

NO SE PRESTA

REPUBLICA ARGENTINA

PUBLICACIONES

DE LA

COMISION NACIONAL DE LA ENERGIA ATOMICA

Serie de Publicaciones Internas

Nº 3

METODO DEL DESARROLLO ORTOGONAL POR ZONAS PARA LA  
RESOLUCION DE LA ECUACION DE DIFUSION DE NEUTRONES

Por Carlos G. Bollini

BUENOS AIRES

1956

## METODO DEL DESARROLLO ORTOGONAL POR ZONAS

### PARA LA RESOLUCION DE LA ECUACION DE DIFUSION DE NEUTRONES

Carlos G. Bollini

#### Introducción:

Nos proponemos exponer este método en una serie de trabajos sucesivos que iremos presentando. Será suficiente, no obstante, el primer ejemplo que desarrollaremos, para comprender la esencia del mismo.

Dado un arreglo indefinido de substancia moderadora de neutrones y de material "combustible", productor de los mismos, se trata en general de resolver la ecuación de difusión, a la que satisface el flujo neutrónico en el mencionado arreglo. El método que aquí describimos, consiste en dividir la estructura o "lattice" dado, en zonas adecuadas a la geometría del arreglo. Adoptando luego un desarrollo ortogonal conveniente en cada una de esas regiones, se consigue "reducir" el problema a la solución de un sistema (infinito) de ecuaciones lineales numéricas. La forma de encarar el mencionado sistema será explicado en el texto.

El método tiene la ventaja de adaptarse a diferentes casos, según se irá viendo, con relativa facilidad. La mejor manera de dar en detalle los procedimientos consistirá en examinar los diferentes problemas que iremos tratando. En el par de ejemplos que siguen, nos ocupamos de sistemas heterogéneos, en los que el combustible está concentrado en barras que van rodeadas de la substancia moderadora.

#### I. Barras de sección cuadrada colocadas paralelamente.

1) Consideraciones generales. Las estructuras que a continuación examinaremos se muestran en las figuras 1 y 3. La forma habitual de tratarlas consiste en "redondear" la celda elemental que resulta (figuras 2 y 4), resolviendo el problema así modificado en coordenadas cilíndricas (1).

Para este caso, nuestra forma de proceder no puede competir en simplicidad con el procedimiento usual. La única ventaja la constituye, evidentemente, el hecho de que al no modificar la celda podremos obtener detalles más precisos acerca de la estructura fina del flujo en los alrededores de las barras. Sin embargo, cuando nos ocupemos de casos en los que las barras no son todas paralelas, existen

do grupos perpendiculares entre sí; no es posible entonces, aparentemente, ningún método tal como el de "redondeo" o deformación de la celda hasta hacerla depender de una sola coordenada, mientras que nuestro método se adapta fácilmente a dicho caso; para el cual, en realidad, fué primitivamente desarrollado.

La ecuación de difusión, en régimen estacionario, es de la forma

$$D \cdot \nabla^2 \Phi - \Sigma_a \Phi + q = 0$$

Donde  $\Phi$  es el flujo neutrónico,  $D$  es el coeficiente de difusión,  $\Sigma_a$  la sección macroscópica de absorción y  $q$  es la densidad de fuente de neutrones térmicos.

Supondremos, como es habitual, que en el combustible no se producen neutrones térmicos, mientras que en el moderador tomaremos  $q = \text{cte.}$

Tendremos así

$$\nabla^2 \Phi - k_0^2 \Phi = 0 \tag{1}$$

en el combustible, con

$$k_0^2 = \frac{\Sigma_{a_0}}{D_0}$$

Y en el moderador

$$\nabla^2 \Phi - k_1^2 \Phi + \frac{q}{D_1} = 0 \tag{2'}$$

con

$$k_1^2 = \frac{\Sigma_{a_1}}{D_1}$$

La (2') tiene la solución particular

$$\Phi_p = \frac{q}{\Sigma_{a_1}} = Q$$

que puede ser separada poniendo

$$\Phi = \Phi' + Q$$

Siendo  $\Phi'$  solución de la ecuación

$$\nabla^2 \Phi' - k_1 \Phi' = 0 \quad (2)$$

Supongamos ahora tener un "lattice" indefinido, formado de la manera mostrada en la fig.1. Los planos que equidistan de dos hileras de barras paralelas, son planos de simetría, como es fácil advertir. También lo son los planos, paralelos a los anteriores, que contienen los ejes de las barras. Esta división por planos de simetría, nos lleva a la celda elemental que se muestra en la fig.2. Naturalmente, el flujo no varía en direcciones paralelas a las barras, por lo tanto el problema es esencialmente bidimensional. En la fig.2 se muestra además, el sistema de coordenadas que elegiremos y la división en cuatro zonas de la celda elemental.

Se trata entonces de resolver la ecuación (1) en la región 0 y la ecuación (2) en las otras tres zonas. Por otra parte, las soluciones deben satisfacer la condición de contorno de que la derivada normal del flujo debe anularse en los límites de la celda elemental. Esta condición nace al tener en cuenta que los límites de la celda son planos de simetría. Deben cumplirse, por último, las condiciones de continuidad de los flujos y las corrientes en los límites entre regiones.

2) Utilización de sistemas ortogonales. En lo que sigue, haremos uso intenso de dos sistemas de funciones ortogonales de una variable. El primero de ellos;  $\Psi_n$ , apropiado al intervalo (0,L), y el otro;  $\Psi_n$ , ortogonal en (0,-l). Tenemos así:

$$(\Psi_n, \Psi_m) = \int_0^L \Psi_n(x) \cdot \Psi_m(x) \cdot w_1(x) dx = \delta_{nm} \cdot N'_n$$

$$(\Psi_n, \Psi_m) = \int_{-l}^0 \Psi_n(x) \cdot \Psi_m(x) \cdot w_2(x) dx = \delta_{nm} \cdot N''_n$$

Siendo  $w_1(x)$  y  $N'_n$ , respectivamente, la función densidad y la norma del primer sistema ortogonal. Análogamente para el segundo.

Un caso particular consiste en utilizar los polinomios de Legendre, convenientemente modificados (2)

$$P_n(z) = \frac{1}{2^n \cdot n!} \frac{d^n}{dz^n} (z^2 - 1)^n ; P_0(z) = 1$$

$$P_n(1) = 1 ; P_n(-1) = (-1)^n ; \int_{-1}^1 P_n(z) \cdot P_m(z) \cdot dz = \delta_{nm} \cdot \frac{1}{2n+1}$$

y haciendo

$$\Psi_n(x) = P_n\left(\frac{2x}{L} - 1\right); \quad \Psi_n(x) = P_n\left(-\frac{2x}{L} - 1\right) \quad (5)$$

Tendremos los sistemas ortogonales deseados, cumpliéndose:

$$(\Psi_n, \Psi_m) = \delta_{nm} \frac{L}{2n+1} \quad \therefore \quad N'_n = \frac{L}{2n+1} \quad (6)$$

$$(\Psi_n, \Psi_m) = \delta_{nm} \frac{l}{2n+1} \quad \therefore \quad N''_n = \frac{l}{2n+1} \quad (7)$$

$$\Psi_n(0) = \Psi_n(0) = P_n(-1) = (-1)^n \quad (8)$$

$$\Psi_n(L) = \Psi_n(-l) = 1 \quad (9)$$

$$\dot{\Psi}_n(x) = \frac{d}{dx} P_n\left(\frac{2x}{L} - 1\right) = \frac{2}{L} \dot{P}_n\left(\frac{2x}{L} - 1\right)$$

$$\dot{\Psi}_n(x) = -\frac{2}{l} \cdot \dot{P}_n\left(-\frac{2x}{l} - 1\right)$$

$$\dot{\Psi}_n(0) = -(-1)^n \cdot \frac{n(n+1)}{L} \quad (10)$$

$$\dot{\Psi}_n(L) = \frac{n(n+1)}{L} \quad (11)$$

$$\dot{\Psi}_n(0) = (-1)^n \frac{n(n+1)}{l} \quad (12)$$

$$\dot{\Psi}_n(-l) = -\frac{n(n+1)}{l} \quad (13)$$

$$(\ddot{\Psi}_n, \Psi_m) = \frac{2}{L} (\ddot{P}_n, P_m) = \frac{4}{L} \cdot \alpha_{sn} \quad (14)$$

$$(\ddot{\Psi}_n, \ddot{\Psi}_m) = \frac{2}{l} (\ddot{P}_n, P_m) = \frac{4}{l} \cdot \alpha_{sn} \quad (15)$$

Siendo

$$\alpha_{sn} = (s + 1) (n + s + 1) \quad (16)$$

para  $n \geq m + 2$  y  $n - m = \text{par}$ . En caso contrario

$$\alpha_{sn} = 0. \quad s = \frac{n - m}{2} - 1$$

Anotamos, por último, la relación de recurrencia

$$(1 - x^2) \ddot{P}_n(x) = \frac{n(n-1)(n+2)}{2n+1} \left\{ P_{n-2} - \frac{3n+4}{2n+3} P_n + \frac{n+1}{2n+3} P_{n+2} \right\}$$

3) Desarrollo ortogonal del flujo. El flujo neutrónico resultante en la celda elemental, queda dividido en cuatro partes, correspondientes a cada una de las zonas en que ha sido dividida la celda elemental. Para cada una de estas partes efectuamos un desarrollo doble en serie de funciones ortogonales, las que serán o bien  $\Psi_n$  o bien  $\Upsilon_n$ , dependiendo ello de las medidas de la región de la que se trate. Tomamos entonces:

$$\Phi_0(x, y) = \sum_{n,m} A_{nm} \Psi_n(x) \Upsilon_m(y) \quad (18)$$

en el combustible (zona 0),

$$\Phi_1(x, y) = \sum_{n,m} B_{nm} \Psi_n(x) \Upsilon_m(y) + Q \quad (19)$$

en la zona 1 del moderador, y

$$\Phi_2(x, y) = \sum_{n,m} C_{nm} \Psi_n(x) \Upsilon_m(y) + Q \quad (20)$$

en la zona 2 del moderador. El flujo en la zona 2' se obtiene del anterior notando que existe simetría ante el intercambio de ejes  $x \rightleftharpoons y$ .

$$\Phi_2'(x, y) = \sum_{n,m} C_{nm} \Psi_n(y) \Upsilon_m(x) + Q \quad (21)$$

Por el mismo motivo, los coeficientes A y B deben ser simétricos:

$$A_{nm} = A_{mn} \quad ; \quad B_{nm} = B_{mn}$$

4) Determinación de los coeficientes. Los coeficientes de los desarrollos deben ser determinados de manera que se satisfagan las condiciones:

a) De contorno. La derivada normal del flujo debe resultar nula en

los límites de la celda.

Para la zona 0 deberemos tener:  $\left[ \frac{\partial \Phi_0}{\partial x} \right]_{x=-l} = 0$

es decir

$$\sum A_{nm} \dot{\Psi}_n(-l) \Psi_m(y) = 0$$

de donde se deduce, efectuando el producto escalar con  $\Psi_r(y)$

$$0 = \sum_{nm} A_{nm} \dot{\Psi}_n(-l) (\Psi_n, \Psi_r) = \sum_{nm} A_{nm} \dot{\Psi}_n(-l) \delta_{nr} N_r''$$

Obteniéndose, por último

$$\sum_n A_{nm} \dot{\Psi}_n(-l) = 0 \quad (22)$$

Del mismo modo deducimos:

$$\sum_m B_{nm} \dot{\Psi}_m(L) = 0 \quad (23)$$

$$\sum_n C_{nm} \dot{\Psi}_n(-l) = 0 \quad (24)$$

$$\sum_m C_{nm} \dot{\Psi}_m(L) = 0 \quad (25)$$

- b) De continuidad del flujo. En la interfase de separación entre las regiones 0 y 2, debemos tener

$$[\Phi_0 = \Phi_2]_{y=0}$$

Es decir

$$\sum_{n,m} A_{nm} \dot{\Psi}_n(x) \Psi_m(0) = \sum_{n,m} C_{nm} \Psi_n(x) \Psi_m(0) + Q$$

y efectuando el producto escalar con  $\Psi_r(x)$

$$\sum_{n,m} A_{nm} (\Psi_n, \Psi_r) \Psi_m(0) = \sum_{n,m} C_{nm} (\Psi_n, \Psi_r) \Psi_m(0) + (Q, \Psi_r)$$

de donde se deduce

$$\sum_m A_{nm} \Psi_m(0) = \sum_m C_{nm} \Psi_m(0) + (Q, \Psi_n) \quad (26)$$

Del mismo modo, entre las zonas 1 y 2, debe cumplirse

$$\sum_n B_{nm} \Psi_n(0) = \sum_n C_{nm} \Psi_n(0) \quad (27)$$

c) De continuidad de corriente. Entre 0 y 2 deberá ser

$$\left[ D_0 \frac{\partial \Phi}{\partial y} = D_1 \frac{\partial \Phi}{\partial y} \right]_{y=0}$$

que desarrollado toma la forma

$$D_0 \sum_m A_{nm} \dot{\Psi}_m(0) = D_1 \sum_m C_{nm} \dot{\Psi}_m(0) \quad (28)$$

Y entre 1 y 2

$$\sum_n B_{nm} \dot{\Psi}_m(0) = \sum_n C_{nm} \dot{\Psi}_m(0) \quad (29)$$

d) De cumplimiento de la ecuación diferencial. Si queremos que el desarrollo (18) satisfaga la ecuación (1), los coeficientes del mismo deben estar relacionados entre sí de la siguiente manera

$$0 = \nabla^2 \Phi_0 - k_0^2 \Phi_0 = \sum_{nm} A_{nm} (\ddot{\Psi}_n(x) \Psi_m(y) + \Psi_n(x) \ddot{\Psi}_m(y) - k_0^2 \Psi_n(x) \Psi_m(y))$$

efectuando ahora el producto escalar doble con  $\Psi_r(x) \Psi_s(y)$  tendremos

$$\sum_n A_{ns} (\ddot{\Psi}_n, \Psi_r) N_s'' + \sum_m A_{rm} (\ddot{\Psi}_m, \Psi_s) N_r'' - k_0^2 N_r'' N_s'' A_{rs} = 0$$

y dividiendo por  $N_r'' N_s''$

$$\sum_n A_{ns} (\ddot{\Psi}_n, \Psi_r) N_r''^{-1} + \sum_m A_{rm} (\ddot{\Psi}_m, \Psi_s) N_s''^{-1} - k_0^2 A_{rs} = 0 \quad (30)$$

Procediendo de manera similar con  $\Phi_1$  y  $\Phi_2$ , se obtiene

$$\sum_n B_{ns} (\ddot{\Psi}_n, \Psi_r) N_r''^{-1} + \sum_m B_{rm} (\ddot{\Psi}_m, \Psi_s) N_s''^{-1} - k_1^2 B_{rs} = 0 \quad (31)$$

$$\sum_n C_{ns} (\ddot{\Psi}_n, \Psi_r) N_r''^{-1} + \sum_m C_{rm} (\ddot{\Psi}_m, \Psi_s) N_s''^{-1} - k_2^2 C_{rs} = 0 \quad (32)$$

5) Utilización de los polinomios de Lengendre. Si en lugar de  $\Psi_n$  y  $\Psi_m$  hacemos uso de las funciones definidas por la fórmula (5), las ecuaciones que hemos deducido toman la forma

$$\sum_n A_{nm} \cdot n(n+1) = 0 \quad (33)$$

$$\sum_m B_{nm} \cdot m (m + 1) = 0 \quad (34)$$

$$\sum_n C_{nm} \cdot n (n + 1) = 0 \quad (35)$$

$$\sum_m C_{nm} \cdot m (m + 1) = 0 \quad (36)$$

$$\sum_m A_{nm} (-1)^m - \sum_n C_{nm} (-1)^m = Q \cdot \delta_{n,0} \quad (37)$$

$$\sum_n B_{nm} (-1)^n - \sum_n C_{nm} (-1)^n = 0 \quad (38)$$

$$\sum_m A_{nm} m(m + 1) (-1)^m + \frac{l \cdot D_1}{L \cdot D_0} \cdot \sum_m C_{nm} \cdot m (m + 1) (-1)^m = 0 \quad (39)$$

$$\sum_n B_{nm} \cdot n(n + 1) (-1)^n + \frac{L}{l} \cdot \sum_n C_{nm} \cdot n (n + 1) (-1)^n = 0 \quad (40)$$

Estas son las ecuaciones de contorno y de continuidad (22) a (29).

Las relativas a la ecuación diferencial quedan modificadas de la siguiente manera. La (30) se transforma en

$$\sum_r A_{rm} (\ddot{P}_r, P_n) \frac{2 \cdot (2n+1)}{l^2} + \sum_s A_{ns} (\ddot{P}_s, P_m) \frac{2 \cdot (2m+1)}{l^2} - k_0^2 A_{nm} = 0$$

Si ahora utilizásemos la relación de recurrencia indicada por la fórmula (17), podríamos efectuar, sobre los índices  $n$  y  $m$  la combinación lineal que aparece en el miembro de la derecha de la mencionada fórmula. Podríamos conseguir así una relación de recurrencia de nueve términos en los coeficientes. Sin embargo, no haremos uso de esa forma, procederemos directamente reemplazando los valores dados por (14) y (15).

$$\sum_s A_{um} (2n+1) a_{su} + \sum_s A_{nv} (2m+1) a_{sv} - \kappa_0^2 A_{nm} = 0 \quad (41)$$

$$\sum_s B_{um} (2n+1) a_{su} + \sum_s B_{nv} (2m+1) a_{sv} - \kappa_1^2 B_{nm} = 0 \quad (42)$$

$$\sum_s C_{um} (2n+1) a_{su} + \sum_s C_{nv} (2m+1) a_{sv} - \kappa_1^2 C_{nm} = 0 \quad (43)$$

$$u = 2s + n + 2 \quad ; \quad v = 2s + m + 2 \quad ; \quad \kappa_0^2 = \frac{k_0^2 l^2}{4} \quad ; \quad \kappa_1^2 = \frac{k_1^2 L^2}{4}$$

Las fórmulas (39) y (40) pueden todavía ser simplificadas. En efecto, de (33) deducimos que

$$\sum_{n=\text{par}} A_{nm} \cdot n (n + 1) = - \sum_{n=\text{imp.}} A_{nm} \cdot n (n + 1)$$

Por lo que en la (39) puede ponerse (recuérdese la simetría de  $A_{nm}$ )

$$\sum_m A_{nm} m(m+1)(-1)^m = \sum_{m=\text{par}} A_{nm} m(m+1) - \sum_{m=\text{imp.}} A_{nm} m(m+1) = 2 \sum_{m=\text{par}} A_{nm} m(m+1)$$

Procediendo de la misma manera con (34) a (36) deducimos las ecuaciones

$$\sum_s A_{n,2s} s(2s+1) + \frac{LD_1}{LD_0} \sum_s C_{n,2s} s(2s+1) = 0 \quad (39b)$$

$$\sum_s B_{2s,m} s(2s+1) + \frac{L}{l} \sum_s C_{2s,m} s(2s+1) = 0 \quad (40b)$$

Las ecuaciones (33) a (43), son las que determinan los coeficientes de los desarrollos ortogonales del flujo.

6) Discusión de las ecuaciones. Vemos que se trata de un sistema (infinito) de ecuaciones numéricas, lineales y, salvo una sola excepción, homogéneas. La excepción que mencionamos es la (37) para  $n = 0$ . Por lo tanto, todos los coeficientes deben resultar proporcionales a  $Q$ .

Para resolver las ecuaciones, es menester adoptar un cierto método a proximado de resolución. Lo que parece más natural en ese sentido, es admitir que los desarrollos (18) a (20) constan solo de un número finito de términos. La aproximación consistirá en suponer, por ejemplo, que todos los coeficientes  $C_{nm}$  son nulos si  $n \geq p$ , ó  $m \geq q$ ; siendo  $p$  y  $q$  dos números prefijados. Esto equivale a suponer que sólo se utilizan las primeras  $p$  funciones  $\psi_n$  y las primeras  $q$  funciones  $\Psi_n$ . Concordantemente tomamos:  $A_{nm} = 0$  si  $n$  ó  $m$  igualan ó superan a  $p$ ;  $B_{nm} = 0$  si  $n$  ó  $m$  igualan ó superan a  $q$ . Diremos de una tal aproximación que es de clase  $(p, q)$ . En ella existirán  $pq$  incógnitas  $C$ , y por la simetría  $\frac{1}{2}p(p+1)$  incógnitas  $A$  y  $\frac{1}{2}q(q+1)$  incógnitas  $B$ . En total

$$\frac{1}{2}p(p+1) + \frac{1}{2}q(q+1) + pq = \frac{1}{2}(p+q)(p+q+1)$$

Para la solución se necesitarán otras tantas ecuaciones independientes. De hecho, las ecuaciones (33) a (43), superan en número a las incógnitas en la cantidad  $4(p+q)$  (aunque no todas resulten independientes). Por lo tanto, cualquiera sea la aproximación  $(p, q)$  que se elija, las ecuaciones no pueden ser satisfechas en su totalidad; como, por otra parte era lógico esperar.

El número de las ecuaciones de contorno y continuidad, es decir (33) a (40), es, en la aproximación  $(p, q)$  igual a  $4(p+q)$ . Comparando este número con el de incógnitas, se advierte que para  $p+q > 6$ , el número de incógnitas supera al de las mencionadas ecuaciones en una cantidad que depende cuadráticamente de  $p+q$ . Ello implica que en todas las aproximaciones  $(p, q)$ , tales que  $p+q > 6$ , puede conseguirse el cumplimiento exacto de todas las ecuaciones de contorno y de continuidad. El exceso de incógnitas resultante, se utiliza luego para satisfacer, en forma aproximada, las relaciones de recurrencia deducidas de la condición de cumplimiento de la ecuación diferencial. Si decimos que  $p+q$  es el orden de la aproximación  $(p, q)$ ; tendremos que para órdenes crecientes (mayores que 6), la ecuación de difusión se satisface cada vez más exactamente, mientras que las otras ecuaciones son cumplidas en forma exacta. Por supuesto, el flujo neutrónico solo satisface la ecuación de difusión de manera aproximada y por ello no tiene sentido acercarse a su solución más allá de un cierto límite.

Para completar el número de ecuaciones necesario, las ecuaciones (41) a (43) van siendo tomadas, ordenadamente, para valores crecientes de  $n$  y  $m$ . P. ej. en el orden:  $A_{00}, B_{00}, C_{00}, A_{01}, B_{01}, C_{01}, C_{10}, A_{11}, B_{11}, C_{11}, A_{02}, B_{02}, C_{02}, C_{20}, A_{12}, B_{12}, C_{12}, C_{21}, A_{22}, B_{22}, C_{22}$  etc.

7) Una modificación del "lattice" anterior. Una modificación, cuyo estudio puede resultar de valor práctico, consiste en desplazar entre sí dos hileras contiguas de barras, hasta formar el lattice que muestra la fig.3. Dividiendo por planos de simetría se obtiene la celda elemental marcada en grueso en la misma figura, y cuya división en zonas aparece en fig. 4.

Siguiendo los métodos anteriormente expuestos, introducimos los sistemas ortogonales  $\Psi_n$  (apropiado al intervalo  $(0, 2L)$ ) y  $\Psi_n$  (apropiado al intervalo  $(0, -l)$ ). Notemos también que la celda elemental es invariante, no solo ante el intercambio  $x \rightleftharpoons y$ , sino también ante el cambio simultáneo de  $x$  con  $u$  y de  $y$  con  $v$ . Siendo  $u=2L-x$ ;  $v=2L-y$ .

Tomamos entonces

$$\Phi_0(x, y) = \sum_{n,m} A_{nm} \Psi_n(x) \Psi_m(y) \quad (44)$$

$$\Phi_1(x, y) = \sum_{n,m} B_{nm} \Psi_n(x) \Psi_m(y) + Q \quad (45)$$

$$\Phi_2(x, y) = \sum_{n,m} C_{nm} \Psi_n(x) \Psi_m(y) + Q \quad (46)$$

$$\Phi_3(x, y) = \sum_{n,m} D_{nm} \Psi_n(x) \Psi_m(y) + Q \quad (47)$$

Debiéndose cumplir la simetría de los coeficientes  $A_{nm}$ ;  $B_{nm}$ , y  $D_{nm}$ , como así también

$$\sum_{n,m} B_{nm} \Psi_n(x) \Psi_m(y) = \sum_{n,m} B_{nm} \Psi_n(u) \Psi_m(v)$$

que cuando se utilizan polinomios de Legendre se reduce a

$$B_{nm} = (-1)^{n+m} B_{nm}, \text{ es decir: } B_{nm} = 0 \text{ si } n+m = \text{impar} \quad (48)$$

8) Determinación de los coeficientes. Procederemos directamente a en contrar las ecuaciones correspondientes, cuando se utilizan polinomios de Legendre, es decir tomamos:

$$\Psi_n(x) = P_n\left(\frac{x}{L} - 1\right) ; \quad \Psi_n(x) = P_n\left(-\frac{2x}{L} - 1\right)$$

de manera que las condiciones de contorno, permiten deducir que

$$\sum_n A_{nm} n(n+1) = 0 \quad (49)$$

$$\sum_n C_{nm} n(n+1) = 0 \quad (50)$$

$$\sum_n D_{nm} n(n+1) = 0 \quad (51)$$

Mientras que la de continuidad nos da:

$$\sum_m A_{nm} (-1)^m - \sum_m C_{nm} (-1)^m = Q \delta_{n,0} \quad (52)$$

$$\sum_m B_{nm} (-1)^n - \sum_m C_{nm} (-1)^n = 0 \quad (53)$$

$$\sum_m D_{nm} (-1)^m - \sum_m C_{nm} = 0 \quad (54)$$

$$\sum_m A_{nm} m(m+1)(-1)^m + \frac{l \cdot D_1}{2L D_2} \sum_m C_{nm} m(m+1)(-1)^m = 0 \quad (55)$$

$$\sum_n B_{nm} n(n+1)(-1)^n + 2 \frac{l}{\ell} \sum_n C_{nm} n(n+1)(-1)^n = 0 \quad (56)$$

$$\sum_m D_{nm} m(m+1)(-1)^m - \frac{\ell}{2L} \sum_m C_{nm} m(m+1) = 0 \quad (57)$$

Por último, las correspondientes a la ecuación diferencial son:

$$\sum_s A_{\mu m} (2n+1) a_{su} + \sum_s A_{\nu v} (2m+1) a_{sv} - \frac{k_1^2 \ell^2}{4} A_{nm} = 0 \quad (58)$$

$$\sum_s B_{\mu m} (2n+1) a_{su} + \sum_s B_{\nu v} (2m+1) a_{sv} - k_1^2 L^2 B_{nm} = 0 \quad (59)$$

$$\frac{4L^2}{\ell^2} \sum_s C_{\mu m} (2n+1) a_{su} + \sum_s C_{\nu v} (2m+1) a_{sv} - k_1^2 L^2 C_{nm} = 0 \quad (60)$$

$$\sum_s D_{\mu m} (2n+1) a_{su} + \sum_s D_{\nu v} (2m+1) a_{sv} - \frac{k_1^2 \ell^2}{4} D_{nm} = 0 \quad (61)$$

$$\mu = 2s + n + 2$$

$$\nu = 2s + m + 2$$

9) Discusión de las ecuaciones. Las ecuaciones (49) a (61) son del mismo tipo que las (33) a (43) y le caben, por lo tanto los mismos argumentos generales ya expuestos en el número 6. En una aproximación de clase (p,q), el número de incógnitas es ahora diferente. Los coeficientes  $A_{nm}$ , son  $\frac{1}{2}p \cdot (p+1)$ , lo mismo que los  $D_{nm}$ . La condición (48), además de las de simetría, reduce el número de coeficientes  $B_{nm}$  a  $\frac{1}{4} \cdot \left[ (q+1)^2 - \frac{1+(-1)^q}{2} \right]$ . De manera que el número total de incógnitas es ahora

$$\frac{1}{2}p(p+1) + \frac{1}{4} \cdot \left[ (q+1)^2 - \frac{1+(-1)^q}{2} \right] + pq + \frac{1}{2}p(p+1)$$

o sea

$$\frac{1}{4} \cdot \left[ (2p+q) \cdot (2p+q+2) + \frac{1-(-1)^q}{2} \right]$$

El número de ecuaciones de contorno y continuidad, (49) a (57), es  $3(2p+q)$ . Como puede apreciarse, es suficiente tomar una aproximación tal que  $(2p+q)$  sea mayor que 9 para que el número de incógnitas alcance para cumplir exactamente con las ecuaciones de contorno y de continuidad. El exceso de incógnitas se utiliza, como antes, para resolver en forma aproximada las ecuaciones diferenciales, (58) a (61).

10) Coefficiente de utilización térmica. Para el cálculo del coeficiente de utilización térmica, no es necesario el conocimiento explícito de todos los coeficientes del desarrollo ortogonal. En efecto, definiéndolo por la fórmula (1)

$$f = \frac{\sum_{a_0} \int_{Comb.} \Phi \, dv}{\sum_{a_0} \int_{Comb.} \Phi \, dv + \sum_{a_1} \int_{Mod.} \Phi \, dv}$$

O también

$$\frac{1}{f} = 1 + \frac{\sum_{a_1} v_1 \bar{\Phi}_1}{\sum_{a_0} v_0 \bar{\Phi}_0}$$

Siendo

$$v_1 \bar{\Phi}_1 = \int_{Mod.} \Phi \, dv \quad ; \quad v_0 \bar{\Phi}_0 = \int_{Comb.} \Phi \, dv$$

La integral sobre la región ocupada por el combustible, daría, en la celda elemental de la fig. 2, o en la celda de la fig. 4, la siguiente expresión

$$\int_{\text{Zona}} \bar{\Phi} dv = \sum_{n,m} \int_{-l}^0 \int_{-l}^0 [A_{nm} \Psi_n(x) \Psi_m(y)] dx dy$$

$$= A_{00} l^2 \quad (\Psi_0(x) = 1)$$

De la misma manera deducimos que en las regiones 1 y 2 de las figuras 3 y 4, y en la región 3 de esta última figura

Zona 1.

$$\int_1 \bar{\Phi} dv = (B_{00} + Q).L^2$$

Zona 2.

$$\int_2 \bar{\Phi} dv = (C_{00} + Q).L.l$$

Zona 3.

$$\int_3 \bar{\Phi} dv = (D_{00} + Q).l^2$$

Tenemos, por lo tanto, para la fig. 2:

$$V_0 \bar{\Phi}_0 = A_{00} l^2; \quad V_1 \bar{\Phi}_1 = (B_{00} + Q).L^2 + 2.(C_{00} + Q).L.l$$

$$\frac{1}{f} = 1 + \frac{\sum_{\alpha_0} B_{00} L^2 + C_{00} 2L.l + Q.(2L.l + L^2)}{A_{00} l^2}$$

Mientras que, para la celda de la fig. 4

$$V_0 \bar{\Phi}_0 = 2.A_{00} l^2; \quad V_1 \bar{\Phi}_1 = (B_{00} + Q).L^2 + 4.(C_{00} + Q).L.l + 2.D_{00} l^2 + Q.2l^2$$

$$\frac{1}{f} = 1 + \frac{\sum_{\alpha_0} B_{00} L^2 + C_{00} 4L.l + D_{00} 2l^2 + Q.(L + 4L.l + 2l^2)}{2.A_{00} l^2}$$

Para el cálculo del coeficiente de utilización térmica, solo es necesario el conocimiento de los términos constantes en los desarrollos ortogonales efectuados. Puede apreciarse además, que por ser todos los coeficientes proporcionales a Q, según se ha visto, el valor de f resulta ser independiente de Q.

11) Resumen. Mediante su aplicación a un par de ejemplos, se ha expuesto un método de solución de la ecuación de difusión de neutrones. Consiste en dividir la celda elemental en regiones apropiadas a la geometría del problema, adoptando luego en cada una de ellas, un desarrollo ortogonal conveniente. Las condiciones de contorno, de continuidad y de cumplimiento de la ecuación diferencial, imponen condiciones sobre los coeficientes de aquellos desarrollos, permitien-

do la determinación de los mismos. Estas ecuaciones son numéricas, lineales en las incógnitas.

Los ejemplos tratados se refieren a barras de combustible, de sección cuadrada, sumergidas en un moderador de manera que todos sus ejes sean paralelos. Estos ejemplos son tratados habitualmente "redondeando" la celda elemental y resolviendo la ecuación en coordenadas cilíndricas. En nuestro caso la celda se trata en forma directa, sin modificarla. Esto permite también obtener mayores detalles sobre la estructura fina del flujo en los alrededores de las barras. El método se adapta también fácilmente al caso en que las barras fuesen rectangulares, o que la separación entre las mismas fuese diferente según dos direcciones perpendiculares.

Otra variación que se trata sin dificultades adicionales, puede consistir en la colocación de materiales diferentes en cada una de las regiones en que se divide la celda elemental. Así por ejemplo, si tomamos la celda de la figura 4 y suponemos que la región marcada con 0' está ocupada por una barra de control en lugar de combustible, lo único que se pierde es la simetría de los coeficientes  $D_{nm}$  y la propiedad (48).

El número de las ecuaciones que determinan los coeficientes de los desarrollos mencionados, depende de la aproximación que se pretenda. Si por ejemplo se desea tomar las primeras cuatro funciones del desarrollo ortogonal, existen (ejemplo primero) 36 incógnitas, a determinar por otras tantas ecuaciones. Aunque el número es elevado, la estructura de las ecuaciones es tal que su resolución es sencilla. Algunos de los resultados numéricos de los ejemplos tratados serán presentados más adelante.

#### BIBLIOGRAFIA

- 1) GLASSTONE, S., EDLUND M.C. "The Elements of Nuclear Reactor Theory" (1952).
- 2) MACROBERT, T.M. "Spherical Harmonics" (1947).

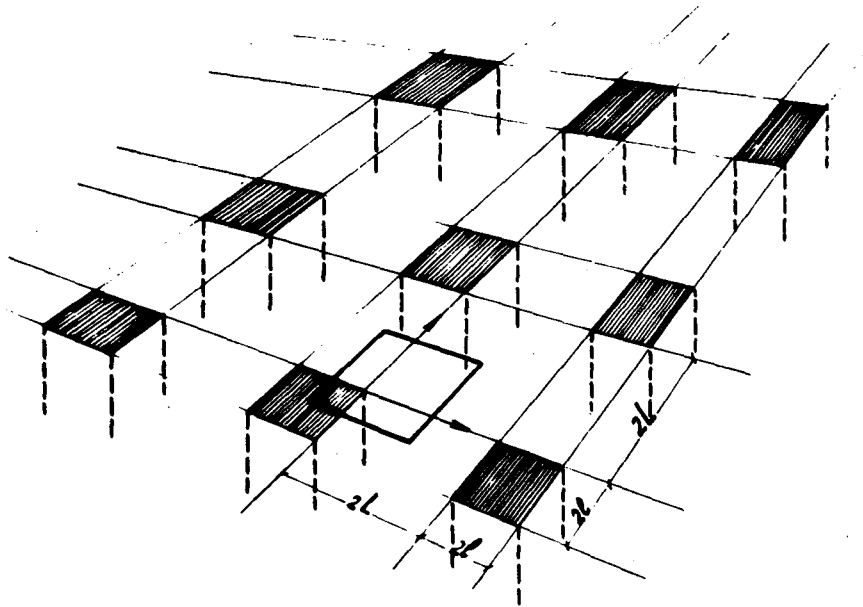


FIG. 1

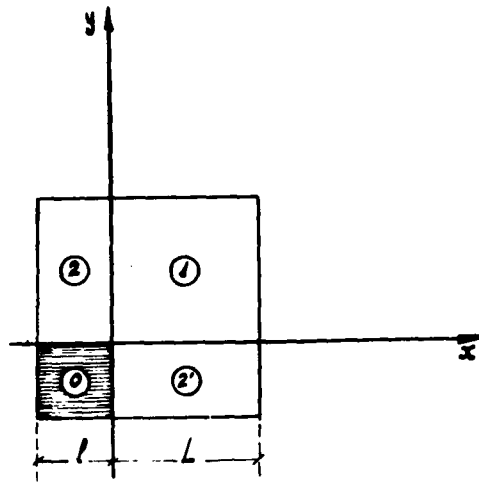


FIG. 2

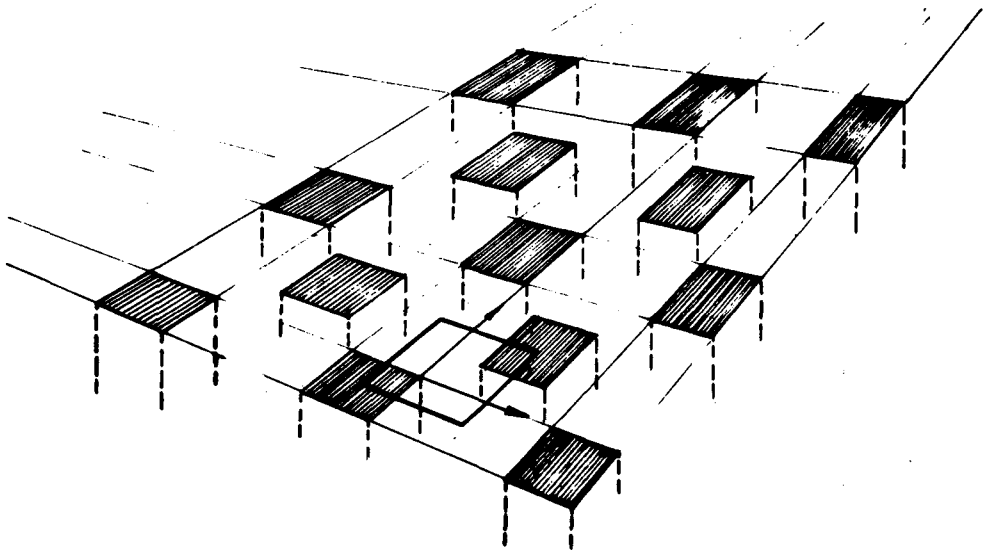


FIG. 3

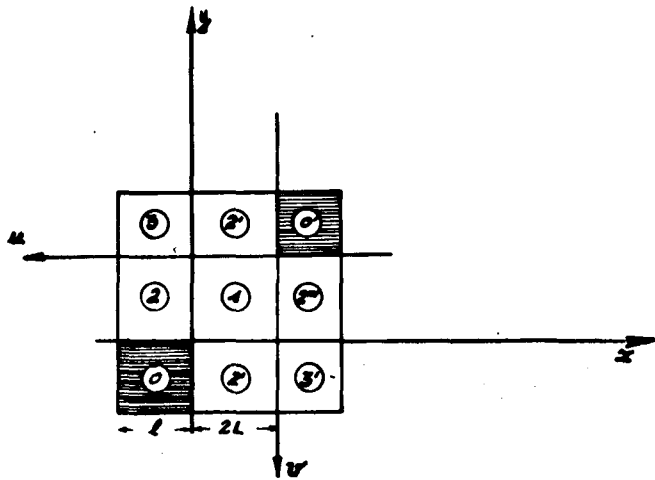


FIG. 4