

1	1969
---	------

01.69.11 COR

01.67.

CONTRIBUCION AL ESTUDIO DEL

PROBLEMA INVERSO DE LA TEORIA DE COLISIONES,

PARA PARTICULAS DE DIRAC

TESIS

OSCAR D. CORBELLA

JUNIO 1969

INSTITUTO DE FISICA "DR. BALSEIRO"

UNIVERSIDAD NACIONAL DE CUYO

Indice

Introducción	1
1. - La ecuación de Dirac	7
2. - Soluciones regular e irregular	13
3. - Soluciones y funciones de Jost	16
4. - Propiedades de analiticidad de las soluciones. Com- portamiento para k grande	19
5. - Construcción explícita de la función de Jost a par- tir de los parámetros de la colisión	26
6. - El método del desarrollo asintótico	29
7. - Determinación de los coeficientes S_n y D_n	38
8. - Cálculo de los potenciales y sus derivadas en el o- rigen	41
9. - Relaciones entre los juegos de datos de la colisión para la partícula y la antipartícula	48
10.- El límite no relativista	52
Conclusiones	61
Apéndice A	64
Apéndice B	66
Referencias	69

INTRODUCCION

El problema inverso de la teoría de colisiones trata acerca de la determinación teórica de la interacción entre las partículas que intervienen en un evento físico, a // partir de los datos experimentales provenientes de dicho. /// evento.

Al comenzar a atacar el problema de colisiones, la física teórica se orientó principalmente hacia la solución / de un caso más sencillo: el problema directo, que parte de u na interacción conocida. Esta forma de proceder encuentra su justificación en el hecho de que los problemas que se trataban con mayor frecuencia eran aquéllos en los que las interacciones eran de tipo electromagnético, esto es, a priori, / conocidas. Pero ésta es una justificación histórica más bien que práctica, puesto que en la física nuclear o en la de par tículas elementales las interacciones son a priori desconoci das y deben deducirse a partir de los datos experimentales. / Además, el problema directo es más fácil y entra dentro del esquema usual, que corresponde a estudiar el modelo teórico y luego comparar con los resultados experimentales.

El estudio del problema inverso - ir de los datos experimentales al modelo - puede ser muy útil considerando / la resolución de casos prácticos, y aún más desde el punto / de vista de asegurar las condiciones de existencia y unicidad. Pero, a causa de la dificultad matemática de su tratamiento, sólo se lo ha podido estudiar en los casos más simples, esto es, en la teoría de potencial: aún así, todavía / se está lejos de su aplicación práctica a problemas reales. De todos modos, es conveniente seguir desarrollando su estudio, dado que es un problema muy interesante desde el punto de vista físico-matemático.

Los primeros intentos para resolver el problema in

verso fueron realizados en 1947 por Frodberg⁽¹⁾. Tanto este autor como Hylleraas⁽²⁾, dieron un desarrollo del potencial usando como datos sólo el desfase en onda S. Posteriormente se vió que este dato era insuficiente para resolver el // problema, y Bargmann⁽³⁾ construyó ejemplos explícitos en los que diferentes potenciales daban lugar a los mismos desfases y niveles discretos de energía; esto demostró que esos / datos no eran suficientes. Levinson⁽⁴⁾ demostró que la pérdi da de univocidad estaba relacionada con la existencia del es nectro discreto, es decir, que el potencial construido era u nívoco si no existían estados ligados. Posteriormente, Mar - chenko⁽⁵⁻⁶⁾ resolvió este problema demostrando que un conjun to de datos suficientes para determinar univocamente el po - tencial lo constituyen los desfases (para un momento angu - lar y en función del momento lineal k), las energías y las correspondientes constantes de normalización de los estados ligados (con el mismo momento angular). También, Borg⁽⁷⁾, Jost y Kohn⁽⁸⁾ y Holmberg⁽⁹⁾ llegaron a conclusiones similares.

Gel'fand y Levitan⁽¹⁰⁾ dieron la primera solución efectiva al problema inverso para partículas que obedezcan / la ecuación de Schrödinger tomando los datos en onda S. Ellos desarrollaron un procedimiento por el cual es posible deter - minar el potencial resolviendo una ecuación integral (ecua - ción de Gel'fand-Levitan), que necesita como dato la función espectral del problema, función que es posible determinar a partir de los datos de la colisión. Marchenko⁽⁶⁾ también pu - do resolver el problema planteando otro tipo de ecuación in - tegral. Posteriormente estos trabajos fueron extendidos para casos de ondas parciales de mayor orden⁽¹¹⁾, obteniéndose re - sultados similares a los anteriores. Regge⁽¹²⁾ y Newton⁽¹³⁾ estudiaron el problema dando otro conjunto de datos inicia - les, en el que reemplazan el desfase para un valor del mo -

mento angular y conocido para todos los valores de la energía, por el desfase para una energía dada y conocido para todos los valores del momento angular. Una extensión del método de Gel'fand-Levitan al caso del problema de varios canales fue tratado por Newton y Jost⁽¹⁴⁾. (*)

Para el caso de la ecuación de Dirac, Prats y // Toll⁽²¹⁾ desarrollaron un método similar al de Gel'fand-Levitan, pudiendo resolver parcialmente el problema, pues no demostraron la existencia del potencial. Para lograr demostrar la existencia y unicidad de la solución, Gasimov y Levitan⁽²²⁾ introdujeron una forma más general de la ecuación de Dirac, con dos tipos de funciones que juegan el papel de dos potenciales independientes entre sí, pudiendo encontrar estos potenciales a partir de los datos de la colisión de la partícula y de la antipartícula.

Todos los métodos mencionados hasta aquí tienen en común la dificultad de que se debe resolver una ecuación integral de tipo Fredholm para poder hallar el potencial. Es / más, en el caso de la ecuación de Dirac esta ecuación es matricial, por lo que debe resolverse un sistema de cuatro ecuaciones integrales acopladas, siendo éste un problema en / la mayoría de los casos difícil y no resoluble explícitamente.

Para tratar de obviar esta dificultad se comenzó a investigar tratando de encontrar otro tipo de resultados que permitieran determinar el potencial, o al menos algunas de /

(*) Para una exposición más detallada de las referencias y / métodos empleados para atacar el problema inverso, se / pueden consultar los siguientes artículos de reseña y libros: Faddeev⁽¹⁵⁾, Newton⁽¹⁶⁻¹⁷⁾, De Alfaro-Regge⁽¹⁸⁾, / Agranovich-Marchenko⁽¹⁹⁾ y Wu-Chmura⁽²⁰⁾.

sus características más interesantes, como una función explícita de los datos experimentales.

El primer resultado de este tipo de enfoque fue dado por Newton⁽²³⁾, y simultáneamente por Faddeev⁽²⁴⁾, quienes encontraron una expresión para el valor del potencial en el origen, como una función integral de los desfases, para la ecuación de Schrödinger. Más adelante, Buslaev y Faddeev⁽²⁵⁾, Percival⁽²⁶⁾ y Roberts⁽²⁷⁾ lograron una expresión para el valor de la segunda derivada del potencial en el origen en función del desfase en onda S. Más recientemente, Calogero y Degasperis⁽²⁸⁾ dedujeron expresiones para el valor del potencial y de todas sus derivadas en el origen, en términos de los datos de la colisión en onda S.^{(*) (**) (30)}

Una de las extensiones lógicas para proseguir con la investigación en el tema, y desde este último punto de vista, era desarrollar el problema con la ecuación de Dirac, cuyo tratamiento efectuamos aquí^(***). Simultáneamente con este trabajo, A. Degasperis⁽³¹⁾ realizó un estudio similar para

(*) En este último trabajo se revisan los diferentes métodos para lograr estos resultados, por lo que nos remitimos a él para toda otra referencia en el caso de la ecuación de Schrödinger.

(**) Siguiendo este tipo de enfoque se logra también determinar límites variacionales para el potencial, en función del desfase en onda S⁽²⁹⁾.

(***) Los principales resultados originales de esta tesis fueron publicados por el autor como nota interna del Instituto de Física de la Universidad de Roma⁽³⁰⁾.

la ecuación de Klein-Gordon.^(*)

Como punto de partida se ha tomado la ecuación de Dirac con dos potenciales y se ha desarrollado un método que permite encontrar relaciones exactas y explícitas que dan // los valores en el origen de estos potenciales y, en principio, de todas sus derivadas, en función de los desfases, / las energías y las constantes de normalización de los estados ligados (datos de la colisión) de la partícula y la antipartícula. Se obtienen resultados para los datos de la colisión en ondas S y P, y se dan fórmulas explícitas para el // cálculo de hasta la tercera derivada. Estas expresiones constituyen los principales resultados de nuestro trabajo. Dado que hemos supuesto que los potenciales son funciones holomorfas (y por lo tanto determinables conociendo sus valores y / los de todas sus derivadas en el origen), de esta manera se puede, en principio, determinarlos en función de los datos / de la colisión, lo que constituye el objetivo final del problema inverso.

De los resultados anteriores se deducen con facilidad expresiones del mismo tipo para el caso de la ecuación / de Dirac usual, esto es, con un solo potencial.

Es interesante destacar que al restringirnos al caso usual, además de obtener los resultados deseados, encontramos relaciones que vinculan entre sí los datos de la colisión. Esto se explica en la siguiente forma: como ha sido demostrado que partiendo de los dos juegos de datos para la // partícula y la antipartícula se producen unívocamente dos po

(*) El problema inverso para partículas que obedezcan la ecuación de Klein-Gordon fue tratado anteriormente en la forma usual por Corinaldesi⁽³²⁾ y Verde⁽³³⁾. Véase además De Alfaro⁽³⁴⁾.

tenciales, cuando nos restringimos a la ecuación de Dirac usual, estos datos son sobreabundantes; luego, deben existir relaciones entre los datos de la partícula y los de la antipartícula, siendo los resultados que aquí se dan un primer ejemplo de ese tipo de relaciones. (Para una explicación más detallada de lo anterior véase la sección de conclusiones).

El método de desarrollo asintótico que seguiremos para llegar a los resultados antes mencionados posee una dificultad intrínseca, que hace que éstos no tengan toda la generalidad posible: se debe pedir la igualdad de las derivadas primeras de los dos potenciales en el origen (en el caso de onda S; para la onda P, que su suma sea igual a cero). Por otro lado, nuestros resultados son más generales que los similares dados en el problema de Schrödinger, pues mientras allí se dan sólo para onda S, nosotros podemos darlos para las ondas parciales S y P. Estos dos hechos están íntimamente relacionados y, como se explicará en las conclusiones, una extensión del método usado aquí nos permitirá dar indicaciones para tratar los problemas de Schrödinger y Dirac para ondas parciales superiores.

1. - La Ecuación de Dirac

Ha sido demostrado utilizando un método similar al dado por Gel'fand y Levitan en el caso no relativista⁽²²⁾, / que partiendo de dos juegos de datos para la partícula y la antipartícula (esto es, los desfasajes para todos los valores del impulso lineal k , los valores de la energía y de / las correspondientes constantes de normalización de los posibles estados ligados, para un momento angular determinado), se pueden construir en forma unívoca dos funciones independientes que juegan el papel de dos potenciales no dependientes de la energía. Estas dos funciones aparecen en la así // llamada "forma canónica" de la ecuación de Dirac, y se ha demostrado que toda otra forma de esta ecuación puede ser llevada a la forma canónica mediante una transformación ortogonal.

Así, sin pérdida de generalidad, nos hemos propuesto estudiar una ecuación de Dirac con dos potenciales esféricamente simétricos, locales e independientes de la energía, uno de los cuales, $V_1(r)$, se transforme como un escalar relativista, mientras el otro, $V_2(r)$, se transforme como la cuarta componente de un cuadrivector.

Esta elección facilita la derivación de los resultados en el caso de la ecuación de Dirac usual, puesto que / simplemente debe hacerse nulo el potencial escalar. Además, se obtienen así en forma inmediata las expresiones que ligam entre sí los datos de la colisión de la partícula con los de la antipartícula.

La ecuación que describe nuestro sistema es^(*)

$$i \frac{\partial}{\partial t} \Psi(\vec{r}, t) = H \Psi(\vec{r}, t) \quad (1.1)$$

(*) El sistema de unidades que utilizamos es tal que $\hbar=c=1$

en la que el hamiltoniano es

$$H = -\vec{\alpha} \cdot \vec{p} - \beta m - \beta V_1(r) + V_2(r) \quad (1.2)$$

donde las α_i y β son las matrices de Dirac, m , la masa de la partícula dispersada y los $V_i(r)$ son potenciales centrales que verifican las condiciones de integrabilidad

$$\int_0^\infty r^n |V_i(r)| dr < \infty \quad ; i = 1, 2 ; n = 0, 1, 2. \quad (1.3)$$

Dado que los potenciales son estáticos, podemos // considerar funciones de onda de la forma

$$\Psi_n(\vec{r}, t) = \Psi_n(r, \theta, \varphi) e^{-iEt} \quad ; n = 1, 2, 3, 4. \quad (1.4)$$

y la ecuación de Dirac independiente del tiempo será

$$H \Psi = E \Psi \quad (1.5)$$

Siguiendo el procedimiento usual (véanse por ejemplo las referencias 35 y 36) para la separación de variables, definimos el operador

$$U = \beta(\vec{\sigma} \cdot \vec{L} + 1) \quad (1.6)$$

Sabemos que este operador conmuta con el hamiltoniano y que en coordenadas polares es

$$\vec{\alpha} \cdot \vec{p} = \alpha_r p_r + i \frac{\alpha_r \beta}{r} U \quad (1.7)$$

donde

$$\alpha_r = \frac{\vec{r} \cdot \vec{\alpha}}{r} \quad (1.7')$$

y

$$p_r = \frac{\vec{r} \cdot \vec{p}}{r} - \frac{i}{r} = -i\left(\frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r}\right) \quad (1.7'')$$

Elijamos una representación en la que H y U sean diagonales. Serán

$$H\psi(r,\theta,\varphi) = E\psi(r,\theta,\varphi) \quad (1.8)$$

$$U\psi(r,\theta,\varphi) = \lambda\psi(r,\theta,\varphi) \quad ; \quad (1.9)$$

entonces α_r y β pueden ser representadas por matrices // hermitianas que satisfagan

$$\alpha_r^2 = \beta^2 = 1 \quad (1.10)$$

$$\alpha_r \beta + \beta \alpha_r = 0 \quad ; \quad (1.10')$$

estas matrices tendrán dos filas y dos columnas y las elegimos de modo que

$$\alpha_r = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} \quad \beta = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \quad (1.11)$$

Definiendo las matrices

$$\rho_1 = -i\alpha_r\beta \quad , \quad \rho_2 = \alpha_r \quad \text{y} \quad \rho_3 = \beta \quad , \quad (1.12)$$

éstas satisfarán

$$\rho_i^2 = 1 \quad i = 1, 2, 3 \quad (1.13)$$

$$\rho_i \rho_j = i \rho_k \quad i, j, k = 1, 2, 3 \text{ (cíclicas)} \quad (1.13')$$

$$\rho_i \rho_j + \rho_j \rho_i = 0 \quad i \neq j \quad (1.13'')$$

las que, con la elección (1.11), serán las usuales matrices de espín de Pauli

$$\rho_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad , \quad \rho_2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} \quad , \quad \rho_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \quad (1.14)$$

Como la parte angular y de espín de la función de onda están fijadas por el requerimiento de que ésta sea auto función de U , la ecuación radial se escribirá

$$\left\{ i \rho_2 \left[\frac{d}{dr} + \frac{1}{r} \right] + \rho_1 \frac{\lambda}{r} + V_2(r) - \rho_3 [m + V_1(r)] \right\} R^\lambda(k, r) = ER^\lambda(k, r) \quad (1.15)$$

o bien, poniendo $R^\lambda(k, r) = r^{-1} \varphi^\lambda(k, r)$

$$\frac{d}{dr} \varphi^\lambda(k, r) = \left\{ \frac{\lambda}{r} \rho_3 - [E - V_2(r)] i \rho_2 + [m + V_1(r)] \rho_1 \right\} \varphi^\lambda(k, r) \quad (1.15')$$

La solución de ésta, dada la estructura de las matrices // (1.14), será un vector de dos componentes

$$\varphi^\lambda(k, r) = \begin{pmatrix} u_1^\lambda(k, r) \\ u_2^\lambda(k, r) \end{pmatrix} \quad (1.16)$$

El autovalor λ del operador U será un número / entero ($\neq 0$) relacionado con el momento angular "orbital" y total en la siguiente forma

$$\text{Momento angular total} = j = |\lambda| - \frac{1}{2} \quad (1.17)$$

$$\text{Momento angular "orbital"} = l = |\lambda| - \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \frac{\lambda}{|\lambda|} ;$$

$$\text{i.e.} \begin{cases} \lambda > 0, & l = \lambda \\ \lambda < 0, & l = |\lambda| - 1 \end{cases} \quad (1.17')$$

Las funciones propias del operador U no serán // tratadas aquí dado que no haremos uso de ellas y de que es - tán tratadas en forma muy completa en un artículo reciente / de M. C. Barthélémy⁽³⁵⁾.

Antes de pasar al estudio de las soluciones de la ecuación radial, nos ocuparemos brevemente de algunas propiedades de simetría de esta ecuación que nos serán útiles en /

el resto del trabajo.

La ecuación (1.15') es invariante bajo las transformaciones

$$\begin{aligned} E &\longrightarrow -E, & V_2(r) &\longrightarrow -V_2(r), & \lambda &\longrightarrow -\lambda, \\ u_1^\lambda(k,r) &\longrightarrow u_2^\lambda(k,r), & u_2^\lambda(k,r) &\longrightarrow u_1^\lambda(k,r) \end{aligned} \quad (1.18)$$

y

$$\begin{aligned} m &\longrightarrow -m, & V_1(r) &\longrightarrow -V_1(r), & \lambda &\longrightarrow -\lambda, \\ u_1^\lambda(k,r) &\longrightarrow -u_2^\lambda(k,r), & u_2^\lambda(k,r) &\longrightarrow u_1^\lambda(k,r) \end{aligned} \quad (1.19)$$

Entonces, si se conocen los resultados para λ positivo, por medio de las transformaciones

$$E \longrightarrow -E, \quad V_2(r) \longrightarrow -V_2(r), \quad u_1^\lambda(k,r) \longrightarrow u_2^\lambda(k,r), \quad u_2^\lambda(k,r) \longrightarrow u_1^\lambda(k,r) \quad (1.20)$$

o

$$m \longrightarrow -m, \quad V_1(r) \longrightarrow -V_1(r), \quad u_1^\lambda(k,r) \longrightarrow -u_2^\lambda(k,r), \quad u_2^\lambda(k,r) \longrightarrow u_1^\lambda(k,r) \quad (1.21)$$

podemos encontrar los resultados para el correspondiente λ negativo. Por consiguiente, trabajaremos en lo que sigue sólo para λ positivo, salvo explícita indicación en contrario.

Debe notarse además que la transformación (1.21) / consiste en una multiplicación de la función de onda por la matriz $i\rho_2$; y dado que esa matriz no es igual a su inversa no podemos aplicarla dos veces para obtener el mismo resultado. Además, con la transformación obtenida multiplicando por $-i\rho_2$, esto es

$$m \longrightarrow -m, \quad V_1(r) \longrightarrow -V_1(r), \quad u_1^\lambda(k,r) \longrightarrow u_2^\lambda(k,r), \quad u_2^\lambda(k,r) \longrightarrow -u_1^\lambda(k,r) \quad (1.21')$$

también se pueden obtener los resultados para λ de signo /

contrario. Por supuesto, mediante la aplicación sucesiva de (1.21) y (1.21') se obtiene el mismo resultado. Entonces, adoptamos por convención usar la transformación (1.21) para / pasar de los resultados con λ positivo a los correspondientes con λ negativo, y usar la (1.21') para ir de λ negativo al correspondiente λ positivo.

Como se verá más adelante, algunas de las soluciones de la ecuación (1.15') son funciones bivalentes de la variable compleja k , que toman valores distintos en las dos superficies de Riemann definidas por el $\text{Sig}(\text{Re } E)$, siendo $E = \pm \sqrt{k^2 + m^2}$; por consiguiente, debe distinguirse entre / las dos transformaciones (1.20) y (1.21), pues (1.20) cambia la superficie de Riemann mientras que (1.21) no.

Finalmente queremos remarcar otra precaución que / debe tomarse al aplicar las transformaciones anteriores. Si se las aplica a funciones que no dependen explícitamente de las componentes, debemos buscar sus definiciones para controlar si no varían los signos. Así, por ejemplo, para la función $\Delta(k)$ (véase (3.4) y (3.3)), al aplicar (1.21) obtenemos

$$\Delta(k, E, V_1, V_2, m, -\lambda) = \Delta(k, E, -V_1, V_2, -m, \lambda)$$

mientras que aplicando (1.20) se tiene

$$\Delta(k, E, V_1, V_2, m, -\lambda) = -\Delta(k, -E, V_1, -V_2, m, \lambda).$$

2. - Soluciones Regular e Irregular

Estudiamos aquí el comportamiento en el origen de las soluciones de la ecuación (1.15'). Para ello ponemos dicha ecuación en forma de un sistema de dos ecuaciones diferenciales de primer orden acopladas

$$u_1^{\lambda'}(k, r) = \frac{\lambda}{r} u_1^{\lambda}(k, r) - [E - m - V_1(r) - V_2(r)] u_2^{\lambda}(k, r) \quad (2.1)$$

$$u_2^{\lambda'}(k, r) = -\frac{\lambda}{r} u_2^{\lambda}(k, r) + [E + m + V_1(r) - V_2(r)] u_1^{\lambda}(k, r)$$

Introducimos los desarrollos

$$\begin{aligned} u_1^{\lambda}(k, r) &= r^A \sum_{n=0}^{\infty} a_n(k) r^n \\ u_2^{\lambda}(k, r) &= r^B \sum_{n=0}^{\infty} b_n(k) r^n \end{aligned} \quad (2.2)$$

Estas expresiones son soluciones del sistema (2.1), para $A = \lambda$ y $a_1 = 0$, si $B = \lambda + 1$; con estos valores, se determinan los coeficientes a_n y b_n en función de a_0 . Dado que el sistema (2.1) tiene un término r^{-1} , la otra solución independiente debe tener la forma

$$\begin{aligned} z_1^{\lambda}(k, r) &= r^C \sum_{n=0}^{\infty} c_n(k) r^n + A_{\lambda}(k) \ln B(k)r \cdot r^{\lambda} \sum_{n=0}^{\infty} a_n(k) r^n \\ z_2^{\lambda}(k, r) &= r^D \sum_{n=0}^{\infty} d_n(k) r^n + A_{\lambda}(k) \ln B(k)r \cdot r^{\lambda+1} \sum_{n=0}^{\infty} b_n(k) r^n \end{aligned} \quad (2.3)$$

sistema que es solución para $D = -\lambda$, $d_1 = 0$, si $C = -\lambda + 1$.

Los coeficientes de las soluciones están dados por las siguientes expresiones:

para la solución de tipo (2.2)

$$a_{n+2} = \frac{-1}{n+2} \left[(E - m)b_n - \sum_{j=0}^n \frac{V_1^{(j)}(0) + V_2^{(j)}(0)}{j!} b_{n-j} \right] \quad (2.4a)$$

$$b_n = \frac{1}{n+2\lambda+1} \left[(E + m)a_n + \sum_{j=0}^n \frac{V_1^{(j)}(0) - V_2^{(j)}(0)}{j!} a_{n-j} \right] \quad (2.4b)$$

$$a_1 = 0 \quad (2.4c)$$

a_0 indeterminado (depende de la normalización)

y para la solución (2.3)

$$c_n = \frac{1}{2\lambda - 1 - n} \left[(E - m)d_n - \sum_{j=0}^n \frac{V_1^{(j)}(0) + V_2^{(j)}(0)}{j!} d_{n-j} \right]; \quad n < 2\lambda - 1 \quad (2.5a)$$

$$c_n = \frac{-1}{n - 2\lambda + 1} \left[A_\lambda a_{n-2\lambda+1} + (E - m)d_n - \sum_{j=0}^n \frac{V_1^{(j)}(0) + V_2^{(j)}(0)}{j!} d_{n-j} \right] \quad n > 2\lambda - 1; \quad (2.5b)$$

$$d_{n+2} = \frac{1}{n+2} \left[(E + m)c_n + \sum_{j=0}^n \frac{V_1^{(j)}(0) - V_2^{(j)}(0)}{j!} c_{n-j} \right]; \quad n < 2\lambda - 1 \quad (2.5c)$$

$$d_{n+2} = \frac{1}{n+2} \left[-A_\lambda b_{n-2\lambda+1} + (E + m)c_n + \sum_{j=0}^n \frac{V_1^{(j)}(0) - V_2^{(j)}(0)}{j!} c_{n-j} \right] \quad n \geq 2\lambda - 1; \quad (2.5d)$$

$$A_\lambda = \frac{-1}{a_0} \left[(E - m)d_{2\lambda-1} - \sum_{j=0}^{2\lambda-1} \frac{V_1^{(j)}(0) + V_2^{(j)}(0)}{j!} d_{2\lambda-1-j} \right] \quad (2.5e)$$

$$d_1 = 0; \quad d_0, c_{2\lambda-1} \text{ y } B \text{ están indeterminados} \quad (2.5f)$$

(d_0 depende de la normalización)

Para encontrar estas expresiones hemos introducido los siguientes desarrollos en series de potencias para los potenciales:

$$V_i(r) = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{V_i^{(j)}(0)}{j!} r^j \quad (2.6)$$

donde $V_i^{(j)}(0)$ indica la j -ésima derivada de $V_i(r)$ calculada en el origen.

En el caso particular $\lambda = 1$, que nos interesará en la sección 7, la expresión (2.5e) toma la forma

$$A_1 = \frac{d_0}{a_0} \left[V_1'(0) + V_2'(0) \right] \quad (2.7)$$

Luego, si queremos anular la contribución de los términos logarítmicos en la solución (2.3), debemos pedir que las derivadas primeras de los dos potenciales calculadas en el origen, sean iguales y de signos contrarios. La presencia de los términos logarítmicos, como veremos más adelante, no nos permite el tratamiento de ondas superiores ($|\lambda| \neq 1$) con el método del desarrollo asintótico. (Véase además el apéndice A).^(*)

(*) Sin embargo, es posible reducir una ecuación de Dirac en onda λ a otra en onda $\lambda - 1$ que tenga un potencial más complicado, y entonces aplicar el método de desarrollo asintótico a esta última. Este tema será objeto de estudio en un trabajo posterior.

3. - Soluciones y Funciones de Jost

Por razones de completitud, en esta sección nos ocuparemos de las definiciones de todas las funciones que serán necesarias posteriormente, funciones que son similares a las del caso de la ecuación de Dirac usual. (Para este caso, con un solo potencial, véanse por ejemplo las citas (21) y (35)).

Además de las soluciones (2.2) y (2.3), que están caracterizadas por su comportamiento en el origen, tenemos otras dos soluciones, conocidas como las soluciones de Jost, caracterizadas por su comportamiento en el infinito

$$\lim_{r \rightarrow \infty} f^\lambda(\pm k, r) = (\pm i k)^\lambda \begin{pmatrix} \mp i \frac{E - m}{k} \\ 1 \end{pmatrix} e^{\mp i k r} \quad (3.1)$$

Las soluciones regular e irregular

$$\varphi^\lambda(k, r) = \begin{pmatrix} u_1^\lambda(k, r) \\ u_2^\lambda(k, r) \end{pmatrix}, \quad \psi^\lambda(k, r) = \begin{pmatrix} z_1^\lambda(k, r) \\ z_2^\lambda(k, r) \end{pmatrix},$$

pueden ser dadas como combinaciones lineales de las soluciones de Jost. Para la solución regular tendremos

$$\varphi^\lambda(k, r) = \frac{1}{\Delta_\lambda(k)} \left[f^\lambda(-k) f^\lambda(k, r) - f^\lambda(k) f^\lambda(-k, r) \right] \quad (3.2)$$

donde $\Delta_\lambda(k)$ es la función Wronskiano de las soluciones de Jost $f^\lambda(k, r)$ y $f^\lambda(-k, r)$,

$$\begin{aligned} \Delta_\lambda(k) &= \Delta \left[f^\lambda(k, r), f^\lambda(-k, r) \right] \\ &= f_1^\lambda(k, r) f_2^\lambda(-k, r) - f_1^\lambda(-k, r) f_2^\lambda(k, r) \end{aligned} \quad (3.3)$$

En ésta, f_i^λ indica la componente i -ésima del vector f^λ .

El Wronskiano $\Delta_\lambda(k)$ es una cantidad independiente de r , que

puede calcularse para $r \rightarrow \infty$ de la (3.1)

$$\Delta_\lambda(k) = -2i k^{2\lambda-1} (E - m) \quad . \quad (3.4)$$

Con esta definición de la función Wronskiano, concluimos inmediatamente que la función de Jost está definida por

$$f^\lambda(k) = \Delta \left[\varphi^\lambda(k, r), f^\lambda(k, r) \right] \quad , \quad (3.5)$$

función de k solamente, que podemos calcular tomando el límite para $r \rightarrow 0$ y sustituyendo el comportamiento en el origen de la solución regular

$$\begin{aligned} f^\lambda(k) &= \lim_{r \rightarrow 0} \left[a_0 r^\lambda f_2^\lambda(k, r) - b_0 r^{\lambda+1} f_1^\lambda(k, r) \right] \\ &= \lim_{r \rightarrow 0} a_0 r^\lambda f_2^\lambda(k, r) \quad . \end{aligned} \quad (3.6)$$

Como es usual, definimos

$$f^\lambda(k) = |f^\lambda(k)| \exp \left[i \eta_\lambda(k) \right] , \quad (3.7)$$

donde $\eta_\lambda(k)$ es el desfase de orden λ , y puesto que

$$f^{\lambda*}(k) = f^\lambda(-k) \quad (3.8)$$

los desfases gozarán de la propiedad de reflexión

$$\eta_\lambda(-k) = -\eta_\lambda(k) \quad ; \quad (3.9)$$

entonces, el elemento λ de la matriz de colisión estará dado por

$$S_\lambda(k) = \frac{f^\lambda(k)}{f^{\lambda*}(-k)} = \exp \left[2i \eta_\lambda(k) \right] \quad . \quad (3.10)$$

El comportamiento asintótico de la solución regular se obtiene de la (3.2), haciendo uso de la (3.7),

$$\lim_{r \rightarrow 0} \varphi^\lambda(k, r) = \frac{f^\lambda(k)}{k^\lambda} \left[\frac{\cos \left[kr - \frac{\lambda\pi}{2} + \eta_\lambda(k) \right]}{\frac{E+m}{k} \sin \left[kr - \frac{\lambda\pi}{2} + \eta_\lambda(k) \right]} \right] \quad (3.11)$$

Nótese además que la solución irregular puede ser puesta en función de las soluciones de Jost como

$$\psi^\lambda(k, r) = \frac{-1}{2 |f^\lambda(k)|^2} \left[f^\lambda(-k) f^\lambda(k, r) + f^\lambda(k) f^\lambda(-k, r) \right] \quad (3.12)$$

y a partir de esta última y de (3.2) se obtiene

$$f^\lambda(k, r) = \frac{\Delta_\lambda(k)}{2 f^\lambda(-k)} \varphi^\lambda(k, r) - f^\lambda(k) \psi^\lambda(k, r) \quad , \quad (3.13)$$

expresión que nos será útil para el estudio del comportamiento en el origen de las soluciones de Jost.

4. - Propiedades de analiticidad de las soluciones. Comportamiento asintótico para k grande.

Pasemos ahora al estudio de las funciones definidas en la sección anterior permitiendo a k tomar valores complejos.

Como es bien conocido de tratamientos anteriores / de la ecuación de Dirac con un potencial ⁽²¹⁾⁽³⁵⁾, todas las funciones antes definidas son bivalentes en k , puesto que a cada valor de k corresponden dos valores de la energía $E = \pm \sqrt{k^2 + m^2}$. La solución de Jost $f^\lambda(k, r)$ puede ser prolongada analíticamente por una función bivalente de la variable compleja k , que tiene puntos de diramación para $k = \pm i\infty$. Las dos hojas de Riemann, caracterizadas por $\sigma = \text{Sig Re} E = \pm 1$, pueden separarse introduciendo dos cortes entre $(-i\infty, -i0)$ y $(+i\infty, +i0)$, notándose con $f^{\lambda, \sigma}(k, r)$ la solución de Jost en cada hoja.

Imponiendo las restricciones (1.3) a los potenciales, se prueba que $f^{\lambda, \sigma}(k, r)$ es una función analítica de k en el semiplano inferior ($\text{Im } k \leq 0$), cortado entre $-i\infty$ y $-i0$. La demostración es similar a la dada en el trabajo de M. C. Barthélémy ⁽³⁵⁾, debiéndose sólo tener cuidado de reemplazar la función $V(r)$ por la función matricial

$$V(r) = \begin{pmatrix} V_2(r) - V_1(r) & 0 \\ 0 & V_2(r) + V_1(r) \end{pmatrix} \quad (4.1)$$

La necesidad de este reemplazo será clara más adelante (Véanse (4.6-7)). Aparte de las dificultades que presenta la introducción de esta matriz, la demostración sigue los pasos / del trabajo citado y por lo tanto se la omite aquí, limitándonos a tratar explícitamente sólo el estudio del comporta-

niente asintótica, en el que encontraremos diferencias debidas a la presencia del nuevo potencial.

Del mismo modo se prueba que la solución regular $\varphi^\lambda(k, r)$ es una función analítica de k , para r positivo y k finito, en el plano complejo k provisto de los cortes.

Veamos ahora el comportamiento asintótico en k de las soluciones de la ecuación (2.1). Sean $f_0^\lambda(k, r)$ y $f_0^\lambda(-k, r)$ las dos soluciones de Jost, independientes, de la ecuación / libre (σ fijo; no indicado explícitamente)

$$f_0^\lambda(\pm k, r) = k^\lambda \begin{pmatrix} \frac{k}{E \pm m} kr \left[n_{\lambda-1}(kr) \pm i j_{\lambda-1}(kr) \right] \\ kr \left[n_\lambda(kr) \pm i j_\lambda(kr) \right] \end{pmatrix} \quad (4.2)$$

donde $j_\lambda(kr)$ y $n_\lambda(kr)$ son las funciones esféricas de Bessel. Con éstas construimos la matriz

$$K(k, r, \xi) = \frac{1}{\Delta_\lambda(k)} \left[f_0^\lambda(k, r) \widetilde{f_0^\lambda(-k, \xi)} - f_0^\lambda(-k, r) \widetilde{f_0^\lambda(k, \xi)} \right] \quad (4.3)$$

en la que el símbolo $\sim$ indica la operación de transposición. Nótese que

$$K(k, r, r) = i \rho_2 \quad (4.4)$$

Con esas definiciones, la ecuación matricial integral para $f^\lambda(k, r)$ es

$$f^\lambda(k, r) = f_0^\lambda(k, r) - \int_r^\infty K(k, r, \xi) (i \rho_2)^{-1} [V_1(\xi) \rho_1 + V_2(\xi) i \rho_2] f^\lambda(k, \xi) d\xi \quad (4.5)$$

o, en forma más conveniente

$$f^\lambda(k, r) = f_0^\lambda(k, r) - \int_r^\infty \bar{K}(k, r, \xi) f^\lambda(k, \xi) d\xi \quad (4.6)$$

En la (4.6) es

$$\bar{K}(k, r, \xi) = K(k, r, \xi) \mathbb{V}(\xi) \quad (4.7)$$

en la que $\mathbb{V}$ es la matriz definida en (4.1). Explícitamente los elementos de esa matriz son

$$\bar{K}_{11}(k, r, \xi) = \frac{V_-(\xi)}{\Delta_\lambda(k)} \left[f_{o_1}^\lambda(k, r) f_{o_1}^\lambda(-k, \xi) - f_{o_1}^\lambda(-k, r) f_{o_1}^\lambda(k, \xi) \right] \quad (4.8a)$$

$$\bar{K}_{12}(k, r, \xi) = \frac{V_+(\xi)}{\Delta_\lambda(k)} \left[f_{o_1}^\lambda(k, r) f_{o_2}^\lambda(-k, \xi) - f_{o_1}^\lambda(-k, r) f_{o_2}^\lambda(k, \xi) \right] \quad (4.8b)$$

$$\bar{K}_{21}(k, r, \xi) = \frac{V_-(\xi)}{\Delta_\lambda(k)} \left[f_{o_2}^\lambda(k, r) f_{o_1}^\lambda(-k, \xi) - f_{o_2}^\lambda(-k, r) f_{o_1}^\lambda(k, \xi) \right] \quad (4.8c)$$

$$\bar{K}_{22}(k, r, \xi) = \frac{V_+(\xi)}{\Delta_\lambda(k)} \left[f_{o_2}^\lambda(k, r) f_{o_2}^\lambda(-k, \xi) - f_{o_2}^\lambda(-k, r) f_{o_2}^\lambda(k, \xi) \right] \quad (4.8d)$$

donde

$$V_-(r) = V_2(r) - V_1(r) \quad (4.8d)$$

$$V_+(r) = V_2(r) + V_1(r) \quad (4.8e)$$

Definimos ahora la matriz

$$T_\lambda(k, r) = T_\lambda(k, r) f^\lambda(k, r) \quad (4.9)$$

con

$$T_\lambda(k, r) = \begin{pmatrix} \left[f_{o_1}^\lambda(k, r) \right]^{-1} & 0 \\ 0 & \left[f_{o_2}^\lambda(k, r) \right]^{-1} \end{pmatrix} \quad (4.10)$$

$$\text{de manera que} \quad T_\lambda(k, r) f_o^\lambda(k, r) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}. \quad (4.11)$$

Luego, la ecuación integral para $L_\lambda(k, r)$ es

$$L_\lambda(k, r) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} - \int_r^\infty \bar{H}(k, r, \xi) L_\lambda(k, \xi) d\xi \quad (4.12)$$

donde

$$\bar{H}(k, r, \xi) = T_\lambda(k, r) \bar{K}(k, r, \xi) T_\lambda^{-1}(k, \xi) \quad (4.13)$$

De la (4.12), por diferenciación, obtenemos

$$L'_\lambda(k, r) = \bar{H}(k, r, r) L_\lambda(k, r) - \int_r^\infty \frac{\partial}{\partial r} \bar{H}(k, r, \xi) L_\lambda(k, \xi) d\xi. \quad (4.14)$$

Escribiendo explícitamente

$$\bar{H}(k, r, r) = \begin{pmatrix} 0 & V_+(r) \frac{f_{o2}^\lambda(k, r)}{f_{o1}^\lambda(k, r)} \\ -V_-(r) \frac{f_{o1}^\lambda(k, r)}{f_{o2}^\lambda(k, r)} & 0 \end{pmatrix} \quad (4.15)$$

y

$$\frac{\partial}{\partial r} \bar{H}(k, r, \xi) = \begin{pmatrix} V_-(\xi)(E-m) \left[\frac{f_{o1}^\lambda(k, \xi)}{f_{o2}^\lambda(k, r)} \right]^2 & V_-(\xi)(E-m) \left[\frac{f_{o2}^\lambda(k, \xi)}{f_{o1}^\lambda(k, r)} \right]^2 \\ V_-(\xi)(E+m) \left[\frac{f_{o1}^\lambda(k, \xi)}{f_{o2}^\lambda(k, r)} \right]^2 & V_+(\xi)(E+m) \left[\frac{f_{o2}^\lambda(k, \xi)}{f_{o1}^\lambda(k, r)} \right]^2 \end{pmatrix} \quad (4.16)$$

se obtienen inmediatamente los comportamientos asintóticos / para k grande de

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \bar{H}(k, r, r) = i \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{k}{E} \begin{pmatrix} 0 & V_+(r) \\ V_-(r) & 0 \end{pmatrix} \quad (4.17)$$

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{\partial}{\partial r} \bar{H}(k, r, \xi) = \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{k}{E} \cdot k e^{2ik(r-\xi)} \begin{pmatrix} V_-(\xi) & -V_+(\xi) \\ -V_-(\xi) & V_+(\xi) \end{pmatrix} \quad (4.18)$$

Sustituyendo en la (4.12) tendremos

$$\begin{aligned} \lim_{k \rightarrow \infty} L_{\lambda}^{\dagger}(k, r) &= i \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{k}{E} \begin{pmatrix} 0 & V_{+}(\xi) \\ V_{-}(\xi) & 0 \end{pmatrix} \lim_{k \rightarrow \infty} L_{\lambda}(k, r) - \\ &- \int_r^{\infty} \lim_{k \rightarrow \infty} k \cdot \frac{k}{E} \cdot e^{2ik(r-\xi)} \begin{pmatrix} V_{-}(\xi) & -V_{+}(\xi) \\ -V_{-}(\xi) & V_{+}(\xi) \end{pmatrix} \lim_{k \rightarrow \infty} L_{\lambda}(k, \xi) d\xi \end{aligned} \quad (4.19)$$

e integrando por partes obtenemos

$$\lim_{k \rightarrow \infty} L_{\lambda}^{\dagger}(k, r) = \frac{i}{2} \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{k}{E} \begin{pmatrix} V_{-}(r) & V_{+}(r) \\ V_{-}(r) & V_{+}(r) \end{pmatrix} \lim_{k \rightarrow \infty} L_{\lambda}(k, r) + O(k^{-1}) \quad (4.20)$$

de la cual la solución es

$$\lim_{k \rightarrow \infty} L_{\lambda}(k, r) = \exp \left[- \frac{i}{2} \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{k}{E} \int_r^{\infty} \begin{pmatrix} V_{-}(\xi) & V_{+}(\xi) \\ V_{-}(\xi) & V_{+}(\xi) \end{pmatrix} d\xi \right] \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad (4.21)$$

Diagonalizando la matriz en la exponencial obtenemos

$$\lim_{k \rightarrow \infty} L_{\lambda}(k, r) = \exp \left[- i \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{k}{E} \int_r^{\infty} V_2(\xi) d\xi \right] \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad (4.22)$$

(nótese que la diagonalización no cambia el vector), de la / que deducimos el comportamiento asintótico de

$$\lim_{\substack{k \rightarrow \infty \\ \text{Im } k \leq 0}} f^{\lambda}(k, r) = f_0^{\lambda}(k, r) \exp \left[- i \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{k}{E} \int_r^{\infty} V_2(\xi) d\xi \right] \quad (4.23)$$

Efectuemos ahora el mismo estudio anterior para la función de Jost. Multiplicando la segunda componente de la / (4.6) por $r^{\lambda} [(2\lambda-1)!!]^{-1}$, tomando el límite para $r \rightarrow 0$, teniendo en cuenta la definición (3.6) en la que se ha elegido $a_0 = [(2\lambda-1)!!]^{-1}$, y las propiedades de las funciones es

féricas de Bessel.

$$\lim_{r \rightarrow 0} \frac{r^\lambda f^\lambda(r, r)}{(2\lambda - 1)!!} = \frac{(kr)^\lambda \left[n_\lambda(kr) + i j_\lambda(kr) \right]}{(2\lambda - 1)!!} = 1, \quad (4.24)$$

la ecuación integral para la función de Jost será

$$f^\lambda(k) = 1 - \lim_{r \rightarrow 0} \frac{r^\lambda}{(2\lambda - 1)!!} \left[\int_r^\infty \bar{K}(k, r, \xi) f^\lambda(k, \xi) d\xi \right]_{\text{comn. 2}} \quad (4.25)$$

esto es,

$$f^\lambda(k) = 1 + \int_0^\infty \widetilde{\varphi_0^\lambda(k, \xi)} V(\xi) f^\lambda(k, \xi) d\xi. \quad (4.25')$$

Partiendo de esta ecuación se pueden estudiar las propiedades de analiticidad de esta función. Se demuestra // que $f^\lambda(k)$ es analítica en el semiplano inferior ($\text{Im } k \leq 0$) del plano complejo k cortado, excluidos los puntos $k = 0$ y $k = -im$, haciéndose uso explícito de las condiciones // (1.3). La demostración no se da aquí, remitiéndonos a la dada en el trabajo mencionado⁽³⁵⁾, teniendo presentes las razones expuestas anteriormente. Para conocer el comportamiento asintótico tomamos el límite para $k \rightarrow \infty$ en la (4.25'). Introduciendo el comportamiento asintótico de la solución regular libre,

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \varphi_0^\lambda(k, r) = k^{-\lambda} \begin{pmatrix} \cos(kr - \frac{\lambda\pi}{2}) \\ \frac{k}{E} \sin(kr - \frac{\lambda\pi}{2}) \end{pmatrix} \quad (4.26)$$

e integrando por partes, encontramos

$$\lim_{\substack{k \rightarrow \infty \\ \text{Im } k \leq 0}} f^\lambda(k) = \exp \left[-i \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{k}{E} \int_0^\infty V_2(r) dr \right]. \quad (4.27)$$

De la (3.7) vemos que el comportamiento asintótico de los //

desfasajes es (teorema de Parzen⁽³⁸⁾)

$$\lim_{\substack{k \rightarrow \infty \\ \text{Im } k \leq 0}} \eta_\lambda(k) = - \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{k}{E} \int_0^\infty V_2(r) dr, \quad (4.28)$$

y de las (3.2), (4.23) y (4.27), que la solución regular verifica

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \varphi^\lambda(k, r) = \frac{1}{k^\lambda} \begin{pmatrix} \cos \left[kr - \frac{\lambda\pi}{2} - \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{k}{E} \int_0^r V_2(\xi) d\xi \right] \\ \frac{k}{E} \sin \left[kr - \frac{\lambda\pi}{2} - \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{k}{E} \int_0^r V_2(\xi) d\xi \right] \end{pmatrix} \quad (4.29)$$

Se prueba además, en forma enteramente similar a / los trabajos mencionados⁽²¹⁾⁽³⁵⁾, que si $f^{\lambda, \sigma}(k_n^\sigma) = 0$ para $k_n^\sigma = -ip_n^\sigma$ con $\text{Im } p_n^\sigma = 0$, tenemos un estado ligado de energía $E_n^\sigma = \sigma \sqrt{m^2 - (p_n^\sigma)^2}$; $f^{\lambda, \sigma}(k)$ no se puede anular para k real y sus ceros son simples (salvo quizá para $k = 0$, / caso que no consideramos; véase⁽³⁵⁾).

Como puede observarse de las (4.23), (4.27), (4.28) y (4.29), el comportamiento asintótico es el mismo que en el caso $V_1(r) \equiv 0$. Este hecho puede ser justificado de la siguiente manera: si eliminamos una variable en el sistema // (2.1) se obtiene una ecuación de tipo Schrödinger (véase el apéndice A, ecuación (A.1)); en esta ecuación puede verse // que el comportamiento asintótico para k grande está condicionado por el potencial $V_2(r)$ y no por el $V_1(r)$ (recuérdese que los potenciales no son singulares).

5. - Construcción explícita de la función de Jost a partir / de los parámetros de la colisión.

Deduciremos aquí una expresión para calcular la // función de Jost en términos de los datos de la colisión y de los parámetros de los estados ligados, la que necesitaremos en los cálculos posteriores. En ausencia de estados ligados, Prats y Toll⁽²¹⁾ dan la manera de construirla. Ellos usan // una modificación de un teorema de Titchmarsh⁽³⁹⁾ (útil para este propósito en el caso no relativista) que fue empleado / por Corinaldesi⁽³²⁾ para el estudio de este problema en el / caso de la ecuación de Klein-Gordon.

Seguimos aquí el mismo procedimiento para tratar / el caso en el que existan estados ligados. Para ello introdu- cimos una nueva función (λ fijo: no indicado explícitamente)

$$\bar{f}^{\sigma}(k) = f^{\sigma}(k) \prod_n \frac{k - ip_n^{\sigma}}{k + ip_n^{\sigma}} \quad (5.1)$$

que no se anulará en las energías correspondientes a los es- tados ligados, puesto que los ceros de la función de Jost // son simples.

Los nuevos desfasajes definidos por

$$\bar{f}^{\sigma}(k) = |\bar{f}^{\sigma}(k)| \exp \left[i \bar{\eta}^{\sigma}(k) \right] \quad (5.2)$$

están relacionados con los anteriores por

$$\bar{\eta}^{\sigma}(k) = \eta^{\sigma}(k) - 2 \sum_n \arctg \frac{p_n^{\sigma}}{k} \quad (\text{Im } k = 0) \quad (5.3)$$

Escribiendo una relación de dispersión para la fun- ción $\ln \bar{f}^+(k) \bar{f}^-(k)$ se llega a la siguiente fórmula

$$\ln |f^+(k)| |f^-(k)| = - \frac{P}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dk'}{k' - k} \left[\eta^+(k') + \eta^-(k') \right] + \sum_{n, \sigma} \ln \left[1 + \left(\frac{p_n^{\sigma}}{k} \right)^2 \right] \quad (5.4)$$

Haciendo lo mismo para la función $\frac{k}{E} \ln \frac{\bar{f}^+(k)}{\bar{f}^-(k)}$ obtenemos

$$\ln \frac{|f^+(k)|}{|f^-(k)|} = -\frac{E}{k} \frac{P}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dk'}{k'-k} \left\{ \frac{k'}{E'} \left[\eta^+(k') - \eta^-(k') \right] + 2\mu(\infty) \right\} +$$

$$+ \sum_{n,\sigma} \sigma \ln \frac{E - E_n^\sigma}{E + E_n^\sigma} - (N^+ - N^-) \ln \frac{E - m}{E + m} \quad (5.5)$$

donde N^σ es el número de estados ligados en la superficie σ . Nótese que esta función tiene un corte entre $-im$ y $/// -i\infty$ en el semiplano inferior $\text{Im } k \leq 0$, debido a la presencia de E en el denominador. Por esta razón no se puede $///$ substituir directamente las (5.2) y (5.3) en las fórmulas en contradas para el caso sin estados ligados, para encontrar / las correspondientes al caso de presencia de estados ligados como se afirma en la referencia 21.

De las (5.4) y (5.5) se obtiene

$$|f^\sigma(k)|^2 = \left(\frac{E + \sigma m}{E - \sigma m} \right)^{N^+ - N^-} \prod_{n,\sigma'} \left\{ \left[1 + \left(\frac{v_n^{\sigma'}}{k} \right)^2 \right] \left[\frac{E - \sigma E_n^{\sigma'}}{E + \sigma E_n^{\sigma'}} \right] \right\} \cdot$$

$$\cdot \exp \left\{ -\frac{P}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dk'}{k'-k} \left[\eta^+(k') + \eta^-(k') + \sigma \frac{E}{k} \left\{ \frac{k'}{E'} \left[\eta^+(k') - \eta^-(k') \right] + 2\mu(\infty) \right\} \right] \right\} \quad (5.6)$$

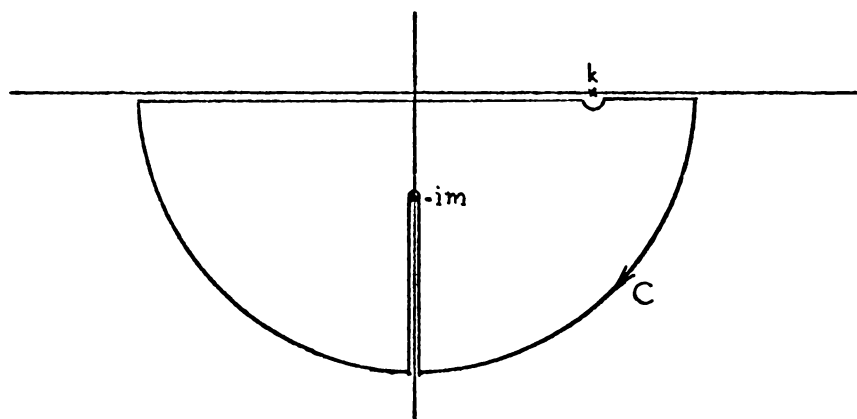
En las expresiones anteriores hemos introducido la notación

$$\mu(r) = \int_0^r V_2(\xi) d\xi \quad (5.7)$$

Nótese que la (4.28) puede ser escrita

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \eta^\sigma(k) = -\sigma \mu(\infty) \quad (4.28')$$

La expresión (5.5) ha sido obtenida integrando la función $(k' - k)^{-1} \frac{k'}{E'} \ln \left[\bar{f}^+(k') / \bar{f}^-(k') \right]$, a lo largo del circuito indicado en la figura.



y luego tomando parte imaginaria. Es fácil ver que tomando / la parte real se llega inmediatamente al análogo del teorema de Levinson para el problema de Dirac (Este teorema viene da do en la referencia 35).

6. - El Método del Desarrollo Asintótico.^(*)

Estudiamos ahora las ecuaciones que satisfacen las derivadas logarítmicas de las componentes de las soluciones de Jost.

Escribimos el sistema (2.1) en la siguiente forma

$$f_1^{\lambda'}(k, r) = \frac{\lambda}{r} f_1^{\lambda}(k, r) - \beta(r) f_2^{\lambda}(k, r) \quad (6.1a)$$

$$f_2^{\lambda'}(k, r) = -\frac{\lambda}{r} f_2^{\lambda}(k, r) + \alpha(r) f_1^{\lambda}(k, r) \quad (6.1b)$$

donde

$$\alpha(r) = E + m + V_1(r) - V_2(r) \quad (6.2)$$

$$\beta(r) = E - m - V_1(r) - V_2(r) \quad (6.3)$$

Definimos

$$y_1(k, r) = \frac{f_1^{\lambda'}(k, r)}{f_1^{\lambda}(k, r)} \quad ; \quad (6.4)$$

es fácil verificar que la (6.4) satisface la ecuación

$$\begin{aligned} y_1'(k, r) + y_1^2(k, r) - \frac{\beta'(r)}{\beta(r)} y_1(k, r) + \frac{\beta'(r)}{\beta(r)} \frac{\lambda}{r} - \frac{\lambda(\lambda-1)}{r^2} + \\ + \alpha(r) \beta(r) = 0 \end{aligned} \quad (6.5)$$

Para que podamos utilizar un método de desarrollo asintótico, debemos pedir que la ecuación no posea términos divergentes en el origen, cosa que logramos poniendo $\lambda = 1$ y pidiendo que

$$\beta'(0) = - \left[V_1'(0) + V_2'(0) \right] = 0 \quad (6.6)$$

(*) Se utiliza una técnica similar a la desarrollada por Verde⁽³⁷⁾ en el caso de la ecuación de Schrödinger.

Nótese que esta última condición es la misma que debemos requerir para que la solución irregular no tenga un comportamiento logarítmico en el origen (véase (2.7)).

Definimos también

$$y_2(k, r) = \frac{f_2^{\lambda'}(k, r)}{f_2^{\lambda}(k, r)} ; \quad (6.7)$$

ésta satisface la ecuación

$$y_2'(k, r) + y_2^2(k, r) - \frac{\alpha'(r)}{\alpha(r)} y_2(k, r) - \frac{\alpha'(r)}{\alpha(r)} \frac{\lambda}{r} - \frac{\lambda(\lambda+1)}{r^2} + \\ + \alpha(r) \beta(r) = 0 \quad (6.8)$$

que no tiene términos divergentes en el origen si $\lambda = -1$ y / si

$$\alpha'(0) = V_1'(0) - V_2'(0) = 0 \quad . \quad (6.9)$$

Estamos ahora en condiciones de resolver las siguientes ecuaciones

$$\lambda = 1, \quad V_1'(0) = -V_2'(0)$$

$$y_1'(k, r) + y_1^2(k, r) + \frac{V_1'(r) + V_2'(r)}{E - m - V_1(r) - V_2(r)} y_1(k, r) - \\ - \frac{1}{r} \frac{V_1'(r) + V_2'(r)}{E - m - V_1(r) - V_2(r)} + k^2 - 2EV_2(r) - 2mV_1(r) - \\ - V_1^2(r) + V_2^2(r) = 0 \quad (6.10)$$

$$\lambda = -1, \quad V_1'(0) = V_2'(0)$$

$$y_2'(k, r) + y_2^2(k, r) - \frac{V_1'(r) - V_2'(r)}{E + m + V_1(r) - V_2(r)} y_2(k, r) +$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{1}{r} \frac{V_1'(r) - V_2'(r)}{E + m + V_1(r) - V_2(r)} + k^2 - 2EV_2(r) - 2mV_1(r) - \\
& - V_1^2(r) + V_2^2(r) = 0 \quad (6.11)
\end{aligned}$$

Nótese que las (6.10) y (6.11) son deducibles una de la otra efectuando la transformación (1.21). De la (1.17-17') vemos que (6.10) corresponde a $j = \frac{1}{2}$ y $l = 1$, esto es, onda P, y (6.11) a $j = \frac{1}{2}$ y $l = 0$, onda S. Consideraremos entonces sólo este segundo caso, que es de más fácil interpretación en el límite no relativista, mientras que los resultados para onda P se deducirán de éstos utilizando la transformación (1.21).

Definimos la función

$$g(k, r) = \frac{\alpha(r)}{\alpha(\infty)} \left[ik + \frac{f_2'(k, r)}{f_2(k, r)} \right], \quad (6.12)$$

en la que hemos puesto $f_2^{(\lambda=-1)}(k, r) = f_2(k, r)$.

De la (6.11), se demuestra que $g(k, r)$ satisface la ecuación

$$\begin{aligned}
\alpha(\infty) \alpha(r) g'(k, r) + \alpha^2(\infty) g^2(k, r) - 2ik\alpha(\infty)\alpha(r) g(k, r) - \\
- 2\alpha(\infty)\alpha'(r) g(k, r) = U(k, r) \quad (6.13)
\end{aligned}$$

donde

$$\begin{aligned}
U(k, r) = \alpha^2(r) \left[2EV_2(r) + 2mV_1(r) + V_1^2(r) - V_2^2(r) \right] - \\
- \alpha'(r)\alpha(r) \left[ik + \frac{1}{r} \right]. \quad (6.14)
\end{aligned}$$

Del comportamiento asintótico de las soluciones de Jost, se deduce que

$$\lim_{r \rightarrow \infty} g(k, r) = 0 \quad (6.15)$$

y del comportamiento en el origen de la función $f_2(k,r)$, que sabemos calcular con la (3.13), encontramos

$$\lim_{r \rightarrow 0} g(k,r) = \text{const.} = g(k) \quad (6.16)$$

Hasta aquí se han considerado sólo las energías positivas. Recordando ahora que la solución de Jost $f^\sigma(k,r)$ es una función bivalente de k complejo, también lo será $g^\sigma(k,r)$. Luego, en lugar de la ecuación (6.13), tendremos un sistema de dos ecuaciones para las funciones $g^\sigma(k,r)$. Queremos resolver este sistema proponiendo una serie asintótica en k . Puesto que las dos ecuaciones contienen términos en k y E , una manera de desembarazarnos de E es escribir un sistema de ecuaciones acopladas en las nuevas variables

$$S(k,r) = \frac{1}{2} [g^+(k,r) + g^-(k,r)] \quad (6.17)$$

$$D(k,r) = \frac{1}{2E} [g^+(k,r) - g^-(k,r)] \quad (6.18)$$

Nótese que $U(k,r) = P(k,r) + E Q(k,r)$

En esta forma obtenemos el sistema

$$\begin{aligned} a_1 S'(k,r) + a_2 D'(k,r) + a_3 S^2(k,r) + a_4 D^2(k,r) + \\ + a_5 2S(k,r)D(k,r) + a_6 S(k,r) + a_7 D(k,r) = P(k,r) \end{aligned} \quad (6.19a)$$

$$\begin{aligned} b_1 S'(k,r) + b_2 D'(k,r) + b_3 S^2(k,r) + b_4 D^2(k,r) + \\ + b_5 2S(k,r)D(k,r) + b_6 S(k,r) + b_7 D(k,r) = Q(k,r) \end{aligned} \quad (6.19b)$$

donde los "potenciales" son

$$\begin{aligned} P(k,r) = \left\{ 4V_2(r) \left[m + V_1(r) - V_2(r) \right] + 2mV_1(r) + V_1^2(r) - V_2^2(r) \right\} k^2 - \\ - \left[V_1'(r) - V_2'(r) \right] \left[m + V_1(r) - V_2(r) \right] ik + \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \left\{ 4m^2 V_2(r) - \frac{1}{r} [V_1(r) - V_2(r)] \right\} \left[m + V_1(r) - V_2(r) \right] + \\
& + \left\{ 2mV_1(r) + V_1^2(r) - V_2^2(r) \right\} \left\{ m^2 + [m + V_1(r) - V_2(r)]^2 \right\}
\end{aligned}
\tag{6.19c}$$

$$\begin{aligned}
Q(k, r) = & 2V_2(r)k^2 - [V_1'(r) - V_2'(r)]ik - \frac{1}{r} [V_1'(r) - V_2'(r)] + \\
& + 2 \left\{ 2mV_1(r) + V_1^2(r) - V_2^2(r) \right\} \left[m + V_1(r) - V_2(r) \right] + \\
& + 2V_2(r) \left\{ m^2 + [m + V_1(r) - V_2(r)]^2 \right\}
\end{aligned}
\tag{6.19d}$$

y los coeficientes

$$\begin{aligned}
b_1 &= 2m + V_1(r) - V_2(r) \\
a_1 &= b_2 = k^2 + mb_1 \\
a_2 &= (k^2 + m^2)b_1 \\
a_3 &= b_5 = k^2 + 2m^2 \\
a_4 &= (k^2 + m^2)a_3 \\
b_3 &= 2m \\
a_5 &= b_4 = (k^2 + m^2)b_3 \\
a_6 &= b_7 = (-2ik)a_1 - [V_1'(r) - V_2'(r)]b_3 \\
b_6 &= (-2ik)b_1 - 2[V_1'(r) - V_2'(r)] \\
a_7 &= (k^2 + m^2)b_6
\end{aligned}
\tag{6.19e}$$

Introduciendo los siguientes desarrollos asintóticos para k grande

$$S(k, r) = \sum_{n=0}^N S_n(r) (-2ik)^{-n-1} + o(k^{-N-2}) \quad (6.20)$$

$$D(k, r) = \sum_{n=0}^N S_n(r) (-2ik)^{-n-1} + o(k^{-N-2}) \quad (6.21)$$

en el sistema (6.19), obtenemos el siguiente sistema de relaciones de recurrencia acopladas

$$\begin{aligned} & \frac{1}{16} \sum_{j=0}^{n+4} D_j(r) D_{n-j+4}(r) - \frac{1}{4} [S'_{n+3}(r) + S_{n+4}(r)] - \\ & - \frac{1}{4} [2m + V_1(r) - V_2(r)] [D'_{n+3}(r) + D_{n+4}(r)] + \\ & + \frac{1}{2} [V'_1(r) - V'_2(r)] D_{n+3}(r) - \\ & - \frac{1}{4} \sum_{j=0}^{n+2} [S_j(r) S_{n-j+2}(r) + 3m^2 D_j(r) D_{n-j+2}(r) + 4m S_j(r) D_{n-j+2}(r)] + \\ & + m [2m + V_1(r) - V_2(r)] \{S'_{n+1}(r) + S_{n+2}(r) + m [D'_{n+1}(r) + D_{n+2}(r)]\} - \\ & - 2m [V'_1(r) - V'_2(r)] [S_{n+1}(r) + m D_{n+1}(r)] + \\ & + 2m^2 \sum_{j=0}^n [S_j(r) + m D_j(r)] [S_{n-j}(r) + m D_{n-j}(r)] = 0 \quad (6.22a) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & - \frac{1}{4} [D'_{n+3}(r) + D_{n+4}(r)] - \frac{1}{2} \sum_{j=0}^{n+2} [S_j(r) + m D_j(r)] D_{n-j+2}(r) + \\ & + [2m + V_1(r) - V_2(r)] \{S'_{n+1}(r) + S_{n+2}(r) + m [D'_{n+1}(r) + D_{n+2}(r)]\} - \\ & - 2 [V'_1(r) - V'_2(r)] [S_{n+1}(r) + m D_{n+1}(r)] + \\ & + 2m \sum_{j=0}^n [S_j(r) + m D_j(r)] [S_{n-j}(r) + m D_{n-j}(r)] = 0 \quad (6.22b) \end{aligned}$$

todas con $n \geq 0$. Los primeros coeficientes vienen dados por

$$D_0(r) = 2 V_2(r) \quad (6.23a)$$

$$D_1(r) = -2 V_1'(r) \quad (6.23b)$$

$$D_2(r) = 2V_1''(r) + \frac{4}{r} [V_1'(r) - V_2'(r)] + \\ + 8m [V_1(r)V_2(r) - V_1^2(r) - V_2^2(r)] - 4V_1^3(r) \quad (6.23c)$$

$$D_3(r) = -2V_1'''(r) + 4 \left[\frac{V_1'(r) - V_2'(r)}{r^2} - \frac{V_1''(r) - V_2''(r)}{r} \right] + \\ + 8 \left[m + V_1(r) \right] [V_1(r) + V_2(r)] [V_1'(r) + V_2'(r)] \quad (6.23d)$$

$$S_0(r) = 2mV_1(r) + V_1^2(r) + 2V_1(r)V_2(r) - 2V_2^2(r) \quad (6.24a)$$

$$S_1(r) = -2mV_2'(r) - 2V_1(r) [V_1'(r) + V_2'(r)] \quad (6.24b)$$

$$S_2(r) = 2mV_2''(r) + 2V_1(r) [V_1''(r) + V_2''(r)] + 2V_1'(r)V_2'(r) + \\ + 6V_1'(r)V_2'(r) - [V_1'(r)]^2 + 4 \left[\frac{V_1'(r) - V_2'(r)}{r} \right] [V_2(r) - m] - \\ - V_1^4(r) - 4V_1^3(r)V_2(r) - 12mV_1^2(r)V_2(r) - \\ - 16m^2V_1(r)V_2(r) + 4m^2 [V_1^2(r) + V_2^2(r)] \quad (6.24c)$$

$$S_3(r) = -2mV_2'''(r) - \frac{4}{r} [V_1'(r) - V_2'(r)] [3V_2'(r) - V_1'(r)] - \\ - 4 \left[m - 2V_2(r) \right] \left[\frac{V_1'(r) - V_2'(r)}{r^2} - \frac{V_1''(r) - V_2''(r)}{r} \right] - \\ - 2 \left\{ V_1(r) [V_1'''(r) + V_2'''(r)] + 2V_1''(r)V_2'(r) \right\} - \\ - 2 \left[6V_1''(r)V_2'(r) + 4V_1'(r)V_2''(r) - V_1'(r)V_1''(r) \right] + \\ + 8V_1(r) [V_1(r) + V_2(r)]^2 [V_1'(r) + V_2'(r)] + \\ + 8m V_2(r) [3V_1(r) + V_2(r)] [V_1'(r) + V_2'(r)] + \\ + 8mV_1^2(r) [3V_2'(r) + V_1'(r)] +$$

$$+ 8m^2 [V_1(r) + V_2(r)] [V_1'(r) + V_2'(r)] \quad (6.24d)$$

El sistema de ecuaciones acopladas (6.22), junto / con las condiciones iniciales (6.23a-b) y (6.24a-b), las con diciones asintóticas

$$S_n(\infty) = 0 \quad D_n(\infty) = 0 \quad (6.25)$$

y las restantes condiciones (6.23c-d) y (6.24c-d), nos permi ten calcular por recurrencia todas las funciones $S_n(r)$ y $D_n(r)$.

Nótese que, puesto que hemos elegido $V_1'(0) = V_2'(0)$ resulta

$$\lim_{r \rightarrow 0} \frac{V_1'(r) - V_2'(r)}{r} = V_1''(0) - V_2''(0)$$

$$\lim_{r \rightarrow 0} \left[\frac{V_1'(r) - V_2'(r)}{r^2} - \frac{V_1''(r) - V_2''(r)}{r} \right] = -\frac{1}{2} [V_1'''(0) - V_2'''(0)]$$

luego, en el origen, las relaciones entre los coeficientes / de los desarrollos (6.20) y (6.21) y los potenciales es

$$D_0 = 2 V_2 \quad (6.26a)$$

$$D_1 = -2 V_1' \quad (6.26b)$$

$$D_2 = 6V_1'' - 4V_2'' + 8m[V_1 V_2 - V_1^2 - V_2^2] - 4V_1^3 \quad (6.26c)$$

$$D_3 = -4V_1''' + 2V_2''' + 8[m + V_1][V_1 + V_2][V_1' + V_2'] \quad (6.26d)$$

$$S_0 = 2V_2[V_1 - V_2] + [2m + V_1]V_1 \quad (6.27a)$$

$$S_1 = -2mV_2' - 2V_1[V_1' + V_2'] \quad (6.27b)$$

$$S_2 = 2[3m + V_1 - 2V_2]V_2'' + 2[V_1 + 3V_2 - 2m]V_1'' + 6V_1'V_2' - V_1'^2 -$$

$$-V_1^4 - 4V_1^3V_2 - 12mV_1^2V_2 - 16m^2V_1V_2 + 4m^2[V_1^2 + V_2^2] \quad (6.27c)$$

$$\begin{aligned} S_3 = & 2[2V_2 - V_1 - 2m]V_2''' + 2[m - 4V_2 - V_1]V_1''' + 6V_1''[V_1' - 4V_2'] + \\ & + 8mV_2[3V_1 + V_2][V_1' + V_2'] + 8mV_1^2[3V_2' + V_1'] + \\ & + 8m^2[V_1 + V_2][V_1' + V_2'] + 8V_1[V_1 + V_2]^2[V_1' + V_2'] \quad (6.27d) \end{aligned}$$

En las expresiones (6.26) y (6.27) hemos puesto $S_n(0) = S_n$, $D_n(0) = D_n$ y $V_i^{(j)}(0) = V_i^{(j)}$.

Para calcular los coeficientes siguientes se hace uso de las relaciones de recurrencia. De esta manera, en principio, se podrían obtener todos los coeficientes S_n y D_n , y de ellos calcular los potenciales y todas sus derivadas en el origen, esto es, de hecho obtener los dos potenciales, puesto que se los ha supuesto funciones holomorfas de r .

7. - Determinación de los coeficientes S_n y D_n .

De la definición de $g(k, r)$ (véase (6.12)), de las propiedades de analiticidad de la función de Jost y de la // función $f_2(k, r)$, y de su valor y el de su derivada en el o rigen, calculados a partir de la (3.13),

$$f_2(k, 0) = -f(k) \alpha(0) \quad (7.1a)$$

$$f_2'(k, 0) = -\frac{\Delta(k)}{2f(-k)} + f(k) c_1 \quad (7.1b)$$

se demuestra que la función $g(k)$ (véase (6.16)) es una función meromorfa de k en el semiplano inferior cortado // ($\text{Im } k \leq 0$). En la primera hoja de Riemann, $g^+(k)$ tiene no - los simples en $k = -ip_n^+$ debidos a los ceros de $f^+(k)$. Lo mismo ocurre para $g^-(k)$ en $k = -ip_n^-$, en la segunda hoja.

El residuo en los polos es

$$\text{Res} [g^\sigma(k), k = -in_n^\sigma] = \frac{-2p_n^\sigma}{f^\sigma(ip_n^\sigma) \dot{f}^\sigma(-in_n^\sigma)} \quad (7.2)$$

en la que $\dot{f}^\sigma(k)$ indica la derivada de $f^\sigma(k)$ respecto a k . Para obtener este resultado hemos tomado $f_2^+(-in_n^+, 0)$ de la / (7.1a), mientras que la $f_2^{+'}(-in_n^+, 0)$ se calcula diferenciando la (3.2) y poniendo $k = -ip_n^+$ y $r = 0$.

Definimos ahora las funciones

$$\bar{S}(k) = S(k) + \sum_{n, \sigma} \frac{E_n^\sigma c_n^\sigma}{(E_n^\sigma + \sigma_m)} \frac{1}{[k^2 + (p_n^\sigma)^2]} \quad (7.3)$$

$$\bar{D}(k) = D(k) + \sum_{n, \sigma} \frac{\sigma c_n^\sigma}{(E_n^\sigma + \sigma_m)} \frac{1}{[k^2 + (p_n^\sigma)^2]} \quad (7.4)$$

en las que c_n^σ es el coeficiente de normalización de las //

funciones de onda de los estados ligados:

$$c_n^\sigma = \delta_{nj} \left[\int_0^\infty \varphi_1(E_n^\sigma, r) \varphi_2(E_j^\sigma, r) dr \right]^{-1} = \frac{-2i(p_n^\sigma)^2 (E_n^\sigma + \sigma_m)}{E_n^\sigma f^\sigma(ip_n^\sigma) \dot{f}^\sigma(-ip_n^\sigma)} \quad (7.5)$$

Las funciones $\bar{S}(k)$ y $\bar{D}(k)$ son holomorfas en k en el semiplano inferior ($\text{Im } k \leq 0$), puesto que las sumas anulan la contribución de los polos en $S(k)$ y $D(k)$ debidos a la presencia de estados ligados.

Comparando los desarrollos (6.20) y (6.21) con los similares para $\bar{S}(k)$ y $\bar{D}(k)$,

$$\bar{S}(k) = \sum_{n=0}^N \bar{S}_n (-2ik)^{-n-1} + o(k^{-N-2}) \quad (7.6)$$

$$\bar{D}(k) = \sum_{n=0}^N \bar{D}_n (-2ik)^{-n-1} + o(k^{-N-2}) \quad (7.7)$$

encontramos que

$$S_{2j} = \bar{S}_{2j} \quad (7.8)$$

$$S_{2j+1} = \bar{S}_{2j+1} + \sum_{n,\sigma} \frac{2^{2j+2} E_n^\sigma C_n^\sigma (p_n^\sigma)^{2j}}{(E_n^\sigma + \sigma_m)} \quad (7.9)$$

$$D_{2j} = \bar{D}_{2j} \quad (7.10)$$

$$D_{2j+1} = \bar{D}_{2j+1} + \sum_{n,\sigma} \frac{\sigma 2^{2j+2} C_n^\sigma (p_n^\sigma)^{2j}}{(E_n^\sigma + \sigma_m)} \quad (7.11)$$

Para k real, es posible expresar las partes imaginarias de $\bar{S}(k)$ y $\bar{D}(k)$ como sigue:

$$\text{Im } \bar{S}(k) = - \frac{m[V_1(0) - V_2(0)]}{k} + \frac{k}{2} \left[2 - \frac{1}{|f^+(k)|^2} - \frac{1}{|f^-(k)|^2} \right] \quad (\text{Im } k = 0) \quad (7.12)$$

$$\text{Im } \bar{D}(k) = \frac{V_1(0) - V_2(0)}{k} + \frac{k}{2E} \left[\frac{1}{|f^-(k)|^2} - \frac{1}{|f^+(k)|^2} \right] \quad (\text{Im } k = 0) \quad (7.13)$$

mientras que las partes reales pueden conocerse por medio de relaciones de dispersión,

$$\text{Re } \bar{S}(k) = - \frac{P}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} dk' \frac{k'}{k'^2 - k^2} \text{Im } \bar{S}(k'), \quad (\text{Im } k = 0) \quad (7.14)$$

$$\text{Re } \bar{D}(k) = - \frac{P}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} dk' \frac{k'}{k'^2 - k^2} \text{Im } D(k'), \quad (\text{Im } k = 0) \quad (7.15)$$

Observando los desarrollos (7.6) y (7.7), se ve // que de las (7.12) y (7.13) se pueden encontrar los coeficientes $\bar{S}_n$ y $\bar{D}_n$ de orden par, en forma de momentos generalizados de los desfases (véase también (5.6)), mientras que con las (7.14) y (7.15) se pueden obtener los coeficientes / impares, en forma de momentos generalizados de $|f^\sigma(k)|^2$. En tonces, a partir de las (7.8-11) podemos calcular los coeficientes S_n y D_n .

Nótese que los coeficientes pares dependen de los desfases y de las energías de los estados ligados, pero no de las constantes de normalización, mientras que los coeficientes impares dependen de todos los parámetros, en perfecto acuerdo con los resultados del caso no relativista⁽²⁸⁾.

Estamos ahora en condiciones, a partir de las /// (6.26), (6.27) y (6.22), de calcular los potenciales y sus / derivadas en el origen.

8. - Cálculo de los potenciales y sus derivadas en el origen

En esta sección deducimos expresiones para los valores de los potenciales y de sus tres primeras derivadas en el origen, en términos de los desfases y de las energías / de ligadura y las constantes de normalización de los estados ligados. Los resultados están dados por las fórmulas (8.20) a la (8.26). En la (8.27) damos las condiciones sobre los / parámetros de la colisión que se derivan de haber supuesto la igualdad en el origen de las derivadas primeras de los po tenciales.

Los cálculos se efectúan haciendo simplemente un / desarrollo para k grande de la función $|f^\sigma(k)|^2$ y compara-
ndo con las expresiones (6.26) y (6.27), sin deducir fórmu
las generales que son demasiado complicadas en este caso.

Para simplificar la descripción de los cálculos, / éstos se efectúan en el caso sin estados ligados, dándose al final también las correspondientes fórmulas en presencia de estados ligados.

La (5.6) puede ponerse, para el caso sin estados / ligados, como

$$|f^\sigma(k)|^2 = \exp \left[N_1(k) + \sigma E N_2(k) \right] \quad (8.1)$$

donde

$$N_1(k) = - \frac{P}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dk'}{k' - k} \eta^S(k') \quad (8.2)$$

$$\eta^S(k) = \eta^+(k) + \eta^-(k) \quad (8.3)$$

$$N_2(k) = - \frac{P}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dk'}{k' - k} \left[\eta^D(k') + 2\mu(\infty) \right] \quad (8.4)$$

$$\eta^D(k) = \frac{k}{E} \left[\eta^+(k) - \eta^-(k) \right] \quad (8.5)$$

De la (7.13) y (8.1) obtenemos

$$\text{Im } \bar{D}(k) = \frac{V_1(0) - V_2(0)}{k} + \frac{k}{E} \exp[-N_1(k)] \sinh[E N_2(k)] \quad (8.6)$$

Desarrollando esta expresión para k grande, se encuentra

$$\begin{aligned} \text{Im } \bar{D}(k) = & \left[V_1(0) - V_2(0) + d_1 \right] k^{-1} + \left[d_2 + \frac{1}{6} d_1^3 - s_1 d_1 \right] k^{-3} \\ & + O(k^{-5}) \end{aligned} \quad (8.7)$$

en la que los coeficientes vienen dados por

$$d_n = \frac{-1}{\pi(2n-1)!} \int_{-\infty}^{\infty} dk \mathbb{D}_k^{2n-1} \left[k^{-1} \eta^D(k) \right] \quad (8.8)$$

$$s_n = \frac{-1}{\pi(2n-1)!} \int_{-\infty}^{\infty} dk \mathbb{D}_k^{2n-1} \eta^S(k) \quad (8.9)$$

en las cuales $n \geq 1$ y $\mathbb{D}_k^n$ es el operador

$$\mathbb{D}_k^n = k^n \frac{d^n}{dk^n} k^n. \quad (8.10)$$

Los coeficientes se encuentran haciendo uso de los resultados matemáticos del artículo de Calogero y Degasperis⁽²⁸⁾ // (véase también la referencia 25), quienes han realizado desarrollos similares en el caso de la ecuación de Schrödinger / (véase también el anéndice B).

En manera similar, encontremos

$$\begin{aligned} \text{Im } \bar{S}(k) = & \left[-mV_1(0) + mV_2(0) - \frac{1}{2} d_1^2 + s_1 \right] k^{-1} + \\ & + \left[s_2 - \frac{1}{2} m^2 d_1^2 - d_1 d_2 - \frac{1}{24} d_1^4 + \frac{1}{2} s_1 d_1^2 - \frac{1}{2} s_1^2 \right] k^{-3} + \\ & + O(k^{-5}) \end{aligned} \quad (8.11)$$

De esta manera, de las (8.7) y (8.11) hemos obtenido los primeros coeficientes de orden par, i.e. $\bar{D}_0 = D_0$, / $\bar{D}_2 = D_2$, $\bar{S}_0 = S_0$ y $\bar{S}_2 = S_2$ (véase (7.8) y (7.10)).

Para calcular los coeficientes de orden impar, de-

desarrollamos las (7.14) y (7.15), y comparamos los coeficientes obtenidos de esta manera con los de los desarrollos (7.6) y (7.7); teniendo en cuenta las (7.9) y (7.11), obtenemos (véase apéndice B)

$$S_{2j+1} = \frac{(-)^j 2^{2j+1}}{\pi(2j+1)!} \int_{-\infty}^{\infty} dk \, D_k^{2j+1} \left\{ k^2 - \frac{1}{|f^-(k)|^2} - \frac{1}{|f^+(k)|^2} \right\} + \sum_{n,\sigma} \frac{2^{2j+2} E_n^\sigma C_n^\sigma (v_n^\sigma)^{2j}}{(E_n^\sigma + \sigma m)} \quad (8.12)$$

$$D_{2j+1} = \frac{(-)^j 2^{2j+1}}{\pi(2j+1)!} \int_{-\infty}^{\infty} dk \, D_k^{2j+1} \left\{ \frac{k}{E} \left[\frac{1}{|f^-(k)|^2} - \frac{1}{|f^+(k)|^2} \right] \right\} + \sum_{n,\sigma} \frac{\sigma 2^{2j+2} C_n^\sigma (v_n^\sigma)^{2j}}{(E_n^\sigma + \sigma m)} \quad (8.13)$$

Relacionando los coeficientes obtenidos de (8.7) y (8.11) y las expresiones (6.26a) y (6.27a), se encuentra el valor de los potenciales en el origen (recuérdese que no existen estados ligados)

$$V_1(0) = -m + \sqrt{(d_1 - m)^2 + \frac{4}{3}(2md_1 - d_1^2 + s_1)} \quad (8.14)$$

$$V_2(0) = \frac{1}{2}(d_1 - m) + \frac{1}{2} \sqrt{(d_1 - m)^2 + \frac{4}{3}(2md_1 - d_1^2 + s_1)} \quad (8.15)$$

Comparando las (8.12) y (8.13) con las (6.26b) y (6.27b), encontramos el valor de la primera derivada en el origen

$$V_1'(0) = V_2'(0) = -\frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} dk \, D_k^1 \left\{ \frac{k}{E} \left[\frac{1}{|f^-(k)|^2} - \frac{1}{|f^+(k)|^2} \right] \right\} \quad (8.16)$$

y la condición sobre los parámetros de la colisión resultan-

te de haber impuesto la igualdad de las derivadas primeras / en el origen

$$\int_{-\infty}^{\infty} dk \left\{ \frac{1}{k} \left[2 - \frac{E + m - 2\sqrt{(d_1 - m)^2 + \frac{4}{3}(2md_1 - d_1^2 + s_1)}}{E |f^+(k)|^2} - \frac{E - m + 2\sqrt{(d_1 - m)^2 + \frac{4}{3}(2md_1 - d_1^2 + s_1)}}{E |f^-(k)|^2} \right] \right\} = 0 \quad (8.17)$$

Las derivadas segundas se calculan comparando /// (6.26c) y (6.27c), con los coeficientes de orden k^{-3} de los desarrollos (8.7) y (8.11)

$$V_1''(0) = \frac{1}{5[V_1(0) + m]} \left\{ 4m^2 d_1^2 + 8d_1 d_2 + \frac{1}{3} d_1^4 - 4d_1^2 s_1 - 8s_2 + 4s_1^2 + \frac{1}{2} [V_1(0) - 2V_2(0) + 3m] [8d_1 s_1 - \frac{4}{3} d_1^2 - 8d_2] - 5[V_1'(0)]^2 + 12mV_1(0)V_2'(0) + 10mV_1^3(0) - 8mV_2^3(0) + 4m^2 [V_1(0)V_2(0) + 2V_1^2(0) + 2V_2^2(0)] + 3V_1^4(0) \right\} \quad (8.18)$$

$$V_2''(0) = \frac{3}{10[V_1(0) + m]} \left\{ 4m^2 d_1^2 + 8d_1 d_2 + \frac{1}{3} d_1^4 - 4d_1^2 s_1 - 8s_2 + 4s_1^2 - \frac{1}{3} [V_1(0) + 3V_2(0) - 2m] [8d_1 s_1 - \frac{4}{3} d_1^2 - 8d_2] - 5[V_1'(0)]^2 + \frac{16}{3} mV_1(0)V_2'(0) - 8mV_2^3(0) + \frac{20}{3} mV_1^2(0)V_2(0) + \frac{4}{3} m^2 [8V_1(0)V_2(0) + V_1^2(0) + V_2^2(0)] - \frac{1}{3} V_1^4(0) \right\} \quad (8.19)$$

Las derivadas terceras en el origen se encuentran relacionando las expresiones (8.12) y (8.13) con las (6.26d) y (6.27d). Sus expresiones se dan más adelante en el caso de existencia de estados ligados (véase (8.25) y (8.26)).

Para encontrar los valores en el origen de las de-

derivadas de orden superior de los potenciales es necesario // continuar el proceso anterior. Esto es, se deben comparar // los coeficientes que se encuentran prosiguiendo los desarrollos (8.7) y (8.11) para los ordenes sucesivos, y los hallados por medio de las (8.12) y (8.13), con los valores en el origen de los coeficientes que se encuentran haciendo uso // del sistema de relaciones de recurrencia (6.22).

Si en lugar de desarrollar la $|f^\sigma(k)|^2$ dada por la (8.1), desarrollamos la dada por (5.6), se encontrarán // los valores de los potenciales y de sus derivadas en el origen en presencia de estados ligados. Damos aquí los resultados de este cálculo:

$$V_1(0) = -m + \sqrt{m^2 - \frac{4}{3}(\frac{1}{2}d_1 - c_1)(\frac{1}{2}d_1 - c_1 - m) + \frac{4}{3}(s_1 + h_1)} \quad (8.20)$$

$$V_2(0) = \frac{1}{2} \left[d_1 - 2c_1 - m + \sqrt{m^2 - \frac{4}{3}(\frac{1}{2}d_1 - c_1)(\frac{1}{2}d_1 - c_1 - m) + \frac{4}{3}(s_1 + h_1)} \right] \quad (8.21)$$

$$V_1'(0) = V_2'(0) = -\frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} dk \, D_k^1 \left\{ \frac{1}{E} \left[\frac{1}{|f^-(k)|^2} - \frac{1}{|f^+(k)|^2} \right] \right\} - \sum_{n,\sigma} \frac{2\sigma c_n^\sigma}{(E_n^\sigma + \sigma m)} \quad (8.22)$$

$$V_1''(0) = \frac{1}{5[V_1(0) + m]} \left\{ s_2 + \frac{1}{2} [V_1(0) - 2V_2(0) + 3m] D_2 - 5[V_1'(0)]^2 - 12mV_1(0)V_2'(0) + 10mV_1^3(0) - 8mV_2^3(0) + 4m^2[V_1(0)V_2(0) + 2V_1^2(0) + 2V_2^2(0)] + 3V_1^4(0) \right\} \quad (8.23)$$

$$V_2''(0) = \frac{3}{10[V_1(0) + m]} \left\{ s_2 - \frac{1}{3} [V_1(0) + 3V_2(0) - 2m] D_2 - \right.$$

$$- 5 \left[V_1'(0) \right]^2 + \frac{16}{3} m V_1(0) V_2^2(0) - 8 m V_2^3(0) + \frac{20}{3} m V_1^2(0) V_2(0) + \\ + \frac{4}{3} m^2 \left[8 V_1(0) V_2(0) + V_1^2(0) + V_2^2(0) \right] - \frac{1}{3} V_1^4(0) \} \quad (8.24)$$

donde

$$D_2 = 8(d_1 - 2c_1)(s_1 + h_1) - \frac{4}{3} d_1^3 - 8d_2 + \\ + 8 \left[2c_3 - 2m^2 c_1 - 2c_1^2 d_1 + c_1 d_1^2 \right] \quad (8.24')$$

$$S_2 = 4m^2 d_1^2 + 8d_1 d_2 + \frac{1}{3} d_1^4 - 4(d_1 - 2c_1)^2 (s_1 + h_1) + \\ + 4(s_1 + h_1)^2 - 4h_1^2 + 16 \left[c_4 - m^2 c_1^2 - c_3 d_1 - c_1 d_2 + \frac{1}{2} c_1^2 d_1^2 - \right. \\ \left. - \frac{1}{6} c_1 d_1^3 \right] - 8(s_2 - h_2) \quad (8.24'')$$

$$V_1'''(0) = \frac{1}{6[V_1(0) + m]} \left[-S_3 + [2V_2(0) - V_1(0) - 2m] D_3 + \right. \\ + 2V_1'(0) \left\{ -9V_1''(0) + 8V_1(0) [V_1(0) V_2(0) + 5m V_1(0) + \right. \\ + 4m V_2(0) + 2V_1^2(0)] - 8V_2^2(0) [m + V_1(0)] + \\ \left. \left. + 24 m^2 [V_1(0) + V_2(0)] \right\} \right] \quad (8.25)$$

$$V_2'''(0) = \frac{1}{3[V_1(0) + m]} \left[-S_3 + \frac{1}{2} [V_1(0) + 4V_2(0) - m] D_3 + \right. \\ + 2V_1'(0) \left\{ -9V_1''(0) + 4V_1(0) [-V_1(0) V_2(0) + 4m V_1(0) + \right. \\ + 2m V_2(0) + V_1^2(0)] - 8V_2^2(0) [m + V_1(0)] + \\ \left. \left. + 12 m^2 [V_1(0) + V_2(0)] \right\} \right] \quad (8.26)$$

donde S_3 y D_3 vienen dados por (8.12) y (8.13).

La condición $V_1'(0) = V_2'(0)$ nos da la relación de vínculo

$$\frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} dk \mathbb{D}_k^1 \left\{ k \left[2 - \frac{E - m - 2V_1(0)}{E |f^+(k)|^2} - \frac{E + m + 2V_1(0)}{E |f^-(k)|^2} \right] \right\} + \sum_{n,\sigma} \frac{2 \{ E_n^\sigma - \sigma [m + 2V_1(0)] \} C_n^\sigma}{(E_n^\sigma + \sigma m)} = 0 \quad (8.27)$$

En las expresiones anteriores los coeficientes s_n y d_n vienen dados por las (8.8) a (8.10), mientras que los coeficientes de los estados ligados son los siguientes:

$$c_1 = \sum_{n,\sigma} (E_n^\sigma - \sigma m) \quad (8.28a)$$

$$c_3 = \frac{2}{3} c_1^3 + \frac{1}{3} \sum_{n,\sigma} [(E_n^\sigma)^3 - \sigma m^3] \quad (8.28b)$$

$$c_4 = \frac{1}{3} c_1^4 + \frac{2}{3} c_1 \sum_{n,\sigma} [(E_n^\sigma)^3 - \sigma m^3] \quad (8.28c)$$

$$h_1 = \sum_{n,\sigma} (n_n^\sigma)^2 \quad (8.29a)$$

$$h_2 = \sum_{n,\sigma} (p_n^\sigma)^4 + \sum_{n < m, \sigma} (p_n^\sigma p_m^\sigma)^2 + \sum_{n,m} (n_n^+ p_m^-)^2 \quad (8.29b)$$

Todos los resultados anteriores son para $\lambda = -1$, i.e. onda S. Para encontrar los correspondientes resultados para onda P, se debe simplemente cambiar el signo de m y / de $V_1^{(j)}(0)$ ($j = 0, 1, 2, \dots$), (véase (1.21')) y recuérdese que $g(k, r)$ viene dada por el cociente entre una componente y su derivada) y usar los correspondientes datos de la colisión / en onda P.

9. - Relaciones entre los juegos de datos de la colisión na-
ra la partícula y la antipartícula.

En esta sección particularizamos los resultados de la sección anterior al caso de la ecuación de Dirac usual, / esto es, con $V_2(r) = V(r)$ y $V_1(r) = 0$, dándose expresio- nes para calcular los valores del potencial y de sus tres // primeras derivadas en el origen, así como condiciones sobre los parámetros de la colisión.

Como se hizo notar previamente, estas expresiones constituyen un primer paso para encontrar relaciones que li- guen los datos de la partícula con los de la antipartícula. Sin embargo, estas condiciones tienen un valor restringido, puesto que fueron deducidas para el caso particular de un po- tencial cuya derivada primera se anule en el origen. Es de / esperar que más adelante se puedan encontrar expresiones más generales, que nos permitan resolver totalmente el problema inverso para partículas que satisfagan la ecuación de Dirac.

De la (8.21) obtenemos el valor del potencial

$$V(0) = \frac{1}{2} d_1 - c_1 = - \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} dk \quad \mathbb{D}_k^1 \left[k^{-1} \eta^D(k) \right] - \sum_{n,\sigma} (E_n^\sigma - \sigma m) \quad (9.1)$$

y de (8.20), la primera condición que liga los desfases y los parámetros de los estados ligados

$$s_1 + h_1 = \left(\frac{1}{2} d_1 - c_1 \right) \left(\frac{1}{2} d_1 - c_1 - m \right) = V(0) [V(0) - m] \quad (9.2)$$

La exigencia de anulación de la primera derivada / en el origen nos da las dos condiciones

$$\frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} dk \quad \mathbb{D}_k^1 \left\{ k \left[\frac{1}{|f^-(k)|^2} - \frac{1}{|f^+(k)|^2} \right] \right\} + \sum_{n,\sigma} \frac{\sigma c_n^\sigma}{(E_n^\sigma + \sigma m)} = 0 \quad (9.3)$$

$$\frac{1}{\Pi} \int_{-\infty}^{\infty} dk \quad D_k^1 \left\{ k \left[2 - \frac{1}{|f^-(k)|^2} - \frac{1}{|f^+(k)|^2} \right] \right\} + \sum_{n,\sigma} \frac{E_n^\sigma c_n^\sigma}{(E_n^\sigma + \sigma m)} = 0 \quad (9.4)$$

deducidas de las (8.22) y (8.27).

Para la segunda derivada, de (8.23) y (8.24), e im-
poniendo (9.2), obtenemos

$$V''(0) = -\frac{1}{6} d_1^3 + \frac{1}{2} m d_1^2 + 2d_2 + c_1 d_1^2 - 2mc_1 d_1 - 2c_1^2 d_1 + \\ + 2mc_1^2 + 4m^2 c_1 + 4c_1^3 - 4c_3 \quad (9.5)$$

y la condición

$$s_2 - h_2 = -\frac{3}{2} V^4(0) + 3mV^3(0) + \frac{1}{2} m^2 V^2(0) + \frac{3}{2} [2V(0) - m] d_2 + \\ + 2m^2 c_1 V(0) + 4 [2V(0) - m] (c_3 - \frac{1}{3} c_1^3) - \frac{1}{2} h_1^2 + \\ + 3m^3 c_1 \quad (9.6)$$

De las (8.25) y (8.26) encontramos la tercera deri-
vada

$$V'''(0) = \frac{1}{2} D_3 = -\frac{2}{3\Pi} \int_{-\infty}^{\infty} dk \quad D_k^3 \left\{ \frac{k}{E} \left[\frac{1}{|f^-(k)|^2} - \frac{1}{|f^+(k)|^2} \right] \right\} + \\ + \sum_{n,\sigma} \frac{8\sigma c_n^\sigma (c_n^\sigma)^2}{(E_n^\sigma + \sigma m)} \quad (9.7)$$

y la condición

$$S_3 = (d_1 - 2c_1 - 2m) D_3 \\ = 2 [V(0) - m] D_3 \quad (9.8)$$

En todas las fórmulas anteriores, los coeficientes vienen da-
dos por las (8.8)-(8.10), (8.12)-(8.13) y (8.28)-(8.29).

Las condiciones encontradas pueden utilizarse para deducir expresiones que nos den las energías y las constantes de normalización de los estados ligados en función de // los desfases. Por ejemplo, en el caso particular de que exista sólo un estado ligado para la partícula (o para la antipartícula), de la (9.2) obtenemos

$$N^+ = 1, N^- = 0$$

$$E_1^+(S) = \frac{d_1 + m}{4} + \sqrt{\left[\frac{d_1 + m}{4}\right]^2 - \frac{1}{8} d_1^2 - \frac{1}{4} m d_1 + \frac{1}{2} m^2 + \frac{1}{2} s_1} \quad (9.9)$$

y de (9.3), teniendo en cuenta (8.13) y (7.11),

$$C_1^+(S) = -\frac{1}{2} \left[E_1^+(S) + m \right] \bar{D}_1(S) \quad (9.10)$$

Debe notarse que estos resultados han sido obtenidos usando solamente las condiciones $V_1(0) = 0$ y $V_1'(0) = 0$, sin hacer uso de la condición $V_2'(0) = V'(0) = 0$. Es entonces razonable suponer que estas relaciones continúen siendo válidas para potenciales más generales, sin ninguna restricción sobre el valor que deba tomar su derivada primera en el origen.

Las expresiones (9.9) y (9.10) nos dan el nivel de energía y la constante de normalización en el caso de que exista un estado ligado en onda S para la partícula. Los correspondientes resultados para onda P son

$$E_1^+(P) = \frac{d_1 + 3m}{4} + \sqrt{\left[\frac{d_1 + 3m}{4}\right]^2 - \frac{1}{8} d_1^2 - \frac{3}{4} m d_1 - \frac{1}{2} m^2 + \frac{1}{2} s_1} \quad (9.11)$$

y

$$C_1^+(P) = -\frac{1}{2} \left[E_1^+(P) + m \right] \bar{D}_1(P) \quad (9.12)$$

Si existe sólo un estado ligado en onda S para la antipartícula, tenemos

$$N^+ = 0, N^- = 1$$

$$E_1^-(S) = \frac{d_1 - 3m}{4} - \sqrt{\left(\frac{d_1 - 3m}{4}\right)^2 - \frac{1}{8} d_1^2 + \frac{3}{4} m d_1 - \frac{1}{2} m^2 + \frac{1}{2} s_1} \quad (9.13)$$

y

$$C_1^-(S) = \frac{1}{2} \left[E_1^-(S) - m \right] \bar{D}_1(S) \quad , \quad (9.14)$$

y correspondientemente para onda P encontramos

$$E_1^-(P) = \frac{d_1 - m}{4} - \sqrt{\left(\frac{d_1 - m}{4}\right)^2 - \frac{1}{8} d_1^2 + \frac{1}{4} m d_1 + \frac{1}{2} m^2 + \frac{1}{2} s_1} \quad (9.15)$$

y

$$C_1^-(P) = \frac{1}{2} \left[E_1^-(P) - m \right] \bar{D}_1(P) \quad . \quad (9.16)$$

10. - El límite no relativista

Tomando el límite no relativista de nuestros resultados (para la ecuación de Dirac usual), debemos encontrar los dados en la literatura para la ecuación de Schrödinger. Luego, el límite no relativista de nuestros resultados en el caso de onda S constituye un excelente test de su validez. Además, para el caso de onda P, encontraremos expresiones (válidas para el caso de Schrödinger) para los valores de la segunda y tercera derivadas del potencial en el origen, en función de los parámetros de la colisión en onda P, que constituyen resultados nuevos.

Para no dar lugar a confusiones, notaremos en todas las funciones la dependencia explícita de λ , y colocaremos el subíndice NR a toda función en la que se haya tomado el límite no relativístico.

Estudiaremos ahora las ecuaciones que satisfacen las componentes de las soluciones de Jost. Introducimos la función auxiliar

$$F_2^+(k, r, +1) = [\alpha(r)\beta(\infty)]^{-1/2} f_2^+(k, r, +1) ; \text{ (i.e. } \lambda = +1) \quad (10.1)$$

la ecuación (de tipo Schrödinger) que satisface esta función es

$$\begin{aligned} F_2^{+''}(k, r, +1) + \left(k^2 - \frac{2}{r^2}\right) F_2^+(k, r, +1) = \\ = \left[2EV(r) - V^2(r) + \frac{1}{r} \frac{\alpha'(r)}{\alpha(r)} + \frac{3}{4} \left(\frac{\alpha'(r)}{\alpha(r)}\right)^2 - \frac{1}{2} \frac{\alpha''(r)}{\alpha(r)}\right] F_2^+(k, r, +1) \end{aligned} \quad (10.2)$$

además es

$$\lim_{r \rightarrow \infty} F_2^+(k, r, +1) = i e^{-ikr} \quad (10.3)$$

De la definición (3.6) de la función de Jost, y de las (3.13) y (2.3), con $V_1(r) \equiv 0$ y $V_2'(0) = V'(0) = 0$, / se ve que

$$f^+(k, +1) = \lim_{r \rightarrow 0} \left[r f_2^+(k, r, +1) \right] = \frac{f_1^+(k, 0, +1)}{\beta(0)} =$$

$$= |f^+(k, +1)| \exp \left[i \eta^+(k, +1) \right] \quad (10.4)$$

Luego, en el límite no relativista

$$F_{2NR}^+(k, r, +1) = k^{-1} f_{2NR}^+(k, r, +1) \quad (10.5)$$

$$F_{2NR}^{+''}(k, r, +1) + \left(k^2 - \frac{2}{r^2} \right) F_{2NR}^+(k, r, +1) = 2mV(r) F_{2NR}^+(k, r, +1) \quad (10.6)$$

$$\lim_{r \rightarrow 0} F_{2NR}^+(k, r, +1) = i e^{-ikr} \quad (10.7)$$

y

$$f_{NR}^+(k, +1) = \lim_{r \rightarrow 0} \left[r f_{2NR}^+(k, r, +1) \right] = \lim_{r \rightarrow 0} \left[kr F_{2NR}^+(k, r, +1) \right]. \quad (10.8)$$

Entonces, $f_{NR}^+(k, +1)$ es la función de Jost en el caso de // Schrödinger para $l = 1$, y $F_{2NR}^+(k, r, +1)$ es la solución de Jost para este caso.

Correspondientemente, para el desfase se obtiene

$$\eta_{NR}^+(k, +1) = \delta(k, V, l=1) \quad (10.9)$$

donde $\delta(k, V, l)$ es el desfase para el problema de Schrödinger, para el momento lineal k , momento angular l , y / potencial $+V(r)$.

Repetiendo lo efectuado con las otras componentes de las soluciones de Jost del problema de Dirac, para $\lambda = \pm 1$, y para los dos signos de la energía, se obtiene

$$\eta_{NR}^{-}(k, +1) = \delta(k, -V, l=0) \quad (10.10)$$

$$\eta_{NR}^{+}(k, -1) = \delta(k, V, l=0) \quad (10.11)$$

$$\eta_{NR}^{-}(k, -1) = \delta(k, -V, l=1) \quad (10.12)$$

esto es, los desfases del problema de Dirac para la partícula y la antipartícula, para "momento angular" cero y uno, / se convierten en el límite no relativista en los desfases del problema de Schrödinger con potenciales $V(r)$ y $-V(r)$ y momento angular cero y uno.

Consideremos ahora la expresión de la función de Jost ^{est en} en términos de los desfases y las energías de los estados ligados (véase (5.6)). Observemos que en el límite no relativista

$$\frac{E - E_n^+}{E + E_n^+} \cdot \frac{E + m}{E - m} = 1 + \left(\frac{p_n^+}{k} \right)^2 \quad (10.13)$$

$$\frac{E - E_n^-}{E + E_n^-} \cdot \frac{E - m}{E + m} = \left\{ 1 + \left(\frac{p_n^-}{k} \right)^2 \right\}^{-1} \quad (10.14)$$

de manera que

$$\begin{aligned} |f_{NR}^{+}(k, +1)| &= \prod_{n=1}^N \left(1 - \frac{E_n(l=1)}{k^2} \right) \exp \left(- \frac{P}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} dk' \frac{k'}{k'^2 - k^2} \delta(k', V, l=1) \right) \\ &= |f(k, V, l=1)| \end{aligned} \quad (10.15)$$

fórmula que reproduce la bien conocida expresión en el caso

de Schrödinger (véase v. g. la ecuación (2.29) de la referencia 28). En la (10.15), $E_n(l=1) = -\eta_n^+(\lambda=+1)^2$ indica la energía del n-ésimo estado ligado producido por el potencial $V(r)$ para momento angular uno.

Del mismo modo vemos que

$$|f_{NR}^+(k, -1)| = |f(k, V, l=0)| \quad (10.16)$$

$$|f_{NR}^-(k, +1)| = |f(k, -V, l=0)| \quad (10.17)$$

$$|f_{NR}^-(k, -1)| = |f(k, -V, l=1)| \quad (10.18)$$

En estas ecuaciones $f(k, V, l)$ es la función de Jost del problema de Schrödinger, con momento lineal k , momento angular l y potencial $+V(r)$.

Para la constante de normalización de los estados ligados (véase (7.5)), el límite no relativista nos da

$$c_n(l) = \frac{-4i[\eta_n(l)]^2}{f[i\eta_n(l)]\dot{f}[-i\eta_n(l)]} \quad (10.19)$$

siendo éste también un resultado bien conocido en el caso de Schrödinger (véase la ecuación (A.10) de la referencia 28).

De la (6.12) con $V_1(r) \equiv 0$, y de las (6.13) y // (6.14), vemos también que en el límite no relativista

$$g_{NR}^+(k, r, -1) = g(k, r, V, l=0) \quad (10.20)$$

donde $g(k, r, V, l)$ es la función de la ecuación (4.1) de la referencia 28. Nótese también que

$$g_{NR}^+(k, r, -1) = S_{NR}(k, r, -1) + m D_{NR}(k, r, -1) \quad (10.21)$$

A partir de estas ecuaciones se demuestra fácilmente que el límite no relativista del sistema (6.22) reproduce las relaciones de recurrencia encontradas en el caso de Schrödinger (véase la ecuación (4.6) de la referencia 28).

De la misma manera se obtiene

$$\begin{aligned} g_{NR}^-(k, r, +1) &= S_{NR}(k, r, +1) - m D_{NR}(k, r, +1) \\ &= g(k, r, -V, l=0) \end{aligned} \quad (10.22)$$

Entonces, el límite no relativista del problema de Dirac para la partícula con $\lambda = -1$ ("onda S") y para la antipartícula con $\lambda = +1$ ("onda P"), corresponde a dos problemas de Schrödinger con potenciales $+V(r)$ y $-V(r)$, respectivamente, ambos en onda S.

Esta correspondencia puede ser verificada calculando el límite no relativista de las expresiones para los valores en el origen del potencial y de sus derivadas.

De la (9.2) vemos que, en el límite no relativista

$$s_{1NR} + h_{1NR} = -m \left[\frac{1}{2} d_{1NR} - c_{1NR} \right] \quad (10.23)$$

y sustituyendo en la (9.1)

$$V(0) = d_{1NR} - 2 c_{1NR} + \frac{1}{m} \left[s_{1NR} + h_{1NR} \right] \quad (10.24)$$

De las (8.28a), (8.29a), (8.8) y (8.9) obtenemos

$$c_{1NR} = -\frac{1}{2m} \left[\sum_{n=1}^{N^+} (v_n^+)^2 - \sum_{n=1}^{N^-} (v_n^-)^2 \right]$$

$$h_{1NR} = \sum_{n=1}^{N^+} (v_n^+)^2 + \sum_{n=1}^{N^-} (p_n^-)^2$$

$$d_{1NR} + \frac{1}{m} s_{1NR} = - \frac{2}{\pi m} \int_{-\infty}^{\infty} dk \, D_k^1 \delta(k, V, l=0)$$

de las cuales se obtiene

$$2mV(0) = - \frac{8}{\pi} \int_0^{\infty} dk \, D_k^1 \delta(k, V, l=0) - 4 \sum_{n=1}^N E_n(l=0) \quad (10.25)$$

siendo éste el bien conocido resultado obtenido por primera vez por Newton⁽²³⁾, e independientemente por Faddeev⁽²⁴⁾.

El valor en el origen de la primera derivada del potencial es, en nuestro caso, cero, hipótesis que hemos hecho en la sección anterior. De todos modos, es interesante notar que combinando el límite no relativista de las condiciones (9.3) y (9.4) se obtiene

$$0 = \frac{4}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} dk \, D_k^1 \left\{ k \left[1 - \frac{1}{|f(k, V, l=0)|^2} \right] \right\} + 4 \sum_{n=1}^N c_n(l=0) \quad (10.26)$$

cuyo miembro derecho reproduce la expresión de $V'(0)$ en el caso de Schrödinger (véase la ecuación (6.5) de la referencia 28).

Para la segunda derivada, observamos que el límite no relativista de la (9.5) es

$$V''(0) = 2mV^2(0) + 2d_{2NR} - 4m^2 c_{1NR} - 4c_{3NR} + \frac{8}{3} c_{1NR}^3 \quad (10.27)$$

y de la (9.6)

$$s_{2NR} = h_{2NR} + \frac{1}{2} m^2 V^2(0) - \frac{3}{2} m d_{2NR} + 4mc_{3NR} + \frac{4}{3} mc_{1NR}^3 - \frac{1}{2} h_{1NR}^2 + 3m^3 c_{1NR} \quad (10.28)$$

y combinando esas expresiones se obtiene

$$2mV''(0) = 8m^2 V^2(0) + \frac{2^4}{\pi 3!} \int_{-\infty}^{\infty} dk \, D_k^3 \delta(k, V, l=0) + 2^3 \sum_{n=1}^N [E_n(l=0)]^2 \quad (10.29)$$

La (10.29) coincide nuevamente con la fórmula para el caso / de Schrödinger (véase la ecuación (6.6) de la referencia 28).

El límite no relativista de la tercera derivada se encuentra fácilmente. Nótese que combinando las (9.7) y (9.8) se puede escribir

$$2mV'''(0) = -m D_{3NR} - S_{3NR} \quad (10.30)$$

de la cual se obtiene

$$\begin{aligned} 2mV'''(0) &= \frac{2^4}{\pi 3!} \int_{-\infty}^{\infty} dk \, D_k^3 \left\{ k \left[1 - |f(k, V, l=0)|^{-2} \right] \right\} + \\ &+ 2^4 \sum_{n=1}^N C_n(l=0) E_n(l=0) = \\ &= -\frac{2^4}{\pi 5!} \int_{-\infty}^{\infty} dk \, D_k^5 \left[k^{-1} |f(k, V, l=0)|^{-2} \right] + \\ &+ 2^4 \sum_{n=1}^N C_n(l=0) E_n(l=0) \end{aligned} \quad (10.31)$$

Esta última ecuación coincide con la fórmula obtenida en el caso de Schrödinger (véase la ecuación (6.7) de la referencia 28), supuesto que $V'(0) = 0$. (Para calcular la última igualdad se han efectuado dos integraciones por partes).

Aplicando la transformación (1.21') a las expresiones (9.1) y (9.2), esto es, simplemente cambiando el signo / de m , dado que $V_1(r) \equiv 0$, e introduciendo los desfases y los parámetros de los estados ligados para $\lambda = 1$, se obtienen los resultados para el problema de Dirac en "onda P" ($\lambda = +1$); tomando el límite no relativista se obtiene

$$2mV(0) = - \frac{8}{3\pi} \int_0^{\infty} dk \quad D_k^1 \delta(k, V, \ell=1) - \frac{4}{3} \sum_{n=1}^N E_n(\ell=1) \quad (10.32)$$

Esta es la fórmula para el caso de Schrödinger para $\ell = 1$. (Véase Newton⁽¹⁶⁾, fórmula (8.14')).

Para la segunda y tercera derivada obtenemos

$$2mV''(0) = - \frac{24}{5} m^2 V^2(0) - \frac{2^5}{3!5\pi} \int_0^{\infty} dk \quad D_k^3 \delta(k, V, \ell=1) - \\ - \frac{8}{5} \sum_{n=1}^N \left[E_n(\ell=1) \right]^2 \quad (10.33)$$

$$2mV'''(0) = \frac{2^5}{3!5\pi} \int_0^{\infty} dk \quad D_k^3 \left\{ k \left[1 - |f(k, V, \ell=1)|^{-2} \right] \right\} - \\ - 2^4 \sum_{n=1}^N C_n(\ell=1) E_n(\ell=1) \quad (10.34)$$

Las dos últimas expresiones constituyen resultados nuevos, es decir, ellas no fueron halladas al estudiar el // problema de Schrödinger (véanse las conclusiones).

Finalmente, nótese que partiendo de (10.23) y ///

(10.24) se puede también obtener la correspondiente a la ///
 (10.32) para el potencial $-V(r)$, mientras que repitiendo /
 el procedimiento para obtener (10.32) se puede obtener la //
 (10.25) para $-V(r)$ en lugar de $V(r)$. Esto es una confirma
 ción de que los problemas de Dirac para $\lambda = \pm 1$ y $\pm E$, se
 convierten en problemas de Schrödinger para $\ell = 0, 1$ y poten
 ciales $\pm V(r)$.

CONCLUSIONES

Se ha desarrollado un método que permite calcular los valores de los potenciales y, en principio, los de todas sus derivadas en el origen.

Estos resultados tienen dos restricciones: una, // teórica, sobre el valor que deben tener las derivadas primeras en el origen; y otra, práctica, debida a las condiciones de "bondad" impuestas a los potenciales (véase (1.3)). Además, como sucede en el problema de Schrödinger, el método // permite obtener resultados en una zona cercana al origen, zona en la que éstos son menos atendibles. Por todo esto, los resultados son más interesantes por su valor matemático que por la posibilidad de su aplicación. Sin embargo, creemos // que una extensión de este estudio a problemas más generales hará posible su utilización en casos físicos reales.

Constituyen resultados interesantes además, los / hallados para el caso de la ecuación de Dirac usual, al encontrarse diversas relaciones que ligan entre sí los datos / de la colisión.

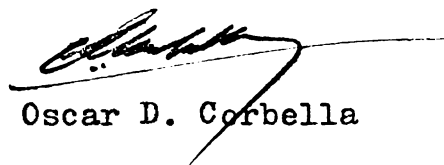
Estas relaciones nos dicen que los datos no son in dependientes y que son sobreabundantes para la determinación del potencial. Y el hecho de que haya demasiados datos de en trada, nos permite concluir que el problema inverso para la ecuación de Dirac usual no ha sido resuelto todavía. Es de / presumir que para resolverlo se necesite, en último análisis, sólo un juego de datos. A partir de éstos, por ejemplo, los de la partícula, debe poder deducirse unívocamente el potencial, y de éste debe ser posible calcular los datos de la an tipartícula.

Las relaciones entre los datos de la colisión que aquí damos no son, por supuesto, lo suficientemente genera -

les como para resolver este problema, pero constituyen un // primer paso hacia la solución.

También merecen destacarse los resultados hallados cuando se toma el límite no relativista. Se ha obtenido una coincidencia con los resultados anteriormente conocidos para la ecuación de Schrödinger en onda S, y además fórmulas originales para el valor de la segunda y tercera derivadas del potencial en el origen en función de los datos en onda P.

Estos últimos resultados no habían podido ser obtenidos por el método del desarrollo asintótico (ver Ref.28) / debido a la singularidad del potencial centrífugo. Nuestros resultados indican sin embargo, que es posible vencer esta / dificultad para la clase de potenciales que tengan sus derivadas primeras nulas en el origen. La técnica que debe utilizarse es sugerida por la que hemos seguido, que esencialmente consiste en la transformación de una ecuación de Schrödinger en onda P, en otra en onda S con un potencial "equivalente", que es más complicado y dependiente de la energía, pero finito si la primera derivada del potencial se anula en el origen. También es de esperar que, repitiendo este procedimiento, sea posible tratar todas las ondas parciales para // las ecuaciones de Schrödinger y de Dirac, siempre para una / clase de potenciales con mayores restricciones a medida que se aumenta el índice de la onda parcial considerada.



Oscar D. Corbella



Prof. Francesco Calogero
Asesor Científico

Deseo agradecer al Prof. Francesco Calogero, quien propuso esta investigación y guió su desarrollo, así como // también al Dr. Antonio Degasperis por las fructíferas discusiones sobre el tema. Finalmente deseo agradecer la cordial hospitalidad brindada por el Istituto di Fisica "G. Marconi" de la Universidad de Roma, donde efectué este trabajo, como además al Consejo Nacional de Investigaciones Científicas y Técnicas y al Instituto de Matemática, Astronomía y Física / de la Universidad Nacional de Córdoba, quienes hicieron posible mi permanencia en dicho instituto.

Anéndice A

En este anéndice hacemos algunas consideraciones / sobre la presencia de términos logarítmicos en el desarrollo en el origen de las soluciones de la ecuación (2.1).

A partir del sistema (2.1), por eliminación de una variable, obtenemos

$$\begin{aligned} v_{\lambda}''(k, r) + \left[k^2 - \frac{\lambda(\lambda-1)}{r^2} \right] v_{\lambda}(k, r) = & \left\{ 2EV_2(r) + 2mV_1(r) + \right. \\ & + V_1^2(r) - V_2^2(r) + \frac{\lambda}{r} \frac{V_1'(r) + V_2'(r)}{E - m - V_1(r) - V_2(r)} + \\ & \left. + \frac{3}{4} \left[\frac{V_1'(r) + V_2'(r)}{E - m - V_1(r) - V_2(r)} \right]^2 + \frac{1}{2} \frac{V_1''(r) + V_2''(r)}{E - m - V_1(r) - V_2(r)} \right\} v_{\lambda}(k, r) \end{aligned} \quad (A.1)$$

donde

$$v_{\lambda}(k, r) = \left\{ \left[E - m - V_1(r) - V_2(r) \right] (E - m) \right\}^{-1/2} u_{\lambda}^{\lambda}(k, r)$$

La ecuación (A.1) puede ser interpretada como una ecuación / de Schrödinger con un potencial dependiente de la energía y singular en el origen (puesto que $\lambda \neq 0$). Entonces, el comportamiento de la solución en el origen debe ser del tipo // (para $\lambda = 1$)

$$\lim_{r \rightarrow 0} v_1(k, r) = \text{const.} + A \ln Br \quad (A.2)$$

donde

$$A \propto V_1'(0) + V_2'(0)$$

(para el caso $\lambda = -1$, se prueba que $A \propto V_1'(0) + V_2'(0)$; / véase (1.20) o (1.21)).

Nótese que si A se anula, desaparece la singularidad en la ecuación (A.1). En el problema de Schrödinger se encuentran términos logarítmicos si existen singularidades / ($l \neq 0$, o potenciales no regulares), y esos términos impiden el uso de un método de desarrollo asintótico tal como el que hemos usado en este trabajo. Luego, para emplear tal método, hemos debido elegir los potenciales de manera que excluyan / la presencia de términos logarítmicos.

Apéndice B

Al tratar el problema de Schrödinger, Calogero y Degasperis⁽²⁸⁾ han introducido los siguientes desarrollos asintóticos para los desfases (los números a la izquierda / indican las ecuaciones de ese trabajo)

$$(2.41) \quad \eta(k) = \sum_{n=0}^N a_n k^{-2n-1} + o(k^{-2N-3}) \quad .$$

Teniendo la expresión

$$(2.50) \quad N(k) = - \frac{P}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} dk' \frac{k'}{k'^2 - k^2} \eta(k') \quad ,$$

probaron que admite el siguiente desarrollo asintótico

$$(3.18) \quad N(k) = \sum_{n=1}^N d_n k^{-2n} + o(k^{-2N-2}) \quad ,$$

en la que los coeficientes vienen dados por

$$(3.17) \quad d_n = - \frac{1}{\pi(2n-1)!} \int_{-\infty}^{\infty} dk \, k^{2n-1} \eta(k) \quad .$$

En nuestro caso estamos en una situación similar. Introducimos los siguientes desarrollos asintóticos

$$\begin{aligned} \eta^+(k) = \sum_{n=0}^N a_n k^{-2n-1} + o(k^{-2N-3}) + E \sum_{n=0}^{N'} b_n k^{-2n-1} + \\ + o(k^{-2N'-3}) \end{aligned} \quad (B.1)$$

$$\begin{aligned} \eta^-(k) = \sum_{n=0}^N a_n k^{-2n-1} + o(k^{-2N-3}) - E \sum_{n=0}^{N'} b_n k^{-2n-1} + \\ + o(k^{-2N'-3}) \end{aligned} \quad (B.2)$$

en las que hemos elegido $b_0 = -2\mu(\infty)$: obviamente estos desarrollos son consistentes con las ecuaciones (3.9) y (4.28). La ausencia de términos logarítmicos es una consecuencia de las condiciones impuestas a los potenciales (véase la sección 3).

A partir de las (B.1) y (B.2) definimos

$$\eta^S(k) = \eta^+(k) + \eta^-(k) = 2 \sum_{n=0}^N a_n k^{-2n-1} + O(k^{-2N-3}) \quad (B.3)$$

$$\eta^D(k) = \frac{k}{E} [\eta^+(k) - \eta^-(k)] = 2 \sum_{n=0}^{N'} b_n k^{-2n} + O(k^{-2N'-2}) \quad (B.4)$$

$$\eta^D(k) + 2\mu(\infty) = 2 \sum_{n=0}^{N'} b_{n+1} k^{-2n-2} + O(k^{-2N'-4}) \quad (B.5)$$

Entonces, escribiendo (8.2) como

$$N_1(k) = -\frac{P}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} dk' \frac{k'}{k'^2 - k^2} \eta^S(k') \quad (B.6)$$

e introduciendo el desarrollo asintótico

$$N_1(k) = \sum_{n=1}^N s_n k^{-2n} + O(k^{-2N-2}) \quad (B.7)$$

tendremos que los coeficientes (utilizando los resultados // del caso no relativista) vendrán dados por

$$s_n = \frac{-1}{\pi(2n-1)!} \int_{-\infty}^{\infty} dk \mathcal{D}_k^{2n-1} \eta^S(k) \quad (B.8)$$

Para la función $N_2(k)$, de la (8.4) tenemos

$$N_2(k) = -\frac{P}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} dk' \frac{1}{k'^2 - k^2} [\eta^D(k') + 2\mu(\infty)] \quad (B.9)$$

luego, un desarrollo del tipo

$$N_2(k) = \sum_{n=1}^N d_n k^{-2n} + o(k^{-2N-2}) \quad (B.10)$$

implica los coeficientes la expresión

$$\begin{aligned} d_n &= \frac{-1}{\pi(2n-1)!} \int_{-\infty}^{\infty} dk \, D_k^{2n-1} \left\{ k^{-1} [\eta^D(k) + 2\mu(\infty)] \right\} \\ &= \frac{-1}{\pi(2n-1)!} \int_{-\infty}^{\infty} dk \, D_k^{2n-1} \left[k^{-1} \eta^D(k) \right] \end{aligned} \quad (B.11)$$

En la misma forma, teniendo

$$\operatorname{Re} \bar{S}(k) = - \frac{P}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} dk' \, \frac{k'}{k'^2 - k^2} \operatorname{Im} \bar{S}(k') \quad (B.12)$$

y tomando parte real en (7.6)

$$\operatorname{Re} \bar{S}(k) = \sum_{n=1}^N (-)^n \frac{\bar{S}_{2n-1}}{2^{2n}} k^{-2n} + o(k^{-2N-2}) \quad (B.13)$$

obtenemos

$$(-)^n 2^{-2n} \bar{S}_{2n-1} = \frac{-1}{\pi(2n-1)!} \int_{-\infty}^{\infty} dk \, D_k^{2n-1} \operatorname{Im} \bar{S}(k) \quad , \quad (B.14)$$

de la cual, teniendo en cuenta la (7.9), se obtiene (8.12).

Con el mismo procedimiento, partiendo de la (7.15), obtenemos la (8.13).

REFERENCIAS

- 1) C. M. Froberg, Phys. Rev. 72, 519 (1947).
- 2) E. A. Hylleraas, Phys. Rev. 74, 48 (1948).
- 3) V. Bargmann, Phys. Rev. 75, 301 (1949).
- 4) N. Levinson, Kgl. Danske Videnskab. Selskab, Mat-fys. Medd. 25, N°9 (1949)
- 5) V. A. Marchenko, Trudy Moskov. matem. o-va 1, 327 (1952).
- 6) V. A. Marchenko, Doklady Akad. Nauk SSSR 72, 457 (1950).
- 7) G. Borg, "Uniqueness theorems in the spectral theory of $y'' + (\lambda - q(x))y = 0$ ", Eleventh Congress of Scandinavian Mathematics, Trondheim, 1949, pag. 276.
- 8) R. Jost y W. Kohn, Phys. Rev. 87, 979 (1952), y 88, 382 (1952).
- 9) B. Holmberg, Nuovo Cimento 9, 597 (1952).
- 10) I. M. Gel'fand y B. M. Levitan, Izvest. Akad. Nauk SSSR 15, 309 (1951).
- 11) R. Jost y W. Kohn, Kgl. Danske Videnskab. Selskab, Medd. 27, N°9 (1953).
- 12) R. G. Newton, Phys. Rev. 100, 412 (1955).
Véase además las citas en la referencia 15.
- 12) T. Regge, Nuovo Cimento 14, 951 (1959).
- 13) R. G. Newton, J. Math. Phys. 3, 75 (1962).
- 14) R. G. Newton y R. Jost, Nuovo Cimento 1, 590 (1955).
- 15) L. D. Faddeev, Usn. Mat. Nauk 14, 57 (1959). Traducción al inglés en el J. Math. Phys. 4, 72 (1963).
- 16) R. G. Newton, J. Math. Phys. 1, 319 (1960).
- 17) R. G. Newton, "Scattering Theory of Waves and Particles" (Mc Graw-Hill Co., New York, 1966).
- 18) V. De Alfaro y T. Regge, "Potential Scattering" (North - Holland Pu. Co., Amsterdam, 1965).
- 19) Z. S. Agranovich y V. A. Marchenko, "The Inverse Problem in the Quantum Theory of Scattering" (Izd. Kharkov Univ.,

- 1960). (Traducción al inglés: Gordon and Breach Science Pu., New York, 1963).
- 20) T. Y. Wu y T. Ohmura, "Quantum Theory of Scattering"(Pren-
tice-Hall Inc., Englewood Cliffs, N. J., 1962).
 - 21) F. Prats y J. S. Toll, Phys. Rev. 113, 363,(1959).
 - 22) M. G. Gasimov y B. M. Levitan, Doklady Akad. Nauk SSSR
167, N°5, 967 (1966).
 - 23) R. G. Newton, Phys. Rev. 101, 1588 (1956).
 - 24) L. D. Faddeev, Doklady Akad. Nauk SSSR 115, 878 (1957).
 - 25) V. S. Buslaev y L. D. Faddeev, Doklady Akad. Nauk SSSR
132, 13 (1960). Traducción al inglés en Soviet Math. Do-
klady 1, 451 (1960).
 - 26) I. C. Percival, Proc. Phys. Soc. (London) 80, 1290 (1960).
 - 27) M. J. Roberts, Proc. Phys. Soc. (London) 84, 825 (1964).
 - 28) F. Calogero y A. Degasperis, J. Math. Phys. 9, 90 (1968).
 - 29) F. Calogero, O. D. Corbella, A. Degasperis y M. B. De Ste-
fano, J. Math. Phys. 9, 1002 (1968).
 - 30) O. D. Corbella, "On the Inverse Scattering Problem for Di-
rac Particles. Explicit Expressions for the Values of the
Potentials and Their Derivatives at the Origin in Terms
of the Scattering and Bound State Data". Nota Interna
N°199. 19/12/68. Istituto di Fisica "G. Marconi". Univer-
sité di Roma. Italia. Enviado al Journal of Mathematical
Physics para su publicación.
 - 31) A. Degasperis, "On the Inverse Problem for the Klein-Gor-
don Equation". Prepublicación del Physics Department, In-
diana University, Bloomington, Indiana, U.S.A.. Enero de
1969. Enviado al Journal of Mathematical Physics para su
publicación.
 - 32) E. Corinaldesi, Nuovo Cimento 11, 468 (1954).
 - 33) M. Verde, Nuclear Physics 9, 255 (1958).
 - 34) V. De Alfaro, Nuovo Cimento 10, 675 (1958).

- 25) M. G. Barthélémy, Ann. Inst. Henri Poincaré 7, 115 (1967).
- 36) P. A. M. Dirac, "The Principles of Quantum Mechanics" (Clarendon Press, Oxford, 1947).
- 37) M. Verde, Nuovo Cimento 2, 1001 (1955).
- 38) G. Parzen, Phys. Rev. 80, 261 (1950).
- 39) E. C. Mitchmarsh, "Theory of Fourier Integrals" (Clarendon Press, Oxford, 1948).

