

00.81.07

CNEA-NT 22/81

REPUBLICA ARGENTINA  
COMISION NACIONAL DE ENERGIA ATOMICA  
Dependiente de la Presidencia de la Nación

SOBRE LA SOLUCION NUMERICA DEL PROBLEMA  
DE STEFAN UNIDIMENSIONAL

Alicia Caracino  
Guillermo Marshall  
Edgardo A. Moyano

Buenos Aires  
1981

SOBRE LA SOLUCION NUMERICA DEL PROBLEMA  
DE STEFAN UNIDIMENSIONAL

Alicia Caracino\*  
Guillermo Marshall\*  
Edgardo A. Moyano\*\*

Abril de 1981

RESUMEN

Se presenta un estudio de los métodos de tratamiento numérico de una interfase móvil a través del análisis de un problema de Stefan unidimensional. Se consideran los métodos de malla fija y variable en diferencias finitas. Se discuten sus ventajas e inconvenientes y se propone un nuevo método consistente en la utilización de malla variable, de una aproximación de orden superior en el cálculo de la interfase, de una iteración compuesta en el cálculo del paso de tiempo y de la utilización de una aproximación lineal basada en los métodos de malla fija como valor inicial en el cálculo iterativo del paso de tiempo. Se presentan resultados numéricos que se comparan con los obtenidos por otros autores. De esta comparación surge que el método propuesto presenta la ventaja de ser más preciso, de converger en un número menor de iteraciones y de utilizar menor tiempo de cómputo.

1. INTRODUCCION

Se conoce como problema de Stefan o problema de borde móvil o libre al problema de la resolución de una ecuación de tipo parabólico en un dominio variable dependiente de la solución incógnita. Si bien la ecuación puede ser lineal, el dominio de la misma depende de aquella y tiene que ser resuelta simultáneamente como una incógnita más: por lo tanto el problema es no lineal.

Los problemas de conducción del calor o de difusión con cambio de fase, constituyen una clase muy amplia de problemas de borde libre. El problema prototipo es el problema de fusión o solidificación de agua/hielo, estudiado por Stefan en 1891 (de ahí su nombre). (Ver Carslaw y Jaeger (1)).

El problema de borde libre se puede encontrar en muchas áreas de aplicación práctica tales como en las industrias del metal, vidrio, plástico, petróleo, nuclear, diseño de vehículos espaciales, preservación de alimentos, semiconductores, criocirugía, astrofísica, meteorología, plasma, etc.

Entre los varios métodos existentes para resolver el problema de Stefan, se destacan por su generalidad los métodos numé-

---

\* CNEA - CENTRO DE CALCULO CIENTIFICO  
\*\* CNEA - DEPARTAMENTO DE MATERIALES

ricos, en particular diferencias finitas y elementos finitos. Dentro de los métodos numéricos hay dos grandes corrientes: aquellos que realizan el seguimiento de la trayectoria en forma explícita (tracking methods) y resuelven el problema diferencial sobre un dominio móvil, y los que evitan dicho método utilizando un dominio fijo a través de lo que se denomina formulación generalizada o débil (introducción de la función entalpía, etc.). Una discusión de las ventajas e inconvenientes de ambos métodos se puede encontrar en el trabajo de Crank (3).

Los métodos de diferencias finitas para el seguimiento de la interfase del problema de Stefan unidimensional se pueden clasificar en métodos de malla fija y métodos de malla variable según GUPTA (8). En los métodos de malla fija el dominio es aproximado por una malla de paso fijo y la trayectoria de la interfase no necesariamente coincide con los nodos de la malla.

En los métodos de malla variable el dominio es aproximado por una malla de paso variable, de modo tal que la trayectoria de la interfase coincide necesariamente con los nodos de la misma. En realidad esta clasificación es incompleta, dado que es fácil encontrar ejemplos que no la satisfacen: se puede tener un método en el que la interfase no coincide necesariamente con los nodos de la malla y sin embargo el paso de tiempo es variable (por restricciones debidas a la estabilidad numérica). No obstante ello, nos atendremos a la clasificación de Gupta, dado que su uso está generalizado.

Entre los métodos de malla fija se puede citar el trabajo pionero de Crank (2) y de su escuela (ver referencias en Crank (33)). En nuestro medio se puede citar el trabajo de E. García (6).

De los métodos de malla variable, el primero se debe a Douglas y Gallie (4); extensiones del mismo fueron hechas por otros investigadores, en particular, Goodling y Khader (7) y GUPTA y KUMAR (9).

Este informe está centrado en la resolución numérica por diferencias finitas del problema de Stefan unidimensional sobre un dominio móvil a través del seguimiento de la trayectoria de la interfase. Se analizan los métodos de malla fija y variable y se discuten sus ventajas e inconvenientes. Se propone un nuevo método consistente en la utilización de malla variable, aproximación de orden superior en el cálculo de la interfase, iteración compuesta para el cálculo del paso temporal y la utilización como valor inicial, en el cálculo iterativo del paso temporal, de una aproximación lineal basada en los métodos de malla fija. Se presentan algunos resultados numéricos con el método propuesto aplicado a un problema test que posee solución analítica.

## 2. FORMULACION DEL PROBLEMA

El problema test elegido fue tomado de Furzeland (5) y se debe a Hoffmann (10). Se trata de la fusión de una barra de hielo en contacto con una fuente de calor en el borde fijo izquier

do ( $x = 0$ ), con una fase líquida solamente (la temperatura  $u(x,t)$  se mantiene constante en la fase sólida y a  $0^\circ\text{C}$ , es decir a la temperatura del punto de fusión).

En dos estados sucesivos la distribución de temperaturas en la fase líquida adopta la forma indicada en la figura 1.

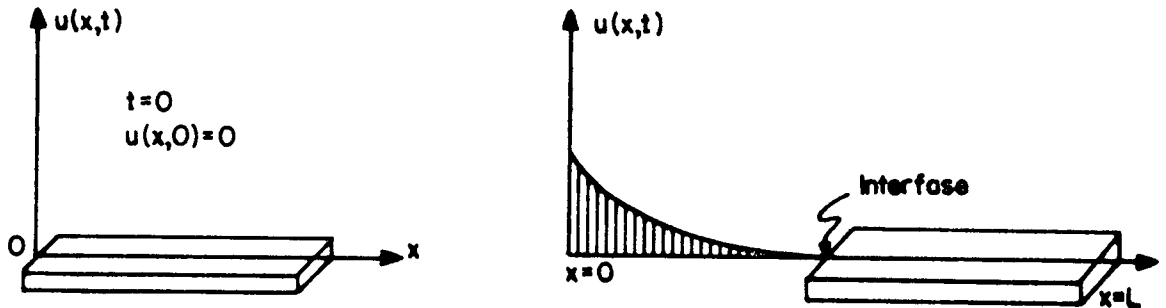


FIG.1 EL PROBLEMA DE STEFAN

Resolver este problema significa encontrar la distribución de la temperatura  $u(x,t)$  en la fase líquida y la posición de la interfase. Entonces el dominio espacio-temporal donde interesa conocer la distribución de temperaturas está representado por la figura 2.

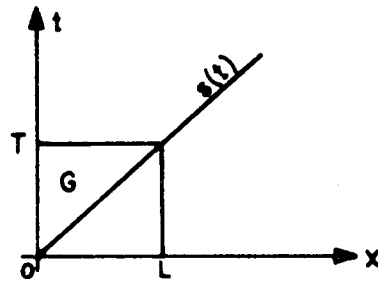


FIG.2 DOMINIO DE LA ECUACION (1)

$$\begin{aligned} \text{donde: } \Omega_t &= \{0, s(t)\} \\ G &= \{(t, x); 0 < t < T, x \in \Omega_t\} \\ x &\in \{0, s(t)\} \end{aligned}$$

$$0 < t < T, \quad T = 1$$

La ecuación diferencial que gobierna la distribución de temperatura es:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \quad u(x,t) \in G \quad (1)$$

con condiciones iniciales  $u(x,0) = 0 \quad x \in G$ ,  
condiciones de borde

$$\left\{ \begin{aligned} \frac{\partial u(x,t)}{\partial x} &= -e^t && \text{para } x = 0, t > 0 \\ u(x,0) &= 0 \\ \dot{s} = \frac{dx}{dt} &= -\frac{\partial u}{\partial x} \end{aligned} \right\} \quad \text{para } x \in s(t) \quad t > 0 \quad (2)$$

La solución exacta de la ecuación (1) - (2) es:

$$u(x,t) = e^{t-x} - 1 \quad (3a)$$

$$s(t) = t \quad (3b)$$

Es fácil verificar que la ecuación (3) satisface la ecuación (1) y las condiciones iniciales y de borde (2).

Valiéndonos de la ecuación (3a) podemos calcular la trayectoria de la interfase igualando a cero  $u(x,t)$

$$u(x,t) = e^{t-x} - 1 = 0, \text{ de donde se deduce}$$

$$t - x = \ln 1 = 0$$

$$t - s(t) = 0$$

la ecuación (3b) muestra que la trayectoria de la interfase es una recta de pendiente unitaria.

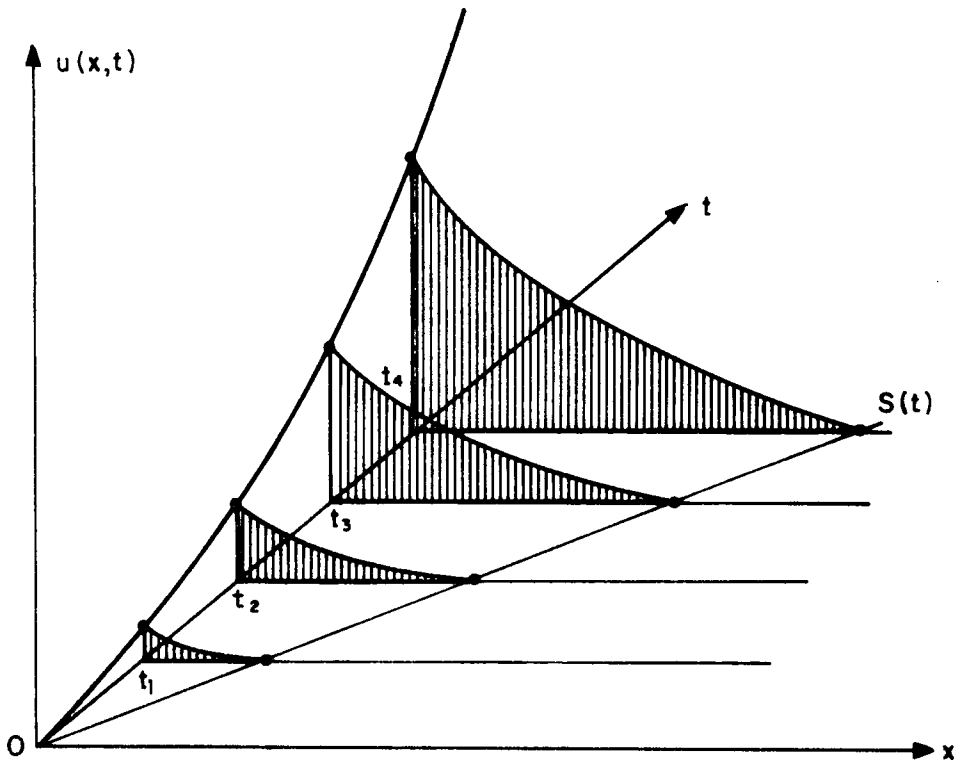


FIG.3-GRFICO DE LA SOLUCION TEORICA DEL PROBLEMA DE STEFAN

En la figura 3 se presenta la solución teórica de la ecuación (1) - (2) representada por la superficie  $u(x,t)$  sobre el plano  $x - t$ .

### 3. EL PROBLEMA NUMERICO

En esta sección se discuten aproximaciones numéricas de la ecuación (1) - (2) utilizando diferencias finitas explícitas e implícitas asociadas a los métodos de malla fija y variable, respectivamente.

# METODOS DE MALLA FIJA

A los efectos de la aproximación numérica se discretiza el dominio G de la figura 2 con una malla rectangular como se muestra en la figura 4

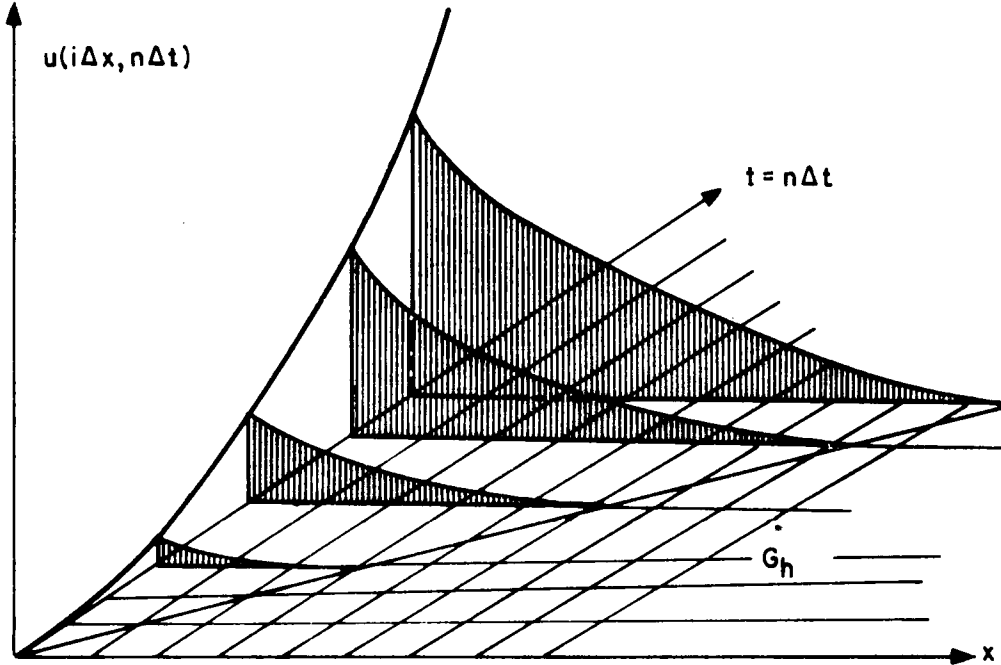


FIG.4- DISCRETIZACION CON UN METODO DE MALLA FIJA

Con  $G_h$  se indica el dominio espacial discretizado. El paso espacial y temporal se indican con  $\Delta x$  y  $\Delta t$ . El valor de la solución numérica para  $x = i\Delta x$  y  $t = n\Delta t$  está dado por

$$U(i\Delta x, n\Delta t) = U_i^n$$

Un esquema de tipo explícito consistente con el problema diferencial (1) - (2) se escribe

$$\frac{U_i^{n+1} - U_i^n}{\Delta t} = \frac{U_{i+1}^n - 2U_i^n + U_{i-1}^n}{\Delta x^2}, \quad (4)$$

definiendo  $r$  como  $r = \Delta t / \Delta x^2$  la ec. (4) se puede escribir

$$U_i^{n+1} = (1 - 2r) U_i^n + r(U_{i+1}^n + U_{i-1}^n) \quad (5)$$

La ecuación (5) es válida para los nodos internos del segmento determinado por el origen y la posición de la interfase. En los extremos se requiere un tratamiento especial. Es claro que el problema fundamental reside en el cálculo de la posición de la interfase. Dado que ésta no necesariamente coincide con los nodos de la malla, es necesario recurrir a la interpolación. Supongamos por el momento conocida la posición de la interfase, como se indica en la figura 5, en el plano  $(x, t)$ , y la distribución de temperatura en el nivel  $t_n = n\Delta t$  ( $I^n$  e  $I^{n+1}$  indican la posición de la interfase en los tiempos  $t_n$  y  $t_{n+1}$ , respectivamente).

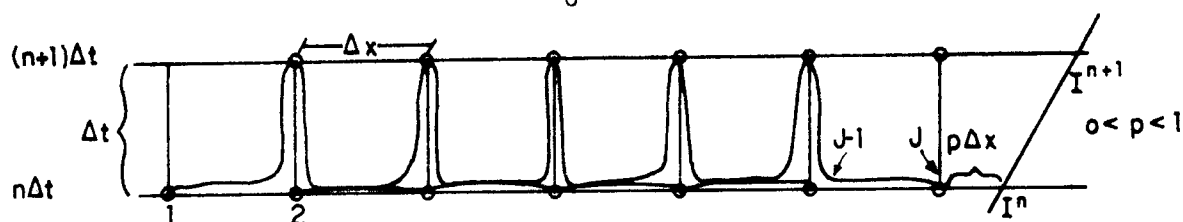


FIG. 5 - ESQUEMATIZACION DE UN METODO EXPLICITO DE MALLA FIJA

Entre los nodos  $i=2$  e  $i=j-1$  se utiliza el esquema de la ecuación (4). Para  $i=1$  se debe modificar dicha fórmula para satisfacer la condición de borde izquierdo. Entonces, haciendo  $i=1$ , se obtiene de la ecuación (4)

$$U_1^{n+1} = (1 - 2r) U_1^n + r(U_2^n + U_0^n) \quad (6)$$

(Se ha supuesto un nodo ficticio para  $i=0$ ). Para aproximar la condición de borde izquierdo se utilizan diferencias centradas

$$\left( \frac{\partial u}{\partial x} \right)_{x=0}^n = \frac{U_2^n - U_0^n}{2\Delta x} = -e^{n\Delta t}$$

de donde  $U_0^n = U_2^n + 2\Delta x e^{n\Delta t}$ ,

y reemplazando en la expresión (6) se obtiene

$$U_1^{n+1} = (1 - 2r) U_1^n + 2r U_2^n + 2q e^{n\Delta t} \quad (7)$$

donde  $q = \Delta t / \Delta x$ .

En el borde derecho se utiliza un esquema descentrado que se obtiene por interpolación de Lagrange (ver CRANK (2)). Resulta

$$\frac{U_j^{n+1} - U_j^n}{\Delta t} = \frac{2}{\Delta x^2} \left[ \frac{U_{j-1}^n}{1+P} - \frac{U_j^n}{P} + \frac{U_I^n}{P(1+P)} \right]$$

y teniendo en cuenta que  $U_I^n = 0$

$$U_j^{n+1} = \left( 1 - \frac{2r}{P} \right) U_j^n + \left( \frac{2r}{1+P} \right) U_{j-1}^n \quad (8)$$

Conocida la posición de la interfase se puede obtener la solución de la ecuación diferencial en el nivel  $(n+1)\Delta t$  utilizando las fórmulas (6), (7) y (8).

Se puede demostrar que el esquema (7) - (8) es numéricamente estable si se cumple la condición

$$r = \Delta t / \Delta x^2 \leq p/2 \quad \text{o} \quad \Delta t \leq p\Delta x^2 / 2 \quad (9)$$

que es, naturalmente muy restrictiva, dado que  $p$  puede tomar valores muy pequeños. Esta restricción proviene del uso local de un esquema descentrado (en la zona adyacente a la interfase). Para obviar este inconveniente se puede realizar la siguiente modificación que consiste en reemplazar la aproximación descentrada local del nodo  $j$  por una interpolación de Lagrange (ver figura 5).

En el caso en que la posición de la interfase sea como la que ilustra la figura 6 se puede proceder del modo siguiente: hasta el nodo  $j-1$  se utiliza un esquema centrado explícito.

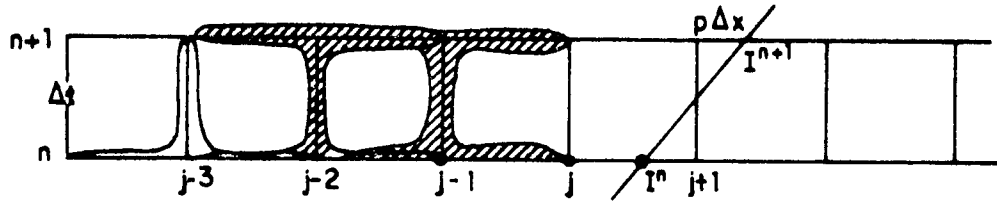


FIG. 6- VARIANTE PARA EVITAR EL USO LOCAL DE UN ESQUEMA EXPLÍCITO DESCENTRADO

La solución en el nodo  $j$  se calcula con un esquema local implícito centrado en  $j-1$  (el esquema implícito se estudiará a continuación). La solución en el nodo  $j+1$  se calcula por medio de una interpolación de Lagrange utilizando los valores de la solución en los nodos  $j-1$ ,  $j$  e  $I^{n+1}$ . Las modificaciones locales al método explícito arriba descrito permiten obviar el uso de un esquema descentrado y por lo tanto la condición de estabilidad se reduce a que se cumpla

$$\Delta t < \Delta x^2 / 2$$

que naturalmente redundará en un menor tiempo de cómputo.

Un esquema de tipo implícito consistente en el problema diferencial se escribe:

$$\frac{U_i^{n+1} - U_i^n}{\Delta t} = \frac{1}{\Delta x^2} (U_{i+1}^{n+1} - 2U_i^{n+1} + U_{i-1}^{n+1}) \quad (10)$$

es decir

$$-rU_{i-1}^{n+1} + (1 + 2r) U_i^{n+1} - rU_{i+1}^{n+1} = U_i^n \quad (11)$$

válido entre los nodos  $i=2$  e  $i=j-1$ , según se ilustra en la figura 7

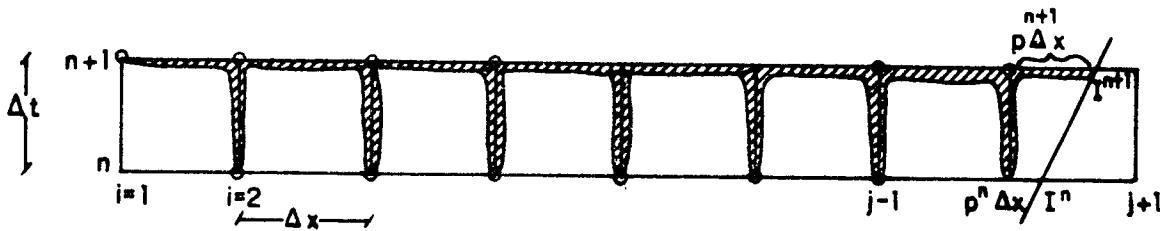


FIG. 7- ESQUEMATIZACIÓN DE UN METODO IMPLÍCITO DE MALLA FIJA

Para el nodo 1 se tiene, reemplazando la condición de borde por diferencias descentradas

$$\left( \frac{\partial u}{\partial x} \right)_{x=0}^{n+1} = \frac{U_2^{n+1} - U_1^{n+1}}{\Delta x} = -e^{(n+1)\Delta t}$$

en la expresión genérica para  $i=2$

$$(1 + r) U_2^{n+1} - rU_3^{n+1} = U_2^n + e^{(n+1)\Delta t} \Delta x r \quad (12)$$

Si se hubieran utilizado diferencias centradas para la aproximación de la condición de borde izquierdo el resultado hubiera sido

$$(1 + 2r) U_1^{n+1} - 2rU_2^{n+1} = U_1^n + 2r\Delta x e^{(n+1)\Delta t}$$

Si bien es cierto que en el borde derecho se conoce la posición de la interfase  $I^{n+1}$  en el tiempo  $t^{(n+1)}$  y su valor  $U_{I^{n+1}}^{n+1}$ , no se conoce el valor de  $U^n$  pero puede obtenerse utilizando la condición de borde derecho

$$-\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)_{I^{n+1}} = -\left(\frac{U_{I^{n+1}}^{n+1} - U_j^{n+1}}{p^{n+1}\Delta x}\right) = M^{n+1}$$

donde  $M^{n+1}$  es el valor numérico de la pendiente en  $I^{n+1}$ . Como veremos más adelante  $M^{n+1}$  se puede aproximar por  $M^n$  suponiendo que ha habido una variación lineal, es decir

$$M^{n+1} = M^n + o(\Delta t)$$

Resolviendo para  $U_j^{n+1}$  y teniendo en cuenta que  $U_I^{n+1} = 0$ , resulta

$$U_j^{n+1} = p^{n+1} \Delta x M^n = p^{n+1} \Delta x \frac{U_j^n}{p^n \Delta x} = \frac{p^{n+1}}{p^n} U_j^n \quad (13)$$

Entonces en el borde derecho la expresión genérica (11) se escribe (para  $i=j-1$ )

$$-rU_{j-2}^{n+1} + (1 + 2r) U_{j-1}^{n+1} - r U_j^{n+1} = U_{j-1}^n$$

reemplazando el valor de  $U_j^{n+1}$  obtenido de la condición de borde derecho, queda finalmente:

$$-rU_{j-2}^{n+1} + (1 + 2r) U_{j-1}^{n+1} = 1 + r \frac{p^{n+1}}{p^n} U_j^n \quad (14)$$

El sistema algebraico resultante tridiagonal de orden  $j-2$  es

$$\begin{bmatrix} 1+r & -r & 0 \\ -r & 1+2r & -r \\ & -r & 1+2r \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U_2 \\ \vdots \\ U_i \\ \vdots \\ U_{j-1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} U_2^n + r\Delta x e^{(n+1)\Delta t} \\ \vdots \\ U_i^n \\ \vdots \\ (1 + r \frac{p^{n+1}}{p^n}) U_j^n \end{bmatrix} \quad (15)$$

La inversión del sistema (15) se realiza mediante el conocido algoritmo tridiagonal (ver detalles por ejemplo en Richtmyer y Morton (11)). Este esquema es incondicionalmente estable para cualquier valor de  $r$ .

Se hace notar que en el caso en que la posición de la interfase sea la que muestra la figura 8,

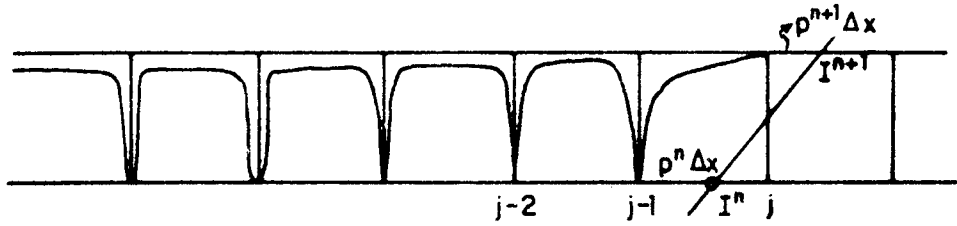


FIG. 8- ESQUEMATIZACION DE UN METODO IMPLICITO DE MALLA FIJA

la expresión para  $u_j^{n+1}$  se transforma en

$$u_j^{n+1} = \frac{p^{n+1}}{p^n} u_{j-1}^n$$

y la expresión (14) se escribe entonces

$$-r u_{j-2}^{n+1} + (1 + 2r) u_{j-1}^{n+1} = \left(1 + r \frac{p^{n+1}}{p^n}\right) u_{j-1}^n \quad (16)$$

#### CALCULO DE LA INTERFASE EN LOS METODOS DE MALLA FIJA

Supuesta conocida la posición de la interfase y la distribución de temperaturas en el tiempo  $t_n$  se desea conocer la posición de la interfase en el tiempo  $t_{n+1}$  como se indica en la figura 9. Se tiene como incógnitas la distribución de temperaturas y la posición de la interfase que es función del gradiente de temperaturas de acuerdo a la ecuación (2). Dado que los métodos de aproximación utilizados son de primer orden, es válida la siguiente suposición (ver figura 9):

$$s^{n+1} = s^n + o(\Delta t) \quad (17)$$

donde  $s^n$  es la distancia al origen de la interfase en el tiempo  $t_n = n\Delta t$ .

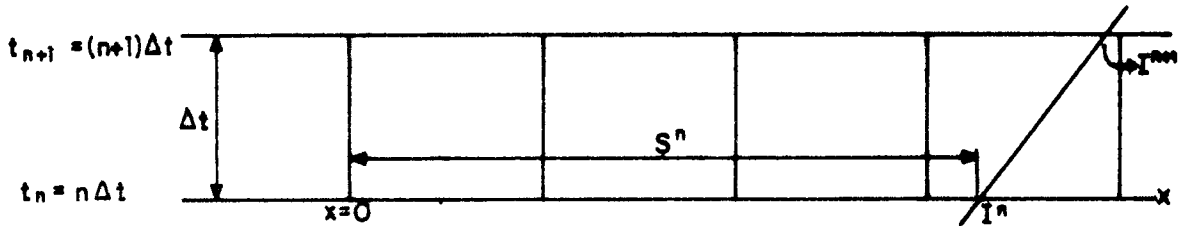


FIG. 9- APROXIMACION DE LA INTERFASE

La expresión (17) lleva a la siguiente aproximación

$$\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)_{I^{n+1}} = \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)_{I^n} + o(\Delta t) \quad (18)$$

y teniendo en cuenta la ecuación (2) se obtiene

$$\dot{s} = \left(\frac{dx}{dt}\right)_{I^{n+1}} \approx -\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)_{I^n} = M^n$$

donde  $M^n$  es el valor numérico de la pendiente en  $I^n$ . Aproximando la ecuación anterior por diferencias finitas resulta

$$\frac{x^{n+1} - x^n}{\Delta t} \approx M^n, \text{ de donde}$$

$$x^{n+1} \approx x^n + M^n \Delta t \quad (19)$$

Conocido el valor de  $M^n$  (que se calcula como la derivada en  $i^n$  del polinomio de Lagrange), se obtiene la posición de la interfase en  $t_{n+1} = (n+1)\Delta t$ .

#### METODOS DE MALLA VARIABLE

En los métodos de malla variable que se discuten a continuación, el paso espacial  $\Delta x$  permanece fijo para todos los tiempos, y cada paso de tiempo  $\Delta t$  es elegido de tal manera que la trayectoria de la interfase avanza un paso  $\Delta x$  durante dicho intervalo de tiempo. De esta manera la trayectoria de la interfase pasa por el nodo extremo derecho como se indica en la figura 10.

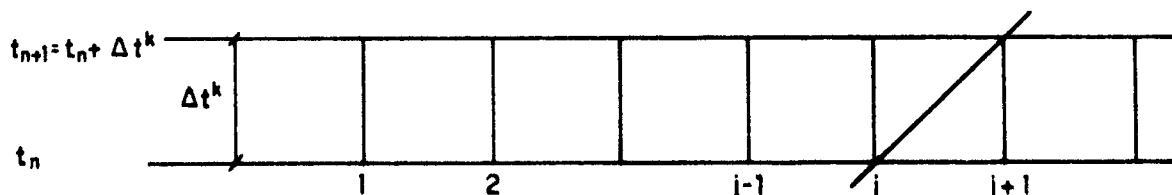


FIG.10 - ESQUEMATIZACION DE UN METODO DE MALLA VARIABLE

Entonces conocida la posición de la trayectoria de la interfase y la distribución de temperaturas en el tiempo  $t_n$ , el problema consiste en encontrar el valor de  $\Delta t^k$  (el supraíndice  $k$  indica la iteración  $k$ ) para el cual la trayectoria de la interfase pasa por el nodo  $j+1$  en el tiempo  $t_{n+1}$ . Una vez encontrado el valor de  $\Delta t^k$  se puede utilizar un método de diferencias finitas implícito como el representado por la ecuación (15) (para  $p=1$ ) para obtener la distribución de temperaturas en el tiempo  $t_{n+1}$ . La esencia del método de malla variable consiste entonces en el cálculo de  $\Delta t^k$  a través de un proceso iterativo.

Se supone que este proceso es convergente, es decir que se obtiene el valor de  $\Delta t^k$  apropiado cuando la diferencia entre dos valores sucesivos del mismo, difiere en una constante arbitrariamente pequeña.

Varios autores han estudiado el método de malla variable, difiriendo entre ellos el método iterativo utilizado para el cálculo de  $\Delta t^k$ . El primer trabajo sobre el tema fue realizado por Douglas y Gallie (4). Extensiones del mismo fueron realizadas por Goodling y Khader (7) y más recientemente por Gupta y Kumar (9). En este último trabajo se ha hecho una excelente discusión sobre el tema.

En general el procedimiento de cálculo es el siguiente (ver Gupta y Kumar (9)):

(a) Se supone un paso de tiempo  $\Delta t^k$  arbitrario y se calcula el valor de  $r$  correspondiente.

(b) Se aproxima la ecuación diferencial (1) por un esquema implícito como el representado por la ecuación (11). La condición de borde izquierdo se aproxima por diferencias finitas de primer orden. En el borde derecho se utiliza solamente la condición de Dirichlet, es decir  $u^{n+1} = 0$ . El sistema algebraico resultante es tridiagonal de la forma

$$\begin{bmatrix} 1+2r & -2r & \cdots & 0 \\ -r & 1+2r & & \\ & & \ddots & \\ 0 & \cdots & -r & 1+2r \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U_1 \\ \vdots \\ U_i \\ \vdots \\ U_j \end{bmatrix}^{n+1} = \begin{bmatrix} U_1^n + 2r\Delta x e^{t_{n+1}} \\ \vdots \\ U_i^n \\ \vdots \\ U_j^n \end{bmatrix} \quad (20)$$

La solución del sistema (20) permite obtener la distribución de temperaturas en el tiempo  $t_{n+1}$

(c) Para obtener un nuevo valor mejorado de  $\Delta t^k$  y de  $r$  se recurre a la condición de borde derecho (que no había sido satisfecha por la ecuación (20))

$$\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)_{j+1}^{n+1} = -\left(\frac{dx}{dt}\right)_{j+1}^{n+1}$$

que se aproxima por un esquema de diferencias finitas descendido

$$\frac{U_{j+1}^{n+1} - U_j^n}{\Delta x} = -\frac{\Delta x}{\Delta t} \quad (21)$$

y teniendo en cuenta que  $U_{j+1}^{n+1} = 0$  nos queda el nuevo valor de  $r$  en función del nuevo valor de  $\Delta t^k$

$$r = \frac{\Delta t^k}{\Delta x^2} = \frac{1}{U_j^{n+1}} \quad (22)$$

(d) Con el nuevo valor de  $r$  se vuelve a resolver el sistema (20), obteniéndose una nueva distribución de temperaturas. El proceso iterativo continúa hasta que dos valores sucesivos de  $\Delta t^k$  difieran en un valor que se encuentre dentro de la precisión requerida.

El método de malla variable recientemente descripto fue utilizado por Gupta y Kumar (9) para la resolución de un problema de Stefan similar al descripto en este trabajo. Los resultados numéricos obtenidos en dicho trabajo son satisfactorios y demuestran la bondad del método.

En el presente trabajo se hace un estudio numérico detallado del método descripto y se proponen las siguientes modificaciones que aceleran el proceso de convergencia:

(a) Utilización de una aproximación de segundo orden en el cálculo de la condición de borde derecho es decir

$$\frac{u_{j-1}^{n+1} - 4u_j^{n+1}}{2\Delta x} = -\frac{\Delta x}{\Delta t} \quad (23)$$

en vez de la expresión (21) cuando se cumple que

$$u_{j-1}^{n+1} < 2u_j^{n+1} \quad (24)$$

Esto es debido a que si se cumple la condición dada por la desigualdad (24), los valores obtenidos en la ecuación (23) son más exactos.

(b) Utilización de una ponderación o iteración compuesta para el cálculo del nuevo paso de tiempo, de la forma

$$\Delta t^{k+1} = \alpha \Delta t^{k+1} + (1 - \alpha) \Delta t^k \quad (25)$$

donde  $0 < \alpha < 1$  es un coeficiente de ponderación o relajación;

(c) La utilización como valor inicial para el cálculo de  $\Delta t^k$ , de la aproximación lineal de la ecuación (19) que, para este método, se transforma en

$$\Delta t^0 = \Delta x/M \quad (26)$$

Como veremos en la discusión de los resultados, la introducción de las modificaciones mencionadas mejora apreciablemente el método de malla variable descripto con anterioridad.

#### DISCUSION DE LOS METODOS DE MALLA FIJA Y VARIABLE

El método de malla fija explícito con diferencias descentradas locales (en el nodo  $j$ ) tiene el inconveniente de ser muy restringido por problemas de estabilidad numérica. Se puede mejorar la estabilidad utilizando localmente un esquema implícito e interpolación. De todos modos, en el caso de tener un problema parabólico con coeficientes variables, el método explícito es desaconsejable dado que dicho coeficiente juega el mismo papel que  $r$ .

El método de malla fija implícito es mucho más estable (incondicionalmente estable para ecuaciones parabólicas lineales), pero requiere un mayor número de operaciones por nodo que el método explícito, ya que para cada paso de tiempo hay que invertir un sistema tridiagonal. Si bien el paso de tiempo no está restringido por problemas de estabilidad, lo está por problemas de precisión. Esto se debe a la manera como se calcula el alcance de la interfase en el nuevo paso de tiempo.

En el método de malla variable, necesariamente se debe utilizar esquemas de diferencias finitas implícitos por problemas de estabilidad. Asimismo se requiere una iteración interna para el cálculo del paso temporal correcto, para cada paso de tiempo. Tiene el inconveniente de que una mayor densificación del paso espacial implica igual densificación del paso temporal.

La comparación entre los métodos de malla fija y variable depende del problema a resolver y en última instancia sólo la experimentación numérica de ambos métodos sobre un mismo problema determina la ventaja de uno sobre otro.

#### 4. RESULTADOS NUMERICOS

En esta sección se presenta la solución numérica del problema de Stefan descrito por la ecuación (1) - (2) obtenida mediante el método de malla variable presentada en la sección anterior.

Se utilizó una computadora IBM/370 - 158 del Centro de Cálculo Científico de la CNEA, lenguaje Fortran y precisión simple.

En la tabla I se presentan los valores numéricos de la trayectoria de la interfase en el plano  $x - t$ , para diferentes tamaños de malla espacial junto con los tiempos de CPU utilizados. En esta serie de experimentos se utilizó una aproximación lineal para el cálculo de la derivada en la interfase y una precisión de  $10^{-5}$  en el cálculo del paso temporal. Se puede observar que a medida que se afina la malla los valores de la interfase se aproximan al valor teórico ( $x = t$ ).

En la tabla II se presenta la misma serie de experimentos pero utilizando una aproximación de segundo orden para el cálculo de la derivada en la interfase. Comparando ambas tablas se puede ver claramente la ventaja de utilizar una aproximación de segundo orden. Como ilustración de lo anterior en la figura 11 se presenta el gráfico de la solución numérica con interpolación lineal y parabólica para la derivada en la interfase y su comparación con la solución teórica.

TABLA I

VALORES NUMERICOS DE LA COORDENADA TEMPORAL DE  
LA TRAYECTORIA (APROXIMACION LINEAL DE  
LA DERIVADA EN LA INTERFASE)

| X                                 | $\Delta x=0.1$ | $\Delta x=0.05$ | $\Delta x=0.02$ | $\Delta x=0.01$ |
|-----------------------------------|----------------|-----------------|-----------------|-----------------|
|                                   | T I E M P O    |                 |                 |                 |
| 0.1                               | 0.1000         | 0.1000          | 0.1000          | 0.1000          |
| 0.3                               | 0.2955         | 0.2955          | 0.2978          | 0.2989          |
| 0.5                               | 0.48722        | 0.4917          | 0.4962          | 0.4982          |
| 0.7                               | 0.67960        | 0.6879          | 0.6948          | 0.6976          |
| 0.9                               | 0.87247        | 0.8844          | 0.8935          | 0.8970          |
| 1                                 | 0.96904        | 0.9827          | 0.9928          | 0.9967          |
| Tiempo<br>Ejecución<br>(Segundos) | 0.028          | 0.085           | 0.437           | 1.196           |

TABLA II

VALORES NUMERICOS DE LA COORDENADA TEMPORAL DE LA TRAYECTORIA (APROXIMACION PARABOLICA DE LA DERIVADA EN LA INTERFASE)

| X                           | $\Delta x=0.1$ | $\Delta x=0.05$ | $\Delta x=0.02$ | $\Delta x=0.01$ |
|-----------------------------|----------------|-----------------|-----------------|-----------------|
|                             | T I E M P O    |                 |                 |                 |
| 0.1                         | 0.1000         | 0.1000          | 0.1000          | 0.1000          |
| 0.3                         | 0.2994         | 0.2994          | 0.2998          | 0.3000          |
| 0.5                         | 0.4976         | 0.4984          | 0.4994          | 0.4998          |
| 0.7                         | 0.6951         | 0.6971          | 0.6989          | 0.6998          |
| 0.9                         | 0.8923         | 0.8956          | 0.8983          | 0.8998          |
| 1                           | 0.9907         | 0.9948          | 0.9980          | 0.9998          |
| Tiempo Ejecución (Segundos) | 0.021          | 0.086           | 0.426           | 1.266           |

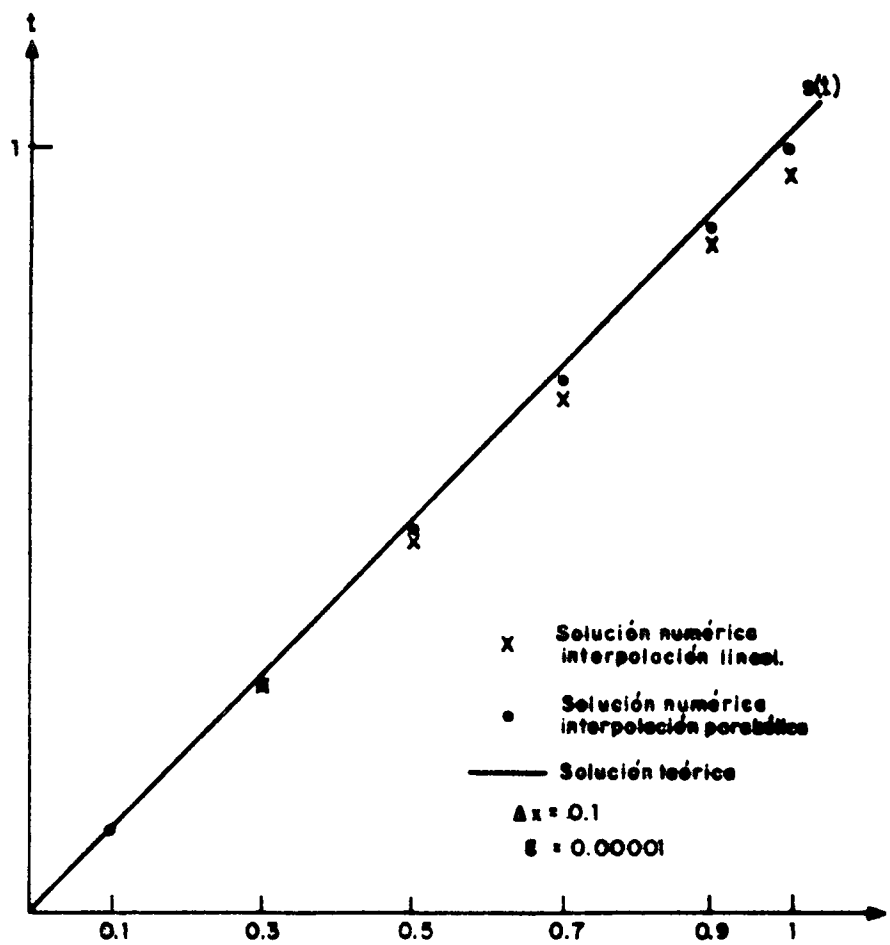


FIG. 11- INFLUENCIA DE LA APROXIMACION LINEAL Y PARABOLICA EN LA TRAYECTORIA DE LA INTERFASE

En la figura 12 se muestra el comportamiento del error tomado como la máxima deferencia entre los valores de la solución teórica y numérica de la temperatura, para valores crecientes del tiempo. Se observa que naturalmente el error absoluto crece con el tiempo dado el carácter sistemático de los mismos. No obstante ello no se sobrepasa el 3% para la malla elegida que es evidentemente muy gruesa.

En la figura 13 se presenta el error máximo (definido en el párrafo anterior) en función del tamaño de malla. Se puede observar el comportamiento asintótico del error, lo que prueba empíricamente la convergencia del método utilizado.

En la figura 14 se presenta un ejemplo de la influencia de la ponderación, o iteración compuesta, sobre el número de iteraciones necesario para obtener el paso temporal  $\Delta t^k$  con una precisión predeterminada. Se observa que el valor óptimo del parámetro de ponderación  $\alpha$  es de aproximadamente 0,7 y que para este valor el número de iteraciones se reduce notablemente.

En la figura 15 se presenta la distribución de temperaturas cuando la interfase ha alcanzado el punto de coordenadas (1,1) de espacio y tiempo, respectivamente.

Finalmente en la tabla III se presentan los resultados obtenidos por Furzeland (5) en la resolución de la ecuación (1) - (2) utilizando una transformación de coordenadas y un método implícito de diferencias finitas. Las cuatro series de valores corresponden a diferentes modos de aproximar la ecuación diferencial y la pendiente de la interfase ( $\theta = 1$  corresponde al esquema implícito representado por la ecuación (11)).

TABLA III  
POSICION DE LA INTERFASE (RESULTADOS  
OBTENIDOS POR FURZELAND (5))

| tiempo                                                      | MALLA ESPACIAL CON 101 NODOS, $\Delta t=0.02$ |               |          |              |
|-------------------------------------------------------------|-----------------------------------------------|---------------|----------|--------------|
|                                                             | APROXIMACIONES PARA LA INTERFASE, $\theta=1$  |               |          | $\theta=1/2$ |
|                                                             | 2 puntos                                      | pto. ficticio | 3 puntos | 3 puntos     |
| 0.1                                                         | 0.1000                                        | 0.1000        | 0.10000  | 0.1003       |
| 0.2                                                         | 0.2002                                        | 0.2001        | 0.2001   | 0.2003       |
| 0.5                                                         | 0.5007                                        | 0.5003        | 0.5003   | 0.5003       |
| 0.9                                                         | 0.9019                                        | 0.9006        | 0.9006   | 0.9003       |
| 1.0                                                         | 1.0022                                        | 1.0008        | 1.0007   | 1.0003       |
| Tiempo de ejecución<br>(FORTRAN,<br>ICL 1706A,<br>Segundos) | 2                                             | 2             | 2        | 2            |

De la comparación de los resultados surge que el método propuesto en este trabajo es más preciso y aparentemente utiliza un menor tiempo de cómputo.

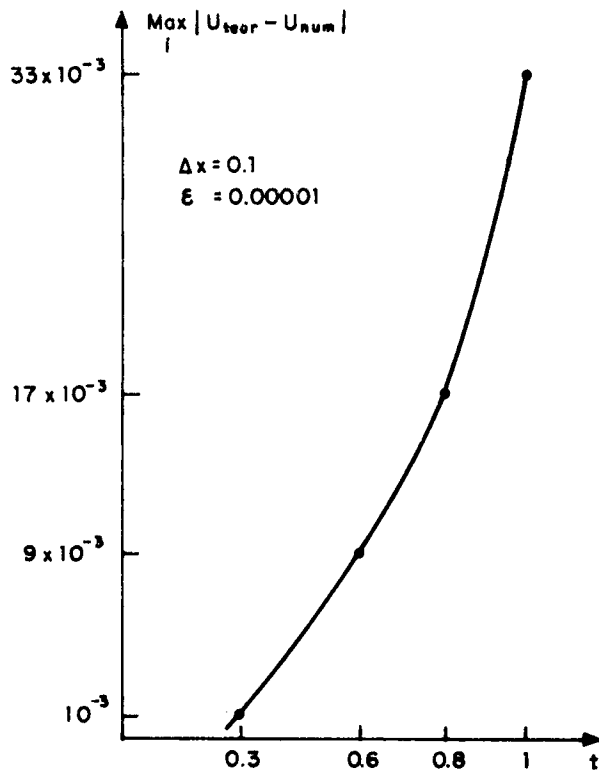


FIG.12 - CURVA DEL ERROR MAXIMO EN FUNCION DELTIEMPO

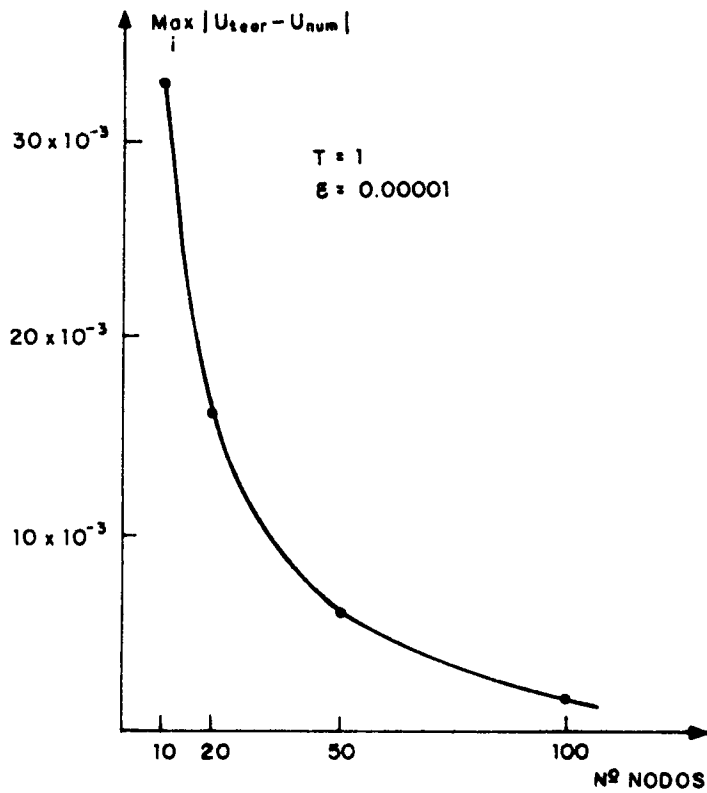


FIG.13 - ESTUDIO NUMERICO DE LA CONVERGENCIA

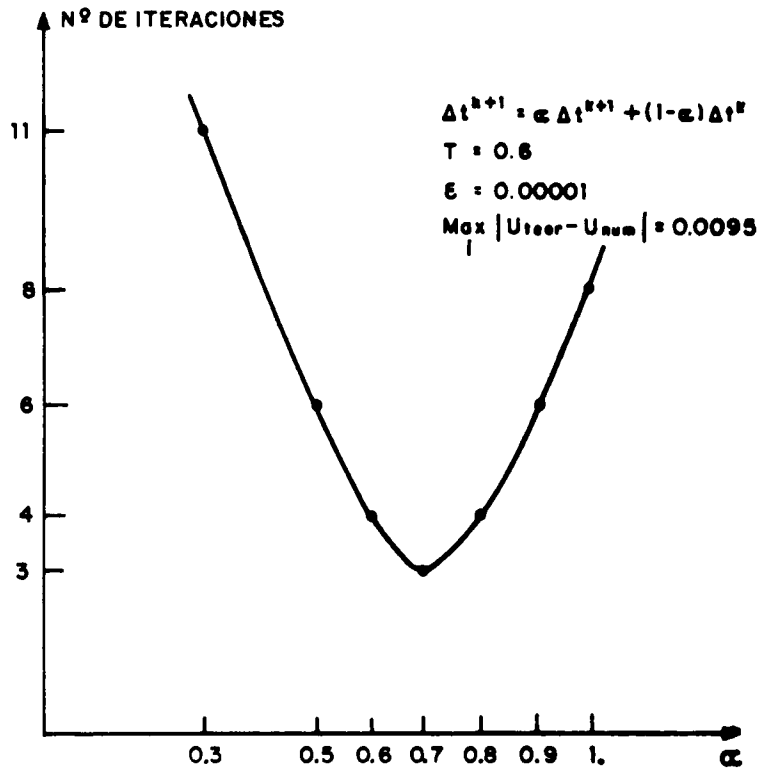


FIG.14- INFLUENCIA DEL PARAMETRO  $\alpha$  DE PONDERACION SOBRE EL NUMERO DE ITERACIONES

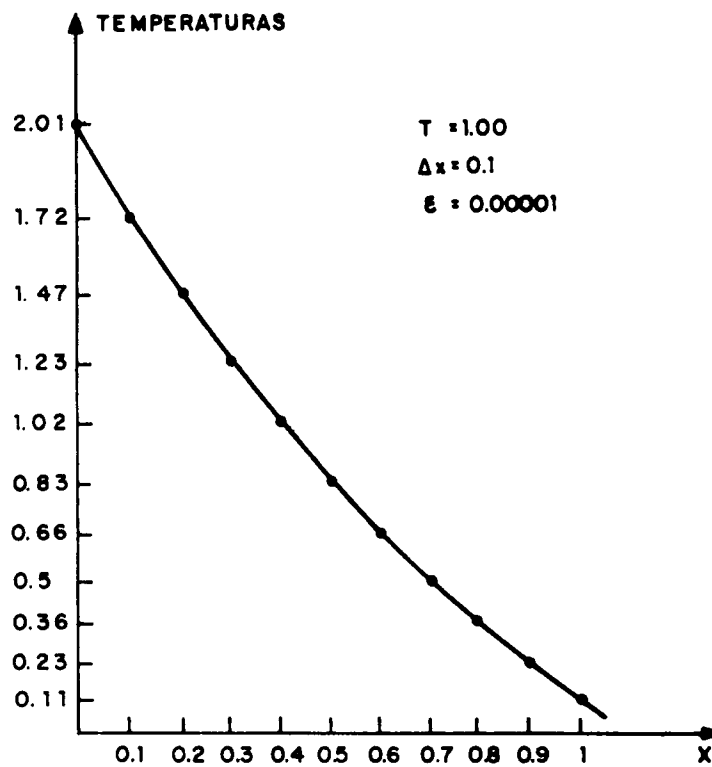
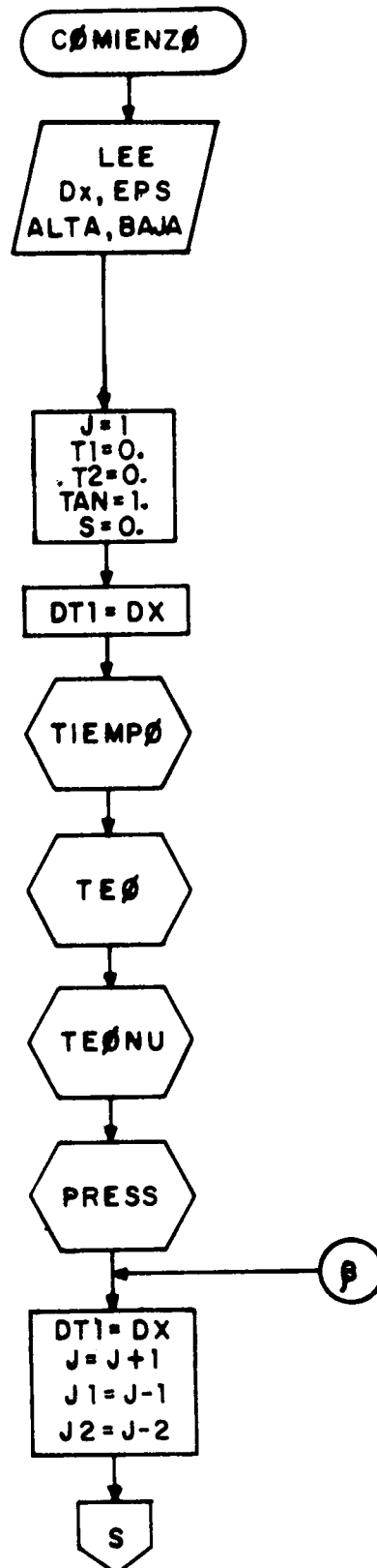


FIG.15- DISTRIBUCION DE TEMPERATURAS

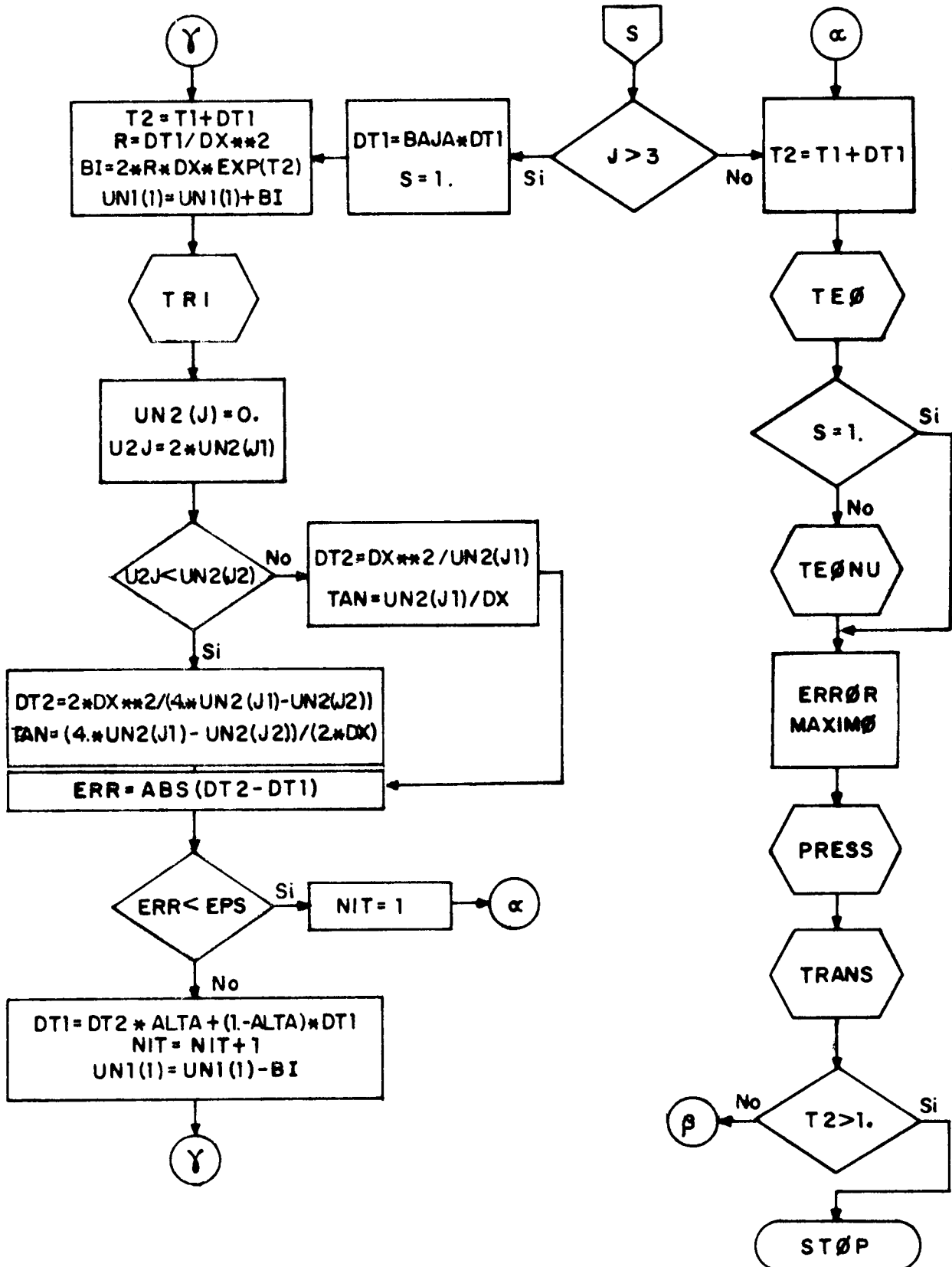
### CONCLUSIONES

Se ha presentado un estudio de los métodos de tratamiento numérico de una interfase móvil a través del análisis de un problema de Stefan unidimensional. Se estudiaron los métodos de malla fija y variable y se discutieron sus ventajas e inconvenientes. Se ha propuesto un nuevo método basado en la modificación de un método de malla variable. Las modificaciones introducidas consisten en la utilización de una aproximación de orden superior para el cálculo de la pendiente de la interfase, de una iteración ponderada o iteración compuesta para el cálculo del paso temporal y de la utilización como valor inicial en el cálculo iterativo del paso temporal, de una aproximación lineal basada en los métodos de malla fija. El efecto combinado de las modificaciones enunciadas, da como resultado un cálculo más preciso y económico como lo demuestran los ensayos numéricos presentados.

# DIAGRAMA DE FLUJO DEL PROBLEMA DE STEFAN



# DIAGRAMA DE FLUJO DEL PROBLEMA DE STEFAN CONTINUACION



C... RESOLUCION DE UN PROBLEMA STEFFAN  
 C... DT1,DT2 SON INCREMENTOS DE TIEMPO  
 C... T1 Y T2 TIEMPO ANTERIOR Y TIEMPO ACTUAL  
 C... DX INTERVALO ESPACIAL  
 C... NIT DA EL NUMERO DE ITERACIONES PARA EL DT  
 C... ALTA SE EMPLEA EN LA PONDERACION DE DT1 Y DT2  
 C... BAJA ES COEFICIENTE DE DT1

C  
 NIT=3  
 DIMENSION UN2(11),UT(110),UN1(110),A(110),B(110),C(110),  
 LW(110),D(110)  
 T2=0.  
 T1=0.  
 S=0.

C  
 C... ENTRADA DE DATOS DX, EPS, ALTA, BAJA

C  
 READ(5,305) DX, EPS, ALTA, BAJA  
 305 FORMAT(4F10.5)  
 EU=0.  
 J=1  
 T=0.  
 P=1.  
 X=0.  
 R=0.  
 TAN=1.  
 DT1=DX/2.  
 WRITE(6,300)  
 300 FORMAT(1X,'CONDICIONES INICIALES DEL PROBLEMA',//)  
 WRITE(6,2) DX,X,T,ALTA,BAJA  
 2 FORMAT(2X,'DX',F10.5,5X,'X INICIAL',F8.5,5X,'/,1X,'T INICIAL',F8.5,  
 15X,'ALTA',F10.5,5X,'BAJA',F10.5,//)  
 WRITE(6,303) EPS  
 303 FORMAT(10X,'EPS PRECISION TIEMPO',F10.5,//)  
 WRITE(6,301)  
 301 FORMAT(1X,6X,'TIEMPO',11X,'ERROR MAXIMO',20X,'VALORES APROXIMADOS  
 1',//)  
 CALL TIM (ITIM)  
 TC=ITIM/1.E6  
 CALL TEC(J,DX,T2,UT)

C  
 C... SE CALCULA SOLUCION NUMERICA=TEORICA

C  
 CALL TEONU (J,UT,UN2)  
 C  
 C... IMPRESION DE LA SOLUCION NUMERICA Y TEORICA  
 C  
 CALL PRESS(T2,J,EU,UN2,R,TAN,DT2)  
 5 CONTINUE  
 DT1=DX  
 J=J+1  
 J1=J-1  
 J2=J-2  
 IF (J.GT.3) GO TO 150

C... RAMA SOLUCION ANALITICA

C  
 192 T2=T1+DT1  
 CALL TEC(J,DX,T2,UT)  
 IF(S.EQ.1.) GO TO 50  
 CALL TEONU(J,UT,UN2)  
 GO TO 50  
 15 S=1.  
 DT1=BAJA\*DT1  
 15 CONTINUE  
 T2= T1+DT1  
 R=DT1/DX\*\*2  
 B1=2.\*R\*DX\*EXP(T2)  
 UN1(1)=UN1(1)+B1  
 C  
 C... SE HA CORREGIDO LA PRIMER COMPONENTE DE UN1 CON LA CONDICION  
 C... DE BORDE IZQUIERDO  
 C  
 CALL TRI(J1,R,UN1,UN2,R,DX)  
 UN2(J)=0.  
 U2J=2.\*UN2(J1)  
 IF(U2J.LT.UN2(J2)) GO TO 290  
 290 DT2=DX\*\*2/UN2(J1)  
 TAN=UN2(J1)/DX  
 C  
 GO TO 37  
 29 DT2=2.\*DX\*\*2/(4.\*UN2(J1)-UN2(J2))  
 TAN=(4.\*UN2(J1)-UN2(J2))/(2.\*DX)  
 37 FRP=ABS(DT2-DT1)

```

      UN1(1)=UN1(1)-BI
      GO TO 15
20  WRITE(6,421) NIT
421  FORMAT(1X,'NUMERO DE ITERACIONES',14,/)
      NIT=1
      GO TO 192
50  EU=ABS(UN2(1)-UT(1))
      DO 30 I=2,J
      EU1=ABS(UN2(I)-UT(I))
      IF (EU.LT.EU1) EU=EU1
30  CONTINUE
      CALL PRESS(T2,J,EU,UN2,R,TAN,DT1)
C
C... FIN DEL CICLO TEMPORAL
C
      CALL TRANS(J,UN1,UN2,T2,T1)
      WRITE(6,302)
302  FORMAT(1X,25('.....'))
      IF (T2.GT.1.) GO TO 2000
      GO TO 5
2000 CALL TIM(TIEM)
      TF=TIEM/I.E6-TF
      WRITE(6,171) TF
171  FORMAT(1X,'TIEMPO TOTAL DE CPU =',F10.7,' SEG ')

```

FILE: STEFAN FORTRAN A CNEA - CMS - REL 6 PLC.06

```

      STOP
      END
      SUBROUTINE TEONU (J,UT,D)
C
C... DISPONE EL ULTIMO PERFIL CALCULADO TEORICAMENTE COMO PRIMER VECTOR
C... SOLUCION NUMERICA
C
      DIMENSION D(110),UT(110)
      DO 1 I=1,J
      D(I)=UT(I)
1  CONTINUE
      RETURN
      END
      SUBROUTINE TEO(J,DX,TIEM,UT)
C
C... CALCULA VECTOR SOLUCION VALIENDOSE DE LA SOLUCION ANALITICA CONOCIDA
C
      DIMENSION UT(110)
      X=0.
      DO 10 I=1,J
      X=(I-1)*DX
      UT(I)=EXP(TIEM-X)-1.
10  CONTINUE
      RETURN
      END
      SUBROUTINE TRI (L,R,D,UN2,P,DX)
C
C... RESUELVE UN SISTEMA ALGEBRAICO TRIDIAGONAL
C
      DIMENSION A(110),B(110),C(110),D(110),UN2(110),BETA(110),W(110),
      LGAMA(110)
      DO 7 I=1,L
      A(I)=-R
      B(I)=1.+2.*R
      C(I)=-R
7  CONTINUE
      A(L)=-2.*R/(1.+P)
      B(L)=1.+2.*R/P
      C(L)=-2.*R
      BETA(1)=B(1)
      LI=L-1
      DO 3 I=1,LI
      W(I)=C(I)/BETA(I)
      K=I+1
      BETA(K)=B(K)-A(K)*W(K-1)
1  CONTINUE
      GAMA(1)=D(1)/BETA(1)
      DO 3 I=2,L
      GAMA(I)=(D(I)-A(I)*GAMA(I-1))/BETA(I)
3  CONTINUE
      UN2(L)=GAMA(L)
      DO 4 I=1,LI
      M=I+1
      UN2(M)=GAMA(M)-W(M)*UN2(M+1)
4  CONTINUE

```

FILE: STEFAN    FORTRAN    A    CNEA - CMS - REL 6 PLC 26

```
      RETURN
      END
      SUBROUTINE PRESS(T,N,E,V,R,TAN,DT2)
C
C... IMPRIME R=DT1/DX**2, TANGENTE, INCREMENTO DE TIEMPO, TIEMPO ACTUAL,
C... MAXIMO ERROR EN ESE TIEMPO Y VECTOR SOLUCION
C
      DIMENSION V(110)
      WRITE(6,2) R,TAN,DT2
2     FORMAT(1X,'R',F16.5,10X,'TAN',F16.5,20X,'DT2',F16.5)
      WRITE(6,1) (T,E,(V(I),I=1,N))
1     FORMAT(7,1X,7F16.5,/, (49X,5F16.5,/))
      RETURN
      END
      SUBROUTINE TRANS(J,D,UN2,T2,T1)
C
C... EL VECTOR SOLUCION ACTUAL PASA A SER VECTOR SOLUCION ANTERIOR
C
      DIMENSION D(110),UN2(110)
      DO 1 I=1,J
      D(I)=UN2(I)
1     CONTINUE
      T1=T2
      RETURN
      END
```

REFERENCIAS

- (1). H.S. CARSLAW and J.C. JAEGER, Conduction of heat in solids, 2nd ed., Oxford University Press, London 1959.
- (2). J. CRANK, The Mathematics of diffusion, 2nd ed. Oxford University Press, London 1975.
- (3). J. CRANK, How to deal with moving boundaries in thermal problems, Proc. First International Conference in Numerical Methods in Thermal Problems, University of Swansea, England, 1979.
- (4). J. DOUGLAS and T.M. GALLIE, On the numerical integration of a parabolic differential equation subject to a moving boundary condition, Duke Math. J. 22, 1955 557-570.
- (5). R.M. FURZELAND, A comparative study of Numerical Methods for moving boundary problems, Internal Report, Oxford University, Computing Laboratory, 1980.
- (6). E.A. GARCIA, Difusión de un componente en un medio semi-infinito conteniendo una interfase móvil, I, a temperatura constante, CNEA - NT 25/78, Comisión Nacional de Energía Atómica, Argentina, 1978.
- (7). J.S. GOODLING and M.S. KHADER, One dimensional inward solidification with a convective boundary condition, APS Cast Metals Res. J. (Mar. 1974) 26-29.
- (8). R.S. GUPTA, Some numerical and integral methods for solving moving boundary problems in heat flow and diffusion, Ph. D. Thesis, Brunel University, Uxbridge, U.K. (1979).
- (9). R.S. GUPTA and D. KUMAR, A modified variable time step method for the one - dimensional Stefan problem, Comp. Meth. Appl. Mech, Engng. 6 23, 101 - 109, 1980.
- (10). K.H. HOFFMAN, 1977 FREIE UNIVERSITAT (BERLIN) Fachbereich Mathematik, vol I - III.
- (11). R.D. RICHTMYER and K.W. MORTON, Finite difference methods for initial value problems, Interscience, 1967.



C... RESOLUCION DE UN PROBLEMA STEFAN  
 C... DT1,DT2 SON INCREMENTOS DE TIEMPO  
 C... T1 Y T2 TIEMPO ANTERIOR Y TIEMPO ACTUAL  
 C... DX INTERVALO ESPACIAL  
 C... NIT DA EL NUMERO DE ITERACIONES PARA EL DT  
 C... ALTA SE EMPLEA EN LA PONDERACION DE DT1 Y DT2  
 C... BAJA ES COEFICIENTE DE DT1

C  
 NIT=0  
 DIMENSION UN2(110),UT(110),UN1(110),A(110),B(110),C(110),  
 1W(110),D(110)  
 T2=0.  
 T1=0.  
 S=0.

C  
 C... ENTRADA DE DATOS DX, EPS, ALTA, BAJA

C  
 READ(5,305) DX, EPS, ALTA, BAJA  
 305 FORMAT(4F10.5)  
 EU=1.

J=1  
 T=0.  
 P=1.  
 X=0.

R=0.

TAN=1.

DT1=DX/2.

WRITE(6,300)

300 FORMAT(1X,'CONDICIONES INICIALES DEL PROBLEMA',//)

WRITE(6,2) DX,X,T,ALTA,BAJA

2 FORMAT(2X,'DX',F10.5,5X,'X INICIAL',F8.5,5X,'/',1X,'T INICIAL',F8.5,

15X,'ALTA',F10.5,5X,'BAJA',F10.5,//)

WRITE(6,303) EPS

303 FORMAT(10X,'EPS PRECISION TIEMPO',F10.5,//)

WRITE(6,301)

301 FORMAT(1X,6X,'TIEMPO',11X,'ERROR MAXIMO',20X,'VALORES APROXIMADOS  
 1',//)

CALL TIM (ITIM)

TC=ITIM/1.E6

CALL TEO(J,DX,T2,UT)

C  
 C... SE CALCULA SOLUCION NUMERICA=TEORICA

C  
 CALL TEONU (J,UT,UN2)

C  
 C... IMPRESION DE LA SOLUCION NUMERICA Y TEORICA

C  
 CALL PRESS(T2,J,EU,UN2,R,TAN,DT2)

CONTINUE

DT1=DX

J=J+1

J1=J-1

J2=J-2

IF (J.GT.3) GO TO 150

C

FILE: STEFAN FORTRAN A CNEA - CMS - REL 6 PLC 06

C... RAMA SOLUCION ANALITICA

C

192 T2=T1+DT1

CALL TEO(J,DX,T2,UT)

IF(S.EQ.1.) GO TO 50

CALL TEONU(J,UT,UN2)

GO TO 50

150 S=1.

DT1=BAJA\*DT1

15 CONTINUE

T2= T1+DT1

R=DT1/DX\*\*2

B(=2.\*R\*DX\*EXP(T2)

UN1(1)=UN1(1)+B(1

C

C... SE HA CORREGIDO LA PRIMER COMPONENTE DE UN1 CON LA CONDICION

C... DE BORDE IZQUIERDO

C

CALL TRI(J1,R,UN1,UN2,P,DX)

UN2(J)=0.

U2J=2.\*UN2(J1)

IF(U2J.LT.UN2(J2)) GO TO 200

DT2=DX\*\*2/UN2(J1)

TAN=UN2(J1)/DX

GO TO 37

29 DT2=2.\*DX\*\*2/(4.\*UN2(J1)-UN2(J2))

TAN=(4.\*UN2(J1)-UN2(J2))/(2.\*DX)

37 FRD=ABS(DT2-DT1)

```

      UN1(1)=UN1(1)-BI
      GO TO 15
20  WRITE(6,421) NIT
421  FORMAT(1X,'NUMERO DE ITERACIONES',I4,/)
      NIT=1
      GO TO 192
50  EU=ABS(UN2(1)-UT(1))
      DO 30 I=2,J
      EU1=ABS(UN2(I)-UT(I))
      IF (EU.LT.EU1) EU=EU1
30  CONTINUE
      CALL PRESS(T2,J,EU,UN2,R,TAN,DT1)
C
C... FIN DEL CICLO TEMPORAL
C
      CALL TRANS(J,UN1,UN2,T2,T1)
      WRITE(6,302)
302  FORMAT(1X,25('.....'))
      IF (T2.GT.1.)GO TO 2000
      GO TO 5
2000 CALL TIM(TIEM)
      TF=TIEM/I.E6-T1
      WRITE(6,171) TF
171  FORMAT(1X,'TIEMPO TOTAL DE CPU =',F10.7,' SEG ')

```

FILE: STEFAN    FORTRAN    A    CNEA - CMS - REL 6 PLC-06

```

      STOP
      END
      SUBROUTINE TEONU (J,UT,D)
C
C...DISPONE EL ULTIMO PERFIL CALCULADO TEORICAMENTE COMO PRIMER VECTOR
C...SOLUCION NUMERICA
C
      DIMENSION D(110),UT(110)
      DO 1 I=1,J
      D(I)=UT(I)
1  CONTINUE
      RETURN
      END
      SUBROUTINE TEO(J,DX,TIEM,UT)
C
C...CALCULA VECTOR SOLUCION VALIENDOSE DE LA SOLUCION ANALITICA CONOCIDA
C
      DIMENSION UT(110)
      X=0.
      DO 10 I=1,J
      X=(I-1)*DX
      UT(I)=EXP(TIEM-X)-1.
10  CONTINUE
      RETURN
      END
      SUBROUTINE TRI (L,R,D,UN2,P,DX)
C
C...RESUELVE UN SISTEMA ALGEBRAICO TRIDIAGONAL
C
      DIMENSION A(110),B(110),C(110),D(110),UN2(110),BETA(110),W(110),
      IGAMA(110)
      DO 7 I=1,L
      A(I)=-R
      B(I)=1.+2.*R
      C(I)=-R
7  CONTINUE
      A(L)=-2.*R/(1.+P)
      B(L)=1.+2.*R/P
      C(L)=-2.*R
      BETA(1)=B(1)
      L1=L-1
      DO 1 I=1,L1
      W(I)=C(I)/BETA(I)
      K=I+1
      BETA(K)=B(K)-A(K)*W(K-1)
1  CONTINUE
      GAMA(1)=D(1)/BETA(1)
      DO 3 I=2,L
      GAMA(I)=(D(I)-A(I)*GAMA(I-1))/BETA(I)
3  CONTINUE
      UN2(L)=GAMA(L)
      DO 4 I=1,L1
      M=I+1
      UN2(M)=GAMA(M)-W(M)*UN2(M+1)
4  CONTINUE

```

```

      RETURN
      END
      SUBROUTINE PRESS(T,N,E,V,R,TAN,DT2)
C
C... IMPRIME R=DT1/DX**2, TANGENTE, INCREMENTO DE TIEMPO, TIEMPO ACTUAL,
C... MAXIMO ERROR EN ESE TIEMPO Y VECTOR SOLUCION
C
      DIMENSION V(110)
      WRITE(6,2) R,TAN,DT2
2     FORMAT(1X,'R',F16.5,10X,'TAN',F16.5,20X,'DT2',F16.5)
      WRITE(6,1) (T,E,(V(I),I=1,N))
1     FORMAT(7,1X,7F16.5,/, (49X,5F16.5,/))
      RETURN
      END
      SUBROUTINE TRANS(J,D,UN2,T2,T1)
C
C... EL VECTOR SOLUCION ACTUAL PASA A SER VECTOR SOLUCION ANTERIOR
C
      DIMENSION D(11,:),UN2(110)
      DO 1 I=1,J
      D(I)=UN2(I)
1     CONTINUE
      T1=T2
      RETURN
      END

```