periódicos de una órbita periódica determinada, en el caso del mapa del gato cerrado. En este caso es de período tres, y se ubica en el espacio de fases del siguiente modo $\gamma \equiv \{(0.1, 0.5); (0.7, 0.3); (0.7, 0.7)\}$. El factor de Bohr-Sommerfeld es $k = 0$. La aplicación del mapa unitario U hacia adelante y hacia atrás en el tiempo nos llevan a la función deseada.

4.2.2. Funciones de scar

Habíamos mencionado en (4.1) que las cicatrices o scars de las autofunciones se encontraban en las inmediaciones de las órbitas periódicas, ésto es, los puntos periódicos correspondientes de las trayectorias y su extensión a lo largo de las variedades estable e inestable. Pueden construirse autofunciones con un ancho menor a las *Funciones de tubo*, evolucionando las mismas un cierto tiempo [16, 17, 19, 20, 104]

$$|\psi_\gamma^k\rangle = \frac{1}{\mathcal{N}} \sum_{t=-\tau_E}^{\tau_E} \hat{U}^t e^{-2\pi i A_\gamma^k t} \cos\left(\frac{\pi t}{2\tau_E}\right) |\phi_\gamma^k\rangle, \quad (4.8)$$

donde $\mathcal{N}$ es una constante de normalización. El coseno se impone para introducir un corte suave¹¹, y el tiempo de propagación coincide con el tiempo de Ehrenfest [53].

Estas funciones de onda se denominan funciones de scar o funciones cicatriz, pues imitan las scars (ciactrices) observadas en las autofunciones. Cabe destacar que se recuperan las funciones (4.7) si $t = 0$. La evolución de paquetes coherentes hacia adelante y hacia atrás en el tiempo es quien garantiza la presencia de probabilidad cuántica a lo largo de las variedades estables e

¹⁰ $\frac{1}{4}$).

¹⁰Se dice que el operador es cíclico.

¹¹Elegimos el coseno como en [19], en [20] se utiliza como corte una gaussiana.

inestables.

En la Fig. (4.4) se muestra paso a paso la receta que lleva a la construcción de las funciones (4.8), desde la introducción de paquetes coherentes localizados en los puntos periódicos, la combinación lineal que genera las funciones (4.7) y su posterior evolución unitaria U que genera las funciones de scar. En este caso elegimos una órbita de período tres.

4.2.3. Funciones de scar en sistemas abiertos

En los capítulos anteriores estudiamos las propiedades de los sistemas caóticos de scattering, nuestro ejemplo de sistemas abiertos. Allí se analizaron las diferencias con sus contrapartes cerradas, esgrimiendo en detalle las clásicas y las cuánticas. De estas últimas la más notoria corresponde a la no unitariedad de la evolución temporal. Ésto nos llevaba a propagadores no normales ($[\hat{U}, \hat{U}^\dagger] \neq 0$) que admitían autovectores a izquierda como a derecha,

$$\begin{aligned}\tilde{U}|\psi_n^R\rangle &= z_n|\psi_n^R\rangle, \\ \langle\psi_n^L|\tilde{U} &= z_n\langle\psi_n^L|.\end{aligned}\tag{4.9}$$

La consecuencia inmediata de (4.9) a la hora de pensar en una teoría de funciones de scar, es que se deben construir dichas autofunciones tanto a derecha como a izquierda. Otro corolario de lo anterior es la evolución sólo hacia adelante en el tiempo de los *Modos de órbitas periódicas*, ya que el mapa es no invertible. De este modo, podemos pensar en la siguiente construcción:

$$|\psi_{\gamma,k}^R\rangle = \frac{1}{\mathcal{N}_\gamma^R} \sum_{t=0}^{\tau_E} e^{-2\pi i A_\gamma^k t} \cos\left(\frac{\pi t}{2\tau_E}\right) \tilde{U}^t |\phi_\gamma^k\rangle\tag{4.10}$$

y

$$\langle\psi_{\gamma,k}^L| = \frac{1}{\mathcal{N}_\gamma^L} \sum_{t=0}^{\tau_E} \langle\phi_\gamma^k| \hat{U}^t e^{-2\pi i A_\gamma^k t} \cos\left(\frac{\pi t}{2\tau_E}\right).\tag{4.11}$$

Las constantes $\mathcal{N}^{R,L}$ son elegidas de modo tal que $\langle\psi_{\gamma,k}^R|\psi_{\gamma,k}^R\rangle = \langle\psi_{\gamma,k}^L|\psi_{\gamma,k}^L\rangle$ y $\langle\psi_{\gamma,k}^L|\psi_{\gamma,k}^R\rangle = 1$. La expresión (4.11) puede reescribirse como

$$|\psi_{\gamma,k}^L\rangle = \frac{1}{\mathcal{N}_\gamma^L} \sum_{t=0}^{\tau_E} \hat{U}^{\dagger t} e^{2\pi i A_\gamma^k t} \cos\left(\frac{\pi t}{2\tau_E}\right) |\phi_\gamma^k\rangle.\tag{4.12}$$

El hecho de que la evolución sea sólo hacia adelante temporalmente genera que las funciones construídas sigan la dirección de la variedad inestable, que

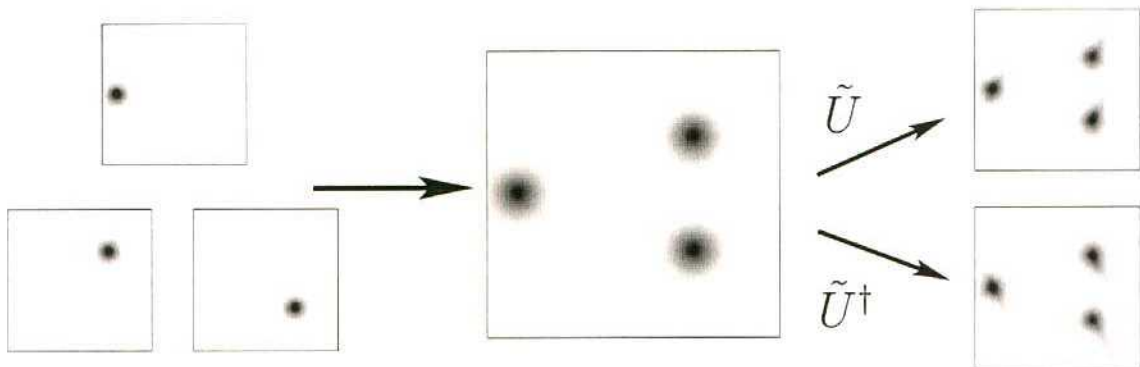


Figura 4.5: Esquema de la receta para construir funciones de scar a partir de la localización de paquetes coherentes en los puntos periódicos de una órbita periódica determinada, en el caso del mapa del gato abierto. Repetimos el caso de la Fig. (4.4) (período tres, $k = 0$, $N = 120$). Aquí se efectúan dos evoluciones temporales de los MOP: con el mapa $\tilde{U}$ obtenemos la función de scar a derecha (4.10), y con $\tilde{U}^\dagger$ la correspondiente a izquierda (4.11).

es justamente donde se sitúan los autoestados a derecha en sistemas de scattering (conjunto atrapado hacia atrás $\mathcal{K}^-$) [54]. Evolucionando de la misma manera pero con el propagador adjunto, las funciones de cicatriz a izquierda se extienden por la variedad estable (conjunto atrapado hacia adelante $\mathcal{K}^+$). En la Fig. (4.5) se observan los pasos que llevan a las funciones de scar (4.10) y (4.11), mostrando los pasos de la construcción, análogamente a lo hecho en el caso cerrado. Se seleccionó la misma órbita que en aquel caso.

Es importante remarcar que, si bien las funciones de scar se extienden por las variedades correspondientes, su origen son paquetes coherentes centrados en los puntos periódicos de las órbitas del mapa clásico y abierto, es decir el conjunto atrapado o repeller $\mathcal{K}$.

Para una mejor visualización de las funciones de cicatriz abiertas, en las Figs. (4.6) y (4.7) se muestran distintos ejemplos de las mismas, en los mapas abiertos del gato y el tripanadero, respectivamente. En el primer caso, se eligió una apertura del 30 % del espacio de fases y se graficaron las funciones de scar a derecha y a izquierda de dos órbitas periódicas, una de período uno y otra de período cuatro. En el caso del panadero se hizo lo propio con una órbita de período dos y otra de período cuatro. En ambas figuras se trazaron las líneas correspondientes a las variedades estables e inestables, en el caso de las órbitas más cortas. Puede notarse cómo las funciones de scar a derecha se sitúan a lo largo de la variedad inestable mientras que la correspondiente a izquierda lo hace a lo largo de la estable.

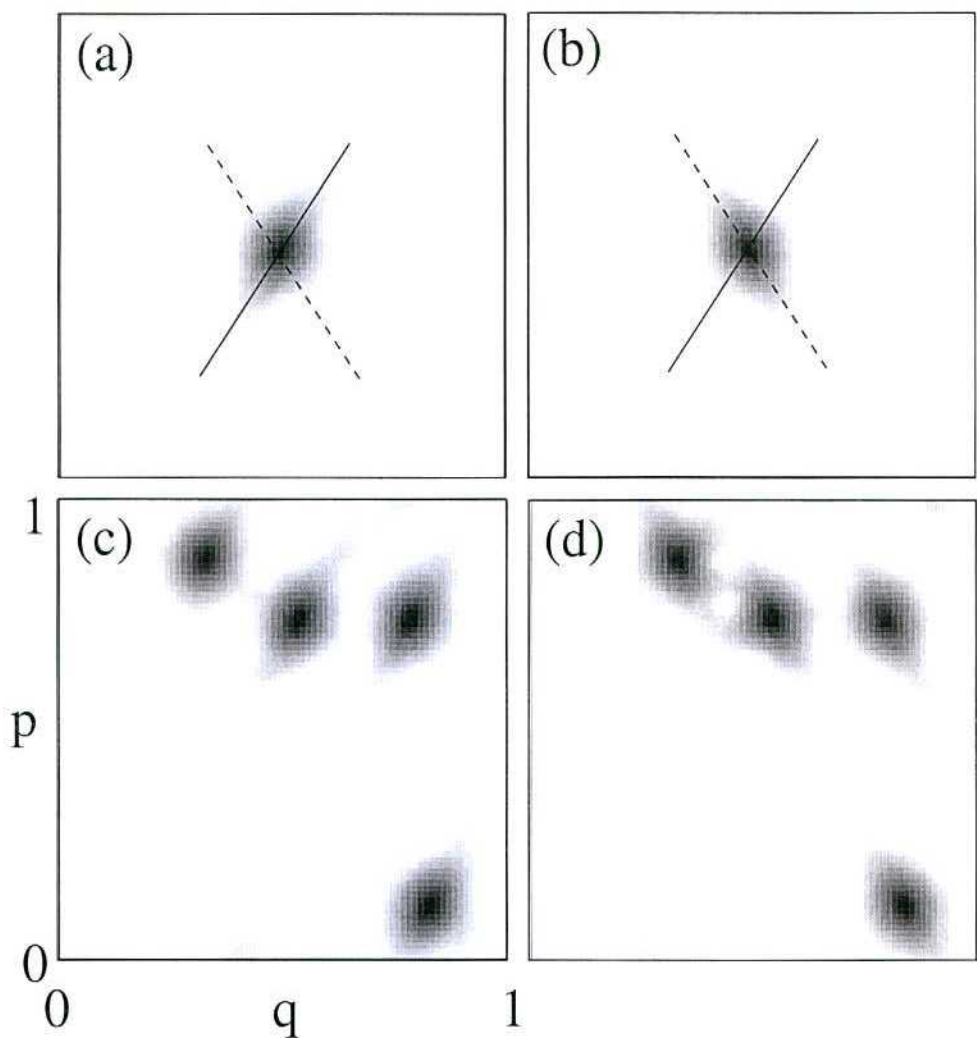


Figura 4.6: Funciones de scar para las órbitas periódicas $\{(1/2, 1/2)\}$ [paneles (a) y (b)] y $\{(1/3, 7/8); (13/24, 3/4); (19/24, 3/4); (5/6, 1/8)\}$ [paneles (c) y (d)] del mapa del gato abierto. La apertura es una banda paralela al eje p entre 0 y 0.3. El espacio de Hilbert es de tamaño $N = 80$ y la evolución se efectúa hasta el tiempo de Ehrenfest. Las columnas izquierda y derecha muestran las funciones de scar a izquierda y a derecha. La línea negra (punteada) corresponde a la variedad inestable (estable). En los paneles inferiores no se dibujaron las variedades, pero corresponden a las mismas direcciones que en los paneles superiores.

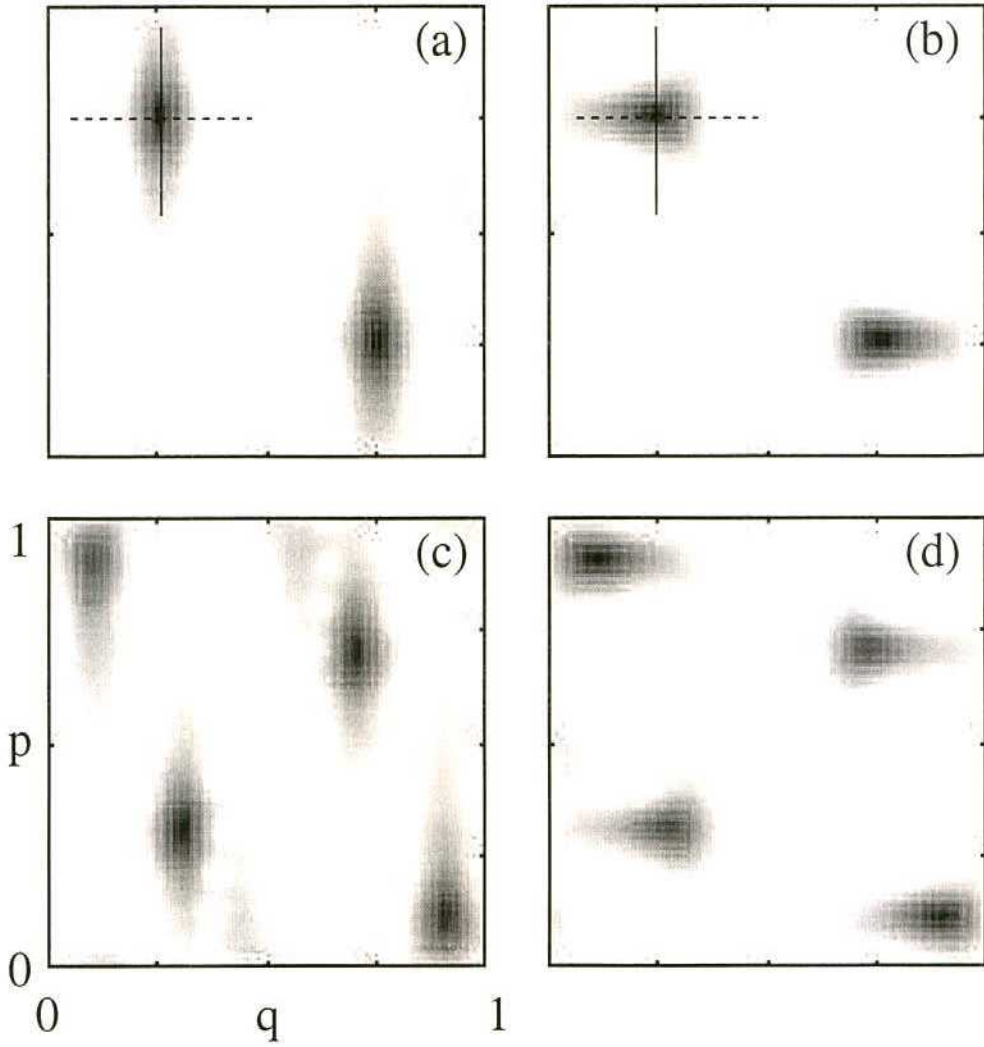


Figura 4.7: Funciones de scar para las órbitas periódicas $\{(1/4, 3/4), (3/4, 1/4)\}$ [paneles (a) y (b)] y $\{(1/10, 9/10); (3/10, 3/10); (9/10, 1/10); (7/10, 7/10)\}$ [paneles (c) y (d)] del mapa del panadero de tres bandas abierto. El espacio de Hilbert es de tamaño $N = 81$ y la evolución se efectúa hasta el tiempo de Ehrenfest. Las columnas izquierda y derecha muestran las funciones de scar a izquierda y a derecha. La línea negra (punteada) corresponde a la variedad inestable (estable). En los paneles inferiores no se dibujaron las variedades, pero corresponden a las mismas direcciones que en los paneles superiores.

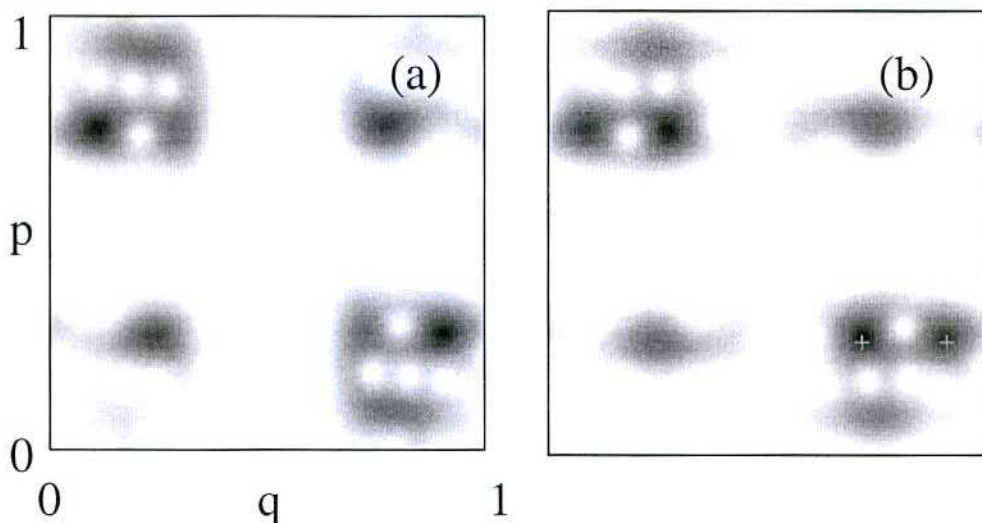


Figura 4.8: Representación de Husimi de un autoestado a derecha exacto correspondiente al mapa del panadero de tres bandas abierto en el caso $N = 81$ (a). En (b) se muestra la misma representación para una función de scar a derecha (simetrizada), construída sobre una órbita periódica de período $L = 5$, determinada por los puntos $\gamma \equiv \{(0.2562, 0.9174); (0.7686, 0.3058); (0.3058, 0.7686); (0.9174, 0.2562); (0.7521, 0.7521)\}$. En este caso $k = 0$ y $N = 81$. Es notable el parecido entre ambas figuras.

En las Figs. (4.8) y (4.9) se seleccionaron autoestados a derecha del 3-panadero abierto, con cicatrices en puntos periódicos y se muestran junto a funciones de scar a derecha construídas en tales puntos del espacio de fases. Se visualiza allí cómo se aproximan las funciones de cicatriz a los autoestados cuánticos.

En este capítulo, se hizo un recorrido histórico del estudio de los autovectores de los sistemas caóticos. Mencionamos al *scarring* como una de sus propiedades fundamentales y que aun no ha sido explicada. Este fenómeno de localización anómala derivó en diversas construcciones de funciones de onda localizadas sobre órbitas periódicas, que intentaron reproducir los autoestados cuánticos. Posteriormente, se presentaron a las funciones de scar como una base del espacio de Hilbert, que permitió reproducir autofunciones de sistemas caóticos, tanto en flujos Hamiltonianos como en mapas toroidales. Ésto permitió poder definir estas funciones de onda en sistemas abiertos como una adaptación de sus contrapartes cerradas, con evoluciones cuánticas no unitarias. La importancia de las mismas en sistemas abiertos se verá en el capítulo siguiente, cuando se intenten reproducir semiclásicamente los auto-

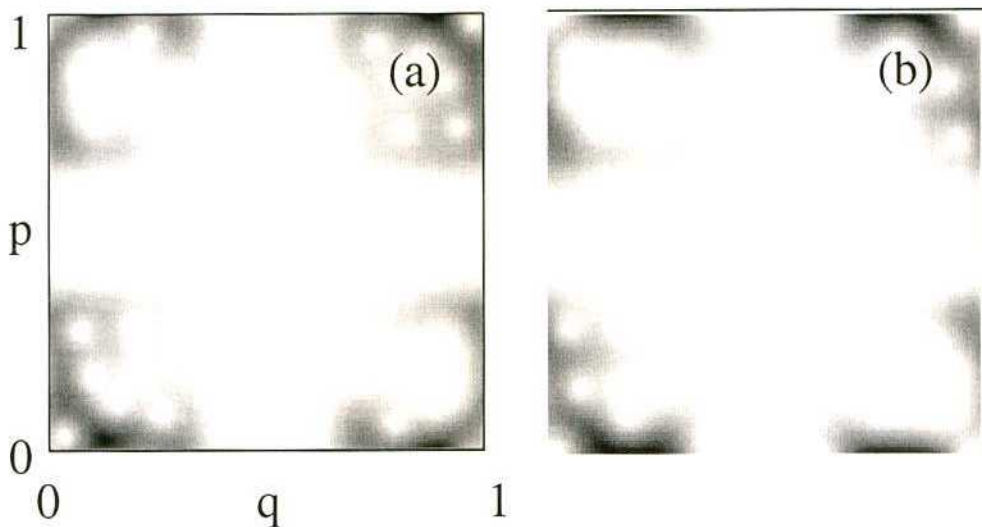


Figura 4.9: Representación de Husimi de un autoestado a derecha exacto correspondiente al mapa del panadero de tres bandas abierto en el caso $N = 81$ (a). En (b) se muestra la misma representación para una función de scar a derecha, construida sobre una órbita periódica de período $L = 4$, determinada por los puntos $\gamma \equiv \{(0.325, 0.975); (0.975, 0.325); (0.925, 0.775); (0.775, 0.925)\}$. Aquí también $k = 0$ y $N = 81$. Nuevamente como en la Fig. (4.8) se asemejan los pares de Husimis.

estados cuánticos de los propagadores abiertos, como combinaciones lineales de funciones de scar.

Finalmente debe destacarse que el caso de los mapas lineales por partes como el panadero de dos bandas (2.30), es análogo a los mostrados. La construcción no se ve afectada por la discontinuidad, y se realiza del mismo modo que para los otros sistemas, a partir de las órbitas pertenecientes a su repeller.

Capítulo 5

Método semiclásico de órbitas periódicas cortas

Durante la década pasada, se desarrolló una teoría semiclásica de órbitas periódicas cortas para describir la mecánica cuántica de sistemas caóticos cerrados [16, 17, 19, 20]. Lo fundamental de dicha teoría consiste en obtener los autovalores y autovectores de un sistema cuántico en términos de un número pequeño de órbitas periódicas cortas. La clave del método se alberga en la construcción de funciones de scar relacionadas a órbitas periódicas cortas e inestables, y en la posterior evaluación de los elementos de matriz entre esas funciones de onda. También debemos considerar que esta aproximación podría aplicarse a sistemas abiertos, dado el incremento del fenómeno de scarring en dichos sistemas [27, 28]. El objetivo de esta sección es discutir los aspectos más importantes de la teoría de órbitas periódicas cortas en sistemas abiertos. Nos interesamos en particular en la eficiencia del método semiclásico para reproducir las resonancias de mayor vida y sus vidas medias. Comenzaremos con una descripción de nuestro método [105] y proyectaremos posteriormente los resultados obtenidos en el cálculo de autovalores y autovectores semiclásicamente [106].

5.1. Descripción del método

Una vez aprendida la receta para construir las funciones (4.10) y (4.11), la idea es desarrollar una teoría de funciones de cicatriz para sistemas abiertos dotada de las siguientes virtudes [105, 106]:

- a. Proveer una conexión natural entre la ley de Weyl fractal y el número de órbitas periódicas del sistema clásico.

- b. Computar los estados de vida larga sin necesidad de hacer lo propio con los de vida corta, es decir, reducir notablemente las dimensiones de las matrices del problema.
- c. Obtener una aproximación semiclásica a las resonancias cuánticas.

Tal como fuera enunciado en [16, 17, 19, 20], sólo es necesario considerar órbitas con períodos cortos para obtener buenas aproximaciones a los espectros cuánticos y a sus autoestados correspondientes. Por corto nos estamos refiriendo a órbitas con períodos cercanos al tiempo de Ehrenfest del sistema¹. En nuestro caso, como todas las órbitas periódicas pertenecen al conjunto atrapado $\mathcal{K}$, la teoría aproxima sólo los autoestados de vida larga. Luego, el primer paso consiste en seleccionar N_0 órbitas periódicas que cubran de manera aproximadamente uniforme al repeller y construir para cada órbita primitiva γ de período L_γ , un total de L_γ scars a derecha y a izquierda. Ésto dará un total de N_s funciones de scar construídas para aproximar las resonancias cuánticas.

El paso siguiente consiste en construir la matriz $\langle \psi_m^L | \tilde{U} | \psi_n^R \rangle$, que denominaremos matriz de scars, como aproximación al *sector de vida larga* de $\tilde{U}$. Tal como fuera estudiado en la sección (3.3), las resonancias de mayor vida se comportan de acuerdo a la ley de Weyl fractal (3.5). El objetivo de nuestra aproximación es describir semiclásicamente dichas resonancias, por lo tanto la matriz de scars debe tener una dimensión acorde a lo descripto. Ésto nos lleva a que el número de funciones de scar necesario debe ser del orden $N_s \sim N^{d/2}$, lo cual reduce notoriamente la dimensión del problema puesto que $d/2$ es una potencia menor a la unidad². Luego, se obtienen las autofunciones semiclásicas y el espectro resolviendo el siguiente problema de autovalores generalizado

$$\langle \psi_{\gamma_i}^L | \tilde{U} | \psi_{\gamma_j}^R \rangle = z_{sc} \langle \psi_{\gamma_i}^L | \psi_{\gamma_j}^R \rangle, \quad (5.1)$$

donde $i = 1, \dots, N_0$ y $k_i = 1, \dots, L_{\gamma_i}$ ³.

Del conjunto de autovalores obtenido aquí se pretende que reproduzca a los obtenidos al diagonalizar el propagador $\tilde{U}$, en el sector de vida larga. En la sección (5.2) se efectuarán los estudios comparativos en diferentes situaciones del mapa del panadero y del gato.

¹Ésto no es inesperado ya que el tiempo de Ehrenfest es el tiempo en el cual los efectos cuánticos de interferencia se vuelven importantes.

²En [107] se lo explica de este modo: “La dinámica cuántica se proyecta sobre un subespacio cuántico minimal, cercano al repeller, resultando un problema efectivo de menor dimensión. Este subespacio minimal es generado por un cierto número de funciones de scar (a derecha y a izquierda) acorde con lo predicho por la ley de Weyl fractal”.

³Es análogo a escribir $\det(E(z^{sc})) = 0$ con $E_{mn}(z_{sc}) = \langle \psi_m^L | (\mathbb{1} - z_{sc}^{-1} \tilde{U}) | \psi_n^R \rangle$.

Al resolver el problema de autovalores generalizado (5.1), los autovectores a derecha (izquierda) proporcionan un modo de escribir las resonancias semiclásicas a derecha (izquierda) como combinación lineal de funciones de scar,

$$\begin{aligned} |\phi_n^R\rangle &= \sum_{i=1}^N R_{n,i} |\psi_{\gamma,k}^R\rangle \\ |\phi_n^L\rangle &= \sum_{i=1}^N L_{n,i} |\psi_{\gamma,k}^L\rangle, \end{aligned} \tag{5.2}$$

donde $R_{n,i}$ y $L_{n,i}$ son las i -ésimas componentes de los autovectores a derecha R_n y a izquierda L_n , respectivamente. El número efectivo de términos presentes en las sumas podrían en principio sugerir cuál es el grado de scarring de una resonancia semiclásica.

Análogamente a lo planteado para los espectros, en la sección (5.3) se realizará la comparación entre las resonancias obtenidas semiclásicamente y las autofunciones del propagador cuántico $\tilde{U}$.

5.2. Autovalores

En esta sección estudiaremos los resultados obtenidos tras la resolución del problema de autovalores generalizado (5.1) y lo compararemos con espectros provenientes de diagonalizaciones del operador cuántico. Nos enfocamos en el mapa del panadero de tres bandas abierto y en un caso particular del mapa del gato, con una apertura $\mathbb{H} \equiv [0.3; 0.7] \times [0; 1]$. Un estudio más profundo del espacio de fases clásico nos lleva a una mejor comprensión de los conjuntos invariantes para las distintas aperturas. En todos los casos, el repeller $\mathcal{K}$ se va llenando de puntos a medida que vamos agregando órbitas de período mayor. Una vez que se llega a un número arbitrario N_0 , se corta el llenado y se calcula el número de funciones de cicatriz recordando que por cada órbita periódica de período L existen L funciones de scar asociadas. En el caso del panadero de tres bandas se puede observar este proceso en la tabla (5.2).

Para mostrar cuál es la intención del método descrito en la Sec. (5.1), comencemos con un ejemplo simple en el tripanadero. Consideremos un espacio de Hilbert de tamaño $N = 81$ y seleccionemos órbitas de hasta período cinco inclusive. Si observamos en el cuadro (5.2) y sumamos las posibles funciones de cicatriz que se pueden construir en cada período, llegamos que hasta $L = 5$ son un total de 51. Construimos la base de ese subespacio de dimensión $N_s < N$ y verificamos la validez del método a nivel espectral, resolviendo el problema de autovalores generalizado (5.1).

Período	# de órbitas	# funciones de cicatriz
1	1	1
2	1	2
3	2	6
4	3	12
5	6	30
6	9	54
7	18	126
8	30	240
9	56	504

Cuadro 5.1: Detalle de la formación del repeller clásico $\mathcal{K}$ en el caso del panadero de tres bandas abierto clásico. Se calcula el número de funciones de scar sabiendo que por cada órbita de período L existen asociadas L de las mismas, por el factor de Bohr-Sommerfeld k .

En la Fig. (5.1), observamos el resultado de la resolución del problema (5.1) en el caso $N = 81$ y $N_s = 51$. Puede notarse claramente que el espectro semiclásico reproduce con precisión las resonancias exactas z_{ex} cercanas al círculo unidad, es decir, las de mayor vida. Este resultado puede observarse graficado de otro modo, en la versión por módulo de autovalores.

Una vez ejemplificada la intención de nuestra aproximación semiclásica, sumémosle a este caso otros similares, pero aumentando el período de las órbitas que agregamos al repeller. La forma de pensarlo es la siguiente:

- * Seleccionamos N_0 órbitas hasta cierto período L .
- * Calculamos el número de funciones de cicatriz N_s que pueden construirse con N_0 órbitas.
- * Generamos la vinculación con la ley de Weyl fractal, ajustando la dimensión del espacio de Hilbert con $N_s \sim N^{d/2}$.

De este modo, consideraremos órbitas hasta períodos 6, 7 y 8. El ajuste lo realizamos arbitrariamente pero teniendo en cuenta la forma de la ley de Weyl. El factor de ajuste elegido en este sistema fue tal que $N_s \approx 4N^{d/2}$. El prefactor fue elegido tras probar con un conjunto de valores posibles, compatibles con la ley de Weyl. El valor seleccionado fue el que mejor resultado dio con nuestro método, encontrando que valores cercanos podían entregar resultados significativamente diferentes. En el cuadro (5.2) se observan los

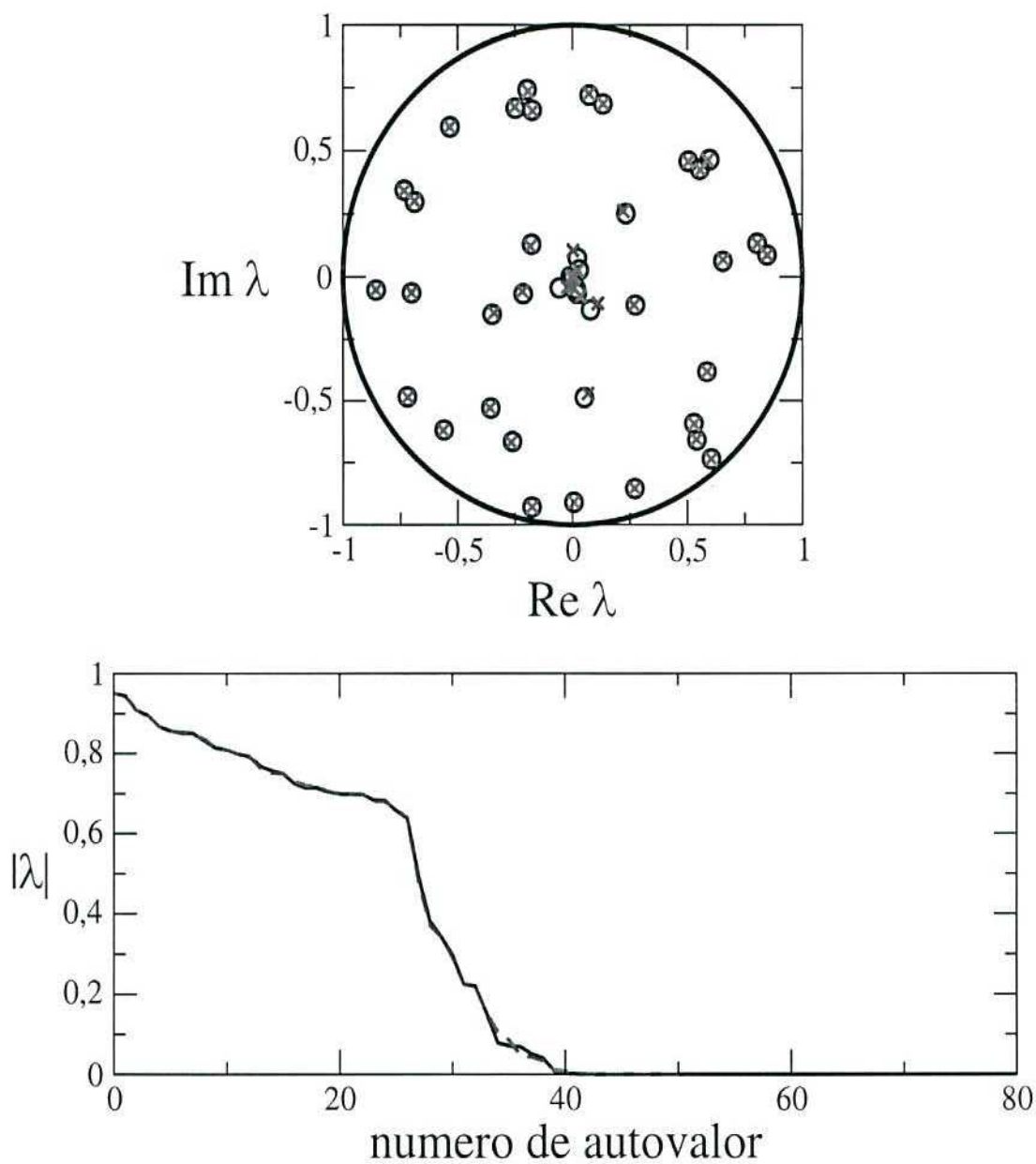


Figura 5.1: En (a) se exhiben los espectros exacto (círculos) y semiclásico (cruces) en el caso $N = 81$ y $N_s = 51$ en el tripanadero cuántico, mientras que los módulos de los mismos (ordenados decrecientemente) son mostrados en (b).

números de funciones de scar que se construyeron para cada período, la dimensión del espacio de Hilbert del cual dichas funciones formarán una base truncada y el porcentaje que representan del total del espacio. La última columna muestra cómo con nuestro método se construyen bases truncadas con un número de vectores que representa un porcentaje cada vez menor, a medida que aumenta el tamaño del espacio de Hilbert.

L_{max}	N_s	N	% del total
6	105	177	43.2
7	231	597	38.7
8	471	1821	25.9

Cuadro 5.2: Número de funciones de scar N_s que pueden construirse con órbitas periódicas de hasta período L_{max} inclusive, en el mapa del panadero de tres bandas. En la tercera columna se colocan las dimensiones del espacio de Hilbert N correspondientes, y en la última el porcentaje que representa N_s del total del espacio, N .

En la Fig. (5.2) se observan los espectros exactos y semiclásicos (surgidos de resolver (5.1)) en los casos mencionados con anterioridad. Se observa que la calidad de los autovlores obtenidos no disminuye a medida que aumenta N , indicando que la elección fue correcta y que el sector de vida larga del espectro tiene una dimensionalidad efectiva reducida.

Abordemos a continuación el caso del mapa del gato cuántico abierto. Ya anunciamos que nos centraremos en un toro bidimensional con una apertura $\Delta q = 0.4$ para este sistema. En este caso el repeller tiene una dimensión fractal de información $d = 0.61$ y se va formando con la siguiente distribución de puntos periódicos:

Aquí probaremos el método seleccionando, para diferentes casos, órbitas de un mismo período. Consideremos los períodos 5, 6 y 7 de donde resultan $N_s = 90$, $N_s = 198$ y $N_s = 476$ respectivamente. El ajuste vía ley de Weyl fractal se realiza del mismo modo que en el caso del panadero, arrojando valores para los tamaños de los espacios de Hilbert dados en el cuadro (5.2).

El factor de ajuste seleccionado para este sistema determinó una relación $N_s \approx 5N^{d/2}$. Las razones son las mismas que para el sistema anterior. En la Fig. (5.3) se observa la validez del método verificada en el mapa del gato, en los casos mencionados anteriormente.

Es de notar la reproducción con bastante precisión del sector de vida larga, aunque no tanta como en el sistema anterior. De todos modos, los resultados confirman que se necesitan del orden de $N^{d/2}$ funciones de scar

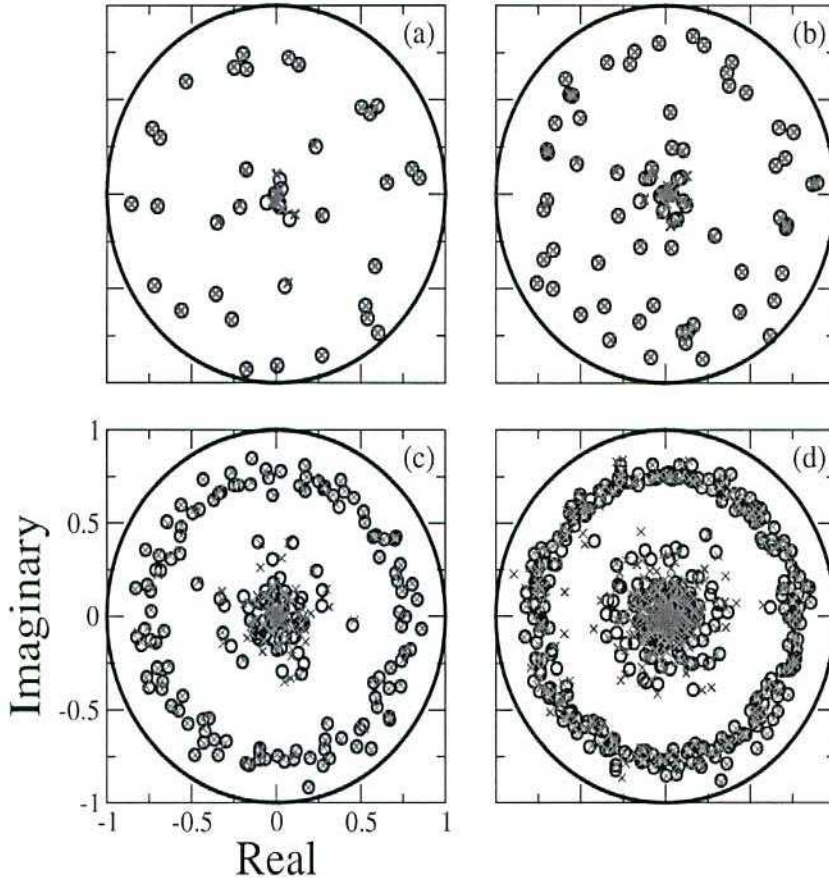


Figura 5.2: Espectro exacto (círculos) y los resultados de nuestro método (cruces) para el mapa del panadero de tres bandas. Los pares (N, N_s) dados por la dimensión del espacio de Hilbert N y el número de funciones de scar son (a) $(81, 51)$, (b) $(177, 105)$, (c) $(597, 231)$ y (d) $(1821, 471)$. Elegimos en este caso $N_s \approx 4N^{d/2}$ donde d representa la dimensión fractal del repeller clásico.

para reproducir las resonancias cuánticas con menor decaimiento.

5.3. Autovectores

En la sección previa se mostró cómo el método semiclásico puede reproducir propiedades de la dinámica cuántica a través de los espectros provenientes de la resolución de un problema de autovalores generalizado. En esta sección se mostrará qué ocurre en el caso de las autofunciones, es decir, comprobar si las resonancias semiclásicas (5.2) se aproximan a sus respectivos autoestados

Período	# de órbitas	# funciones de cicatriz
1	1	1
2	1	2
3	3	9
4	8	32
5	18	90
6	33	198
7	68	476
8	145	1160

Cuadro 5.3: Detalle de la formación del repeller clásico $\mathcal{K}$ en el caso del mapa del gato clásico. Se calcula el número de funciones de scar sabiendo que por cada órbita de período L existen asociadas L de las mismas, por el factor de Bohr-Sommerfeld k .

L	N_s	N	% del total
5	90	114	78.9
6	198	415	47.7
7	476	1751	27.2

Cuadro 5.4: Número de funciones de scar N_s que pueden construirse con órbitas periódicas de hasta período L_{max} inclusive, en el mapa del gato. En la tercera columna se colocan las dimensiones del espacio de Hilbert N correspondientes, y en la última el porcentaje que representa N_s del total del espacio.

exactos del propagador no unitario $\tilde{U}$.

En [54] los autores demostraron que los autoestados a derecha se encuentran localizados en la variedad inestable del repeller, en el sentido de que sus representaciones de Husimi $\Psi_n^R \mapsto |\langle q, p | \Psi_n^R \rangle|^2$ tienden a cero fuera de ese conjunto. Análogamente, los autoestados a izquierda encuentran soporte en la variedad estable. Nuestro método está basado en funciones de onda que habitan mayormente el repeller del sistema clásico. Por lo tanto, tal vez sorprendentemente, a pesar de que es capaz de proporcionar valores propios muy precisos, las funciones propias correspondientes no siempre están bien reproducidas. Se muestran en la Fig. (5.4) las autofunciones a derecha e izquierda asociadas al autovalor $z = 0.895$ del mapa del panadero para $N = 243$. Se ve que los resultados de nuestro método tienen diferencias sig-

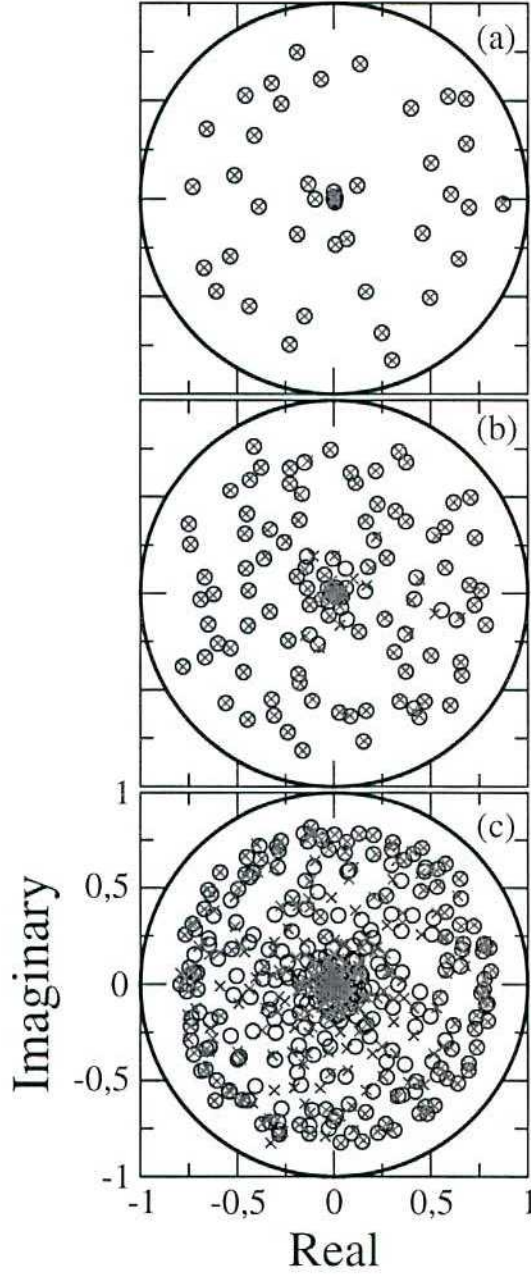


Figura 5.3: Espectro exacto (círculos) y los resultados de nuestro método (cruces) para el mapa del gato. Aquí, los pares (N, N_s) son (a) $(114, 90)$, (b) $(415, 198)$ y (c) $(1751, 476)$.

nificativas en comparación con los exactos, en regiones alejadas del repeller. Un modo práctico de analizar esto es a través del producto interno entre los vectores. Si se calcula el overlap entre los estados exactos y los contruídos se-

miclásicamente, encontramos que $|\langle \psi_{ex}^R | \phi_{sc}^R \rangle|^2 = 0.727$ y $|\langle \psi_{ex}^L | \phi_{sc}^L \rangle|^2 = 0.556$, dejando de manifiesto cuantitativamente esas diferencias. También mostramos resultados análogos para el mapa gato ($z = 0.722$, $N = 100$) en la Fig. (5.5). Las diferencias no son tan notables en este caso, si se estudian los overlaps. En este caso se encontraron los siguientes valores: $|\langle \psi_{ex}^R | \phi_{sc}^R \rangle|^2 = 0.954$ y $|\langle \psi_{ex}^L | \phi_{sc}^L \rangle|^2 = 0.948$.

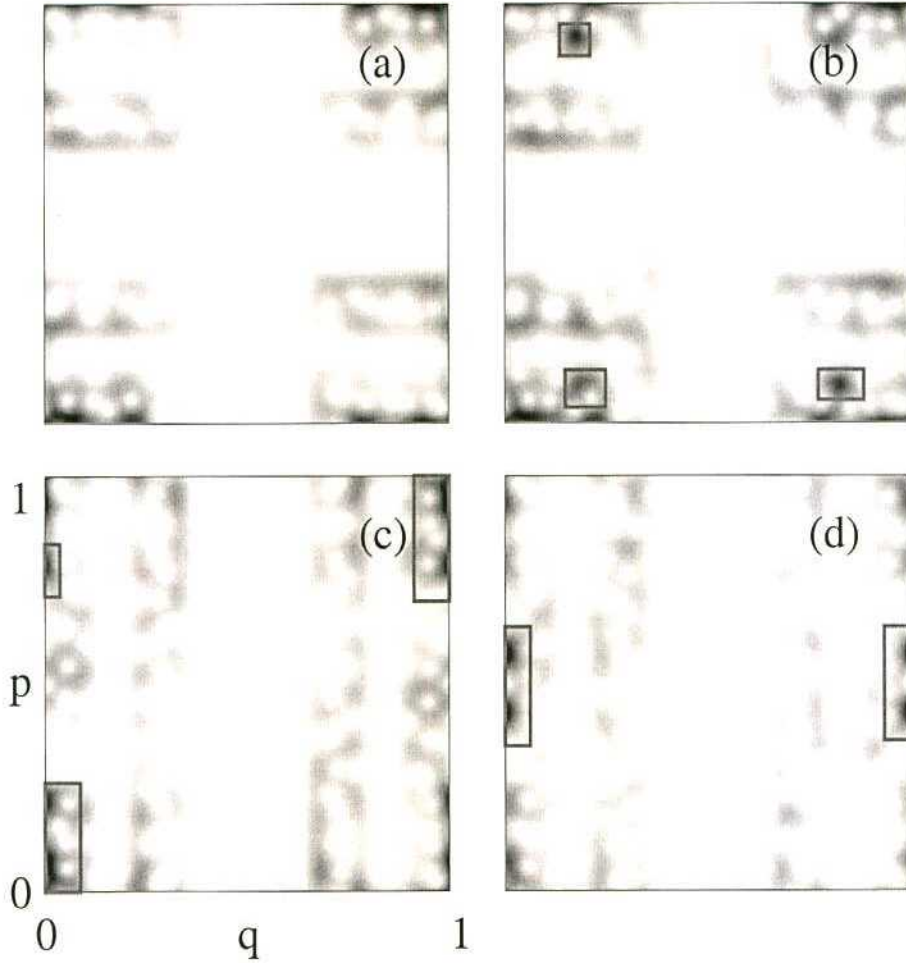


Figura 5.4: Representación de Husimi de autoestados del tripanadero para $N = 243$. El autovalor correspondiente tiene módulo $r = 0.895$. El autoestado a derecha se encuentra en el panel (a) (exacto) y (b) (nuestro método), mientras que (c) y (d) son el caso análogo pero para el autoestado a izquierda. Los overlaps entre estos pares son $|\langle \psi_{ex}^R | \phi_{sc}^R \rangle|^2 = 0.727$ y $|\langle \psi_{ex}^L | \phi_{sc}^L \rangle|^2 = 0.556$. Las diferencias más notables están remarcadas con rectángulos color magenta.

El método es, sin embargo, capaz de reproducir con precisión la represen-

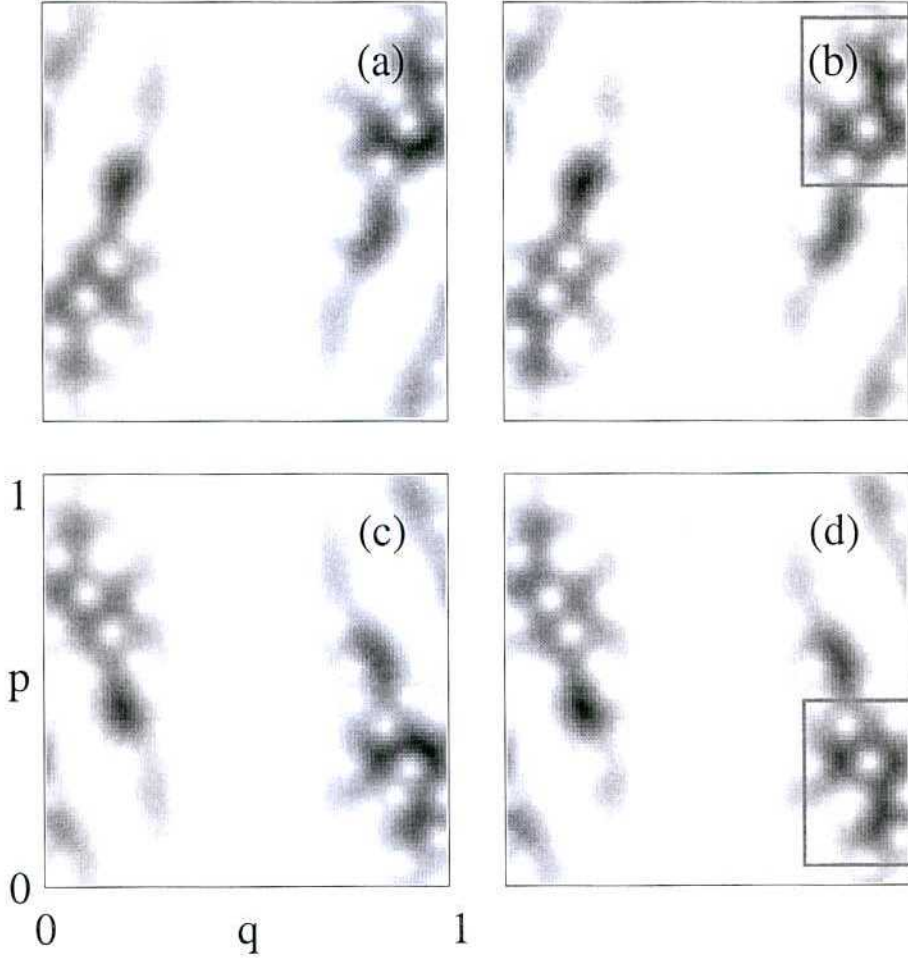


Figura 5.5: Representación de Husimi de autoestados exactos y los resultados de nuestro método en el mapa del gato. Los autoestados a derecha están en los paneles (a) (exactos) y (b) (nuestro método), mientras que los análogos para autoestados a izquierda están en (c) y (d). Aquí $N = 100$ y $r = 0.722$. Los overlaps son $|\langle \psi_{ex}^R | \phi_{sc}^R \rangle|^2 = 0.954$ y $|\langle \psi_{ex}^L | \phi_{sc}^L \rangle|^2 = 0.948$. Las diferencias más notables están remarcadas con rectángulos color verde.

tación mixta $h_i(q, p)$

$$h_i(q, p) = \frac{\langle q, p | \psi_i^R \rangle \langle \psi_i^L | q, p \rangle}{\langle \psi_i^L | \psi_i^R \rangle}, \quad (5.3)$$

que fue presentada recientemente en la referencia [108]. La razón de ésto es que esta cantidad compleja, también definida en el espacio de fases, se alberga en la intersección de los soportes individuales, que es precisamente el repeller en donde nuestras funciones de cicatriz viven.

En la Fig. (5.6) observamos la representación mixta $|h_i(q, p)|$ para dos resonancias cuánticas de vida larga, remarcando la zona clásica donde se localizan.

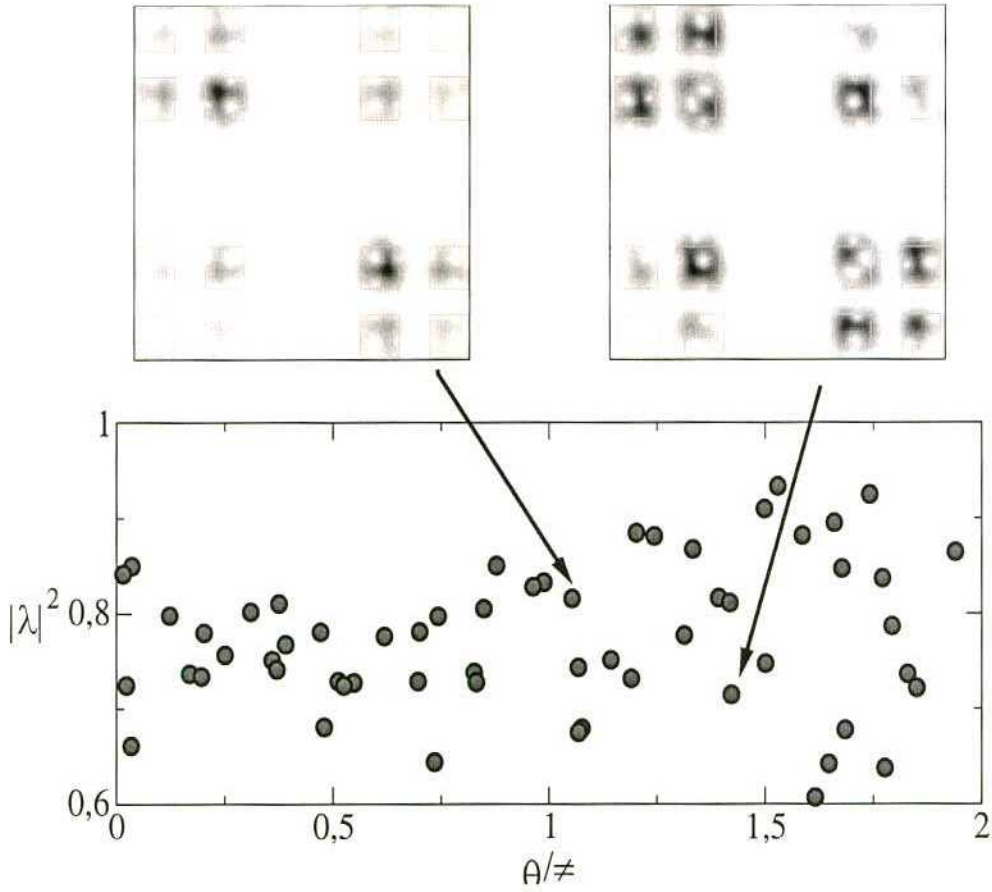


Figura 5.6: Espectro del mapa del panadero de tres bandas cuántico abierto con $N = 243$. En la parte superior se muestran las distribuciones $|h_i(q, p)|$ correspondientes a dos de las resonancias de mayor vida: $|z| = 0.909$ (panel izquierdo) y $|z| = 0.851$ (panel derecho). En estas distribuciones se superpone (en rojo) un recuadro con el repeller a tiempo finito $t = 1$ para poder observar la localización.

Ésto nos direccionó a verificar la validez del método para los autovectores de una manera diferente, ya que se deben considerar los mismos soportes de los vectores para efectuar una comparación correcta. Por lo tanto, debemos estudiar comparativamente las representaciones mixtas y los productos internos entre las versiones cuánticas y semiclassicals de la misma, en vez de dibujar las representaciones de Husimi y calcular los solapamientos de los vectores. En la Fig. (5.7) se puede ver claramente que los valores de $|h_n(q, p)|$

calculados con nuestro método, efectivamente coinciden con los exactos para ambos sistemas.

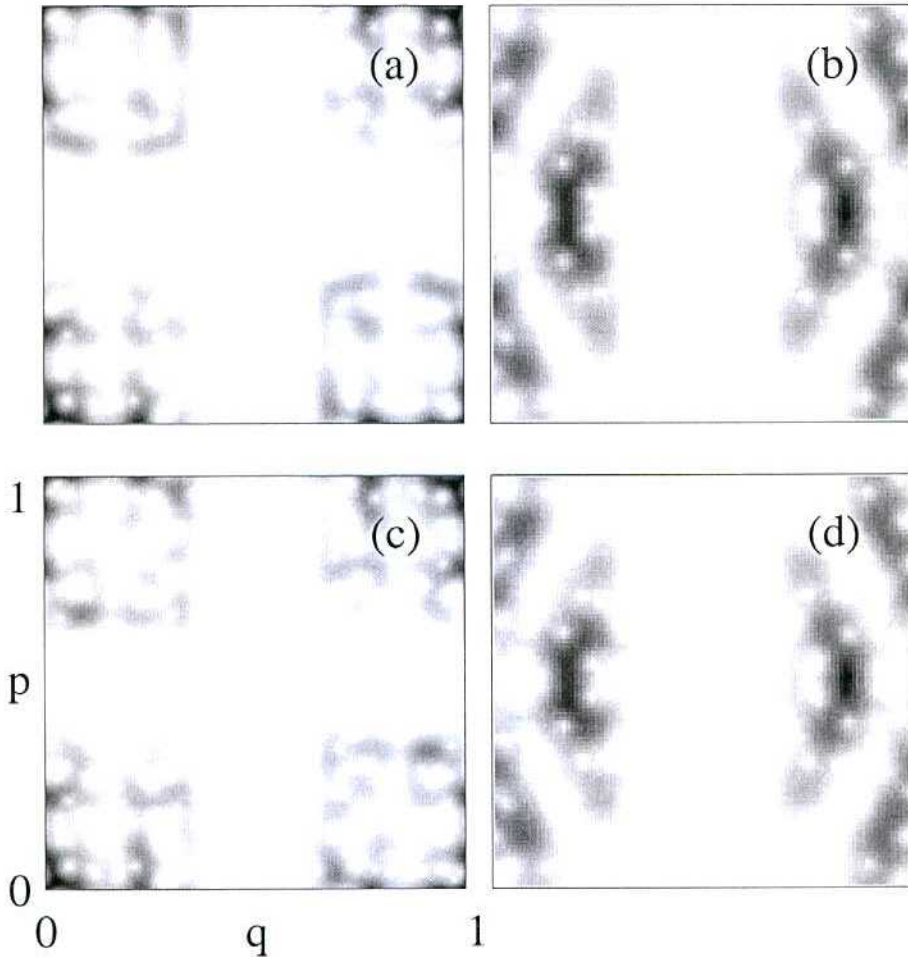


Figura 5.7: Representación mixta $|h_n(q, p)|$ de las mismas autofunciones mostradas en las Figs. (5.4) y (5.5). (a) cálculo exacto en el tripanadero, (b) cálculo exacto en el mapa del gato, (c) nuestro método en el tripanadero y (d) nuestro método en el gato. La coincidencia es mucho mayor que en las Figs. (5.4) y (5.5), en ambos sistemas. Los overlaps son $|\langle h_n^{ex}, h_n^{sc} \rangle|^2 = 0.9429$ en el mapa del panadero y $|\langle h_n^{ex}, h_n^{sc} \rangle|^2 = 0.9613$ en el caso del gato. Se consideró aquí la definición usual de Hilbert-Schmidt de producto interno para dos matrices complejas A y B , $\langle A, B \rangle = \text{Tr}(A^* B) / AB$.

La representación mixta se convierte en el vínculo natural para comparar las resonancias cuánticas y las semiclásicas pues proyecta las probabilidades en el escenario clásico correcto, el repeller. De este modo, la validación de nuestro método en el caso de los autovectores culmina con el cálculo del

producto interno de las matrices $h(q, p)$ correspondientes.

En este capítulo se describió nuestro método o aproximación semiclásica, consistente en la construcción de funciones de onda semiclásicas, como combinaciones lineales de funciones de cicatriz. El método se plantea como objetivo reproducir los estados de vida larga, por lo que se necesitan un número de funciones de scar inferior a N . Este número lo vinculamos a un valor proporcional al predicho por la ley de Weyl fractal, pues éste último es el resultado más fuerte que se tiene acerca de la densidad de resonancias con menores decaimientos cuánticos. El corolario inmediato es la reducción de la dimensionalidad del problema matricial. Estrictamente, el número de funciones de scar necesarias fue ajustado tras probar una serie de valores compatibles con la ley de Weyl.

El método fue validado a nivel espectral en el panadero de tres bandas y en el mapa del gato. Se observó cómo en el caso de resonancias *long-lived*, los autovalores surgidos del problema generalizado (5.1) coincidían con los correspondientes a la diagonalización exacta.

En el caso de los autoestados, al estar localizados en las variedades estable o inestable del sistema clásico [54] mientras que las resonancias (5.2) viven en el conjunto invariante, se hizo uso de la representación compleja $h(q, p)$ [108] con el fin de llevar a cabo una comparación entre los vectores cuánticos y semiclásicos. A través de los productos internos entre las representaciones mencionadas (en los casos exacto y semiclásico) se visualizó la efectividad del método, ya que se encontraron valores cercanos a la unidad.

5.4. Análisis cuantitativo del método

Recientemente han surgido trabajos sobre sistemas caóticos de scattering que sugieren la revisión de nuestro método, en tanto mejora o reformulación de algunos aspectos. En [109] hemos encontrado que en situaciones donde las aperturas con áreas menores a $1/N$, los autoestados se deslocalizan en el espacio de fases clásico, ocupando regiones “prohibidas”. Ésto dificulta la correlación cuántico-clásica, incluso a tiempos muy cortos.

Nuestro método está basado en funciones altamente localizadas (funciones de scar), construídas con la información clásica brindada por las órbitas periódicas (y sus inmediaciones), que viven en el repeller $\mathcal{K}$. Este apartamiento de la localización se debe al hecho de que en los sistemas estudiados en [109], se pierden las manifestaciones cuánticas de las variedades estables e inestables asociadas a las órbitas periódicas. En la Fig. (5.8) pueden observarse diferentes mecanismos de aperturas, que conllevan al mismo repeller clásico $\mathcal{K}$. A esta familia de mapas del panadero se la denominó *shift*, y en

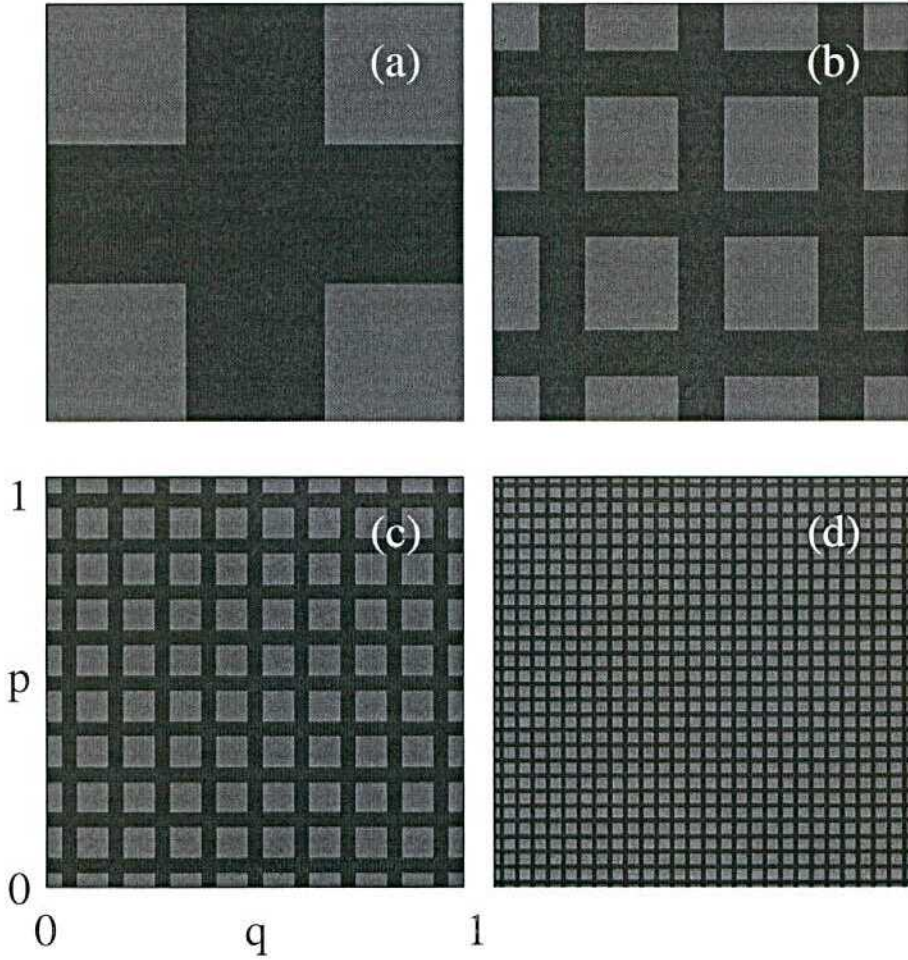


Figura 5.8: Ejemplos de la familia de mapas *shift*, $\tilde{U}_k$. El caso (a) corresponde al mapa del panadero de tres bandas (2.26) donde $k = 1$, mientras que en los siguientes casos (b): $k = 2$, (c): $k = 3$ y (d): $k = 4$. Puede verse cómo a medida que aumenta el parámetro k se van generando canales de escape de menor área, generándose en todos los casos el mismo repeller $\mathcal{K}$.

todos los casos se obtiene la alfombra de Sierpinski como conjunto atrapado. Sin embargo, si se sitúan paquetes coherentes en puntos periódicos⁴, no en todos los casos caben adecuadamente en las zonas disponibles del espacio de fases, mucho menos al evolucionarlos con el mapa cuántico. Los mapas *shift* están regulados por un parámetro k , que indica de qué modo se van abriendo canales de escape que totalicen un área total de un tercio del espacio de fases. Cuánticamente se trabaja en espacios de Hilbert de dimensión $N = 3^l$,

⁴Los paquetes gaussianos tienen un área de $1/N$.

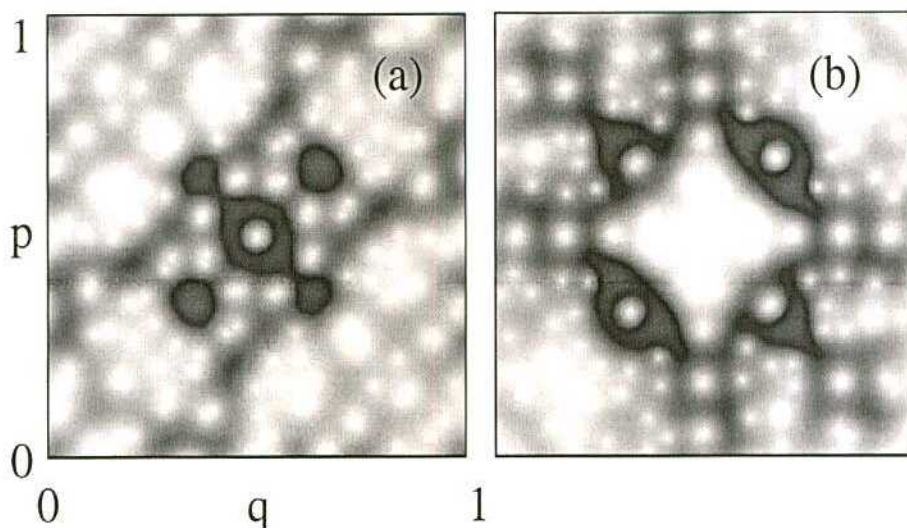


Figura 5.9: Módulo de las representaciones mixtas $h(q, p)$, para el mapa $\tilde{U}_k$, con $k = 4$ y $l = 4$ ($N = 3^4 = 81$). (a): Autoestados asociados al sexto autovalor de mayor módulo $|z| = 0.8076$. (b): Autoestados asociados al cuarto autovalor de mayor módulo $|z| = 0.8637$. La figura está hecha en escala descendiente de rojos. Puede observarse la localización de probabilidad fuera del conjunto atrapado $\mathcal{K}$.

con $l \in \mathbb{Z}$. El caso $k = 1$ corresponde al mapa del panadero de tres bandas utilizado a lo largo de este trabajo. En dicho caso, se ha demostrado [54] que los autoestados cuánticos se localizan en los conjuntos atrapados hacia adelante o hacia atrás. En [109] se informa sobre una transición de fase para un valor del parámetro $k = l/2$, donde los efectos difractivos comienzan a afectar la localización de autofunciones en el espacio de fases. En la Fig. (5.9) se observan los módulos de las representaciones mixtas de dos pares izquierda-derecha de autofunciones del mapa U_k con $k = 4$, en el caso $l = 4$ ($N = 81$). Se observa en ambos casos cómo la probabilidad busca un soporte mayor al repeller $\mathcal{K}$.

En [111] se extendió esta investigación mostrando que la forma y tamaño del área de las aperturas también inciden sobre la localización de las funciones de cicatriz, que trascienden el terreno del conjunto atrapado.

5.4.1. Eficiencia del método

En este apartado se discutirá la efectividad y el alcance del método semiclásico de órbitas periódicas cortas. En otras palabras, el objetivo es obtener los pares (N, N_s) de una manera diferente a la expuesta en (5.1).

Aquí consideraremos distintos valores fijos de tamaños del espacio de Hilbert N , y obtendremos los correspondientes N_s a partir de la aplicación del siguiente criterio:

$$N_s \equiv \#\{z_i^{sc} : |z_i^{sc} - z_j| \leq C_1, |z_i^{sc}| > C_2\}. \quad (5.4)$$

En otras palabras, para valores definidos de N y autovalores de módulos mayores a C_2 , existe un número de funciones de cicatriz N_s tal que la distancia entre los valores propios exactos y semiclásicos se conserva menor a C_1 .

Esta medida de efectividad fue aplicada en el mapa del panadero de tres bandas, donde se recogieron los siguientes puntos, considerando $C_1 = 0.01$ y $C_2 = 0.7$:

N	N_s	% del total
81	60	74.1
177	112	63.3
483	220	45.5
1821	710	39.0
3000	940	31.3

Cuadro 5.5: Pares ordenados (N, N_s) obtenidos de aplicar el criterio de la ecuación (5.4) al método definido en (5.1).

Los pares (N, N_s) fueron representados en la Fig. (5.10), en escala logarítmica. De este modo puede hallarse con facilidad el exponente de la ley $N_s = \alpha N^\beta$, ya que se corresponde con la pendiente de la recta $\ln N_s = \beta \ln N + \ln \alpha$.

El método de cuadrados mínimos arrojó, como resultado de la correlación lineal de los datos, la curva $\ln N_s = 0.77334 \ln N + 0.68892$. La pendiente de dicha recta, $\beta = 0.77334$, no coincide con el exponente predicho por la ley de Weyl fractal ($\beta \sim 0.63$). Sin embargo, lo obtenido en esta validación del método es un exponente menor a la unidad, en sintonía con las dimensiones fractales estudiadas. Si se pudiera llegar computacionalmente a dimensiones del espacio de Hilbert superiores, pensamos que este número tendería a disminuir, aproximándose de este modo a lo mencionado anteriormente.

Los resultados en mapas abiertos cuánticos desarrollados en [109, 111] han demostrado la necesidad de incluir otros ingredientes, ya sean clásicos (más allá del repeller) y/o cuánticos a nuestro método semiclásico, con el fin de describir satisfactoriamente la mecánica cuántica de sistemas caóticos de scattering. La validación efectuada en (5.4.1) también sugiere la adición de nuevos condimentos para aproximarse a los resultados buscados. Otro trabajo

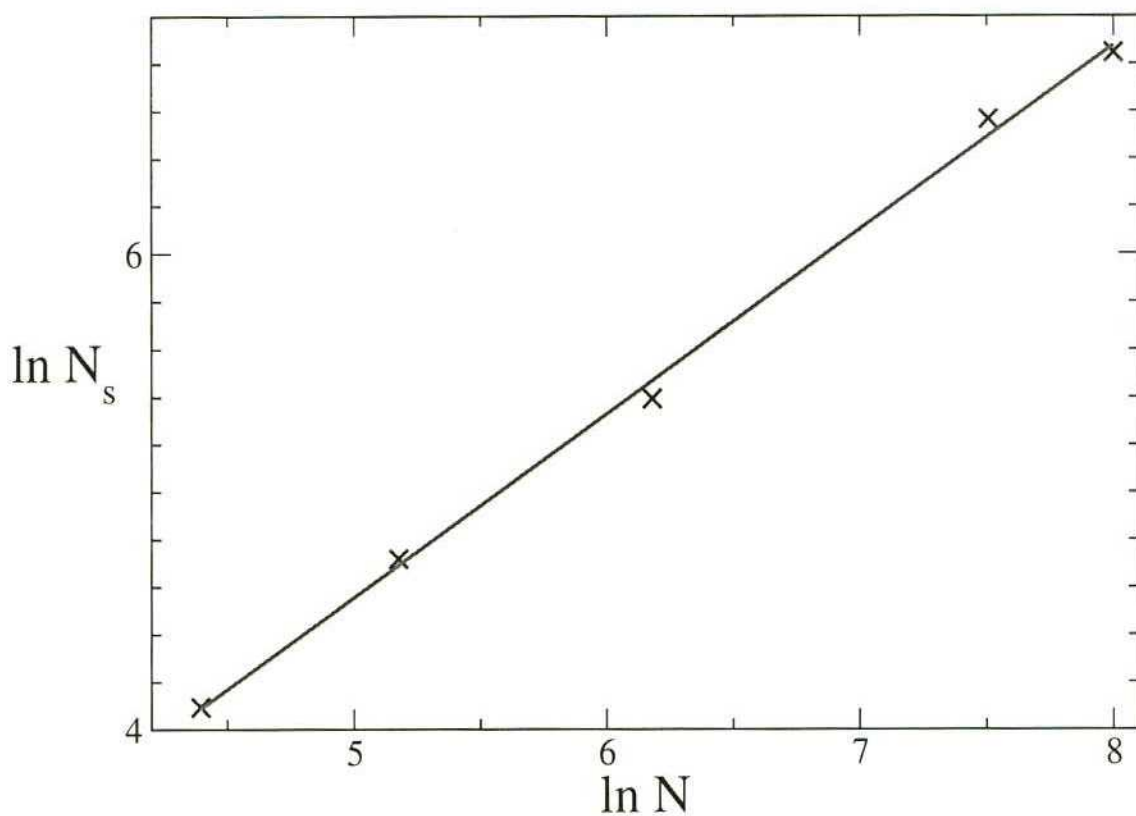


Figura 5.10: Gráfico logarítmico del número de funciones de cicatriz N_s en función de la dimensión del espacio de Hilbert N . La línea roja representa la correlación lineal efectuada a partir del método de cuadrados mínimos.

pendiente consiste en lograr aplicar el método a sistemas más realistas, como los billares cuánticos, dónde debería considerarse qué ocurriría con los rayos de luz salientes. En estas direcciones es que se debe continuar trabajando.

Capítulo 6

Conclusiones

Hemos desarrollado una nueva aproximación al problema de obtener la mecánica cuántica de sistemas abiertos cuya contraparte clásica es caótica. En particular, nos focalizamos en los sistemas denominados de scattering, donde un conjunto de trayectorias atrapadas forman un conjunto fractal que determina la información clásica disponible, puesto que es el único invariante del sistema. La aproximación está basada en la construcción de funciones de onda localizadas en las inmundaciones de las trayectorias periódicas cortas pertenecientes al conjunto atrapado $\mathcal{K}$ (funciones de cicatriz), introducidas inicialmente por E. Vergini y G.G. Carlo para flujos Hamiltonianos [15] y extendidas a sistemas discretos en el tiempo por E. Vergini, D. Schneider y A. Rivas [19] y L. Ermann y M. Saraceno [20]. Nuestro trabajo consistió en primera instancia en desarrollar una nueva formulación de estas funciones, adaptadas a los sistemas abiertos. Pudimos mostrar que funciones de onda construidas semiclásicamente, a partir de combinaciones lineales de funciones de cicatriz, reproducen fehacientemente a los autoestados del sistema cuántico. Ésto fue probado en dos ejemplos paradigmáticos del caos cuántico, como son el mapa del panadero de tres bandas y el mapa del gato. El elemento innovador fue utilizar un número de funciones de scar inferior a la dimensión del espacio de Hilbert, para reproducir sólo los estados de mayor vida. Este número viene dado por la ley de Weyl fractal, que se cumple en los sistemas mencionados, y reduce los tamaños de las matrices involucradas en el problema de valores propios.

Para chequear la validez del método se introdujo la representación mixta $h(q, p)$ [108]. Los productos internos entre las representaciones $h(q, p)$ de los estados cuánticos y de los semiclásicos dieron resultados cercanos a la unidad. Del mismo modo, se reprodujo satisfactoriamente el sector de vida larga de los espectros de los operadores de evolución $\tilde{U}$, es decir, los autovalores de

mayor módulo (decaimiento más lento). En este sentido, hemos cumplido muy satisfactoriamente con el objetivo central propuesto al iniciar el trabajo.

Nuestro método es la primera aproximación a los estados de sistemas caóticos de scattering que se ha llevado a cabo, y tiene la virtud de reducir muy notablemente la dimensionalidad del problema. La teoría de órbitas periódicas cortas para sistemas cerrados [16, 17] sugería una adaptación inmediata al caso de sistemas abiertos [90], pero nada decía acerca del número de funciones de scar necesarias. En esa dirección es que nuestra aproximación es exitosa en primera instancia.

Se ha observado en [109] que para formas y áreas diferentes de las aperturas, los autoestados del sistema cuántico (sus representaciones mixtas), ocupan regiones que están fuera del repeller clásico. En esta línea es que se debe continuar trabajando, refinando nuestra aproximación, a partir de la inclusión de elementos, ya sean de naturaleza clásica o cuántica, no contemplados en nuestra formulación y que quizás puedan explicar efectos difractivos observados en las autofunciones, así como también la pérdida de localización de las funciones de cicatriz [111]. Otro camino a recorrer es la extensión de nuestro método a sistemas realistas, por ejemplo los billares cuánticos y abiertos. Dichos sistemas son modelos de microresonancias para láseres, donde nuestras funciones de onda semiclásicas se corresponden con los modos de oscilación que habitan las cavidades.

Agradecimientos

A Nacho, por presentarme a Marcos (el más grande, lejos), trayéndome de La Feliz a La Reina del Plata, regresando después él y generando este ida y vuelta borgeano.

A Leo, *Herr Professor* de Chacarita, por cumplir ese rol tan difícil de amigo director y motivador.

Al Gurú, oído permanente y motivador nato, del movimiento nacional y popular.

A Diego y Gabriel, una militancia hecha tesis doctoral.

Al resto del grupo de Caos Cuántico: Ale Monastra, Ale Rivas, María Elena Spina y David Schneider (que no ha encontrado su Goliath en el Tandar aun).

A Lisandro y Valeria, los Baglietto y Garré de la física teórica.

A los cogotes: Juan, Paco, Dieguito, María, Darío, Christian y Leo (el mismo de arriba).

A mis compañeros de oficina a lo largo de estos años: Juan Pablo, Matías, Leo (tercera aparición consecutiva), Lisandro (el de la trova), María Eugenia, Panchito y el Guinda.

A Fernanda Zamboni, la paciencia hecha carne.

A Ana María (la más grande, lejos).

A la familia, omnipresente. Grosos.

A las pebas, por siempre jugarme a favor.

A Los Guachos:

- Euge, por el piloto automático del calefón.
- Mauri, gaucho de Puan, cuyas gallinas empollan arriba de La República de Platón.
- Lucky, no hay cenicero que se le resista.
- Soe, enano transgénico.
- Emo, nigeriano de la UCR.
- Santi, tímido para el esfuerzo, fuma debajo del agua.
- Mono, por los semáforos descompuestos.

Dedicado a Barbi, por el amor, la paciencia, el lado luminoso de la cama y los pletzalej de Julito. ♡

Apéndice A

Distribución de Husimi en $\mathbb{T}^2$

Desde el nacimiento de la mecánica cuántica que se tuvo el interés de introducir al espacio de fases clásico como escenario natural de la misma, dado el éxito obtenido en la mecánica Lagrangiana y Hamiltoniana. En 1932 Eugene Wigner presentó una transformación (que lleva su nombre y el de H. Weyl) que, aplicada sobre la matriz densidad, permite describir la dinámica cuántica a través de un propagador $\mathcal{W}$ [112]¹. A partir de allí surgieron nuevas representaciones de estados cuánticos en el espacio de fases como la de cuerdas, Kirkwood o Husimi. Esta última es la distribución elegida en este trabajo, dado que, a diferencia de la de Wigner, tiene la ventaja de ser real y positiva. Fue por primera vez expuesta en 1940 por Kodi Husimi [113] y se define para cualquier estado $|\psi\rangle$ como

$$\mathcal{H}_\psi(q, p) \equiv |\langle\psi|q, p\rangle|^2, \quad (\text{A.1})$$

donde $|q, p\rangle$ es un paquete coherente centrado en la posición q y momento p en el 2-toro [103].

La representación de Husimi puede también pensarse como un suavizado gaussiano de la función de Wigner, asegurando su positividad. La generalización para estados mixtos de esta representación es trivial y viene dada por

$$\mathcal{H}_\rho(q, p) \equiv \langle q, p | \rho | q, p \rangle. \quad (\text{A.2})$$

¹ $\mathcal{W}$ es una pseudo distribución de probabilidad que actúa en el espacio de fases y que contiene la misma información que el operador de estado.

Bibliografía

- [1] H. Poincaré, *Sur une forme nouvelle des équation du problème des trois corps*, Acta Mathematica, **21**, 1897.
- [2] A. Einstein, Verh. Dtsch. Phys. Ges. **19**, 82 (1917).
- [3] Marcus A.M. Aguiar, *O limite semiclássico da Mecânica Quântica*, Notas de Aula, UNICAMP, Brazil (1998).
- [4] L. Brillouin, Comptes Rendus de l'Academie des Sciences **183**, 24 (1926); H.A. Kramers, Zeitschrift der Physik **39**, 828 (1926); G. Wentzel, Zeitschrift der Physik **38**, 518 (1926).
- [5] J.H. Van Vleck, Proc. Nat. Ac. Sc. USA **14**, 178 (1928).
- [6] M.C. Gutzwiller, J. Math. Phys. **12**, 343 (1971).
- [7] M.J. Giannoni, A. Voros and J. Zinn-Justin eds. *Chaos and Quantum Physics*, Les Houches Session LII 1989, Elsevier Science Publications, Nort-Holland (1991).
- [8] O. Bohigas, M. J. Giannoni and C. Schmit, Phys. Rev. Lett. **52**, 1 (1984).
- [9] F. Haake, *Quantum Signatures of Chaos*, Springer, Berlin (1991).
- [10] E.J. Heller, Phys. Rev. Lett. **53**, 1515 (1984).
- [11] A.I. Schnirelman, *Usp. Mat. Nauk* **29**, 181 (1974).
- [12] Y. Colin de Verdiere, Comm. Math. Phys. **102**, 497 (1985).
- [13] L. Kaplan and E. Heller, Ann. Phys.(N.Y.) **264**, 171 (1998); L. Kaplan, Phys. Rep. Lett. **80**, 2582 (1998); L. Kaplan, E.J. Heller, Phys. Rev. E **59**, 6609 (1999); L. Kaplan, Nonlinearity **12**, R1 (1999); W.E. Bies, L. Kaplan, M.R. Haggerty, E.J. Heller, Phys. Rep. E **63**, 66214 (2001).

- [14] Y. H. Kim, M. Barth, H. J. Stockmann, and J. P. Bird, Phys. Rev. B **65**, 165317 (2002); Q. H. Song, L. Ge, A. D. Stone, H. Cao, J. Wiersig, J.B. Shim, J. Unterhinninghofen, W. Fang, and G. S. Solomon, Phys. Rev. Lett. **105**, 103902 (2010); C. Michel, V. Doya, O. Legrand, and F. Mortessagne, Phys. Rev. Lett. **99**, 224101 (2007); H. Liang, Y.C. Lai, D. K. Ferry, R. Akis, and S. M. Goodnick, J. Phys. Condens. Matter **21**, 344203 (2009).
- [15] E. Vergini and G. Carlo, J. Phys. A **34**, 4525 (2001).
- [16] E. Vergini, J. Phys. A **33**, 4709 (2000).
- [17] E. Vergini and G. Carlo, J. Phys. A **33**, 4717 (2000).
- [18] L.A. Bunimovich, Comm. Math. Phys. **65**, 295 (1979).
- [19] E. Vergini, D. Schneider and A. Rivas J. Phys. A **41**, 405102 (2008).
- [20] L. Ermann and M. Saraceno, Phys. Rev. E **78**, 036221 (2008).
- [21] R. Akis *et al.*, Phys Rev. B **54**, 17705 (1996); I.V. Zozoulenko and K.F. Berggren, Phys Rev. B **56**, 6931 (1997); D.K. Ferry *et al.*, Phys. Rev. Lett.**93**, 026803 (2004).
- [22] R.V. Jensen *et al.*, Phys. Rev. Lett. **63**, 2771 (1989).
- [23] J. S. Hersch *et al.*, Phys. Rev. Lett. **83**, 5342 (1999).
- [24] S. B. Lee *et al.*, Phys. Rev. Lett. **88**, 033903 (2002); N. B. Rex *et al.*, Phys. Rev. Lett. **88**, 094102 (2002); S.B. Lee *et al.*, Phys. Rev. Lett. **93**, 164102 (2004); W. Fang *et al.*, Phys. Rev. A **72**, 023815 (2005); K.F. Huang *et al.*, Phys. Rev. Lett. **89**, 224102 (2002); J. U. Nöckel and A. D. Stone, Nature (London) **385**, 45 (1997); C. Gmachl *et al.*, Science **280**, 1556 (1998).
- [25] P. Gaspard, *Chaos, Scattering and Statistical Mechanics* (Cambridge University Press, Cambridge, 1998).
- [26] M.V. Berry, N.L. Balazs, M. Tabor and A. Voros, Ann. Phys. (N.Y. and London) **122**, 1 (1979).
- [27] J. Wiersig, Phys. Rev Lett. **97**, 253901 (2006).
- [28] D.A. Wisniacki and G.G. Carlo, Phys. Rev. E **77**, 045201(R) (2008).

- [29] W. Fang, Phys. Rev. A **72**, 023815 (2005); T. Harayama, P. Davis and K.S. Ikeda, Phys. Rev. Lett. **90**, 063901 (2003); J. Wiersig and M. Hentschel, Phys. Rev. A **73** 031802(R) (2006); Phys. Rev. Lett. **100**, 033901 (2008).
- [30] B. Dietz, T. Friedrich, H. L. Harney, M. Miski-Oglu, A. Richter, F. Schäfer, and H. A. Weidenmüller, Phys. Rev. E **81**, 036205 (2010).
- [31] E. Ott and T. Tél, CHAOS, Vol. **3**, No.4, 1993.
- [32] M. Ding, C. Grebogi, E. Ott and J.A. Yorke, Phys. Rev. A **42**, 12 7025 (1990); U. Kuhl, H.J. Stöckmann and R. Weaver, J. Phys. A: Math. Gen. **38** (2005) 10433–10463
- [33] J.V. José and E. Saletan, *Classical Dynamics: A contemporary approach* (Cambridge University Press, Cambridge, 1998).
- [34] P. Gaspard and S. Rice, J. Chem. Phys. **90**, 2225 (1989).
- [35] G.R. Sachtler, Comptes Rendus du Congrès International de Physique Nucléaire, Paris 7-12 Juillet 1958, p.101, Dunod, Paris; Nucl. Phys. **18**:110 (1960); J. Fernández Niello y J. Testoni, *Elementos de reacciones nucleares*, editado por el Instituto Sábato, Universidad Nacional de San Martín, Comisión Nacional de Energía Atómica (1997).
- [36] Gaspard and D. A. Ramirez, Phys. Rev. A **45**, 8383 (1992); C. Jung and H. I. Scholz, J. Phys. A **20**, 3607 (1987); **21**, 2301 (1988); A. Knauf and M. Klein, *Classical Planar Scattering by Coulombic Potentials* (Springer Verlag, Berlin, 1992).
- [37] P. Gaspard and S. Rice, J. Chem. Phys. **90**, 2255 (1989).
- [38] S. Bleher, C. Grebogi, E. Ott, *Physica D* **46**, 1 87–121 (1990).
- [39] C. Stormer, *The Polar Aurora*, Oxford Univ. Press, 1955.
- [40] J.H. Hannay and M.V. Berry, *Physica D* **1**, 1 267-290 (1980).
- [41] B.V. Chirikov, Phys. Rep. **52**, 263 (1979).
- [42] [http : //en.wikipedia.org/wiki/Standard_map](http://en.wikipedia.org/wiki/Standard_map).
- [43] Mirko Degli Esposti and Sandro Graffi eds., *The Mathematical Aspects of Quantum Maps*, Lectures Notes in Physics vol. 618, (Springer Verlag, Berlin Heidelberg, 2003).

- [44] M. Hénon, *Numerical explorations of Hamiltonian systems*, in Chaotic behaviour of deterministic systems, Les Houches (1981).
- [45] K.T. Alligood, T.D. Sauer, J.A. Yorke, *Chaos, an introduction to Dynamical Systems*, Springer Verlag, N.Y. (1996).
- [46] E. N. Lorenz, *Journal of Atmospheric Sciences* **20**, 130 - 141, (1963).
- [47] S. Nonnenmacher and M. Zworski, *J. Phys. A* **38**, 10683 (2005).
- [48] A.J. Lichtenberg and M.A. Lieberman, *Regular and Chaotic Dynamics* (Springer-Verlag, New York, 1992).
- [49] M. Moshinsky and C. Quesne, *J. Math. Phys.* **12**, 8 (1971).
- [50] M. Saraceno and R. O. Vallejos, *CHAOS* **6**, 193 (1995).
- [51] R. O. Vallejos, A. M. Ozorio de Almeida, *Ann. Phys.* **278**, 86 (1999).
- [52] A. M. Ozorio de Almeida, R. O. Vallejos, *Chaos, Solitons & Fractals* **11**, 1015 (2000); A. M. Ozorio de Almeida, R. O. Vallejos, *Physica E* **9**, 488 (2001).
- [53] P.G. Silvestrov and C.W.J. Beenakker, *Phys. Rev. E* **65**, 035208(R) (2002); S. Tomsovic and E.J. Heller, *Phys. Rev. E* **68**, 038201 (2003).
- [54] J.P. Keating, M. Novaes, S.D. Prado and M. Sieber, *Phys Rev. Lett* **97**, 150406 (2006).
- [55] Giulio Casati, Giulio Maspero and Dima L. Shepelyansky, *Physica D* **131**, 311-316 (1999).
- [56] Douglas Lind and Brian Marcus, *An introduction to Dynamics and Coding* (Cambridge University Press, Cambridge, 1995).
- [57] M. Saraceno and A. Voros, *Physica D* **79**, (1994) 206.
- [58] N.L. Balazs and A. Voros, *Ann. Phys.* **190** 1 (1989).
- [59] M. Saraceno, *Ann. of Phys* **199**, 37-60 (1990).
- [60] V.I. Arnold, A. Avez (1968). *Ergodic Problems in Classical Mechanics*. New York: Benjamin.
- [61] S. de Bièvre, *Chaos, quantization and the classical limit on the torus*, Proceedings of the XIVth Workshop on Geometrical Method in Physics - Białowieża 1995, 96-191, Polish Scientific Publishers PWN, (1998).

- [62] B Eckhardt J. Phys. A: Math. Gen. **19** 1823 (1986); J.P. Keating, Non-linearity **4**, 309 (1991); S.P. Kuznetsov, Physica D (137) , 205 (2000).
- [63] F. Benatti, H. Narnhofer and G.L. Sewell, Lett. Math. Phys. **21**, 157-165 (1991).
- [64] M.A. Rieffel, Contemp. Math. **105**, 191-211 (1991).
- [65] J. B. Keller, Ann. Phys. (N.Y.) **4**, 180 (1958); V.P. Maslov *Perturbation Theory and Asymptotic Methods* (MSU Publ., Moscow, 1965; English translation: Mir, Moscow, 1965); M.V. Berry and K.E. Mount *Semiclassical approximations in wave mechanics* Rep. Prog. Phys. 1972 **35** 315-397.
- [66] M. Berry, *Semiclassical mechanics of regular and irregular motion*, Les Houches, (1981); A.M. Ozorio de Almeida, *Sistemas Hamiltonianos: Caos e Quantização*, 3a. edição, Campinas, Editora da UNICAMP, 1995.
- [67] H. Weyl, Über die asymptotische Verteilung der Eigenwerte, *Nachrichten der Königlichen Gesellschaft der Wissenschaften zu Göttingen*, 110–117 (1911); H. Weyl, Math. Ann. **141**, 441 (1912).
- [68] M.V. Berry, J. Phys. A **10**, 2083 (1977).
- [69] W.T. Lu, S. Sridhar and M. Zworski, Phys Rev. Lett **91**, 154101 (2003).
- [70] H. Schomerus and J. Tworzydło, Phys Rev. **93**, 154102 (2004).
- [71] J. Sjöstrand, Duke Mathematical Journal **60**, 1 (1990); K.K. Lin, J. Comput. Phys. **176**, 295 (2002); K.K. Lin and M. Zworski, Chem. Phys. Lett. **355**, 201 (2002).
- [72] M. Zworski, *Resonances in physics and geometry*, Not. AMS 43 319–28 (1999); M. Zworski *Quantum resonances and partial differential equations* Proc. ICM 3 243–52 (2002).
- [73] M. Toda, R. Kubo, N. Saito, *Statistical Physics I: Equilibrium Statistical mechanics*, 2nd edn. No. 30 in Solid-state Sciences (Springer, Berlin, Heidelberg, New York, 1978).
- [74] J. Sjöstrand, Duke Math. J. **60**, 1-57, 1990.
- [75] W.H. Zurek, *Decoherence, einselection, and the quantum origins of the classical*, Rev. Mod. Phys. **75**, 715–775 (2003); F. Hansen, *Quantum mechanics in phase space*, Volume 19, Issue **3**, June 1984, Pages 361–381;

- J. E. Moyal, *Quantum mechanics as a statistical theory*, Mathematical Proceedings of the Cambridge Philosophical Society (1949), **45** : pp 99-124.
- [76] J.A Ramilowski, S.D. Prado, F. Borondo and D. Farrelly, Phys. Rev. E **80**, 055201 (2009).
 - [77] J. Wiersig and J. Main, Phys. Rev. E **77**, 036205 (2008).
 - [78] A. Eberspächer, J. Main and G. Wunner, Phys. Rev. E **82**, 046201 (2010).
 - [79] Juan M. Pedrosa, Gabriel G. Carlo, Diego A. Wisniacki and Leonardo Ermann, Phys. Rev. E **79**, 016215 (2009).
 - [80] D.L. Shepelyansky, Phys. Rev. E **77**, 015202(R) (2008).
 - [81] Marten Knopp and Henning Schomerus, Phys. Rev. E **81**, 026208 (2010).
 - [82] M. Novaes, Phys. Rev. E **85**, 036202 (2012).
 - [83] E. Ott, *Chaos in Dynamical Systems* (Cambridge University Press, Cambridge, 1993).
 - [84] L. Ermann and M. Saraceno, Phys. Rev. E **74**, 046205 (2006).
 - [85] S. Nonnenmacher and M. Rubin, Nonlinearity **20**, 1387 (2007).
 - [86] M. L. Mehta, *Random Matrices*, 3rd Edition, Pure and Applied Mathematics (Amsterdam), **142**, Amsterdam, Netherlands: Elsevier/Academic Press.
 - [87] T. Guhr, A. Müller Groeling, H. A. Weidenmüller, Phys. Rep. **299** (1998).
 - [88] E. P. Wigner, *Ann. of Math.* **62**, 548-564 (1955).
 - [89] K. Zyczkowski and H. Sommers, J. Phys. A: Math. Gen. **33**, 2045 (2000).
 - [90] Gabriel G. Carlo, Tesis Doctoral. Universidad de Buenos Aires, 2000.
 - [91] E.B. Bogomolny, Physica D **31**, 169 (1988).
 - [92] M.V. Berry, Proc. R. Soc. Lond. A **423**, 219 (1989).
 - [93] S. Nonnenmacher and A. Voros, J. Phys. A **30**, 295 (1997).

- [94] G.G. de Polavieja, F. Borondo and R.M. Benito, Phys. Rev Lett. **73**, 1613 (1994).
- [95] E. Vergini and D. Wisniacki, Phys Rev. E **58**, R5225 (1998).
- [96] D. A. Wisniacki, F. Borondo, E. Vergini, and R. M. Benito, Phys. Rev. E **63**, 066220 (2001).
- [97] S.W. Mc Donald, Tesis Doctoral. Lawrence Berkeley Laboratory LBL 14837 (1983).
- [98] A. Voros, in *Stochastic behaviour in classical and quantum hamiltonian systems* (ed. G. Casati and J. Ford), pp. 326-333. Lecture Notes in Physics 93. Berlin: Springer (1979).
- [99] E.J. Heller, *Wave Packet and Quantum Chaology*, in Chaos and Quantum Physics, Les Houches, 1989.
- [100] R. Akis *et al.*, Phys. Rev. Lett. **79**, 123 (1997).
- [101] H. Ishio and J.P. Keating, J. Phys. A **37**, 217 (2004).
- [102] P. Leboeuf and A. Voros, J. Phys A: Math. Gen. **23**, 1765, (1990); Chang Shau-Jin and Kang-Jie Shi, Phys. Rev. Lett. **55** 269, (1985).
- [103] M.M. Tracy, PhD thesis: *The classical limit of the quantum bakers map*, Univ. of New Mexico (2002).
- [104] F. Faure, S. Nonnenmacher, S. De Bievre, Commun. Math. Phys. **239**, 449 (2003).
- [105] M. Novaes, J.M. Pedrosa, D.A. Wisniacki, G.G. Carlo and J.P. Keating, Phys. Rev. E **80** (R), 035202 (2009).
- [106] Juan M. Pedrosa, Gabriel G. Carlo, Diego A. Wisniacki and Marcel Novaes, Phys. Rev. E **85**, 036203 (2012).
- [107] Stéphane Nonnenmacher, Nonlinearity **24**, R123-R167 (2011).
- [108] L. Ermann, G.G. Carlo and Marcos Saraceno, Phys. Rev. Lett. **103**, 054102 (2009).
- [109] Leonardo Ermann, Gabriel G. Carlo, Juan M. Pedrosa and Marcos Saraceno, Phys. Rev. E **85**, 066204 (2012).

- [110] Eduardo G. Altmann, Jefferson S. E. Portela and Tamás Tél, arXiv:1208.0254 (2012). Enviado a Rev. Mod. Phys.
- [111] Gabriel G. Carlo, D. A. Wisniacki, Leonardo Ermann, R. M. Benito and F. Borondo, arXiv:1207.5785 (2012).
- [112] E. P. Wigner, Phys. Rev. **40**, 749–759 (1932).
- [113] K. Husimi, Proc. Phys. Math. Soc. Jpn **22**, 264 (1940).