ASOCIACION DE PROFESORES
DE LA
FACULTAD DE CIENCIAS FISICOMATEMATICAS
UNIVERSIDAD NACIONAL DE EVA PERON

M E D I C I O N E S   F I S I C A S

por el Prof. Dr. José A. Balseiro

EVA PERON (Pcia. Bs.As.)
REPUBLICA ARGENTINA
1954

A mi Padre.

Esta publicacion va dirigida a los estudiantes del primer curso de Fisica General de las carreras de Ciencias Fisicomatemáticas.

Convencidos como estamos, que es indispensable poner en contacto desde el primer momento al alumno universitario de ciencias exactas con los métodos cientificos, publicamos este pequeño texto para que le sirva de ayuda en su formación experimental.

Debido a quienes va dirigido, hemos escogido los ejemplos simples que ilustran los distintos asuntos que se tratan, de los primeros capitulos de la fisica. Al tratar estos ejemplos se ha supuesto el conocimiento por parte del lector de la teoría de los mismos, cuando ésta no es indispensable para el asunto al cual se refiere el ejemplo. Tratándose de ejemplos corrientes, bastará en caso de necesitarlo el lector, consultar la teoria en cualquier texto universitario de Física General.

J. A. Balseiro.

C A P I T U L O   I

ERRORES DE MEDICION

§1.- <u>SIGNIFICADO DE LA MEDICION DE UNA MAGNITUD</u>.- Medir una magnitud física es asociar a la misma un valor dimensionado en relación a la unidad que arbitrariamente se ha definido para medirla. Así, medir una distancia, significa establecer el número de veces que la unidad de longitud (cm, m, pulgada, etc.) está contenida en dicha distancia.

La operación de medir una magnitud supone a priori que tal magnitud tiene un valor <u>verdadero</u>, no obstante las dificultades lógicas que aparecen en cuanto se trata de precisar con rigor el significado de este concepto. No existen ni pueden existir instrumentos que permitan medir sin error alguno una magnitud física. Podemos medir p.e. la carga del electrón con una aproximación tanto más grande cuanto mejor sea el método que imaginamos para hacerlo; pero en ningún caso podemos medir la "verdadera" carga del electrón. Además, en muchos casos, en cuanto extremamos la aproximación con que medimos una magnitud la propia magnitud carece de sentido. Así, si medimos la longitud de una barra rígida con una escala métrica, con un catetómetro, con métodos ópticos, etc. obtenemos valores de esa longitud que decimos son sucesivamente más aproximados; pero, qué sentido tiene medir esa longitud con una aproximación del orden o mayor que la distancia (10^{-7} cm) que separa a los átomos que forman la barra rígida?.

Solamente como una excepción muy particular, cuando el número que mide una magnitud es necesariamente un número entero se puede afirmar que es rigurosamente exacto. P. e. el número de franjas de interferencia que es necesario determinar en los distintos métodos interferenciales.

Con las restricciones que el caso lo exige necesitamos del concepto de valor verdadero de una magnitud, al menos como hipótesis de trabajo. Más adelante, al tratar de los errores estadísticos podremos precisar algo más este concepto (Ver § 11). Lo que importa, ahora, es destacar que la medida de una magnitud difiere siempre en algo del verdadero valor de la misma. Dar simplemente un número como medida de una magnitud sin precisar el error de que está afectado, sea aproximadamente, sea en términos de probabilidades no significa mucho. Una medida tiene sentido solo cuando se puede valorar en una u otra forma el error de que está afectada.

Apreciar el error de una medición es el objeto del cálculo de errores.

§ 2.- ERRORES. ERROR RELATIVO. PRECISION DE UNA OBSERVACION Y DE UN INSTRUMENTO.- Se llama error de la observación X' respecto de cierto valor X a:

$$\Delta X = X - X'$$

Según el significado de X (valor verdadero, valor medio o valor aproximado) es la denominación que se le da al error ΔX. Por ahora, supondremos que X es el valor verdadero; en tal caso ΔX es el error absoluto o error verdadero.

El solo enunciado del error de una observación no es suficiente para caracterizar la aproximación o precisión de la misma. Sea p. e. la medida de una distancia de 1 m con una regla que produce un error de 2 mm. El error por unidad de escala (el mm) es:

$$\frac{2}{1000} = 0.002.$$

Si medimos, en cambio el diámetro de un alambre de 1 mm con un tornillo micrométrico que nos da un error de o,01 mm el error por unidad de escala es de o.01. En el primer caso tenemos por unidad de escala un error cinco veces menor que en el segundo. El error por cada unidad en las cuales se mide la magnitud a determinar se llama error relativo:

$$\frac{\Delta X}{X}$$

Para los fines prácticos solo se requiere valores aproximados del error relativo, de modo que

$$\frac{\Delta X}{X} = \frac{\Delta X}{X' + \Delta X} = \frac{\Delta X}{X'}$$

define el error relativo de la observación X', y es calculable siempre que se pueda valorar ΔX.

A veces el error relativo no se da por cada unidad sino por cada 100 unidades. En tal caso se define el error porcentual:

$$e\,\% = \frac{\Delta X}{X} \cdot 100$$

Cuando se dice que el error es del 2 % significa que se comete un error de dos unidades por cada cien de las mismas. El valor inverso del error relativo mide la precisión de la correspondiente medición. En esta forma definimos la precisión de una medición: el número de unidades afectadas de un error equivalente a una de dichas unidades:

$$K = \frac{X}{\Delta X} = \frac{X'}{\Delta X}$$

Veamos, ahora qué se entiende por precisión de un instrumento o de un método de medida. Debemos suponer que el instrumento o el método no producen errores siempre constantes y del mismo signo (lo que más adelante estudiaremos con el nombre de errores sistemáticos). En tales condiciones, la mayor o menor precisión de un instrumento o de un método de medida es la facultad de uno u otro de repetir en mayor o menor grado los valores correspondientes a mediciones de una misma magnitud realizadas en idénticas condiciones.

Entre la sensibilidad de un instrumento y su precisión no existe una dependencia directa. Veamos como ejemplo el caso de una balanza de pesas. La sensibilidad de una balanza aumenta cuando el centro de gravedad del sistema móvil se acerca al punto de suspensión del mismo. Cerca del caso límite en que ambos puntos están muy próximos se tiene una sensibilidad muy grande pues siendo el equilibrio casi indiferente, para una pequeña sobrecarga la desviación del fiel es muy grande. Pero por la misma razón la posición de equilibrio del fiel será prácticamente cualquiera. Es decir, la balanza en tales condiciones no reproduce absolutamente las mismas observaciones para la misma sobrecarga: la precisión en tal caso es nula o casi nula.

Esta particularidad es característica siempre que la sensibilidad se lleve al límite de lo posible. En general es necesario hacer un compromiso y operar con sensibilidades tales que la precisión sea aceptable.

Al estudiar la teoría estadística de los errores veremos cómo es posible asociar a este concepto de precisión de un instrumento un número que lo mide.

§ 3.- CLASIFICACION DE LOS ERRORES.- Según el origen de los errores distinguiremos entre:

ERRORES SISTEMATICOS.- Son los errores provenientes de una imperfección o ajuste inadecuado del instrumento de medida, de la aplicación de un método erróneo, de la acción permanente de una causa exterior, etc. Asi, p. e. la desigual longitud de los brazos de una balanza; una posicion inadecuada del observador que introduce un error de paralaje; la medida de la diferencia de potencial entre los extremos de una resistencia con un voltímetro cuya resistencia interior es comparable con la primera; la acción del campo magnético terrestre sobre instrumentos con campos magnéticos, producen errores sistemáticos, Estos errores son siempre prácticamente iguales y del mismo signo. Sobre esta clase de errores no puede hacerse ninguna teoría general. En casos particulares, sin embargo, existen métodos para ponerlos de manifiesto y, en otros, es posible aplicar a las mediciones las correcciones que los eliminan.

ERRORES DE APRECIACION.- Las determinaciones experimentales se reducen, en última instancia, salvo escasas excepciones, a la lectura, mediante un índice, de una escala graduada. Al efectuar la lectura, el observador se ve precisado de apreciar una fracción de la división mínima de la escala. En esta apreciación va implícito cierto error que, por su naturaleza, llamaremos error de apreciación. La experiencia del observador le permite conocer según el instrumento, de que orden es el error de apreciación que comete.

ERRORES CASUALES.- Si una misma magnitud se mide cierto número de veces con el mismo instrumento, y en las mismas condiciones los valores obtenidos no son idénticos y difieren entre sí en pequeñas cantidades. Naturalmente que estas diferencias provienen en parte de los errores de apreciación. Pero son atribuíbles, también, a una cantidad de otros factores no previsibles, como pequeñas variaciones de las condiciones ambientes (temperatura, presión, movimiento de los soportes) otros provenientes del observador (variación de la atención, fatiga de la vista, errores de paralaje) y finalmente otros que se deben al mismo instrumento (tensiones accidentales en los soportes de los órganos, movimiento browniano, etc.).

Los errores casuales obedecen a leyes de caracter estadístico y a ellos se refiere la teoria estadística de los errores.

B). ERRORES SISTEMATICOS

§4.- ELIMINACION DE CIERTOS TIPOS DE ERRORES SISTEMATICOS.- Clasifi caremos a los errores sistemáticos con vistas a su estudio y a su posible eliminación en:

a.- Errores producidos por la defectuosa construcción o defecto permanente de la escala de medida de un instrumento, tales como una mala calibración de dicha escala, un desplazamiento del cero de la misma o una desviación del índice de medida.

En el primer caso se hace necesaria la calibración de la escala mediante el contraste del instrumento, entendiéndose por tal a la operación de comparar las medidas efectuadas con el instrumento en cuestión con las de otro instrumento similar o nó que merezca garantías respecto de su exactitud. El contraste de un instrumento permite construír curvas o tablas que permiten corregir las lecturas obtenidas de la escala de dicho instrumento. Los errores provenientes de esta circunstancia no serán, en general constantes dentro del alcance del instrumento y estas curvas o tablas deberán cubrir, en tal caso, el intervalo correspondiente a dicho alcance.

Los errores debidos al desplazamiento del cero de la escala o a la desviación del índice de medida son constantes y fáciles de eliminar si se determina previamente el valor y el signo del desplazamiento o de la desviación.

E j e m p l o.- Debido al uso o a un defecto de construcción frecuentemente en los tornillos micrométricos el cero está desplazado, en general debido a la primera causa hacia los valores negativos, produciéndose en tal caso un error por defecto. Si d es este desplazamiento y L una determinación el valor corregido es $L_0 = L + d$. Esa corrección es negativa si el cero está desplazado hacia los valores positivos de la escala.

b.- Errores provenientes de un desperfecto, de la deficiente construcción o funcionamiento de un instrumento tales como los errores que produce una balanza de brazos desiguales o los de un cronómetro que adelanta o atrasa. Este tipo de error sistemático son los más difíciles de corregir y ningún instrumento prácticamente está totalmente desprovisto de ellos; sólo que en los buenos instrumentos son sensiblemente menores que los errores de apreciación o casuales.

Los casos en los cuales es posible eliminar, a veces, estos errores sistemáticos son aquéllos en que las condiciones de medida implican cierta clase de simetría. En general, cuando ello es posible, el valor medio de dos determinaciones realizadas utilizando las condiciones de simetría permiten eliminar esta clase de errores.

E j e m p l o I.- Unos de los errores sistemáticos más frecuentes en las pesadas de precisión es el producido por una desigual longitud de los brazos de la cruz de la balanza. El método de la doble pesada permite eliminar este error. En efecto: sea P el peso del cuerpo en el platillo correspondiente al brazo de longitud l_1, y $P+\varepsilon$ en el otro correspondiente al brazo de longitud l_2. En el estado de equilibrio se cumple:

$$P l_1 = P_o l_2 \qquad ; \qquad P_o l_1 = (P+\varepsilon) l_2 \; .$$

siendo P_o el valor exacto del peso. Eliminando l_1 y l_2 se obtiene:

$$P_o = \sqrt{P\,(P+\varepsilon)}$$

El valor exacto del peso del cuerpo es el promedio geométrico de las dos pesadas. Si la diferencia ε entre ambas es pequeña lo que siempre acontece aquel valor puede aproximarse por el promedio aritmético (ver § 1, d Cáp.II):

$$P_o = \frac{1}{2}\left[P + (P+\varepsilon)\right] = P + \frac{\varepsilon}{2}$$

E j e m p l o II.- Para determinar la dirección de las líneas de fuerza de un campo magnético homogéneo se emplea una aguja imanada. La determinación es exacta, siempre que la dirección indicada por los extremos de la aguja coincida con la dirección de la línea N-S que une los polos magnéticos de la aguja. Si así no fuere, dos determinaciones sucesivas invirtiendo las caras de la aguja permiten, tomando el valor medio de las dos observaciones, determinar con buena precisión la dirección de las líneas de fuerza. Sea a el ángulo comprendido entre la línea que une los polos magnéticos y la que determinan los extremos de la aguja; L_1 la lectura correspondiente a una posición de la aguja y L_2 la lectura obtenida invirtiendo las caras de la aguja. Si D es el ángulo formado por las líneas de fuerzas y la recta dada por el centro de la aguja y el cero del instrumento, se tiene:

$$D = L_1 - a$$

$$D = L_2 + a$$

De donde:

$$D = \frac{L_1 + L_2}{2}$$

c.- Errores sistemáticos inherentes al método de medida. En general no se puede dar un método para eliminar esta clase de errores y sólo una discusión minuciosa en cada caso particular permitirá establecer, cuando ello es posible, la corrección aplicable a la medida.

E j e m p l o.- La medida de una resistencia óhmica con amperímetro y voltímetro. El amperímetro A mide la intensidad I de la corriente y el voltímetro V la diferencia de potencia E entre los extremos de la resistencia R. El valor de esta última queda dada por la ley de Ohm:

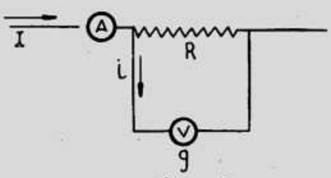


fig nº1

$$R = \frac{E}{I}$$

Esto es totalmente correcto si en vez de voltímetro se emplea un electrómetro. Pero en nuestro caso por el voltímetro circula una intensidad i, de modo que rigurosamente $I = I' + i$ siendo I' la intensidad que circula por la resistencia:

$$R = \frac{E}{I - i} > \frac{E}{I} = R'$$

El error sistemático que se comete al tomar el valor R' no corregido es:

$$\frac{E}{I - i} - \frac{E}{R}$$

En este caso es posible eliminar el error inherente al método si se conoce la resistencia interna del voltímetro g, pues se tiene:

$$i = \frac{E}{g}$$

d.- Por último, debemos añadir los errores sistemáticos producidos por las condiciones en que se realizan las observaciones. Así, la pesada de un cuerpo, cuya densidad es distinta a la de las pesas está afectada siempre por el empuje que recibe del aire; en las determinaciones calorimétricas por la cantidad de calor absorbido por el bulbo del termómetro, etc. Estos errores son, en general, calcula bles en forma de correcciones para cada instrumento o cada método en particular.

C). ERRORES DE APRECIACION

§ 5.- MEDICIONES DIRECTAS E INDIRECTAS.- Llamaremos medición directa a la operación de lectura en un instrumento aplicado a medir cierta magnitud P. e. la determinación de una distancia con una escala métrica, la de un peso con una balanza, la de una intensidad de corriente con un amperímetro, son mediciones directas.

Una medición indirecta es la que resulta de una ley física que vincula la magnitud a medir con otras magnitudes medibles directamente. Así, la aceleración de la gravedad determinada con un péndulo ideal.

$$g = \frac{4\pi^2}{T^2}\,\ell \,.$$

relaciona la magnitud g a medir con ℓ y T medibles en forma directa con una regla y un cronómetro, respectivamente.

§ 6.- ERRORES DE APRECIACION DE LAS MEDICIONES DIRECTAS.- Los errores de apreciación en la lectura sobre la escala de un instrumento depende del tipo de dispositivo de lectura y de la habilidad del observador para realizarla. Su valoración no puede hacerse sino en forma aproximada dependiendo esta valoración tanto de la habilidad del observador para efectuar la lectura como de su experiencia para asignarle determinado valor. El signo del error de apreciación es tanto negativo como positivo y su valor máximo es prácticamente constante para un mismo observador operando en iguales condiciones.

Cuando se mide una distancia con una escala graduada en milímetros un observador no experimentado podrá observar fracciones de o.5 á o.3 mm mientras que un observado hábil puede garantizar la fracción o.2 mm. Los errores de apreciación serán, pues, de o.5 mm, o.3 mm ó o.2 mm, respectivamente. En el caso de una escala provista de nonius de la relación 9/10 podrá no poderse apreciar la coincidencia de una división del nonius con una división de la escala sinó con una indeterminación de una división del nonius; en tal caso el error es de o.1 de división. Si se trata de un nonius de la relación 49/50 podrá ser la indeterminación de 2 ó 3 divisiones del nonius.

Análogamente se procede en el caso de cualquier instrumento provisto de escalas y nonius como balanza, termómetro, barómetro, goniómetro, instrumentos eléctricos, etc.

Un caso particular es el de la medida de intervalos de tiempo con cronómetros de disparador. La aguja del cronómetro no se mueve uniformemente, sino que, debido al mecanismo del mismo (escape de áncora) se mueve a saltos, y entre salto y salto transcurre un lapso de 1/5 ó 1/10 de segundo según el tipo de cronómetro.

El tiempo de reacción, en general, para una persona normal es menor que 1/5 de seg. de modo que en el primer caso no interviene este factor como fuente de error, no asi en el caso que el cronómetro registra el 1/10 de seg. En ambos casos no puede determinarse un lapso cualquiera con errores de apreciación inferiores a 1/5 de seg. o a 1/10 de seg. respectivamente. En este último caso el error puede ser mayor si se tiene en cuenta el tiempo de reacción del observador.

Si tratamos de medir p. e. el período de oscilación de un péndulo del orden de 1 seg. un error de 1/5 de seg. es considerablemente grande y, en general, invalidará la medida. Sin embargo en el caso de mediciones de períodos (de oscilación, rotación, etc.) este error puede atenuarse considerablemente con sólo medir lapsos correspondientes a un número suficientemente grande de períodos. En efecto: Sea t el tiempo de n períodos de duración T:

$$t = nT$$

El error de apreciación de la medición de t sea $\Delta t \simeq 1/5$ seg. Se tiene:

$$\Delta t = n\Delta T \simeq \frac{1}{5} \qquad \Delta T \simeq \frac{1}{5.n}$$

El error ΔT disminuye en forma inversamente proporcional al número de períodos que se tienen en cuenta.

Recíprocamente si fijamos el error podemos calcular el número de períodos que es necesario tener en cuenta para no cometer errores superiores al tolerable. Por ejemplo, si al medir un período $T \simeq 2$ seg. no queremos cometer un error superior al o.1%,

$$\frac{\Delta T}{T} \cdot 100 \simeq \frac{100}{5 \times 2 \times n} \simeq 0.1$$

obtenemos n $\cong$ 100 oscilaciones.

Cuando se trata de medir una velocidad uniforme determinando el tiempo durante el cual el móvil recorre cierto espacio conocido, según $v = e/t$. no puede, naturalmente, aplicarse el método expuesto anteriormente para atenuar el error del cronómetro. Sin embargo, en este caso, también es posible eliminar, en parte, este error. Con un cronómetro de 1/5 seg medimos el tiempo t que emplea el móvil para recorrer la distancia AB. (fig.2). La velocidad en primera aproximación con un error en t de 1/5 seg está dada

$$v = \frac{AB}{t}$$

El espacio recorrido en el lapso de 1/5 seg es:

fig.2

$$e_1 = v\frac{1}{5} = \frac{AB}{t} \cdot \frac{1}{5}$$

Dividimos este valor e_1 en un número conveniente de intervalos; sea p. e. en tres: AC, CD y DE. Realizamos ahora, la medida del tiempo que tarda el móvil en pasar de C á B, y resulta p. e. el mismo valor del tiempo. Efectuamos a continuación la misma determinación entre DB. Resulta t-1/5 seg. La distancia que mejor atenúa el error del cronómetro es DB pues el tiempo t-1/5 que da determinado con un error menor que 1/15 seg. la velocidad está dada pues,

$$V = \frac{CB}{t-1/5}.$$

§ 7.- <u>ERROR DE APRECIACION DE LAS MEDICIONES INDIRECTAS</u>. Sea una magnitud L que nos interesa medir, una función conocida de otra magnitud X que medimos directamente:

$$L = F(X)$$

Se plantea el problema de determinar en cuanto afecta a L el error de apreciación cometido al medir X. De la medición de X obtendremos un valor $X' = X \pm \Delta X$, siendo ΔX el error de apreciación. Al calcular L con el valor $\overline{X}'$ obtendremos cierto $L' = L \pm \Delta L = f(X \pm \Delta X)$, donde ΔL es el error de apreciación de L.

Si desarrollamos la función f $(X \pm \Delta X)$ en serie de Taylor ('):

$$L' = f(X \pm \Delta X) = f(X) \pm \Delta X\, f'(X) + \frac{\overline{\Delta X}^2}{2!} f''(X)$$

y consideramos que $\Delta X^2 \ll \Delta X$ obtenemos en la aproximación en la cual los términos de potencias superiores de ΔX son despreciables frente a ΔX:

$$L' - f(X) = L' - L = \Delta L = f'(X)\, \Delta X$$

El error de apreciación de L no depende solamente del valor ΔX sino también de $f'(X)$. Cuanto mayor es este coeficiente tanto más significativo es el error en L por el error X cometido al medir X.

Puesto que en general no conocemos el valor verdadero X, para el cálculo de ΔL podemos aproximar el valor de $f'(X)$ por $f'(X')$, de modo que:

$$\Delta L = f'(X')\, \Delta X$$

E j e m p l o.- Determinar la aceleración de la gravedad g con un péndulo ideal de longitud l bien conocida:

$$g = \frac{4\pi^2}{T^2} \cdot l$$

En este caso $L \equiv g$, $X \equiv T$ y la función $f(X) \equiv \frac{4\pi^2}{T^2}\, l$.

Medimos 100 oscilaciones dobles. El error de apreciación de T, efectuando la medida con un cronómetro de 1/5 seg es:

$$\Delta T = \frac{1}{5 \times 100} = 2.10^{-3} \text{ seg.}$$

(') La serie de Taylor nos da el valor de una función f(x) en un punto x + h, si conocemos el valor de dicha función y de todas sus derivadas en el punto x, mediante el desarrollo:

$$f(x + h) = f(x) + hf'(x) + \frac{h^2}{2!} f''(x) + \ldots + \frac{h^n}{n!} f^{(n)}(x) \ldots$$

siendo $f'(x)$, $f''(x)$ ... $f^{(n)}(x)$, las derivadas primera, segunda ... enésima de la función f(x) en el punto x.

La serie de Taylor de una función de dos variables x, y está dada por:

$$T(x+h,y+k) = f(x,y) + h\frac{\partial f}{\partial x} + k\frac{\partial f}{\partial y} + h^2 \frac{\partial^2 f}{\partial X^2} + 2hk\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} + k^2 \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} + \ldots$$

siendo $\frac{\partial f}{\partial x}$, $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}$, $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}$ ... las derivadas parciales de distintos órdenes de la función f.

Sean:

$$l = 171.7 \text{ cm.}$$

$$100T = 262^{s}.4.$$

Puesto que

$$\frac{dg}{dT} = -2 . \frac{4\pi^2}{T^3} 1.$$

tenemos:

$$\Delta g = \pm \frac{8\pi^2}{T^3} 1 . \Delta T \simeq \pm 3 \text{ cm/seg}^2 .$$

El valor de g, resulta:

$$g = 983 \text{ cm/seg}^2 .$$

con un error de ± 3 cm/seg^2.

Cuando se trata de una magnitud L a medir expresada como función de más de una magnitud medible directamente:

$$L = f(X, Y, Z)$$

el significado del error de apreciación de L es el mismo, a saber: Las medidas de X, Y y Z están afectadas de ciertos errores de apreciación ΔX, ΔY, ΔZ, respectivamente, de modo que los valores observados $X' = X \pm \Delta X$, $Y' = Y \pm \Delta Y$, $Z' = Z \pm \Delta Z$, permiten calcular el valor $L' = L \pm \Delta L$ siendo ΔL el error de apreciación de L. Para calcular este valor operamos en la misma forma que en el caso de una sola variable, desarrollando en serie de Taylor y despreciando los términos de orden superior:

$$L' = f(X',Y',Z') = f(X \pm \Delta X, Y \pm \Delta Y, Z \pm \Delta Z) = f(X,Y,Z) \pm \Delta X \frac{\partial f}{\partial X} \pm \Delta Y \frac{\partial f}{\partial Y} \pm \Delta Z \frac{\partial f}{\partial Z}.$$

$$L' - f(X,Y,Z) = \Delta L = \pm \frac{\partial f}{\partial X} \Delta X \pm \frac{\partial f}{\partial Y} \Delta Y \pm \frac{\partial f}{\partial Z} \Delta Z$$

La mayor o menor contribución de los errores de X, Y, Z depende del mayor o menor valor de los coeficientes:

$$\frac{\partial f}{\partial X}, \frac{\partial f}{\partial Y}, \frac{\partial f}{\partial Z}$$

razón por la cual estos coeficientes se llaman <u>factores de propagación</u> de los errores ΔX, ΔY y ΔZ, respectivamente. El signo de estos errores como el de los factores de propagación puede ser tanto negativo como positivo. El máximo error de L se producirá cuando todos los términos que definen a ΔL tienen el mismo signo. Por <u>definición</u> este valor máximo de ΔL es el error de apreciación de L. Es decir:

$$\Delta L = \pm \left\{ \left| \frac{\partial f}{\partial x} \Delta x \right| + \left| \frac{\partial f}{\partial y} \Delta y \right| + \left| \frac{\partial f}{\partial z} \Delta z \right| \right\}$$

El error relativo de L, está dado en función de los errores relativos de X, Y y Z por:

$$\frac{\Delta L}{L} = \pm \left\{ \left| \left(\frac{x}{L} \frac{\partial f}{\partial x} \right) \frac{\Delta x}{x} \right| + \left| \left(\frac{y}{L} \frac{\partial f}{\partial y} \right) \frac{\Delta y}{y} \right| + \left| \left(\frac{z}{L} \frac{\partial f}{\partial z} \right) \frac{\Delta z}{z} \right| \right\}$$

En este caso los factores de propagación de los errores relativos son:

$$\frac{x}{L} \frac{\partial f}{\partial x} , \quad \frac{y}{L} \frac{\partial f}{\partial y} , \quad \frac{z}{L} \frac{\partial f}{\partial z} .$$

Cuando todos los términos de la última expresión son del mismo orden los errores de las mediciones de X, Y y Z contribuyen en proporciones más o menos equivalentes al error de L. Sin embargo, acontece con frecuencia que algunos de los coeficientes de propagación de los errores relativos son considerablemente menores que otros. En tal caso el error de L proviene casi exclusivamente de los términos mayores. Poner de manifiesto este hecho es de importancia práctica, pues él nos da la pauta de cuales son las mediciones que debemos efectuar con mayor cuidado eligiendo convenientemente el método y el instrumental de medida. Por otra parte es completamente inoperante esforzarse en medir con precisión las magnitudes cuyos errores no contribuyen mayormente al de L.

8.- <u>APLICACIONES DE LA VALORACION DEL ERROR DE APRECIACION</u>.- Mediante la discución de los errores de apreciación previa a la realización de las observaciones destinadas a medir una magnitud podemos obtener los resultados siguientes:

a.- <u>Cálculo del error máximo de una determinación</u>. En general, al realizar una medida si se trata de obtener el mejor valor posible no es suficiente una sola observación. Sin embargo, con frecuencia no se necesita obtener el valor más preciso posible y en tal caso se rá suficiente una sola observación. Pero ya hemos visto que un número como medida de una magnitud no significa mucho, sino se especifica cual es el error, al menos aproximado de que está afectada. Supuesto que el instrumento o el método de medida no están afectados por errores sistemáticos con una sola observación sólo podremos especificar cual es el error máximo de nuestra medida debido a los errores de apreciación que se cometen.

E j e m p l o.- En una pesada deprecisión el peso está dado por:

$$P = P_0 \pm \left| \frac{\alpha_0 - \alpha_1}{S} \right|$$

siendo α_0 el cero de la balanza descargada, α_1 el correspondiente a la balanza cargada con el cuerpo y las pesas P_0. y S la sensibilidad de la balanza. Supuesto que no existen errores sistemáticos provenientes de la balanza o de las pesas los únicos errores que inciden sobre P son los producidos en las observaciones de α_0 y α_1. Los errores de apreciación en una balanza de precisión corriente son del orden de una media división de escala. Es decir,

$$\Delta\alpha_0 \simeq \Delta\alpha_1 \sim 0{,}5 \text{ div.}$$

Luego:

$$\Delta P = \left| \frac{1}{S} \Delta \alpha_0 \right| + \left| \frac{1}{S} \Delta\alpha_1 \right| \simeq \frac{1}{S}$$

En una sola pesada el error máximo posible garantizando la apreciación de media división de escala es del orden del factor de mérito de la balanza.

b.- Elección del instrumental. A veces se presenta el problema de medir magnitud L con cierta precisión dada. En tales casos hay que disponer de criterios para seleccionar el instrumental o el método de medida para alcanzar tal precisión. En las mediciones indirectas si L = f(X,Y,Z) se presenta un problema análogo cuando una de las magnitudes medibles directamente, por tener un factor de propagación grande respecto de las otras limita la precisión de la medida de L. Supongamos que en tal caso se encuentre la magnitud X. No necesitamos medir Y y Z sino con una precisión tal que:

$$\frac{X}{L}\frac{\partial f}{\partial X}\frac{\Delta X}{X} \simeq \frac{Y}{L}\frac{\partial f}{\partial Y}\frac{\Delta Y}{Y} \simeq \frac{Z}{L}\frac{\partial f}{\partial Z}\frac{\Delta Z}{Z}$$

de donde obtenemos que

$$\Delta y \simeq \frac{\frac{\partial f}{\partial x}}{\frac{\partial f}{\partial y}} \Delta x \qquad \Delta z \simeq \frac{\frac{\partial f}{\partial x}}{\frac{\partial f}{\partial z}} \Delta x$$

Disponemos, así, de un criterio para elegir el instrumento o el método adecuado para medir X, Y y Z. Para efectuar el cálculo anterior sólo necesitamos valores aproximados de X, Y y Z que pueden obtenerse rápidamente sea a simple vista, sea con métodos rápidos y rudimentarios.

E j e m p l o.- Medir el calor específico medio entre la temperatura ambiente y 100° C de un cuerpo de masa m, con el calorímetro de mezcla. Se tiene el calor específico medio C expresado:

$$C = \frac{(M + \pi)(t_f - t_i)}{m(100 - t_f)}$$

siendo π el equivalente en agua del calorímetro que suponemos conocido M la masa de agua del calorímetro, t_i la temperatura inicial y t_f la temperatura final observada después de introducir el cuerpo a 100° C.

Podemos valorar M simplemente mediante la capacidad del calorímetro y m por comparación al tacto de una pesa. Sean:

$$M = 2.000 \text{ gr}$$

$$m = 300 \text{ gr}$$

$$t_i = 17° 3 \text{ C}$$

$$t_f = 21° 2 \text{ C}$$

$$\frac{\Delta C}{C} = \left|\frac{M}{C}\frac{\partial C}{\partial M}\frac{\Delta M}{M}\right| + \left|\frac{m}{c}\frac{\partial C}{\partial m}\frac{\Delta m}{m}\right| + \left|\frac{t_f}{C}\frac{\partial C}{\partial t_f}\frac{\Delta t_f}{t_f}\right| + \left|\frac{t_i}{C}\frac{\partial C}{\partial t_i}\frac{\Delta t_i}{t_i}\right|$$

$$\frac{M}{C}\frac{\partial C}{\partial M} = \frac{M + \pi}{M} \simeq 1 \qquad \frac{t_f}{C}\frac{\partial C}{\partial t_f} = \frac{t_f}{t_f - t_i}\,\frac{100 - t_i}{100 - t_f} = 4.2$$

$$\frac{m}{c}\frac{\partial C}{\partial m} = 1 \qquad \frac{t_i}{C}\frac{\partial C}{\partial t_i} = \frac{t_i}{t_f - t_i} = 3$$

Si las temperaturas t_i y t_f las medimos con un termómetro que aprecia el 0°1 C en el mejor de los casos el error de apreciación será de 0°05C. Tenemos, así:

$$\frac{\Delta C}{C} = \frac{\Delta M}{M} + \frac{\Delta m}{m} + 4.2\ \frac{0.05}{20} + 3.\ \frac{0.05}{15} = \frac{\Delta M}{M} + \frac{\Delta m}{m} + 0.02$$

Para que el error cometido al medir M sea significativo el error relativo de la misma tendrá que ser del orden 0.02, es decir, $\Delta M < M \times 0.02 = 40$ gr. Análogamente deberá ser $\Delta m < 6$ gr. No tendrá, pues sentido medir M ó m con una balanza de precisión pues en ningún caso, midiendo mejor estas masas tendremos valores mas precisos de C.

Si medimos M de modo que $\Delta M \ll 40$ gr y $\Delta m \ll 6$ gr. el error relativo máximo de C es:

$$\frac{\Delta C}{C} \simeq 0.02$$

siendo despreciables los errores de M y m.

E j e m p l o.- Se trata de medir el módulo de Young por tracción con un error del 1%. El módulo de Young E está dado por:

$$E = \frac{L\ P}{\pi r^2 d}\ \text{kg/mm}^2$$

siendo L la longitud del alambre, r su radio y P el peso que produce un alargamiento d.

Sean los valores aproximados:

$$L = 1.000 \text{ mm}$$

$$P = 2 \text{ kg}$$

$$r = 0.5 \text{ mm}$$

$$d = 0.3 \text{ mm}$$

El error porcentual de E esta dado:

$$e\% = \frac{\Delta E}{E}100 = \frac{\Delta L}{L}100 + \frac{\Delta P}{P}100 + 2\frac{\Delta r}{r}100 + \frac{\Delta d}{d}100 = 1$$

Si medimos L con una regla podemos lograr fácilmente un error de apreciación del orden del milímetro, con lo que:

$$\frac{\Delta L \, 100}{L} = 0.1\%$$

Si el peso P lo determinamos con un error de 2 gr $\frac{\Delta P}{P} \times 100 = 0{,}1\%$. Estos errores son despreciables frente al error $e\% = 1\%$. En consecuencia sólo debemos esmerarnos al medir r y d de modo que:

$$2\frac{\Delta r}{r} + \frac{\Delta d}{d} \simeq 0.01$$

Para ello hacemos:

$$2\frac{\Delta r}{r} \simeq 0.005 \qquad \frac{\Delta d}{d} \simeq 0.005$$

Luego:

$$\Delta r \simeq 0.001 \text{ mm} \qquad \Delta d \simeq 0.001$$

Los instrumentos con que hay que medir r y d deberán ser tales que con ellos no se cometan errores de apreciación mayores que los señalados.

c.- Acotación del número de cifras. Si calculamos el valor de C en el ejemplo I del parágrafo anterior, encontramos:

$$C = 0.20873\ldots\text{cal/gr.gC°}$$

En este como en la generalidad de los casos se plantea el problema de saber qué número de cifras podemos garantizar con nuestra determinación en la que los errores de la temperatura son del orden de 0°05 C. El error máximo calculado es de 0.04 cal/gr.gC. Podemos garantizar pues el 8 de la tercera cifra. Las cifras subsiguientes carecen de sentido y sólo se deben a una operación numérica. En todo caso podemos aproximar por exceso o defecto la última cifra. De modo que el calor específico medio determinado será:

$$C = 0.209 \text{ cal/gr.gC con un error máximo } C = 0.04 \text{ cal}/_{gr}^{grC°}$$

d.- Condiciones óptimas de trabajo. Tratándose de mediciones indirectas a veces, puede disponerse de una de las magnitudes medibles directamente asignándole un valor arbitrario. Es el caso p. e. cuando se mide el momento de inercia referido a un eje que pasa por el centro de gravedad de un cuerpo suspendido en forma de péndulo. El momento de inercia no depende naturalmente de la longitud el péndulo, valor éste que interviene, sin embargo, en el cálculo del primero.

Se trata de saber si existe un determinado valor de una tal variable experimental, para la cual el error cometido al medirla no afecta al valor de la magnitud a medir. Sea Z la magnitud que tiene la propiedad enunciada. En la expresión:

$$\Delta L = \left|\frac{\partial f}{\partial x}\,\Delta x\right| + \left|\frac{\partial f}{\partial y}\,\Delta y\right| + \left|\frac{\partial f}{\partial z}\,\Delta z\right|$$

los factores de propagación, en general dependen de Z. Si existe un valor $Z = Z_o$ para el cual se cumple

$$\left(\frac{\partial f}{\partial z}\right)_{z=z_o} = 0$$

tenemos:

$$\Delta L = \left|\frac{\partial f}{\partial x}\,\Delta x\right| + \left|\frac{\partial f}{\partial y}\,\Delta y\right|$$

En tal caso, decimos que trabajamos en condiciones óptimas. La relación:

$$\left(\frac{\partial f}{\partial z}\right)_{z=z_o} = 0$$

define una ecuación en Z que permite determinar su valor.

E j e m p l o.- Sea medir el momento de inercia de un volante referido al eje del mismo,-suspendido en forma de péndulo y haciéndolo oscilar según el plano perpendicular a dicho eje. El mencionado momento de inercia está dado por:

$$I = mgd\,\frac{T^2}{4\pi^2} - md^2.$$

siendo m la masa del volante, T el período de oscilación, g la aceleración de la gravedad y d la distancia entre el centro de gravedad del sistema y el punto de suspensión. Se trata de determinar el valor de d para el cual el error cometido al medirlo no afecta al valor de I.

Tenemos:

$$\frac{\partial I}{\partial m} = gd\,\frac{T^2}{4\pi^2} - d^2 \qquad \frac{\partial I}{\partial T} = mgd\,\frac{T}{2\pi^2} \qquad \frac{\partial I}{\partial d} = mg\,\frac{T^2}{4\pi^2} - 2d$$

Para determinar la longitud óptima $d = d_{op.}$ hacemos:

$$\left(\frac{\partial I}{\partial d}\right)_{d \cdot d_{op}} = 0$$

Luego:

$$d_{op} = \frac{1}{2}\, g\, \frac{T^2}{4\pi^2}$$

Como al variar d varía el período T esta última relación no nos permite determinar directamente $d_{op.}$. Para hallar este valor podemos proceder de la manera siguiente: Medimos para distintos valores de d el período T, hasta lograr un valor de d que satisfaga aquélla relación (Ver ej. I § 3, b del cap.III).

Podemos también, introducir el valor de $d_{op.}$ en la expresión de I:

$$I = 2m\, d_{op}\, \frac{1}{2}\, g\, \frac{T^2}{4\pi^2} - m\, d_{op}^2 = m\, d_{op}^2$$

Si determinamos un valor aproximado de $I \simeq I'$ con un valor cualquiera de d, calculamos d_{op} de

$$d_{op} \simeq \sqrt{\frac{I'}{m}}$$

D). ERRORES CASUALES

TEORIA ESTADISTICA DE LOS ERRORES

Hasta ahora hemos considerado como se puede valorar aproximadamente el error de una medición directa o indirecta de una sola determinación, suponiendo que los errores sistemáticos y casuales son despreciables frente a los errores de apreciación. Sin embargo, aún suponiendo que los errores sistemáticos son nulos o despreciables una medición está afectada siempre de errores casuales cuyo origen ya hemos enunciado. Debido a esta circunstancia, cuando se trata de hacer medidas de precisión y asignarle a esta medida un error lo más peque ño y aproximado posible es indispensable recurrir a la repetición de la misma medida un número de veces convenientemente grande. En esta forma los errores casuales aparecen distribuídos al azar y es posible hacer una teoría estadística de estos errores. Observemos que, desde este punto de vista los errores de apreciación también están incluídos dentro de los errores casuales, y una repetición de las observaciones implicará una repartición estadística de estos errores, lo que en definitiva tiende, como veremos, a una disminución del error a medida que se aumenta el número de observaciones.

§9.- DEFINICIONES. Sea X el valor verdadero de una magnitud y X_1, X_2, X_3, ... X_n, n observaciones experimentales de esta magnitud.

Se llama error verdadero o absoluto de la observación X al valor:

$$\xi_i = X - X_i \qquad (9.1)$$

Valor medio o promedio de las n observaciones

$$\bar{X} = \frac{1}{n}(X_1 + X_2 + X_3 + \dots + X_n) \qquad (9.2)$$

Error aparente de la observación Xi.

$$x_i = \bar{X} - X_i \qquad (9.3)$$

Error absoluto del valor medio.

$$E = X - \bar{X} \qquad (9.4)$$

Error medio cuadrático se llama a la cantidad

$$m = \sqrt{\frac{x_1^2 + x_2^2 + \dots x_n^2}{n}} = \cancel{\sqrt{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(X_i - \bar{X})^2}} = \sqrt{\frac{1}{n}\sum_{1}^{n}(\bar{X} - X_i)^2} \qquad (9.5)$$

Por último el error relativo referido al valor absoluto o del valor medio es como sabemos

$$\frac{\xi_i}{X_i} \quad , \quad \frac{E}{\bar{X}}$$

respectivamente.

De las anteriores definiciones se deducen las consecuencias siguientes: a. De (9.3) y (9.2) formando el valor medio de los errores aparentes:

$$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i = \bar{X} - \frac{1}{n}\sum_{i=1} X_i$$

Se sigue de aquí que por definición la suma de los errores aparentes es nula:

$$\sum_{i=1}^{n} x_i = 0 \qquad (9.6)$$

b. Si obtenemos el valor medio de los errores absolutos

$$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} \xi_i = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} (X - X_i) = X - \frac{1}{n}\sum X_i = X - \bar{X} = E \qquad (9.7)$$

El error absoluto del promedio es, pues, el promedio de los errores absolutos.

c. Desarrollando los cuadrados que aparecen en (9.5),

$$(\bar{X} - X_i)^2 = \bar{X}^2 - 2\bar{X}X_i + X_i^2$$

sumando,ahora de 1 á n,

$$\sum_{i=1}^{n} (\bar{X} - X_i)^2 = n\bar{X}^2 - 2\bar{X}\sum_{i=1}^{n} X_i + \sum_{i=1}^{n} X_i^2$$

y dividiendo por n, obtenemos:

$$m^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} (\bar{X} - X_i)^2 = \bar{X}^2 - 2\bar{X}\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i + \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i^2 - \bar{X}^2$$

$$m^2 = \overline{X^2} - \bar{X}^2$$

$$m = \sqrt{\overline{X^2} - \bar{X}^2} \qquad (9(.8)$$

El error medio cudrático puede definirse también, como la raíz cuadrada de la diferencia entre el promedio de los cuadrados de los valores experimentales y el cuadrado del promedio de los mismos. Ahora bien: el valor medio de una serie de cantidades que no difieren mucho entre sí referida al número de estas cantidades es sensiblemente constante, particularmente cuando este número no es muy reducido. La fórmula (9.8) muestra, así, que el error medio cuadrático de una serie de observaciones es sensiblemente independiente del número de las mismas siempre que éste no sea muy reducido.

10.- POSTULADOS FUNDAMENTALES DE LA TEORIA ESTADISTICA DE ERRORES. La teoría estadística de errores, debida principalmente a GAUSS, se funda en tres postulados fundamentales:

I. El valor más probable de una serie de mediciones, efectuadas en idénticas condiciones, es el valor medio de las mismas.

II. Es igualmente probable cometer errores verdaderos de igual valor absoluto y distinto signo.

III. En una serie de observaciones es tanto más probable un error verdadero, cuanto menor es su valor absoluto.

Estos postulados, aún siendo relativamente simples e intuitivos, no son ni mucho menos evidentes. Su aceptación como fundamento de la teoría sólo puede hacerse a posteriori por las consecuencias que fluyen de la misma. Si estas conclusiones son satisfactorias y no están en contradicción con hechos experimentales los postulados son aceptables como tales. Muchas tentativas se han hecho para excluir al primer postulado y obtenerlo como consecuencia de otros más simples y evidentes. Pero, en general, puede admitirse que, al menos, en una presentación elemental de la teoría, no hay forma más simple y rigurosa que la dada por GAUSS.

El postulado II significa que si al realizar cierto número de mediciones en idénticas circunstancias de una misma magnitud se comete m veces cierto error absoluto $+\xi$ en términos estadísticos se cometerá también m veces el error $-\xi$. Debemos aclarar que se entiende por "en términos estadísticos". Cuando decimos p.e. que la probabilidad de obtener un as al arrojar un dado es 1/6, significa que de cada seis tiros, en términos estadísticos obtendremos un as; esto es, si nos concretamos a seis tiros no tenemos la seguridad de obtener un as. Pero si efectuamos 600 tiros tendremos la seguridad que el número de veces que aparecerá al as es muy próximo a 100.

11.- ERROR DEL PROMEDIO DE UNA MEDICION DIRECTA. Si pudiéramos calcular rigurosamente el error del promedio E, con su correspondiente signo, claro está que podríamos conocer el valor verdadero dado por $X - \bar{X} = E$. Pero esto no es posible y sólo nos es dable calcular E en sentido estadístico, en forma tal, que no podemos establecer un valor bien determinado de X sino un intervalo bien definido dentro del cual se encuentra este valor. Decimos que:

$$\bar{X} - E \leqslant X \leqslant \bar{X} + E$$

es decir, el error del promedio E define alrededor del valor medio $\bar{X}$ un intervalo de inseguridad de longitud 2E dentro del cual se encuentra el valor verdadero X. Naturalmente, cuanto menor es este intervalo, tanto mayor es la precisión $k = \frac{E}{\bar{X}}$ del valor medio.

Veremos a continuación como se calcula este intervalo o lo que es lo mismo el valor E. Partimos de las definiciones (9.1) y (9.3); por diferencia encontramos:

$$\xi_i - x_i = X - \bar{X} = E$$

$$x_i = \xi_i - E$$

donde el índice i caracteriza como antes una determinación cualquiera. Con la última expresión formamos el error medio cuadrático según la definición (9.5):

$$m^2 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} x_i^2 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} (\xi_i - E)^2 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} \xi_i^2 - 2E \cdot \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} \xi_i + n \frac{1}{n} E^2$$

Según la fórmula (9.7) esta última se transforma:

$$m^2 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} \xi_i^2 - 2\, E.E + E^2 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} \xi_i^2 - E^2$$

Tenemos, tambien de la (9.7), elevando al cuadrado

$$\frac{1}{n^2} \sum_{i=1}^{n} \xi_i^2 + \frac{1}{n^2} \sum_{i \neq j} \xi_i \xi_j = E^2$$

donde significa,

$$\sum_{i \neq j} \xi_i \xi_j = \xi_1 \xi_2 + \xi_1 \xi_3 + \dots + \xi_1 \xi_n + \xi_2 \xi_1 + \xi_2 \xi_3 + \dots + \xi_2 \xi_n + \dots + \xi_{n-1} \xi_n$$

Con esto, obtenemos:

$$\frac{1}{n} \sum \xi_i^2 = n\, E^2 - \frac{1}{n} \sum_{i \neq j} \xi_i \xi_j$$

e introduciendo este valor en la última expresión de m^2:

$$m^2 = n E^2 - E^2 - \frac{1}{n} \sum_{i \neq j} \xi_i \xi_j$$

Luego:

$$E^2 = \frac{m^2}{n - 1} + \frac{1}{n(n-1)} \sum_{i \neq j} \xi_i \xi_j$$

Esta expresión vale rigurosamente, pues la hemos obtenido mediante o peraciones algebraicas partiendo de las definiciones (9.1), (9.3) y (9.5). El primer término de E es calculable pues está dado en función de los valores experimentales X_1, X_2 ... X_n y del número n de éstos. Pero los restantes términos no son calculables pues involucran los e- rrores absolutos ξ_1, ξ_2 ... ξ_n que se desconocen. Ahora bien: según el II postulado si obtenemos un error + ξ_i con igual probabilidad ob- tenemos el error $-\xi_i$. Es decir, en términos estadísticos tendremos por cada valor $+\xi_i \xi_j$ uno negativo $-\xi_i \xi_j$. Estos valores se anulan, pues, en términos estadísticos y en este sentido resulta:

$$E = \pm \frac{m}{\sqrt{n - 1}} \tag{11.1}$$

En esta forma tendremos al valor verdadero definido por:

$$\bar{X} - \frac{m}{\sqrt{n - 1}} \leqslant X \leqslant \bar{X} + \frac{m}{\sqrt{n + 1}} \tag{11.2}$$

Habitualmente, por razones de simplicidad estas desigualdades se expresan en forma simbólica

$$X = \bar{X} \pm \frac{m}{\sqrt{n - 1}}$$

pero con la interpretación que se desprende de la notación (11.2)

Ya hemos visto (§ 9, c) que para un número convenientemente gran de de observaciones (8 ó 10 p.e.) el error medio cuadrático m es prác ticamente constante y no depende del número n de observaciones. Esta propiedad del error medio cuadrático es de singular importancia, pues, al considerar la expresión (11.1) de E se observa E disminuye en for- ma inversamente proporcional al número $\sqrt{n - 1}$.

La circunstancia anotada, además de su considerable importancia práctica nos permite dar una definición apropiada del valor verdade- ro de una magnitud. En la expresión (11.2) cuando n tiende a un valor muy grande, el error del valor medio tiende a cero y el valor medio $\bar{X}$ tiende en la misma relación hacia el valor verdadero X. Es decir, el valor verdadero de una magnitud es el valor medio de infinitas observaciones realizadas con un instrumento carente de errores sistemáticos. Si bien esta definición nos permite obviar las dificultades lógicas señaladas en el § 1, desde el punto de vista práctico ya hemos visto (§ 4, b) que no es posible disponer de instrumentos de medida carentes en absoluto de errores sistemáticos.

Por otra parte si consideramos la expresión $x_i = \xi_i - E$ vemos que cuando el número de observaciones es muy grande a un error aparente le corresponde un error absoluto de igual valor.

E j e m p l o.- Medir el diámetro de una esferita de acero con un tornillo micrométrico.

Realizamos primeramente cinco observaciones:

Valores	Valor medio	Errores apar.	E. m. c.	E. del v m.
$X_1 = 1.2$ mm	$\bar{X} = 1.2$ mm	$x_1 = 0$	m = 0.078	E = 0.039
$X_2 = 1.3$ "		$x_2 = -0.1$		
$X_3 = 1.1$ "		$x_3 = 0.1$		$E = \frac{m}{\sqrt{n-1}} = 0.039$
$X_4 = 1.2$ "		$x_4 = 0$		
$X_5 = 1.3$ "		$x_5 = -0.1$		

$$X = 1.20 \pm 0.04 \text{ mm}$$

Mediante 14 observaciones:

Valores

1.2 1.3 1.1 1.2 1.2 1.4 1.2 1.1 1.2 1.2 1.2 1.2 1.3 1.2

Valor medio

$\bar{X} = 1.214$

Errores aparentes

0.02 -0.08 0.12 0.02 0.02 -0.18 0.02 0.12 0.02 0.02 0.02 0.02 -0.08 0.02

Error medio cuadrático

$$m = 0.074$$

Error del valor medio

$$E = 0.0206$$

$$X = 1,21 \pm 0.02 \text{ mm}$$

El error del valor medio ha disminuído al aumentar el número de observación de 5 á 14. En este ejemplo el error de apreciación es, en el mejor de los casos de o.05 mm sensiblemente mayor al error del promedio en ambos casos.

§ 12.- ACOTACION DEL NUMERO DE CIFRAS. Al hallar el valor medio de las observaciones, por la operación de dividir por el número n de observaciones en el caso más general tendremos un número indefinido de cifras. Si conocemos el error de apreciación disponemos de un criterio como ya se ha explicado (§ 8, c) para acotar el número de estas cifras y no tener que efectuar cálculos engorrosos y sin importancia alguna al calcular el error medio cuadrático. En todo caso si el número de observaciones es considerablemente grande (15 ó 20, p.e.) conviene tomar una cifra más del valor medio que la acotación que da el error de apreciación, debido al hecho que el error del promedio disminuye al aumentar el número de observaciones. Por ejemplo, si el valor medio es 32.453215... y el error de apreciación o.1, conviene tomar para el cálculo de m el valor 32.45.

El valor de E, resulta p.e. o.07, entonces el resultado final es:

$$X = 32.45 \pm 0.07$$

Se ve, con esto, que es más correcto tomar para el cálculo de E el valor medio 32.45 y no 32.4.

§ 13.- SIMPLIFICACION DE LOS CALCULOS. Cuando es necesario realizar una serie numerosa de observaciones, el cálculo del error del valor medio implica operaciones engorrosas si el número de cifra de los valores observados no es muy reducido. En tales casos se puede simplificar notablemente los cálculos en la forma siguiente:

Sea X_i un observación cualquiera de una serie de n observaciones. Podemos elegir un valor X_0 que, a simple vista, sea el que mejor aproxima a todos los valores X_i. Tendremos, así, cada observación expresada:

$$X_i = X_0 + \lambda_i$$

siendo λ_i la diferencia entre la observación X_i y el valor aproximado X_0 formando el valor medio:

$$\bar{X} = X_0 + \frac{1}{\eta} \sum_{i=1}^{\eta} \lambda_i = X_0 + \Lambda$$

siendo Λ el promedio de las diferencias λ_i. Como estas diferencias serán siempre números relativamente pequeños y de un escaso número de cifras el valor Λ se halla rápidamente y con ello el valor $\bar{X}$.

Los errores aparentes quedan expresados:

$$x_i = \bar{X} - X_i = \Lambda - \lambda_i$$

y el error medio cuadrático

$$m^2 = \frac{1}{\eta} \sum_{i=1}^{\eta} x_i^2 = \frac{1}{\eta} \left[\eta \Lambda^2 - 2\Lambda \sum \lambda_i + \lambda_i^2 \right] = \frac{1}{\eta} \sum_{i=1}^{\eta} \lambda_i^2 - \Lambda^2$$

E j e m p l o.- Medimos la viscosidad del agua a 15°C diez veces.

$\eta \cdot 10^5$	poise	λ	λ^2	
1138	$X_0 = 1142$	-4	16	$\Lambda \cdot 10^5 = -1.2$
1142		0	0	
1147		5	25	$\bar{\eta} \cdot 10^5 = 1140.8$ poise
1136		-6	36	
1141		-1	1	$10^{10} m^2 = 19.2$
1135		-7	49	
1137		-5	25	$10^5 E = \sqrt{\frac{19.2}{9}} = 1.6$
1148		6	36	
1145		3	9	$\eta \cdot 10^5 = 1.140,8 \pm 1.6$ poise
1139		-3	9	

§ 14.- VALOR MAS PROBABLE DE LAS MEDICIONES INDIRECTAS. Pasaremos, ahora, a estudiar los errores casuales que inciden sobre una medición indirecta. Supondremos, por razones de simplicidad, que nuestra magnitud L es función solamente de dos variables experimentales X e Y:

$$L = f(X, Y)$$

Sean n mediciones directas de X, que designaremos X_1, $X_2 \ldots X_n$ y ℓ de Y_1, Y_2, $Y_3 \ldots Y_\ell$. En total tendremos $n \times \ell$ observaciones. Eligiendo un par de valores X_i , Y_j podemos calcular el valor,

$$L_{ij} = f(X_i , Y_j)$$

que define una determinación de L. Combinando cada valor de X con cada valor de Y tendremos $n.\ell$ valores de L:

$$\begin{array}{llll} L_{11} & L_{12} & L_{13} \ldots & L_{1\ell} \\ L_{21} & L_{22} & L_{23} \ldots & L_{2\ell} \\ \vdots & & & \\ L_{n1} & L_{n2} & L_{n3} \ldots & L_{n\ell} \end{array}$$

Disponiendo de estos $n.\ell$ valores de L se plantea el problema de definir el valor más probable de L. Para ello podemos considerar a estos $n.\ell$ valores experimentales de L como si fueran observaciones directas, con lo que, según el I postulado, el valor más probable está dado por:

$$\bar{L} = \frac{1}{n \times \ell}\left[L_{11} + L_{12} \ldots + L_{1\ell} + L_{21} + L_{22} + \ldots L_{2\ell} + \ldots + L_{n1} + L_{n2} + \ldots L_{n\ell}\right] = \frac{1}{n \times \ell}\sum_{i,j} L_{ij}$$

Este cálculo resulta muy engorroso si el número de observaciones no es muy reducido y particularmente si f(X, Y) no es una función sencilla.

Veremos, sin embargo, que existe una forma muy simple de calcular el valor $\bar{L}$.

Sean $\bar{X}$ e $\bar{Y}$ los valores medios de las n observaciones de X y de las ℓ obobservaciones de Y respectivamente, Si x_i e y_i son los correspondientes errores aparentes, tenemos:

$$X_i = \bar{X} - x_i \qquad , \qquad Y_j = \bar{Y} - y_j$$

Desarrollando en serie de Taylor y considerando sólo los términos de primer orden:

$$L_{ij} = f(\bar{X} - x_i, \bar{Y} - y_j) = f(\bar{X}, \bar{Y}) - x_i \frac{\partial f}{\partial X} - y_j \frac{\partial f}{\partial Y}$$

obtenemos el conjunto de relaciones:

$$
\begin{aligned}
L_{11} &= f\,(\bar{x}\,\bar{y}) - x_1 \frac{\partial f}{\partial \bar{x}} - y_1 \frac{\partial f}{\partial \bar{y}} \\
L_{12} &= f\,(\bar{x}\,\bar{y}) - x_1 \frac{\partial f}{\partial \bar{x}} - y_2 \frac{\partial f}{\partial \bar{y}} \\
&\vdots \\
L_{1\ell} &= f\,(\bar{x}\,\bar{y}) - x_1 \frac{\partial f}{\partial \bar{x}} - y_\ell \frac{\partial f}{\partial \bar{y}} \\
L_{21} &= f\,(\bar{x}\,\bar{y}) - x_2 \frac{\partial f}{\partial \bar{x}} - y_1 \frac{\partial f}{\partial \bar{y}} \\
L_{22} &= f\,(\bar{x}\,\bar{y}) - x_2 \frac{\partial f}{\partial \bar{x}} - y_2 \frac{\partial f}{\partial \bar{y}} \\
&\vdots \\
L_{2\ell} &= f\,(\bar{x}\,\bar{y}) - x_2 \frac{\partial f}{\partial \bar{x}} - y_\ell \frac{\partial f}{\partial y} \\
&\vdots \\
L_{n1} &= f\,(\bar{x}\,\bar{y}) - x_n \frac{\partial f}{\partial \bar{x}} - y_1 \frac{\partial f}{\partial \bar{y}} \\
L_{n2} &= f\,(\bar{x}\,\bar{y}) - x_n \frac{\partial f}{\partial \bar{x}} - y_2 \frac{\partial f}{\partial \bar{y}} \\
&\vdots \\
L_{n\ell} &= f\,(\bar{x}\,\bar{y}) - x_n \frac{\partial f}{\partial \bar{x}} - y_\ell \frac{\partial f}{\partial \bar{y}}
\end{aligned}
\tag{14.1}
$$

Sumando todos los términos:

$$
\begin{aligned}
\sum_{i,j} L_{ij} &= \ell\, f\,(\bar{x}\,\bar{y}) - \ell\, x_1 \frac{\partial f}{\partial \bar{x}} - (y_1 + y_2 + \dots y_\ell) \frac{\partial f}{\partial \bar{x}} + \\
&+ \ell\, f\,(\bar{x}\,\bar{y}) - \ell\, x_2 \frac{\partial f}{\partial \bar{x}} - (y_1 + y_2 + \dots y_\ell) \frac{\partial f}{\partial \bar{y}} + \\
&+ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots + \\
&+ \ell\, f\,(\bar{x}\,\bar{y}) - \ell\, x_m \frac{\partial f}{\partial \bar{x}} - (y_1 + y_2 + \dots y_\ell) \frac{\partial f}{\partial \bar{y}} =
\end{aligned}
$$

$$
= n \times \ell \left[f\,(\bar{x}\,\bar{y}) - (x_1 + x_2 + \dots x_n) \frac{\partial f}{\partial \bar{x}} \right] - n\,(y_1 + y_2 + \dots y_\ell) \frac{\partial f}{\partial \bar{y}}
$$

Como la suma de los errores aparentes de X e Y es nula (9.6) resulta:

$$\sum_{i,j} L_{ij} = n \times \ell \, f(\bar{X},\bar{Y})$$

y de aquí:

$$\bar{L} = \frac{1}{n \times \ell} \sum_{i,j} L_{ij} = f(\overline{XY}) \qquad (14.2)$$

El valor más probable de una medición indirecta es el que se obtiene calculando la correspondiente función con los valores medios de las variables experimentales.

§ 15.- ERROR MEDIO CUADRATICO DE MEDICIONES INDIRECTAS. Definimos por simple generalización de (9.3) el error aparente de L_{ij}:

$$\ell_{ij} = \bar{L} - L_{ij}$$

y al error medio cuadrático de L:

$$m_L = \pm \sqrt{\frac{1}{n \times \ell} \sum_{ij} \ell_{ij}^2}$$

Podemos dar, aquí también, una forma más sencilla de m_l que no exige el cálculo de los valores L_{ij}.

De (14.1) y (14.2), obtenemos elevando al cuadrado:

$$\ell_{11}^2 = x_1^2 \left(\frac{\partial f}{\partial \bar{x}}\right)^2 + y_1^2 \left(\frac{\partial f}{\partial \bar{y}}\right)^2 + 2x_1 y_1 \frac{\partial f}{\partial \bar{x}} \frac{\partial f}{\partial \bar{y}}$$

$$\ell_{12}^2 = x_1^2 \left(\frac{\partial f}{\partial \bar{x}}\right)^2 + y_2^2 \left(\frac{\partial f}{\partial \bar{x}}\right)^2 + 2x_1 y_2 \frac{\partial f}{\partial \bar{x}} \frac{\partial f}{\partial \bar{y}}$$

$$\vdots$$

$$\ell_{1\ell}^2 = x_1^2 \left(\frac{\partial f}{\partial \bar{x}}\right)^2 + y_\ell^2 \left(\frac{\partial f}{\partial \bar{y}}\right)^2 + 2x_1 y_\ell \frac{\partial f}{\partial \bar{x}} \frac{\partial f}{\partial \bar{y}}$$

$$\ell_{21}^2 = x_2^2 \left(\frac{\partial f}{\partial \bar{x}}\right)^2 + y_1^2 \left(\frac{\partial f}{\partial \bar{y}}\right) + 2x_2 y_1 \frac{\partial f}{\partial \bar{x}} \frac{\partial f}{\partial \bar{y}}$$

$$\ell_{22}^2 = x_2^2 \left(\frac{\partial f}{\partial \bar{x}}\right)^2 + y_2^2 \left(\frac{\partial f}{\partial \bar{y}}\right) + 2x_2 y_2 \frac{\partial f}{\partial \bar{x}} \frac{\partial f}{\partial \bar{y}}$$

$$\vdots$$

$$\ell^2_{2\ell} = x^2_2 \left(\frac{\partial f}{\partial \bar{x}}\right)^2 + y^2_\ell \left(\frac{\partial f}{\partial \bar{y}}\right)^2 + 2\, x_2 y_\ell \frac{\partial f}{\partial \bar{x}} \frac{\partial f}{\partial \bar{y}}$$

$$\vdots$$

$$\ell^2_{\eta 1} = x^2_\eta \left(\frac{\partial f}{\partial \bar{x}}\right)^2 + y^2_1 \left(\frac{\partial f}{\partial \bar{y}}\right)^2 + 2\, x_\eta y_1 \frac{\partial f}{\partial \bar{x}} \frac{\partial f}{\partial \bar{y}}$$

$$\ell^2_{\eta 2} = x^2_\eta \left(\frac{\partial f}{\partial \bar{x}}\right)^2 + y^2_2 \left(\frac{\partial f}{\partial \bar{y}}\right)^2 + 2\, x_\eta y_2 \frac{\partial f}{\partial \bar{x}} \frac{\partial f}{\partial \bar{y}}$$

$$\vdots$$

$$\ell^2_{\eta\ell} = x^2_\eta \left(\frac{\partial f}{\partial \bar{x}}\right)^2 + y^2_\ell \left(\frac{\partial f}{\partial \bar{y}}\right)^2 + 2\, x_\eta y_\ell \frac{\partial f}{\partial \bar{x}} \frac{\partial f}{\partial \bar{y}}$$

Sumando:

$$\sum_{i,j} \ell^2_{ij} = \ell\; x^2_1 \left(\frac{\partial f}{\partial \bar{x}}\right)^2 + (y^2_1 + y^2_2 + \ldots y^2_\ell) \left(\frac{\partial f}{\partial \bar{y}}\right)^2 + 2x_1 (y_1 + y_2 + \ldots y_\ell) \frac{\partial f}{\partial \bar{x}} \frac{\partial f}{\partial \bar{y}} +$$

$$+ \ell\; x^2_2 \left(\frac{\partial f}{\partial \bar{x}}\right)^2 + (y^2_1 + y^2_2 + \ldots y^2_\ell) \left(\frac{\partial f}{\partial \bar{y}}\right)^2 + 2x_2 (y_1 + y_2 + \ldots y_\ell) \frac{\partial f}{\partial \bar{x}} \frac{\partial f}{\partial \bar{y}} +$$

$$+ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots +$$

$$+ \ell\; x^2_\eta \left(\frac{\partial f}{\partial \bar{x}}\right)^2 + (y^2_1 + y^2_2 + \ldots y^2_\ell) \left(\frac{\partial f}{\partial \bar{y}}\right)^2 + 2x_\eta (y_1 + y_2 + \ldots y_\ell) \frac{\partial f}{\partial \bar{x}} \frac{\partial f}{\partial \bar{y}} =$$

$$= \ell (x^2_1 + x^2_2 + \ldots x^2_\eta) \left(\frac{\partial f}{\partial \bar{x}}\right)^2 + \eta\, (y^2_1 + y^2_2 + \ldots y^2_\ell) \left(\frac{\partial f}{\partial \bar{y}}\right)^2 + 0$$

Puesto que la suma de los errores aparentes de X e Y es nula, obtenemos dividiendo por $\eta \times \ell$:

$$m^2_L = \frac{1}{\ell \times \eta} \sum_{i,j} \ell^2_{ij} = \frac{1}{\eta} (x^2_1 + x^2_2 + \ldots x^2_\eta) \left(\frac{\partial f}{\partial \bar{x}}\right)^2 + \frac{1}{\ell} (y^2_1 + y^2_\ell + \ldots y^2_\ell) \left(\frac{\partial f}{\partial \bar{y}}\right)$$

Llamando m_x y m_y a los errores medios cuadráticos correspondientes a las mediciones X e Y

$$m^2_x = \frac{1}{\eta} (x^2_1 + x^2_2 + \ldots x^2_\eta)$$

$$m^2_y = \frac{1}{\ell} (y^2_1 + y^2_2 + \ldots y^2_\ell)$$

obtenemos finalmente:

$$m_L = \sqrt{\left(\frac{\partial f}{\partial \bar{x}}\right)^2 m^2_x + \left(\frac{\partial f}{\partial \bar{y}}\right)^2 m^2_y} \qquad (15.1)$$

La generalización para un número cualquiera de variables experimentales

$$L = f(X, Y, Z, ..)$$

es inmediata, obteniéndose para el valor más probable:

$$\bar{L} = f(\bar{X}, \bar{Y}, \bar{Z}, ..) \tag{15.2}$$

y para el error m_L.

$$m_L^2 = \left(\frac{\partial f}{\partial \bar{x}}\right)^2 m_x^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial \bar{y}}\right)^2 m_y^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial \bar{z}}\right)^2 m_z^2 + \dots \tag{15.3}$$

§16.- ERROR DEL VALOR MAS PROBABLE DE DETERMINACIONES INDIRECTAS.

Se trata de establecer cual es el error absoluto E_L del valor más probable $\bar{L}$:

$$E_L = L - \bar{L} \tag{16.1}$$

Si nos concretamos, por ahora, a una función de dos variables, el error absoluto de un valor L_{ij} es:

$$\lambda_{ij} = L - L_{ij} \tag{16.2}$$

el error aparente:

$$\ell_{ij} = \bar{L} - L_{ij} \tag{16.3}$$

Se determina inmediatamente que, como en el caso de observaciones directas la suma de los errores aparentes es nula:

$$\sum \ell_{ij} = n \times \ell . \bar{L} - \sum L_{ij} = 0 \tag{16.4}$$

Además se encuentra por diferencia entre (16.2) y (16.3):

$$\lambda_{ij} - \ell_{ij} = L - \bar{L} = E_L \tag{16.5}$$

Finalmente, en la última expresión sumando sobre todos los valores de i, j, teniendo en cuenta la (16.4) y que el número total de sumando es n. ℓ se obtiene:

$$\frac{1}{\ell . n} \sum_{i,j} \lambda_{ij} = E_L \tag{16.6}$$

Partiendo de estas definiciones y relaciones análogas a las del § 9 se encuentra la expresión que permite calcular E_L en forma completamente análoga a la realizada para determinaciones directas. Sólo que, para ésto, debemos admitir vale el II postulado referido a los errores absolutos .

Se encuentra así,

$$E_L = \pm \frac{m_L}{\sqrt{n \times \ell - 1}}$$

siendo:

m_L el error medio cuadrático de las mediciones L_{ij} calculable directamente mediante la expresión (15.1).

n el número de observaciones efectuadas de la magnitud X

ℓ el número de observaciones efectuadas de la magnitud Y

Finalmente, el valor verdadero:

$$\overline{L} - E_L \leqslant L \leqslant \overline{L} + E_L$$

o como habitualmente se expresa

$$L = \overline{L} \pm E_L$$

Cuando se trata de más de dos variables experimentales, obteniéndose n observaciones de X, m de Y, p de Z, etc., resulta:

$$E_L = \pm \frac{m_L}{\sqrt{n \times m \times p - 1}}$$

siendo m_L calculable mediante la expresión (15.3)

E j e m p l o.- Medición del módulo de Young por tracción.

$$E = \frac{P \ell}{\pi R^2 \Delta}$$

siendo ℓ la longitud de alambre R su radio y P un peso que produce el alargamiento Δ .

Si se discute la influencia de los errores cometidos al medir P y ℓ se encuentra que son despreciables frente a los errores de R y Δ (ver ej.II, § 8, b). De modo que basta para estas magnitudes realizar una sola observación. Se obtiene así la expresión del error medio cuadrático de E:

$$m_E^2 = 2\left(\frac{P\ell}{\pi R^3 \Delta}\right)^2 m_R^2 + \left(\frac{P\ell}{\pi R^2 \Delta^2}\right)^2 m_\Delta^2 = 2\left(\frac{E}{R}\right)^2 m_R^2 + \left(\frac{E}{\Delta}\right)^2 m_\Delta^2$$

Sean los valores:

$P = 1$ kg $\qquad \ell = 1140$ mm

Valores	Valor medio	Errores aparentes		
R mm	$\overline{R}$	r	r^2	m_R
o.28		-o.003	9.10^{-6}	
o.27	o.277	o.007	49	o.007
o.27		o.007	49	
o.29		-o.013	169	
o.27		o.007	49	
o.28		-o.003	9	
o.28		-o.003	9	
Δ mm	$\bar{\Delta}$	δ	δ^2	
o.312		o.0048	240.10^{-6}	m_Δ
o.320	o.3168	-o.0032	105	o.012
o.318		-o.0012	144	
o,316		o.0008	64	
o.318		-o.0012	144	

$$\overline{E} = 14.900 \text{ Kg/mm}$$

$$2\left(\frac{E}{R}\right)^2 = 57.10^8 \qquad \left(\frac{E}{\Delta}\right)^2 = 25.10^8$$

$$m_6 = 810 \qquad E = \pm\frac{810}{\sqrt{5 \times 7 - 1}} = 140$$

$$E = 14.900 \pm 140 \text{ kg/mm}^2$$

COMPARACION DE MEDICIONES DE DISTINTA PRECISION

§17.- NOCION DE PESO DE UNA OBSERVACION. El postulado de la media aritmética se refiere exclusivamente a mediciones realizadas en idénticas circunstancias; esto es, con el mismo instrumento, en las mismas condiciones ambientes y por el mismo observador. Se trata, ahora, de establecer cual es el valor más probable de una magnitud, cuyas observaciones no han sido efectuadas en las mismas condiciones. Sea una misma magnitud medida directamente con dos instrumentos de distinta precisión. No es posible definir al valor más probable como el valor medio del conjunto de ambas series de observaciones. Tampoco conviene desechar las observaciones de menor precisión, pues, como veremos, operando convenientemente con el conjunto de las dos series de observaciones puede lograrse un valor más probable que el que se obtiene sólamente con la serie de observaciones más precisas. Naturalmente, estas últimas deben tener más preponderancia respecto de las otras en la definición del valor más probable. Esta mayor o menor preponderancia de una observación o de una serie de observaciones frente a otras es lo que se llama peso de las mismas. Observaciones realizadas con distintas precisiones se dice que tienen distintos pesos. Estos pesos están directamente vinculados con los factores de reducción de las distintas precisiones a una precisión común, en la misma relación que cuando comparamos centímetros y pulgadas p.e. necesitamos efectuar la conversión a una única unidad, el milímetro p.e.

18.- ERROR MEDIO DE UNA OBSERVACION. Para efectuar la comparación de una serie de observaciones de distintos pesos, es indispensable disponer de un criterio de reducción. Con este objeto es conveniente introducir el llamado error medio de una observación que es el valor medio cuadrático de los errores absolutos.

$$\mu = \sqrt{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} \xi_i^2} = \sqrt{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} (X - X_i)^2} \qquad (18.1)$$

Esta definición no permite calcular prácticamente el valor μ mientras no sea posible expresarlo en función de los errores aparentes. Para ello desarrollamos:

$$\mu^2 = \frac{1}{n}\sum (X - X_i)^2 = n\frac{1}{n}X^2 - 2X\frac{1}{n}\sum X_i + \frac{1}{n}\sum X_i^2 = X^2 - 2X\bar{X} + \frac{1}{n}\sum X_i^2$$

De la definición (9.4), obtenemos:

$$E^2 = X^2 - 2\,X\,\overline{X} + \overline{X}^2$$

y sustituyendo en la expresión anterior, y teniendo presente (9.8)

$$\mu^2 = E^2 - \overline{X}^2 + \frac{1}{n}\sum x_i^2 = E^2 + m^2$$

Recordando las expresiones del error del valor medio (11.1) y del error medio cuadrático (9.5):

$$\mu^2 = \frac{m^2}{n-1} + m^2 = n.\frac{m^2}{n-1} = \frac{n}{n-1}\cdot\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i^2$$

Luego:

$$\mu = \sqrt{\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n} x_i^2} \qquad (18.2)$$

Podemos, ahora, expresar el valor de E por el de :

$$E = \pm\frac{m}{\sqrt{n-1}} = \frac{\mu}{\sqrt{n}} \qquad (18.3)$$

El error μ no tiene la importancia práctica de E en las determinaciones experimentales. Su introducción tiene un carácter formal y su utilidad es la que hemos señalado como criterio de comparación de observaciones de distinta precisión.

19.- PESOS DE OBSERVACIONES DE DISTINTAS PRECISIONES Y VALOR MEDIO PONDERADO. Con el objeto de inducir cual es la expresión del valor más probable en el caso de observaciones de distinta precisión consideraremos primeramente un caso particular. Si efectuamos varias series de observaciones de una misma magnitud y cada una de ellas en las mismas condiciones, pero de modo que cada serie esté constituída por un número distinto de observaciones el valor medio de cada una de estas series tendrá distinto peso. Sean p.e. tres series de observaciones obtenidas en las condiciones enunciadas:

$$X'_1\ ,\ X'_2\ \ldots\ldots\ X'_\ell$$

$$X''_1\ ,\ X''_2\ \ldots\ldots\ X''_m$$

$$X'''_1\ ,\ X'''_2\ \ldots\ldots\ X'''_n$$

El valor medio, es en este caso particular el más probable:

$$\overline{X} = \frac{X'_1 + X'_2 + \dots X'_\ell + X''_1 + X''_2 + \dots X''_m + X'''_1 + X'''_2 + \dots X'''_n}{\ell + m + n}$$

Llamaremos $\overline{X}'$, $\overline{X}''$ y $\overline{X}'''$ a los valores medios de la primera, segunda y tercera serie de observaciones respectivamente. Podemos, así, escribir al valor medio de todas las observaciones:

$$\overline{X} = \frac{\ell\,\overline{X}' + m\,\overline{X}'' + n\,\overline{X}'''}{\ell + m + n} \qquad (19.1)$$

Supongamos que ℓ y m sea pequeños frente a n. El valor $\overline{X}'''$, predomina, pues, en la suma; decimos en tal caso que este valor tiene un peso mayor que los de $\overline{X}'$ y $\overline{X}''$. En el caso particular que tratamos, aparecen los números m y n como una medida de los pesos de los respectivos valores medios.

El error de los valores medios parciales está dado en función del error medio de cada observación (18.3):

$$E' = \frac{\mu}{\sqrt{\ell}} \qquad E'' = \frac{\mu}{\sqrt{m}} \qquad E''' = \frac{\mu}{\sqrt{n}}$$

De donde obtenemos las igualdades:

$$\sqrt{\ell}\,E' = \sqrt{m}\,E'' = \sqrt{n}\,E''' = \sqrt{1}.\mu$$

El valor μ es interpretable como el error del promedio de una serie de observaciones de peso unidad. Esta propiedad permite inmediatamente generalizar nuestro resultado para el caso de observaciones de distinta precisión. Consideremos, ahora el caso en que cada una de las tres series de observaciones hayan sido obtenidas con precisiones distintas. Introducimos los valores p, q, r, que en general, no serán, ahora, números enteros de modo que se cumpla:

$$\sqrt{p}\,E' = \sqrt{q}\,E'' = \sqrt{r}\,E''' = \mu = \text{const.} \qquad (19.2)$$

En tal caso el valor correspondiente al dado por (19.1) es:

$$\overline{X} = \frac{p\overline{X}' + q\,\overline{X}'' + r\,\overline{X}'''}{p + q + r}$$

que se llama valor medio ponderado. Volviendo a la expresión (19.2) veremos su significado. Siendo $\overline{X}$ el valor más probable los errores relativos de las distintas series son respectivamente $\frac{E'}{\bar{X}}$, $\frac{E''}{\bar{X}}$, $\frac{E'''}{\bar{X}}$. Dividiendo la (19.2) por $\bar{X}$:

$$\sqrt{p}\frac{E'}{\bar{X}} = \sqrt{q}\frac{E''}{\bar{X}} = \sqrt{r}\frac{E'''}{\bar{X}} = \frac{\mu}{\bar{X}}$$

Esto nos dice que los valores $\sqrt{p}$, $\sqrt{q}$ y $\sqrt{r}$ son los factores de conversión de los distintos errores relativos al error relativo de una observación que se le atribuye peso unidad. Resulta, también, que estos pesos son proporcionales al cuadrado de la precisión del respectivo valor medio.

Para efectuar prácticamente el cálculo del valor medio ponderado se sustituyen los pesos por el correspondiente valor que resulta de (19.2):

$$\bar{X}_p = \frac{(\frac{\mu}{E'})^2\ \bar{X}' + (\frac{\mu}{E''})^2\ \bar{X}'' + (\frac{\mu}{E'''})^2\ \bar{X}'''}{(\frac{\mu}{E'})^2 + (\frac{\mu}{E''})^2 + (\frac{\mu}{E'''})^2}$$

Cancelando el valor, μ obtenemos, finalmente:

$$\bar{X} = \frac{(\frac{1}{E'})^2\ \bar{X}' + (\frac{1}{E''})^2\ \bar{X}'' + (\frac{1}{E'''})^2\ \bar{X}'''}{(\frac{1}{E'})^2 + (\frac{1}{E''})^2 + (\frac{1}{E'''})^2} \qquad (19.4)$$

§ 20.- ERROR DEL VALOR MEDIO PONDERADO Se trata de determinar como se calcula el error del valor medio ponderado E_p.

Supongamos que se trate de comparar el valor $\bar{X}$ de (19.1) con otro valor:

$$\bar{Y} = \frac{\ell'\ \bar{Y}' + m'\ \bar{Y}'' + \ '\ \bar{Y}'''}{\ell' + m' + n'}$$

correspondiente a la misma magnitud. A $\bar{X}$ habrá que atribuírle el peso $\ell + m + n$ y a Y el peso $\ell' + m' + n'$. Análogamente el peso del valor $\bar{X}$ de (19.3) es p + q + r. En otras palabras el peso del valor medio ponderado es la suma de los pesos de las distintas observaciones. Según esto el error E debe ser tal que cumpla

$$\sqrt{p + q + r}\ E_p = \sqrt{p}\ E' = \sqrt{q}\ E'' = \sqrt{r}\ E''' = \mu$$

De aquí obtenemos:

$$E_p^2 = \frac{\mu^2}{\left(\frac{\mu}{E'}\right)^2 + \left(\frac{\mu}{E''}\right)^2 + \left(\frac{\mu}{E'''}\right)^2} = \frac{1}{\left(\frac{1}{E'}\right)^2 + \left(\frac{1}{E''}\right)^2 + \left(\frac{1}{E'''}\right)^2}$$

O bien:

$$E_p = \frac{1}{\sqrt{\left(\frac{1}{E'}\right)^2 + \left(\frac{1}{E''}\right)^2 + \left(\frac{1}{E'''}\right)^2}} \qquad (20.1)$$

Finalmente, el valor verdadero X se expresa:

$$X = \bar{X}p \pm Ep$$

E j e m p l o.- Peso específico del aluminio obtenido con dos métodos: mediante la balanza de Arquímedes y el picnómetro:

$$\delta' = 2{,}72 \pm 0{,}04 \text{ g/cm}^3 \qquad \delta'' = 2{,}74 \pm 0{,}07 \text{ gr/cm}^3$$

$$\bar{\delta} = \frac{\frac{2{,}72}{(0{,}04)} + \frac{2{,}74}{(0{,}07)}}{\frac{1}{(0{,}04)} + \frac{1}{(0{,}07)}} = 2{,}726 \text{ g/cm}^3 \quad Ep = 0{,}030$$

$$\delta = 2{,}726 \pm 0.030 \text{ gr/cm}^3$$

LEY DE DISTRIBUCION DE GAUSS

§ 21.- GENERALIDADES SOBRE EL CALCULO DE PROBABILIDADES. Se define como probabilidad simple de un acontecimiento casual a la relación entre el número de casos favorables y el de los casos posibles. Al tirar un dado la probabilidad de obtener un as es 1/6; un caso favorable (el as) y seis casos posibles (las seis caras del dado).

Si dos acontecimientos pueden verificarse independientemente, la probabilidad de que uno de ellos se realice indistintamente es la suma de las probabilidades simples (probabilidad total). Así, por ejemplo, la probabilidad de obtener al arrojar un dado un as o un seis es 1/6 + 1/6 = 2/6.

La probabilidad de la realización simultánea de dos acontecimientos independientes es el producto de las probabilidades simples. Si arrojamos dos dados, la probabilidad de obtener dos ases es 1/6 . 1/6 = 1/36. (probabilidad compuesta).

Existe, además, la posibilidad que el número da casos posibles formen un continuo. Por ejemplo, si arrojamos esferitas sobre un plano inclinado con obstáculos regulares, podemos preguntarnos cual es la probabilidad de localizar una esferita en cierto intervalo de la base del plano inclinado. Es también, el caso del tiro al blanco: si apuntamos al centro del blanco, podemos preguntarnos cual es la probabilidad que la bala pegue en cierta zona del blanco. Este tipo de probabilidades se llaman probabilidades continuas y la solución de un problema de este tipo exige la introducción de una función llamada función de distribución de probabilidades. El problema de establecer cual es la probabilidad de cometer un error comprendido entre dos valores dados es también un problema de probabilidades continuas. La función que resuelve este problema se llama función de distribución de errores o simplemente función de Gauss.

22.- DEFINICION Y PROPIEDADES DE LA FUNCION DE DISTRIBUCION DE ERRORES. Si efectuamos un número muy grande de observaciones con un instrumento desprovisto de errores sistemáticos hemos visto (§ 11) que los errores aparentes se aproximan a los errores verdaderos en la medida que el número de las observaciones pueden considerarse infinitas. Al hablar de la función de distribución de errores, hablamos de una función de argumento continuo cuyo campo de variabilidad es el intervalo $(+\infty , -\infty)$. En tal caso es indistinto considerar que este argumento son los errores verdaderos o los errores aparentes. Como prácticamente no puede disponerse efectivamente de un número infinito de observaciones, los errores verdaderos se sustituyen por los valores aproximados de los errores aparentes. De modo que, aún para el caso de un número finito pero grande de observaciones consideraremos a la función de distribución como función de los errores aparentes.

Se introduce la función de distribución de errores de modo que la probabilidad de obtener el error x comprendido entre dos valores infinitamente próximos x y x + dx esté dado por:

$$\varphi(x)\,dx$$

Sin conocer la expresión analítica de la función $\varphi(x)$ podemos anticipar las siguientes propiedades de esta función:

a). Por el II postulado $\varphi(x)$ debe ser una función par, es decir debe satisfacer la condición $\varphi(x) = \varphi(-x)$

b). Por el postulado III la función debe ser máxima en el origen es decir $\varphi(0)$ = máximo.

c). La probabilidad de cometer un error comprendido dentro de un intervalo finito x_1, x_2 es la suma de las probabilidades elementos $\varphi(x)\,dx$. Si llamamos $P(x_1, x_2)$ es dicha probabilidad debemos tener:

$$P(x_1\ x_2) = \int_{x_1}^{x_2} \varphi(x)\,dx$$

d). La probabilidad de cometer un error en el intervalo ∞, $-\infty$ es la certeza de modo que debe cumplirse:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \varphi(x)\,dx = 1$$

e). La probabilidad de cometer un error infinitamente grande debe ser nula de modo que debe cumplirse:

$$\varphi(\infty) = \varphi(-\infty) = 0$$

f). La probabilidad de cometer en dos observaciones sucesivas los errores x_1 y x_2 comprendidos en los intervalos x_1 $x_1 + dx$ y x_2, $x_2 + dx$, respectivamente es la probabilidad compuesta:

$$\varphi(x_1)\,dx \cdot \varphi(x_2)\,dx$$

Mediante estas propiedades se demuestra que la función de distribución es de la forma:

$$\varphi(x) = \frac{h}{\sqrt{\pi}} e^{-h^2 x^2}$$

donde h es una constante cuyo significado hallaremos más abajo.

La representación geométrica de la función $\varphi(x)$ es la dada por la fig.3. Como sabemos, la probabilidad elemental de cometer el error x comprendido entre x y $x + dx$ está dado por $\varphi(x)\,dx$, valor que gráficamente está representado por el área rayada. La probabilidad de cometer un error comprendido en el intervalo x_1 x_2 dado por:

$$\int_{x_1}^{x_2} \varphi(x)\,dx.$$

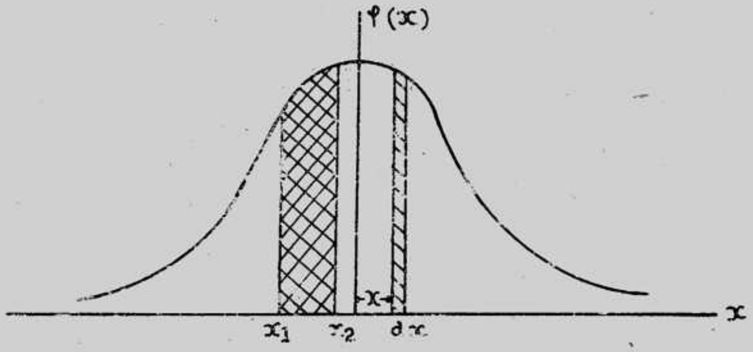


FIG. 3

está representada geométricamente por el área cuadriculada.

Observemos, además que el área comprendida entre el eje de las abscisas y la curva φ (x) vale 1, pues:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \varphi(x)\ dx = 1$$

§ 23.- SIGNIFICADO DE H. Para hallar el significado de la constante h obtengamos la representación de la función φ (x) para dos valores distintos de h, h_1 y h_2, fig.4 y fig.5 respectivamente.

La ordenada en el origen (x = 0) vale $\frac{h}{\sqrt{\pi}}$. En el primer caso, la curva es más alta en el origen que en el segundo. Como las áreas encerradas por las curvas en ambos casos debe ser 1 se sigue inmediatamente que en el segundo caso la curva es más extendida que en el primero. Se observa que la probabilidad elemental de un error pequeño en el caso de la distribución correspondiente a h es mayor para un mismo valor de x que en la correspondiente a h_1. Lo contrario sucede para errores grandes; es menos probable cometer errores grandes en el primer caso que en el segundo.

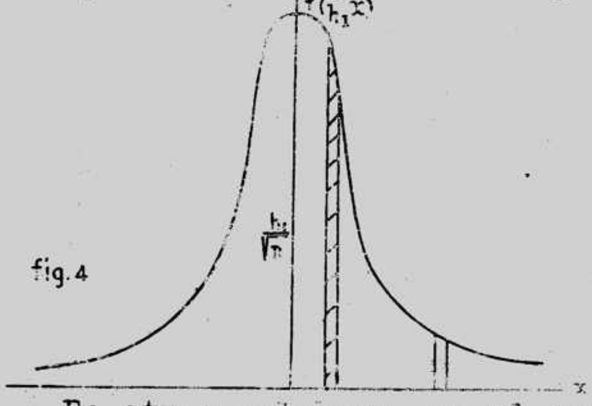


fig. 4

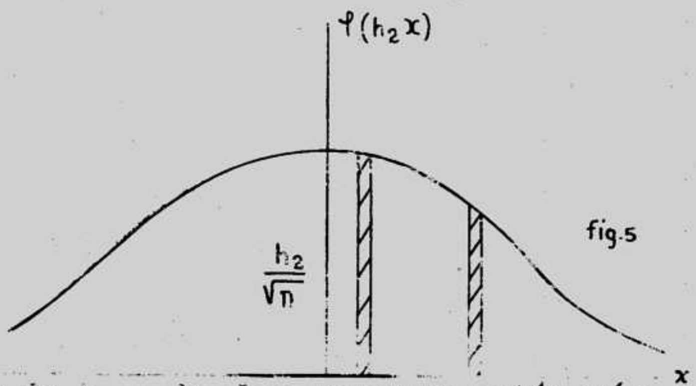


fig.5

En otras palabras, en el caso de $h_1 > h_2$ los errores están más concentrados alrededor del valor cero.

Hemos visto que la precisión de un instrumento o de un método está referida a la propiedad de los mismos de repetir en mayor o me nor grado los mismos valores para observaciones realizadas en iguales condiciones. Cuando un instrumento o un método reproduce un buen grado los mismos valores los errores aparecen concentrados alrededor del valor cero del error. En cambio si un instrumento no reproduce bien los mismos valores para las mismas observaciones la dispersión alrededor del cero de los errores es mayor. Se ve, pues, que la constante h que aparece en la ley de distribución de errores, es en cierto modo una medida de aquellas precisiones. Por esta razón Gauss llamó a esta constante <u>precisión del método o del instrumento</u>.

§ 24.- <u>CALCULO PRACTICO DE h</u>. Sea n un número grande de observaciones. El error medio cuadrático es:

$$m^2 = \frac{1}{n} (x_1^2 + x_2^2 + \dots x_n^2)$$

De estos n errores habrá algunos que son iguales o muy próximos a x_1. Si definimos un intervalo pequeño Δx_1 alrededor de este error tendremos n_1 errores que caen dentro de este intervalo. Podemos obtener en esta forma la expresión el error medio cuadrático:

$$m^2 = \frac{n_1}{n} x_1^2 + \frac{n_2}{n} x_2^2 + \dots \frac{n_h}{n} x_h^2$$

Siendo n_1 el número de veces que aparecen errores muy próximos a x_1 dentro del intervalo Δx_1 la relación $\frac{n_1}{n}$ mide la probabilidad de obtener, haciendo n observaciones el error x_1 dentro del mencionado intervalo. Si nos referimos, ahora a la función de distribución debe ser:

$$\frac{n_1}{n} = \varphi (x_1) \Delta x$$

Tendremos así:

$$m^2 = x_1^2 \varphi (x_1) \Delta x_1 + x_2^2 \varphi(x_2) \Delta x_2 + \dots x_s^2 \varphi(x_s) \Delta x_s = \sum x_i^2 \varphi (x_i) \Delta x_i$$

Cuando el número de observaciones aumenta los intervalos Δx tienden a cero y la suma anterior tiende hacia la integral:

$$m^2 = \int_{-\infty}^{\infty} x^2 \varphi (x) \, dx$$

En esta forma queda definido el error medio cuadrático cuando el número de observaciones es infinitamente grande. Claro está, que desde el punto de vista práctico tal cosa es sólo posible como proceso ideal. Sin embargo la relación anterior nos provee de una vincula-ción entre h y m que vale para un número finito de observaciones en la misma relación que la suma mencionada arriba es aproximable por la correspondiente integral.

El valor de la última integral resulta ('):

$$\int_{-\infty}^{\infty} x^2 f(x)\, dx = \frac{h}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} x^2 e^{-h^2x^2}\, dx = \frac{1}{2h^2}$$

Obtenemos así la relación entre h y m:

$$h = \frac{1}{\sqrt{2}\, m} \qquad (25.1)$$

En el caso práctico en que n es un número grande pero finito de observaciones se tiene:

$$h = \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{\frac{n}{\sum_{i=1}^{n} x_i^2}}$$

COMPENSACION DE ERRORES

25.- PROBABILIDAD MAXIMA DE OBTENER UN CONJUNTO DADO DE ERRORES. Consideremos nuevamente el caso en que una misma magnitud se mide con distintos instrumentos o métodos a cada uno de los cuales corresponde una precisión h. Sean las tres series de observaciones:

$X'_1, X'_2, \ldots\ldots X'_l$	con precisión	h_1	y valor medio		$\bar{X}'$
$X''_1, X''_2, \ldots\ldots X''_m$	" "	h_2	" "	"	$\bar{X}''$
$X'''_1, X'''_2, \ldots\ldots X'''_n$	" "	h_3	" "	"	$\bar{X}'''$

(') Cálculo de la integral

$$I = \frac{h}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} x^2 e^{-h^2x^2}\, dx$$

Hacemos la sustitución de variables $\xi = h x$, e integrando por partes

$$I = \frac{1}{h^2\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \xi^2 e^{-\xi^2}\, d\xi$$

$$= -\frac{1}{2} \left| \xi e^{-\xi^2} \right|_{-\infty}^{\infty} + \frac{1}{2h^2\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\xi^2}\, d\xi$$

El primer término se anula, y recordando que

$$\frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\xi^2}\, d\xi = 1$$

obtenemos

$$I = \frac{1}{2h^2}$$

La probabilidad de cometer los errores x'_1, x'_2, ... x'_l sucesivamente al efectuar la primera serie de observaciones, está dada como sabemos por:

$$\left(\frac{h_1}{\sqrt{\pi}}\right)^l e^{-h_1^2 (x'^2_1 + x'^2_2 + \dots x'^2_l)} \Delta x'_1 \Delta x'_2 \dots \Delta x'_l$$

siendo $\Delta x'_1$, $\Delta x'_2$ ... $\Delta x'_l$ respectivamente los intervalos dentro de los cuales se encuentran comprendidos aquellos errores.

La probabilidad de cometer en las tres series de observaciones sucesivamente los errores:

$$x'_1,\ x'_2 \dots x'_l.$$

$$x''_1,\ x''_2 \dots x''_m$$

$$x'''_1,\ x'''_2 \dots x'''_n.$$

está dada por:

$$\left(\frac{h_1}{\sqrt{\pi}}\right)^l \left(\frac{h_2}{\sqrt{\pi}}\right)^m \left(\frac{h_3}{\sqrt{\pi}}\right)^n e^{-\left[h_1^2 (x'^2_1 + x'^2_2 \dots x'^2_l) + h_2^2 (x''^2_1 + x''^2_2 \dots x''^2_m) + \right.}$$

$$\left. + h_3^2 (x'''^2_1 + x'''^2_2 + \dots x'''^2_m)\right]$$

$$x \ \Delta x'_1 \ \Delta x'_2 \dots \Delta x'_l . \ \Delta x''_1 \ \Delta x''_2 \dots \Delta x''_m . \ x'''_1 \ x''_2 \dots x'''_m$$

Supongamos, ahora, que los errores mencionados están referidos a la cantidad $X = X_0$ que hace máxima esta probabilidad. Evidentemente un valor tal será el valor más probable. Por el carácter de la función de probabilidad sin más, podemos afirmar que dicha funcion es máxima cuando el exponente es mínimo. Dicho exponente es la función de X:

$$S = h_1^2 \left[(X - X'_1)^2 + (X - X'_2)^2\right] + \dots \left[(X - X'_1)^2\right] +$$

$$+ h_2^2 \left[(X - X''_1)^2 + (X - X''_2)^2 + \dots (X - X''_m)^2\right] + h_3^2 \left[(X - X'''_1)^2 + \dots (X - X_n)^2\right.$$

La condición para que esta función sea mínima para $X = X_0$ es:

$$\left(\frac{\partial S}{\partial X}\right)_{X = X_0} = 0$$

o bien efectuando la correspondiente derivación e igualando $X = X_0$:

$$2h_1^2 \left[(X_0 - X'_1) + (X_0 - X'_2) + \ldots (X_0 - X'_\ell) \right. + 2h_2^2 \quad (X_0 - X''_1) +$$

$$+ (X_0 - X''_2) + \ldots (X_0 - X''_m) \Big] + 2h_3^2 \Big[(X_0 - X'''_1) + \ldots \Big[(X_0 - X'''_2) +$$

$$+ \ldots (X_0 - X'''_n) = 0$$

de donde despejando X_0, obtenemos:

$$X_0 = \frac{h_1^2 \, (X'_1 + X'_2 + \ldots X'_\ell) + h_2^2 \, (X''_1 + X''_2 + \ldots X''_m) + h_3^2 \, (X'''_1 + X'''_2 + \ldots X'''_n)}{\ell h_1^2 + m \, h_2^2 + n \, h_3^2}$$

$$X_0 = \frac{\ell \, h_1^2 \, \overline{X}' + m \, h_2^2 \, \overline{X}'' + n \, h_3^2 \, \overline{X}'''}{\ell h_1^2 + m \, h_2^2 + h_3^2} \qquad (25.1)$$

Veremos que cuando el número de observaciones de cada serie es suficientemente grande, este valor más probable corresponde al valor medio ponderado (19.4). En efecto: Teniendo en cuenta la relación entre la precisión y el error medio cuadrático (25.1) tenemos para la primera serie de observaciones:

$$2\ell h_1^2 = \frac{\ell}{m^2} = \frac{1}{E'^2}$$ en lugar $\frac{[illegible]}{m^2} = \frac{1}{E^2}$

y análogamente para las otras series de observaciones, con lo que la (25.1) se reduce a la (19.4).

De aquí obtenemos también que el peso de una serie de observaciones es proporcional al cuadrado de la precisión y al número de las mismas del correspondiente instrumento o método, pues haciendo:

$$p = C\ell h_1^2 \qquad q = Cm h_2^2 \qquad r = Cn h_3^2$$

la (25.1) se reduce a (19.3). En el § 19 hemos obtenido que el peso de una serie de observaciones realizados en las mismas condiciones es proporcional al cuadrado de la precisión del valor medio de las mismas. Sólamente que la constante de proporcionalidad tiene un significado distinto.

Nuestro resultado nos indica que en el caso más general (observaciones de distinta precisión) el valor más probable es aquél que hace mínima a la suma de los cuadrados de los errores multiplicados por los respectivos pesos de las correspondientes observaciones pues tenemos:

$$S = \frac{1}{C}\left\{ P\sum_{i=1}^{l} x_i'^2 + q \sum_{i=1}^{n} x_i''^2 + r \sum_{i=1}^{n} x_i'''^2 \right\}$$

En general si la observación X_i de peso p_i está afectada de un error x_i, el valor más probable es aquél que hace mínima a la expresión:

$$S = \sum_i p_i\, x_i^2 \tag{25.2}$$

§ 26.- COMPENSACION DE ERRORES POR EL METODO DE LOS CUADRADOS MINIMOS. Sea:

$$f(A,\ B,\ C,\ X,\ Y,\ Z) = 0 \tag{26.1}$$

una ecuación correspondiente a una ley física que vincula las magnitudes X, Y, Z con ciertos parámetros A, B, C. Supuesto que las primeras sean medibles en forma directa, se trata de determinar los valores de A, B, C. Cuando estos valores, que en nuestro caso hemos supuesto son tres, se reducen a uno solo, lo hemos tratado al considerar las determinaciones indirectas. El caso presente es pues, una generalización de aquéllos.

Para poder determinar los valores de A, B, C, se deberá disponer por lo menos de tantas ecuaciones como número de parámetros a determinar involucra la ley considerada. En nuestro caso deberán disponerse por lo menos de tres ecuaciones. Estas ecuaciones se logran variando las condiciones de medida tantas veces como sea necesario.

Veamos un ejemplo. La ley general de dilatación lineal de una barra que a cero grado tiene la longitud l_0 es:

$$l = l_0\ (1 + \alpha t + \beta t^2 + \gamma t^3 + \ldots)$$

siendo t la temperatura centígrada, α, β, γ, los coeficientes de dilatación lineal de primero, segundo y tercer orden, respectivamente. En general es suficiente tener en cuenta sólo los dos primeros, de modo que podemos expresar:

$$\frac{l - l_0}{l_0} = \lambda = \alpha t + \beta t^2$$

siendo λ la dilatación relativa de nuestra barra. En este caso, X e Y son los valores λ y t. Los parámetros A y B son los coeficientes α y β. Para poder determinar estos dos coeficientes necesitamos por lo menos dos ecuaciones que las logramos variando la temperatura: rea lizando una observación de λ a la temperatura t_1 y otra a la temperatura t_2:

$$\overset{A}{\alpha t_1} + \overset{B}{\beta \cdot t_1^2} - \overset{C}{\lambda_1} = 0 \qquad \alpha = \frac{\begin{vmatrix} c_1 & b_1 \\ c_2 & b_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} e_1 & b_1 \\ e_2 & b_2 \end{vmatrix}}$$

$$\alpha t_2 + \beta t_2^2 - \lambda^2 = 0 \qquad \beta = \frac{\begin{vmatrix} e_1 & c_1 \\ e_2 & c_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} e_1 & b_1 \\ e_2 & b_2 \end{vmatrix}}$$

En esta forma podemos determinar los valores de α y β. Pero esta operación equivale a una sola medición de α y β. El problema se presenta cuando se trata de aumentar la precisión de estas mediciones aumentando el número de observaciones.

Volviendo al caso general, supongamos sean n las observaciones realizadas en distintas condiciones. Sean X_i, Y_i y Z_i los valores medidos de las magnitudes X, Y, Z para una cualquiera de aquellas condiciones. Estos valores experimentales no están desprovistos de errores, de modo que introducidos en (26.1) obtendremos:

$$f_i\ (A,\ B,\ C,\ X_i,\ Y_i,\ Z_i) = e_i$$

siendo e_i el error proveniente de los errores de que están afectados los valores X, Y, Z.

Sabemos, por otra parte, que los valores más probables de A, B, C, que designaremos, $\bar{A}$, $\bar{B}$, $\bar{C}$, son aquéllos para los cuales la suma:

$$S = e_i^2 + e_2^2 + \ldots e_m^2 = \sum_{i=1}^{n} e_i^2$$

es mínima. O bien:

$$S = \sum_{i=1}^{n} f_i(A,\ B,\ C,\ X_i,\ Y_i,\ Z_i) = \text{mínimo para } A = \bar{A},\ B = \bar{B},\ C = \bar{C}$$

La condición de mínimo es:

$$\left(\frac{\partial S}{\partial A}\right)_{A=\bar{A}} = \sum_{i=1}^{n} f_i \frac{\partial f}{\partial \bar{A}} = 0; \quad \left(\frac{\partial S}{\partial B}\right)_{B=\bar{B}} = \sum_{i=1}^{n} f_i \frac{\partial f_i}{\partial \bar{B}} = 0; \quad \left(\frac{\partial S}{\partial C}\right)_{C=\bar{C}} = \sum_{i=1}^{n} f_i \frac{\partial f}{\partial \bar{C}} = 0 \qquad (26.2)$$

Estas tres condiciones nos proveen de tres ecuaciones que vinculan los valores experimentales X, Y, Z con los valores más probables $\bar{A}$, $\bar{B}$, $\bar{C}$, y de las cuales podemos calcular estos valores.

E j e m p l o I.- Medir la constante elástica de un resorte. Entre el peso P y el alargamiento Z que produce este peso existe la relación:

$$P = k\,Z$$

siendo k la constante elástica. Tenemos:

$$kZ_i - P_i = e_i$$

Debe ser

$$S = \sum (kZ_i - P_i)^2 = \text{mínimo}$$

Se tiene aplicando la condición de mínimo:

$$\sum Z_i(\bar{k}\, Z_i - P_i) = 0$$

Obtenemos de aquí para el valor más probable de k:

$$\bar{k} = \frac{\sum Z_i P_i}{\sum Z_i^2}$$

Sean los valores:

P gr	Z cm	Z^2	P Z
20	1.21	1.46	24.2
40	2.43	5.90	97.2
60	3.60	13.000	216.0
80	4.86	23.60	388.8
100	6.08	37.00	608.0

$$\sum_{i=1}^{5} Z_i^2 = 80.96 \qquad \sum_{i=}^{5} P_i\, Z_i = 1334.2$$

$$\bar{k} = \frac{1334}{80.96} = 1.640 \text{ gr/cm}$$

E j e m p l o   II.- En el ejemplo puesto más arriba de la determinación de los coeficientes de dilatación lineal de primer y segundo orden:

$$\alpha t_i + \beta\, t_i^2 - \lambda_i = e_i$$

$$S = \sum_{i=1}^{n} (\alpha t_i + \beta\, t_i^2 - \lambda_i)^2$$

La condición de mínimo es:

$$\left(\frac{\partial S}{\partial \alpha}\right)_{\alpha=\bar{\alpha}} = \sum_{i} t_i\,(\bar{\alpha}\,t_i + \bar{\beta}\,t_i^2 - \lambda_i) = 0 \quad ;$$

$$\left(\frac{\partial S}{\partial \beta}\right)_{\beta=\bar{\beta}} = \sum_{i=1}^{n} t_i^2\,(\bar{\alpha}\,t_i + \bar{\beta}\,t_i^2 - \lambda_i) = 0 \ .$$

de donde obtenemos el sistema de dos ecuaciones en $\bar{\alpha}$ y $\bar{\beta}$:

$$\begin{cases} \bar{\alpha}\sum\limits_{i=1}^{n} t_i^2 + \bar{\beta}\sum\limits_{i=1}^{n} t_i^3 = \sum\limits_{i=1}^{n} t_i\lambda_i \\ \bar{\alpha}\sum\limits_{i=1}^{n} t_i^3 + \bar{\beta}\sum\limits_{i=1}^{n} t_i^4 = \sum\limits_{i=1}^{n} t_i^2\lambda_i \end{cases}$$

E j e m p l o III.- Determinación de momentos de inercia y la cupla directriz con el péndulo de torsión.

El péndulo de torsión el período de oscilación T, el momento de inercia del sistema respecto del eje de oscilación y la cupla directriz D están relacionados mediante:

$$T_1 = 2\pi\sqrt{\frac{I}{D}}$$

Cuando se trata de determinar I y no se conoce el módulo de torsión del alambre de suspensión que permite conocer D, es necesario disponer de otra ecuación. Se logra disponiendo lateralmente dos cilindros que varían el momento de inercia del sistema móvil. Si m es la masa de uno de los cilindros ρ su radio y d la distancia del eje del cilindro al eje de oscilación el momento de inercia adicional debido a los dos cilindros es:

$$J = m(\rho^2 + 2\,d^2)$$

Si se tiene un dispositivo que permita variar d, para cada posición de los cilindros se tendrá un momento de inercia adicional:

$$J_i = m\,(\rho^2 + 2\,d_i)^2$$

El tiempo de oscilación del péndulo para cada posición de los cilindros queda dado:

$$T_i = 2\pi\sqrt{\frac{I + J_i}{D}}$$

Consideramos que $J_1 = 0$ que corresponde a la fórmula anterior de T_1 cuando no se colocan los cilindros.

Tenemos así

$$\frac{T_i^2}{4\pi^2} D - I - J_i = \ell_i$$

y aplicando la condición de mínimo:

$$\left(\frac{\partial S}{\partial D}\right)_{D=\bar{D}} = \sum_{i=1}^{n} T_i^2 \left(\frac{T_i^2}{4\pi^2} \bar{D} - \bar{I} - J_i\right) = 0; \quad \left(\frac{\partial S}{\partial I}\right)_{I=\bar{I}} = \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{T_i^2}{4\pi^2} \bar{D} - \bar{I} - J_i\right) = 0$$

Con lo cual obtenemos el sistema de ecuaciones que nos permiten determinar $\bar{I}$ y $\bar{D}$ midiendo T_i y J_i.

$$\bar{D} \frac{1}{4\pi^2} \sum_{i=1}^{n} T_i^4 - \bar{I} \sum_{i=1}^{n} T_i^2 = \sum_{i=1}^{n} T_i^2 J_i$$

$$\bar{D} \frac{1}{4\pi^2} \sum_{i=1}^{n} T_i^2 - \bar{I} \cdot n = \sum_{i=1}^{n} J_i$$

§ 27.- ECUACIONES NORMALES. Las ecuaciones (26.2) son particularmente simples cuando la función $f(A, B, \ldots X, Y \ldots)$ es una función lineal de los parámetros A, B,... Cuando esto no sucede la resolución del sistema (26.2) se hace difícil sino imposible. En tales casos habría que aplicar métodos numéricos de resolución no siempre simples. Es preferible, entonces, aplicar el método que describimos a continuación, que exige el conocimiento previo de valores aproximados de A, B, ...

Sean A_0, B_0,... valores aproximados de los parámetros A, B,... y a, b... los errores de estos valores aproximados.

$$A = A_0 + a \qquad B = B_0 + b \ldots$$

Introduciendo estos valores aproximados en la correspondiente función f(A,...)

$$f_i\,(A_0, B_0 \ldots X_i, Y_i \ldots) = \ell_i \tag{27.1}$$

siendo ℓ_i en este caso, los errores aparentes que involucran tanto los errores a, b,... como los errores de medición de las magnitudes X_i, Y_i,... Los errores ℓ_i son calculables directamente mediante la (27.1).

Por otra parte, tenemos definido los errores absolutos:

$$f_i\ (A,\ B,\ \dots\ X_i,\ Y_i\ \dots) = e_i \qquad (27.2)$$

que no son calculables directamente, pues desconocemos los valores verdaderos A, B, ...

La solución se logra calculando los valores más probables de los errores, a, b, ... que llamaremos $\bar{a}$, $\bar{b}$, ... pues en esta forma quedan definidos los valores más probables

$$\bar{A} = A_0 + \bar{a} \qquad \bar{B} = B_0 + \bar{b} \dots$$

De (27.2), por desarrollo en serie de Taylor obtenemos:

$$e_i = f(A_0 + a, B_0 + b \dots X_i, Y_i \dots) = f_i(A_0, B_0 \dots X_i, Y_i \dots) +$$

$$+ a\frac{\partial f}{\partial A_0} + b\frac{\partial f}{\partial B_0} + \dots$$

O bien de (27.1)

$$e_i = l_i + \alpha_i\ a + \beta_i\ b + \dots \qquad (27.3)$$

llamando

$$\alpha_i = \frac{\partial f_i}{\partial A_0} \qquad \beta_i = \frac{\partial f_i}{\partial B_0} \dots$$

valores, éstos, que son calculables directamente.

Tenemos, ahora, que la suma de los cuadrados de los errores absolutos dados por la (27.3) debe ser un mínimo para los valores más probables de a, b,..., es decir, debe cumplirse:

$$S = \sum_{i=1}^{n} (l_i + \alpha_i a + \beta_i b)^2 = \text{mínimo para } a = \bar{a},\ b = \bar{b} \dots$$

$$\left(\frac{\partial S}{\partial a}\right)_{a=\bar{a}} = 0 \qquad ; \qquad \left(\frac{\partial S}{\partial b}\right)_{b=\bar{b}} = 0 \qquad (27.4)$$

lo que nos da el sistema de ecuaciones

$$\sum_{i=1}^{n} \alpha_i \left[\alpha_i\bar{a} + \beta_i\ \bar{b} + \dots + l_i\right] = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i\, l_i = 0$$

$$\sum_{i=1}^{n} \beta_i \left[\alpha_i\bar{a} + \beta_i\ \bar{b} + \dots + l_i\right] = \sum_{i=1}^{n} \beta_i\, l_i = 0 \qquad (27.5)$$

Este sistema lineal respecto de las incógnitas a, b, ... son las llamadas ecuaciones normales de Gauss. Es fácil ver que el número de estas ecuaciones es igual al de incógnitas. En esta forma para cualquier f(A, B, ... X, Y,..) se reduce a resolver un sistema de ecuaciones lineales.

§ 28.- ERRORES MEDIOS OBTENIDOS CON EL METODO DE LOS CUADRADOS MINIMOS. El error medio, como sabemos está definido mediante los errores absolutos:

$$\mu^2 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} e_i^2$$

Necesitamos calcular $\sum l_i^2$ a fin de conocer el error medio de los valores a, b, ... Para ello multiplicamos la (27.3) por e_i y sumamos:

$$\sum_{i=1}^{n} e_i^2 = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i e_i \bar{a} + \sum \beta_i e_i \bar{b} + \ldots \sum e_i l_i$$

Teniendo en cuenta las expresiones (27.5) resulta:

$$\sum_{i=1}^{n} e_i^2 = \sum_{i=1}^{n} e_i l_i$$

Ahora, multiplicando nuevamente la (27.3) por l_i y sumando:

$$\sum e_i l_i = \sum e_i^2 = \sum \alpha_i l_i \bar{a} + \sum \beta_i l_i \bar{b} + \ldots \sum l_i^2$$

obtenemos finalmente:

$$\mu^2 = \frac{1}{n} \left\{ (\sum \alpha_i l_i) \bar{a} + (\sum \beta_i l_i) \bar{b} + \ldots \sum l_i^2 \right\}$$

Esta expresión permite calcular el error medio de los valores $\bar{a}, \bar{b}$, ... Se encuentra, también, resolviendo el sistema (27.5) y sustituyendo los valores de a, b, en la última expresión:

$$\mu^2 = \frac{1}{n - r} \sum l_i^2$$

siendo r el número de incógnitas.

§ 29.- RESUMEN DE LAS FORMULAS DE USO EN LA PRACTICA. Mediciones directas, X_1, X_2, ... X_n.

Valor medio (9.2)

$$X = \frac{1}{n}(X_1 + X_2 + \dots + X_n)$$

Error medio cuadrático (9.5)

$$m = \sqrt{\frac{1}{n}\left[(\bar{X} - X_1)^2 + (\bar{X} - X_2)^2 + \dots (\bar{X} - X_n)^2\right]}$$

Error del valor medio (11.1)

$$E = \pm \frac{m}{\sqrt{n - 1}}$$

Valor verdadero (11.3)

$$X = \bar{X} \pm E$$

<u>Mediciones indirectas</u>. $L = f(X, Y, Z, \dots)$ en función de las observaciones

$$X_1, X_2, \dots X_l$$
$$Y_1, Y_2, \dots Y_m$$
$$Z_1, Z_2, \dots Z_n$$
$$\dots\dots\dots\dots\dots$$

Valor más probable:

$$\bar{L} = f(\bar{X}, \bar{Y}, \bar{Z}, \dots)$$

Error medio cuadrático:

$$m_L = \sqrt{\left(\frac{\partial f}{\partial X}\right)^2 m_x^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial Y}\right)^2 m_y^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial Z}\right)^2 m_z^2 + \dots}$$

Error del valor más probable:

$$E_L = \pm \frac{m_L}{\sqrt{l \times m \times n \times \dots - 1}}$$

<u>Ponderación de observaciones</u>

l	observaciones	$X'_1, X'_2 \dots X'_l$	de	valor	medio	$\bar{X}'$	de	peso	p
m	"	$X''_1, X''_2 \dots X''_m$	"	"	"	$\bar{X}''$	"	"	q
n	"	$X'''_1, X'''_2 \dots X'''_n$	"	"	"	$\bar{X}'''$	"	"	r

Valor medio ponderado:

$$X_p = \frac{\left(\frac{1}{E'}\right)^2 \bar{X}' + \left(\frac{1}{E''}\right)^2 \bar{X}'' + \left(\frac{1}{E'''}\right)^2 \bar{X}'''}{\left(\frac{1}{E'}\right)^2 + \left(\frac{1}{E''}\right)^2 + \left(\frac{1}{E'''}\right)^2}$$

$$E' = \pm \frac{m'}{\sqrt{\ell - 1}}$$

$$E'' = \pm \frac{m''}{\sqrt{m - 1}}$$

$$E''' = \pm \frac{m'''}{\sqrt{n - 1}}$$

Error del valor medio ponderado:

$$E_p = \pm \frac{1}{\sqrt{\left(\frac{1}{E'}\right)^2 + \left(\frac{1}{E''}\right)^2 + \left(\frac{1}{E'''}\right)^2}}$$

C A P I T U L O I I

APROXIMACIONES.

§ 1.- <u>ABREVIACION DEL CALCULO DE OPERACIONES NUMERICAS</u>.- Cuando es necesario efectuar cálculos que involucran un número no muy reducido de cifras es posible aplicar, en ciertos casos, formas aproximadas que simplifican notablemente las operaciones numéricas. Estas aproximaciones serán lícitas siempre que el error que se comete al hacer uso de la forma aproximada sea despreciable frente al error que se espera cometer al hacer una medición.

Enumeraremos los casos más frecuentes que se presentan:

a). Cuando se trata de calcular expresiones de la forma:

$$X = (1 + e)^{\alpha}$$

siendo e un número pequeño respecto de 1 y α un número cualquiera, entero, fraccionario, irracional positivo o negativo. El cálculo directo puede ser engorroso según el valor de α. Así el valor de:

$$(1 + 0.0001986)^{2/5}$$

no nos sería posible calcularlo sin recurrir a logaritmos.

En tal caso tangamos presente el desarrollo en serie de Taylor de la función:

$$X = (1 + e)^{\alpha} = 1 + \alpha e + \frac{1}{2!}\alpha(\alpha - 1)e^{2} + \frac{1}{3!}\alpha(\alpha - 1)(\alpha - 2)e^{3} + \ldots$$

Supuesto que $e \ll 1$, resultan los términos de potencias de e superiores a la primera, despreciables respecto de e. Se logra así, una buena aproximación si sólo tenemos en cuenta los dos primeros términos:

$$(1 + e)^{\alpha} = 1 + \alpha e \qquad (1.1)$$

El error X que se comete en esta aproximación está dado en un valor bastante aproximado por el término $\frac{1}{2!}\alpha \; (\alpha - 1)e^2$ pues, éste domina sobre los términos restantes.

El ejemplo anterior se reduce simplemente a:

$$(1 + 0.0001986)^{2/5} = 1 + 2/5 \times 0.0001986 = 1.0000794$$

$$\Delta X \simeq \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{5} \left(\frac{2}{5} - 1\right) (2 \times 10^{-4})^2 \simeq - 2.10^{8}$$

E j e m p l o s :

$$\sqrt[4]{0.99831} = (1 - 0.00169)^{1/4} = 1 - \tfrac{1}{4} . 0.00169 = 0.99958 \; (\Delta X \simeq -3.10^{-7})$$

$$\frac{1}{1.004328} = (1 + 0.004328)^{-1} = 1 - 0.004328 = 0.995672 \; (\Delta X \simeq + 18.10^{-6})$$

$$\left(\frac{1}{0.99432}\right)^2 = (1 - 0.00568)^{-2} = 1 + 0.01136 = 1.01136 \; (\Delta X \simeq 9.10^{-5})$$

b). Si la expresión es de la forma:

$$F = (1 + e_1)^{\alpha_1} \; (1 + e_2)^{\alpha_2} \; \ldots \; (1 + e_n)^{\alpha_n}$$

Desarrollando cada factor según la (1.1),

$$F \simeq (1 + \alpha_1 e_1) \; (1 + \alpha_2 e_2) \; \ldots \; (1 + \alpha_n e_n)$$

efectuando los productos y despreciando los términos cuadráticos se obtiene la aproximación:

$$F \simeq 1 + \alpha_1 e_1 + \alpha_2 e_2 \ldots + \alpha_n e_n \qquad (1.2)$$

E j e m p l o s :

$$\left(\frac{0.99821}{1.000343}\right)^2 = (1-0.00179)^2 \; (1 + 0.000343)^{-2} = 1 - 0.00358 - 0.000686 =$$
$$= 0.995734$$

$$\frac{\sqrt{1.00118}}{1.00087} = (1 + 0.00118) \quad (1 + 0.00087) = 0.99972$$

c). Si la expresión a calcular es de la forma:

$$(A + e)^{\alpha}$$

se convierten en las anteriores mediante la extracción de A fuera del paréntesis:

$$(A + e)^{\alpha} = A^{\alpha} \ (1 + \alpha \frac{e}{A}) \qquad (1.3)$$

En este caso se requiere que $\frac{e}{A} \ll 1$

E j e m p l o s.-

$$\sqrt[5]{32.01248} = (32 + 0.01248)^{1/5} = 2(1 + \frac{0.01248}{5 \times 32}) = 2(1 + 0.00077) = 2.00154$$

$$\frac{145.02198}{44.00352} = \frac{145}{44} (1 + \frac{0.2198}{145})(1 - \frac{0.00352}{44}) = \frac{145}{44} (1 + \frac{0.2198}{145} - \frac{0.00352}{44})$$

d). El promedio geométrico de cantidades que difieren muy poco entre sí puede ser aproximado por el promedio aritmético.

Sean A_1, A_2, A_3,... A_n cantidades tales que:

$$A_2 = A_1 + e_2$$
$$A_3 = A_1 + e_3$$
$$A_4 = A_1 + e_4$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$A_n = A_1 + e_n$$

siendo e_1, e_2, e_3... $e_n \ll 1$. El promedio geométrico A_G

$$A_G = \sqrt[n]{A_1 \ A_2 \ \dots \ A_n} = \sqrt[n]{A_1 \ (A_1 + e_2) \ (A_1 + e_3) \ \dots \ (A_1 + e_n)}$$

Sacando el valor A_1 fuera del radical podemos escribir en virtud de (1.2) y (1.1)

$$A_G \doteq A_1 \sqrt[n]{(1 + \frac{e_2}{A_1})(1 + \frac{e_3}{A_1})\dots(1 + \frac{e_n}{A_1})} = A_1 \left[1 + \frac{1}{n} (\frac{e_2}{A_1} + \frac{e_3}{A_1} + \dots \frac{e_n}{A_1})\right]$$

$$= \frac{1}{n} (A_1 + A_1 + e_2 + A_1 + e_3 + \dots A_1 + e_n) = \frac{1}{n} (A_1 + A_2 + \dots A_n) \qquad (1.4)$$

E j e m p l o.-

$$\sqrt{125.323 \times 125.385} = \tfrac{1}{2}\,(125.323 + 125.354) = 125.3385$$

e). La función sen θ es expresable mediante la serie:

$$\operatorname{sen} \theta = \theta - \frac{1}{3!}\,\theta^3 + \frac{1}{5!}\,\theta^5 \ldots \qquad (1.5)$$

Cuando se trata de ángulos pequeños tales que $\theta^3 \ll \theta$ queda la a proximación:

$$\operatorname{sen} \theta \simeq \theta$$

Puesto que el término $-\frac{1}{3!}\,\theta^3$ domina sobre los restantes, el error relativo cometido en esta aproximación es aproximadamente:

$$\frac{\Delta\theta}{\operatorname{sen}\theta} \simeq -\frac{1}{3!}\,\frac{\theta^3}{\operatorname{sen}\theta} \simeq -\frac{1}{3!}\,\frac{\theta^3}{\theta} = -\frac{1}{6}\,\theta^2$$

~~d~~f). La función cos θ admite el desarrollo

$$\cos\theta = 1 - \frac{1}{2!}\,\theta^2 + \frac{1}{4!}\,\theta^4 - \frac{1}{6!}\,\theta^6 \ldots$$

En las mismas condiciones que en el caso anterior se logra la aproximación:

$$\cos\theta \simeq 1$$

con un error relativo aproximadamente de:

$$\frac{\Delta\theta}{\cos\theta} = -\frac{1}{2}\,\theta^2$$

g). La función tang θ desarrollable mediante la serie:

$$\operatorname{tang}\theta = \theta + \frac{1}{3}\,\theta^3 + \frac{2}{15}\,\theta^5 \ldots$$

es aproximable mediante el valor

$$\operatorname{tang}\theta \simeq \theta$$

h). Las funciones arcsen y y arcos y son expresables mediante las series.

$$\text{arcsen } y = y + \frac{1}{6} y^3 + \frac{1.3}{2.4.5} \theta^5 + \ldots$$

$$\text{arccos } y = \frac{1}{2}\pi - y - \frac{1}{6} y^3 - \ldots$$

obteniéndose para argumentos pequeños las aproximaciones respectivamente

$$\text{arcsen } y = y \; .$$

$$\text{arccos } y = \frac{1}{2}\pi - y$$

i). La función arctang y admite dos desarrollos en serie, según que el valor absoluto de y sea menor o mayor que 1:

$$\text{arctang } y = y - \frac{1}{3} y^3 + \frac{1}{5} y^5 \ldots \quad (|y| < 1)$$

$$\text{arctang } y = \pi/2 - \frac{1}{y} + \frac{1}{3}\frac{1}{y^3} - \frac{1}{5}\frac{1}{y^5} \quad (|y| > 1)$$

En el primer caso, si $|y| \ll 1$ se obtiene la aproximación

$$\text{arctang } y \simeq y \qquad (|y| \ll 1)$$

En el segundo si $\frac{1}{y^3} \ll \frac{1}{y}$ o lo que es lo mismo $y^2 \gg 1$ resulta la aproximación:

$$\text{arctang } y \simeq \frac{\pi}{2} - \frac{1}{y} \qquad (y^2 \gg 1)$$

j). La función log x es desarrollable mediante la serie:

$$\log x = 2\left[\frac{x-1}{x+1} + \frac{1}{3}\left(\frac{x-1}{x+1}\right)^3 + \frac{1}{5}\left(\frac{x-1}{x+1}\right)^5 \ldots\right]$$

Para valores de x próximos a 1, los términos de orden superior al primero son despreciables. En tales condiciones vale la aproximación:

$$\log x \simeq 2\frac{x-1}{x+1}$$

Como caso particular, si x e y son dos valores próximos, la anterior se convierte:

$$\log \frac{x}{y} \approx 2 . \frac{x - y}{x + y}$$

§ 2.- APROXIMACIONES EN LAS MEDICIONES FISICAS. Frecuentemente la expresión analítica mediante la cual se calcula una magnitud contiene términos que no siempre son significativos. En estos casos es de interés establecer si el error que se comete, al no tener en cuenta tales términos influye en la precisión que se espera alcanzar de la medición. En otros casos se trata de saber si una fórmula es aproximable por otra más simple cometiendo con ello un error menor que los errores de observación.

Los casos que pueden presentarse son casi tan numerosos como mediciones de magnitudes o métodos de medida se conocen. Sólo enumeraremos algunos casos simple como ilustración del método a seguir.

a). En el péndulo ideal de longitud ℓ que oscila con una amplitud cualquiera θ el período de oscilación está dado por:

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{\ell}{g}} \left(1 + \frac{1}{4} \operatorname{sen}^2 \frac{\theta}{2} + \frac{9}{64} \operatorname{sen} \frac{\theta}{2} + \ldots\right) \tag{2.1}$$

Para oscilaciones pequeñas tales que podemos adoptar la aproximación dada por la (1.5) tenemos:

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{\ell}{g}} \left(1 + \frac{1}{16} \theta^2\right) \tag{2.2}$$

Mediante esta expresión para determinar experimentalmente el valor de la aceleración de la gravedad g necesitamos medir la longitud ℓ el período T y la amplitud θ. Si se desea medir g con cierta precisión dada, mediante la conocida expresión válida para amplitudes muy pequeñas:

$$T_o = 2\pi\sqrt{\frac{\ell}{g}} \tag{2.3}$$

se trata de determinar la amplitud máxima compatible con la precisión fijada.

Introduciendo la (2.3) en la (2.2) obtenemos:

$$T = T_o + \frac{1}{16} \theta^2 \; T_o$$

El error relativo que se comete al tomar el valor T_o en vez de T es:

$$\frac{\Delta T}{T} \approx \frac{\Delta T}{T_o} = \frac{1}{16}\theta^2$$

El error relativo de g está dado por:

$$\frac{\Delta g}{g} = 2\left|\frac{\Delta T}{T}\right| + \frac{\Delta \ell}{\ell}$$

Como el error en $\frac{\Delta \ell}{\ell}$ es despreciable frente al error 2 $\frac{\Delta T}{T}$ tenemos:

$$\frac{\Delta g}{g} = \frac{2}{16}\theta^2$$

Luego:

$$\theta = \sqrt{8\,\frac{\Delta g}{g}}$$

Sea p.e. determinar la amplitud máxima tolerable para medir la aceleración de la gravedad con un error de o.1%, con la expresión (2.3) en vez de la (2.2). Debe ser $\frac{\Delta g}{g} = 0.001$.

Luego:

$$\theta = \sqrt{8.10^{-3}} = 0.09 \text{ radianes}$$

$$\theta = \frac{0.09 \times 180}{\pi} \approx 5°$$

Si se trata de un péndulo de 1 m de longitud esto significa un apartamiento aproximadamente de 9 cm de la vertical.

b). Para un péndulo físico formado por una esfera de radio r que oscila con una amplitud suficientemente pequeña el período está dado por:

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{\ell^2 + \frac{2}{5}\cdot r^2}{g\ell}}$$

que podemos transformar en:

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{\ell + \frac{2}{5}\ \frac{r^2}{\ell}}{g}}$$

El término $\frac{2}{5}\frac{r^2}{\ell}$ interviene como corrección de la longitud en la expresión correspondiente del péndulo ideal (2.3). El error que se comete en la determinación de ℓ al no tener en cuenta esta corrección es:

$$\frac{\Delta \ell}{\ell} = \frac{2}{5}\frac{r^2}{\ell^2}$$

Si, como en el caso anterior fijamos el error tolerable al medir g del o.1% deberá ser:

$$\frac{\Delta \ell}{\ell} = \frac{2}{5}\frac{r^2}{\ell^2} \simeq 0.001$$

Sean como ejemplo los valores ℓ = 1m y r = 1 cm. Resulta,

$$\frac{\Delta \ell}{\ell} = \frac{2}{5} 10^{-4} \ll 0.001$$

Para lograr la precisión dada de g no es necesario tener en cuenta la corrección que consideramos.

c). Una pesada de valor P se reduce al vacío mediante la fórmula:

$$P_o = P \frac{1 - \sigma/d}{1 - \sigma/D}$$

siendo, σ = o.00129 gr/cm³ el peso específico del aire, d el de las pesas y D el del cuerpo pesado.

Considerando el pequeño valor de σ frente a d (d = 8.4 gr/cm³ para las pesas de bronce que son las más comunes) y corrientemente también frente a D podemos aproximar aquella fórmula, en los casos en que D no sea sensiblemente menor que 1 mediante la aproximación dada por la (1.2):

$$P_o = P + P\sigma\left(\frac{1}{D} - \frac{1}{d}\right)$$

En los casos en que esto es posible el término $P\sigma\left(\frac{1}{D} - \frac{1}{d}\right)$ es la corrección correspondiente a la reducción al vacío de la pesada P.

Si prescindimos de esta corrección, el error relativo de la pesada está dada por:

$$e = \frac{\Delta P}{P} = \frac{P_o - P}{P} = \sigma\left(\frac{1}{D} - \frac{1}{d}\right)$$

Si prefijamos el error tolerable en la pesada podemos determinar si corresponde o nó introducir la corrección que consideramos.

Con una buena balanza de precisión se logran pesadas con un error relativo del orden 10^{-4}. Podemos determinar para que valor de la densidad del cuerpo pesado no interesa reducir la pesada al vacío por ser la correspondiente corrección inferior al error propio de la balanza.

Debe ser:

$$e < 10^{-4}$$

Resulta así:

$$D > \frac{d}{1 + \frac{d}{\sigma} 10^{-4}} = \frac{8.4}{1 + \frac{8.4 . 10^{-4}}{0.0013}} \simeq 5 \text{ gr/cm}^3$$

Para una buena balanza de precisión no interesa, entonces, reducir las pesadas al vacío operando con pesas de bronces y cuerpos cuyas densidades están comprendidas entre 5 gr/cm^3 y 8.4 gr/cm^3.

Cuando el cuerpo pesado es de densidad superior a la de las pesas la correspondiente corrección es negativa. Se tiene entonces:

$$e = \sigma \left(\frac{1}{d} - \frac{1}{D}\right)$$

Si en las mismas condiciones anteriores tratamos de determinar cual es la densidad máxima hasta para la cual no interesa reducir al vacío encontramos:

$$D < \frac{d}{1 - \frac{\sigma}{d} . 10^{-4}} = \frac{8.4}{0.36} \simeq 23 \text{ gr/cm}^3$$

El osmio es el cuerpo de mayor densidad conocido y su valor es 22.5 gr/cm. Es decir, prácticamente no interesa introducir la corrección de la reducción al vacío cuando se pesan cuerpos de densidad superior a la de las pesas de bronce. Este no es el caso, sin embargo cuando se emplean pesas de aluminio.

d). Cuando intervienen en el cálculo de una medición números irracionales o trascendentes interesa saber cuantas cifras de estos números deberán tenerse en cuenta, por una parte para lograr la precisión deseada, por otra, para no vernos precisados de efectuar cálcu los inútilmente largos.

Sea p.e. medir el volúmen de un cilindro de largo ℓ y diámetro D $V = \frac{1}{4}\pi\ D^2\ell$.

Teniendo presente el error que sometemos al tomar sólo cierto número de cifras de π , tenemos

$$\frac{\Delta V}{V} = 2\frac{\Delta D}{D} + \frac{\Delta \ell}{\ell} + \frac{\Delta \pi}{\pi}$$

El error $\frac{\Delta \pi}{\pi}$ debe ser del orden o menor que los errores $2\ \frac{\Delta D}{D}$ y $\frac{\Delta \ell}{\ell}$
Así, si medimos ℓ y D en forma tal que

$$2\ \frac{\Delta\ D}{D} \simeq \frac{\Delta \ell}{\ell} - 0.001$$

debe ser $\frac{\Delta \pi}{\pi} < 0.001$, es decir, para esta precisión basta tomar $\pi =$ $= 3.142$.

§ 3.- APROXIMACIONES SUCESIVAS. Acontece a veces que la magnitud L a medir está dada por una relación de la forma:

$$L = f(X,\ L)$$

en la cual f(X, L) no es una función sencilla tal que permita expresar L = F(X). En un caso tal, se opera en la forma siguiente:

Se obtiene en alguna forma un valor aproximado de L, sea L_0. Mediante este valor se calcula:

$$L_1 = f(X, L_0)$$
$$L_2 = f(X, L_1)$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$L_n = f(X, L_{n-1})$$

Basta repetir la operación un número n de veces tal que $L_n \simeq L_{n-1}$. En general si L_0 es suficientemente aproximado basta una o dos iteraciones para obtener un valor de L satisfactorio.

E j e m p l o I.- Al medir el coeficiente de dilatación de los ga ses (o al medir una temperatura) con el termómetro de gas, cuando no se tienen en cuenta las correcciones debidas a la dilatación del bulbo del termómetro y al volumen nocivo, se tiene en primera aproximación:

$$\alpha_0 = \frac{P_{100} - P_0}{100 \times P_0}$$

siendo P_0 la presión que soporta el gas estando a cero grado y P_{100} la correspondiente a 100°C.

Cuando se tienen en cuenta ambas correcciones:

$$\alpha = \alpha_0 \left\{ 1 + k \frac{1 + \alpha_1 .\ 100}{1 + \alpha\ \ ta} \right\} + \gamma \frac{P_{100}}{P_0}$$

siendo k la relación entre el volumen nocivo y el volumen del bulbo y γ el coeficiente de dilatación cúbica del vidrio del cual está construído dicho bulbo y ta la temperatura ambiente.

En segunda aproximación podemos calcular α poniendo en la expresión anterior el valor de α_0 en vez de α :

$$\alpha_1 = \alpha_0 \left\{ 1 + k \frac{1 + \alpha_0\ 100}{1 + \alpha_0\ ta} \right\} + \gamma \frac{P_{100}}{P_0}$$

Una tercera aproximación la lograríamos:

$$\alpha_2 = \alpha_0 \left\{ 1 + k \frac{1 + \alpha_1\ 100}{1 + \alpha_1\ ta} \right\} + \gamma \frac{P_{100}}{P_0}$$

E j e m p l o II.- El peso específico de un cuerpo obtenido mediante la balanza de Arquímedes, sin reducir las pesadas al vacío es:

$$P_0 = \frac{P}{P - P_s} P\ell$$

siendo, P el peso del cuerpo en el aire y P_s el peso del mismo sumergido en un líquido de peso específico $P\ell$. La densidad reducida al vacío resulta (ej. c § 2)

$$P = P_0 \left[1 + \sigma \left(\frac{1}{P} - \frac{1}{P\ell}\right)\right]$$

Las aproximaciones sucesivas son:

$$P_1 = P_o \left[1 + \sigma \left(\frac{1}{P_o} - \frac{1}{P\ell} \right) \right]$$

$$P_2 = P_o \left[1 + \sigma \left(\frac{1}{P_1} - \frac{1}{P\ell} \right) \right]$$

Sea:

$$P\ell = 1, \; P_o = 0.10001 \quad \sigma = 0.00013 \text{gr./cm}^3$$

Resulta $P_1 = 0.10117$ gr/cm^3 $P_2 = 0.10116$ gr/cm^3. La aproximación P_1 es suficiente, pues comparada con la subsiguiente resultan iguales hasta el orden correspondiente a los errores de observación.

E j e m p l o III.- Sea determinar la intensidad I de corriente absorbida por un motor de potencia mecánica P conocida y de resistencia interna R (despreciando las pérdidas por histérisis y otras causas). Se tiene, siendo V la tensión de alimentación:

$$I\,V = P + R\,I^2$$

El término $R\,I^2$ da las pérdidas por efecto Joul. Escribiendo:

$$I = \frac{P}{V} + \frac{R\,I^2}{V}$$

En primera aproximación

$$I_o = \frac{P}{V}$$

Las restantes aproximaciones:

$$I_1 = I_o + \frac{R\,I_o^2}{V}$$

$$I_2 = I_o + \frac{R\,I_1^2}{V}$$

$$\vdots$$

Sean V = 440 volts, R = 0.4 Ω P = 13 kw

$$I_o = \frac{13.000}{440.} = 31.8 \text{ Amp.}$$

$$I_1 = 31.8 + \frac{0.4 \times (31.8)^2}{440} = 32.7 \text{ Amp.}$$

$$I_2 = 31.8 + \frac{0.4 \times (32.7)^2}{440} = 32.8 \text{ Amp.}$$

$$I_3 = 31.8 + \frac{0.4 \times (32.8)^2}{440} = 32.8 \text{ Amp.}$$

C A P I T U L O I I I

METODOS GRAFICOS.

§1.- <u>REPRESENTACION GRAFICA DE UN CONJUNTO DE OBSERVACIONES</u>.- Se presentan a veces, casos en que una magnitud L depende de otra X no conociéndose exactamente la relación funcional que las vincula. En tales casos se presenta el problema de establecer experimentalmente esta relación. Para ello se hace necesario medir la magnitud L para distintos valores de X. Así, si se trata de establecer la dependencia de la viscosidad de un líquido determinado con la temperatura, fijado cierto valor de ésta, se mide aquélla. En esta forma se puede construír una tabla de valores en la que se da L en función de X. Disponiendo de esta tabla de valores resulta frecuentemente, de gran utilidad, representar gráficamente el valor de L en función de X. Se emplea para ello, invariablemente, un sistema ortogonal de coordenadas, sobre cuyo eje de las abscisas se toman los valores de X y sobre el de las ordenadas los de L. La curva que así resulta, permite visualizar en forma inmediata la dependencia de L con X. Además de esta ventaja, esta forma de representación, permite, a veces. ciertos tipos de determinaciones y cálculos gráficos que no sería posible en otra forma. Veremos en lo que sigue los métodos de representación y sus correspondientes aplicaciones.

§2.- <u>TRAZADO DE CURVAS EXPERIMENTALES</u>. Experimentalmente sólo pueden obtenerse un número finito de observaciones cada una de las cuales lleva implícito cierto error. Cada una de las observaciones o serie de las mismas realizadas para un valor dado de X en la representación gráfica significan un punto de la curva. Dado que cada uno de estos puntos no están excentos de error no debemos esperar que la curva que mejor representa la variación de L en función de X pase exactamente por estos puntos. Por otra parte, en general, salvo casos especiales, la dependencia entre L y X está dada por una función continua y que no tiene variaciones bruscas de un punto a otro muy próximo (de derivada continua). Por esta razón podemos obtener dicha curva, a pesar de los errores de que están afectados los puntos experimentales, mediante un trazo continuo que implique una interpolación entre estos puntos.

Obtenidos los puntos experimentales, el número de curvas próximos entre sí que es posible trazar por interpolación es, por cierto, considerable. Debemos tener presente que los errores de observación pueden ser positivos o negativos con igual probabilidad. Prácticamente esto es equivalente a trazar la curva en forma tal, que queden igual número de puntos de uno y otro lado de la curva.

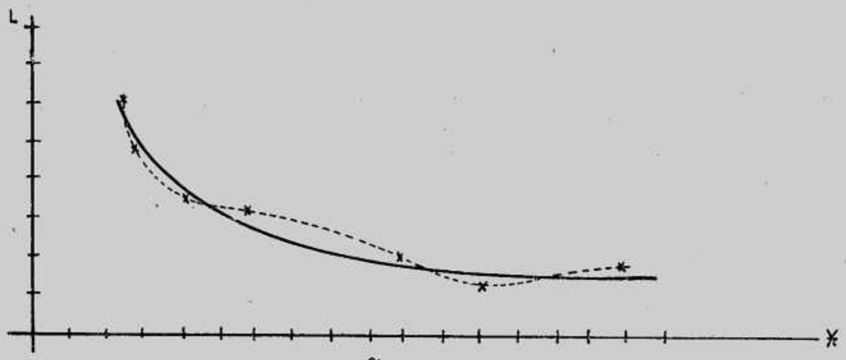


fig.6

En la fig. 6 la curva de trazo continuo es la curva de interpolación que mejor representa la variación de L en función de X, no así la punteada.

Según las condiciones en que se realizan las observaciones la precisión correspondiente a un punto no es necesariamente la misma que la de otros puntos. Así por ejemplo, al determinar la dependencia de la viscosidad de un líquido con la temperatura, operando con un viscosímetro de Ostwald, a baja temperaturas las determinaciones tienen mayor precisión que a temperaturas elevadas, debido a que, disminuyendo la viscosidad con la temperatura, la medición de los tiempos de escurrimiento en el primer caso están afectados de un error relativo menor que en el segundo.

En estos casos puede interesar tener una visión de conjunto de cómo varían los errores para cada punto experimental. Es necesario, entonces, efectuar varias mediciones de L para un mismo valor de X. El punto está representado mediante el valor medio de L, y los errores de este valor medio se representan mediante segmentos proporcionales a los mismos según se desprende del significado de la expresión (11.2, cap. I), y como está representado en la fig. 7.

No es necesario y, a veces presenta ventajas, representar sobre los ejes de las abscisas y las ordenadas los valores X y L. Se pueden llevar sobre estos ejes los valores que resultan de un cambio de variables (tomar p.e. la inversa, el cuadrado, el logaritmo, etc. de X ó L). El criterio que se sigue para ello es que mediante este cambio de variables se obtienen curvas más simples, en particular

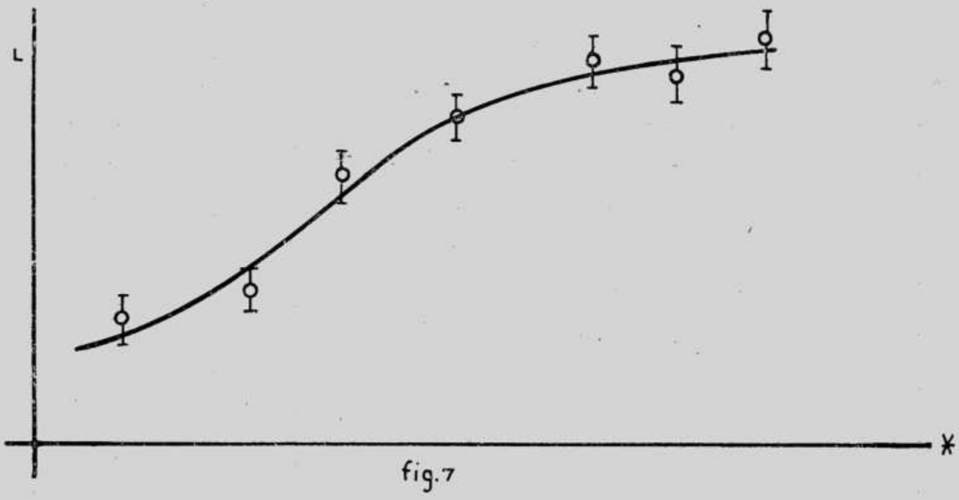


fig.7

rectas. Así, por ejemplo, si se trata de una relación tal como $L^2 = \frac{1}{X}$, si en vez de representar L y X directamente obteniendo una curva de tercer grado, representamos sobre el eje de las abscisas los valores $\frac{1}{X}$ y sobre el de las ordenadas los valores L^2 obtenemos como representación una recta. El trazado de la curva es en este caso sensiblemente más simple y exige un número más reducido de observaciones.

Sólo mencionaremos sin entrar en mayores detalles el método que generalmente se sigue para representar una función L de dos variables X e Y. Fijando el valor de $Y = Y_1$ la función $L = f(X, Y_1)$ puede ser representada como en el caso de una función de una variable. Si damos a Y otro valor Y_2 tendremos otra curva que la variación de L en función de X para el valor $Y = Y_2$. Se obtiene así una familia de curvas o red de curvas como la dada por la fig. 8 y que en conjunto representan la función $L = f(X, Y)$.

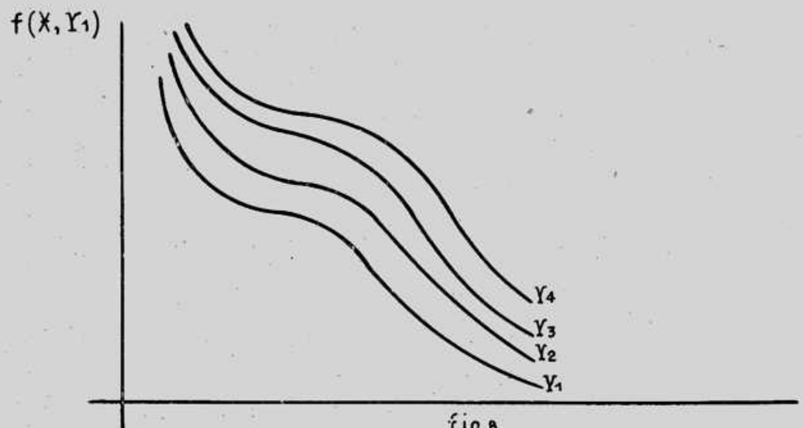


fig.8

§ 3.- <u>EMPLEO DE LAS REPRESENTACIONES GRAFICAS</u>. Además de la ventaja de disponer de una curva que nos da un conjunto la variación de una magnitud en función de un parámetro, el trazado de las mismas presenta las siguientes ventajas y aplicaciones:

a). INTERPOLACION. El número de puntos observados es necesariamente no muy grande. Una curva bien trazada es un excelente medio para determinar cualquier valor dentro del intervalo que cubren las observaciones.

E j e m p l o.- Variación de la viscosidad del agua con la temperatura.

t°C	5	10	15	20	25	30	40	50	60	70	80	90
10 poise	1520	1310	1140	1005	895	800	660	550	470	405	355	315

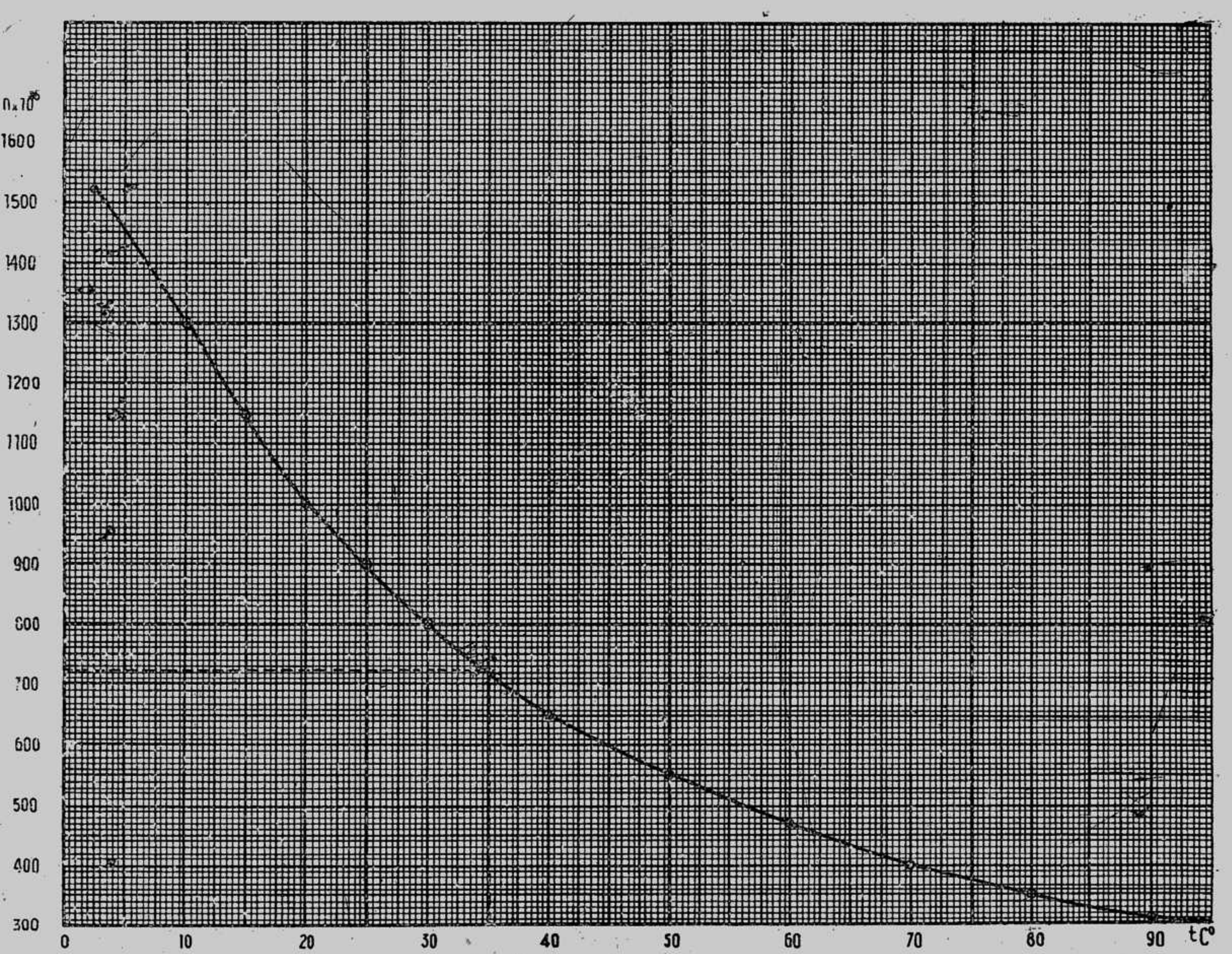


fig.9

Para obtener la viscosidad p.e. a 35°C bastará tomar sobre la curva el correspondiente valor para esta temperatura: $\eta_{35} \cdot 10^5 = 740$ poise.

b). SOCUCIONES GRAFICAS. Sea una magnitud L que medimos directamente vinculada con un parámetro X mediante la relación funcional que no conocemos L = f(X). Interesa determinar aquél valor de L que vinculado con X mediante otra relación conocida L = F(X) satisfaga simultáneamente ambas relaciones para un valor de X desconocido. Trazando la curva representativa de L = f(X) y la correspondiente a L = F(X) el punto de intersección de ambas curvas nos da el valor de L buscado.

E j e m p l o I.- Sea el caso de determinar la longitud óptima de un péndulo físico para obtener con ello el momento de inercia del mismo referido a un eje que pasa por el centro de gravedad (Ej. de § 8, d, cáp. I).

La relación L = f(X) es en este caso:

$$\frac{T^2}{4\pi^2} g = \frac{I}{m.d} + d$$

en la cual desconocemos el valor del momento de inercia I.

La relación L = F(X) es la que vincula el período con la distancia óptima d.

$$\frac{1}{2} \frac{T^2}{4\pi^2} g = d_{op.}$$

Conviene en este caso hacer un cambio de variables representando sobre el eje de las ordenadas los valores de

$$\frac{1}{2} \frac{T^2}{4\pi^2} g$$

En esta forma la segunda relación representa una recta que pasa por el origen de coordenadas y tiene una pendiente unidad. La intersección de esta recta con la curva que representa a la relación

$$\frac{1}{2} \frac{T^2}{4\pi^2} g = \frac{I}{2md} + \frac{1}{2} d$$

nos dará el valor $d = d_{op.}$ buscado.

d cm	5	10	15	20	30	40
T seg	1.35	1.10	1.07	1.10	1.18	1.35
$\frac{T^2}{8\pi^2}$ g cm	22.5	15	14.2	15	18.3	22.5

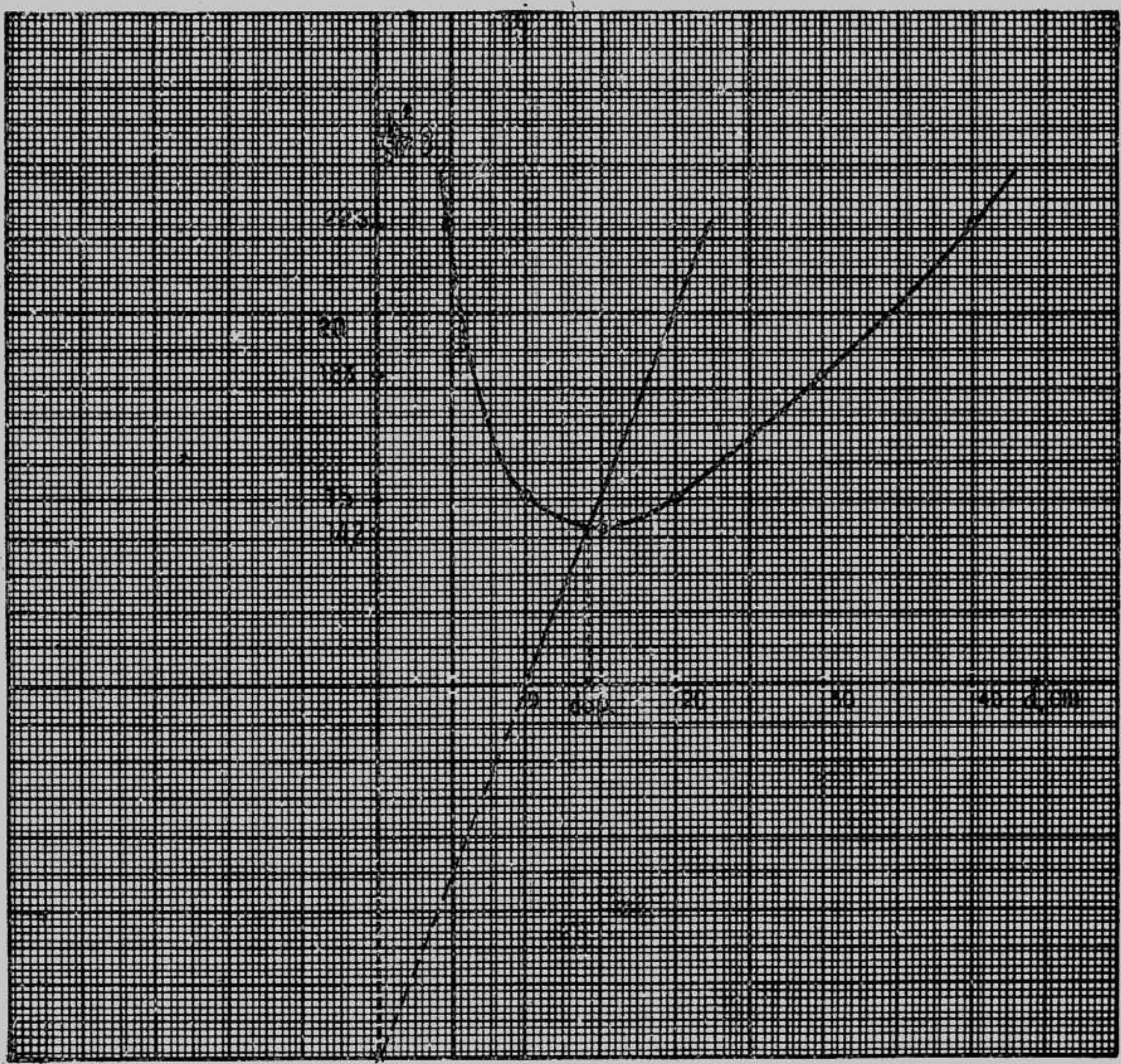


fig 10

Se ha tomado para la representación de la curva, por razones de comodidad un sistema de referencia en el cual el segmento que representa a la unidad sobre el eje d no es el mismo que sobre el eje de las ordenadas sobre el cual se representan los valores

$$\frac{T^2}{8\pi^2}g$$

además no es conveniente tomar como origen el punto:

$$\frac{T^2}{8\pi^2}g = 0$$

sino el punto:

$$\frac{I^2}{8\pi^2}g = 10$$

En estas condiciones la recta:

$$\frac{T^2}{8\pi^2}g = d$$

no tiene en esta representación una inclinación de 45°, sino la que determina la unidad del eje de las abscisas y la unidad del eje de las ordenadas. Además pasa por el origen real del sistema de coordenadas y no por el aparente que hemos tomado en el valor 10. Resulta del gráfico d_{op} = 14.3 cm.-

E j e m p l o II.- Determinación de la posición de isocronismo en el péndulo reversible. Para determinar la aceleración de la gravedad con el péndulo reversible, es necesario hallar la posición de las masas del péndulo para que en la disposición ab (fig.11) y en la ba los períodos de oscilación sean los mismos.

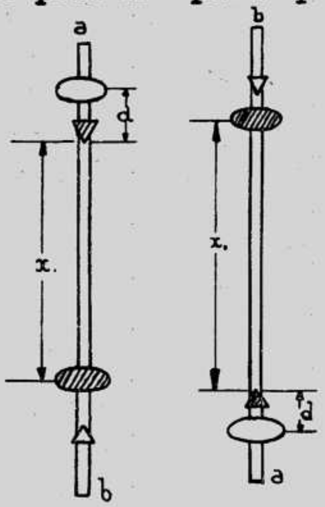


fig.11

Basta para ello tomar los tiempos de oscilación dejando fija una de las masas (la superior en la posición ab), variando la posición de la otra. Repitiendo la misma operación en la posición ba pueden trazarse las dos curvas correspondientes a cada posición representando el período en función de la distancia x. El punto de intersección de las dos curvas da el punto x que nos determina la posición de la masa cuya coordenada hemos variado.

d = 14.3 cm

Posición ab

x cm	6.6	9.6	12.6	16.7	21.4
T seg	2.32	2.19	2.10	2.00	1.92

Posición ba					
x cm	21.4	16.7	12.6	9.6	6.6
T seg	2.02	2.04	2.05	2.06	2.06

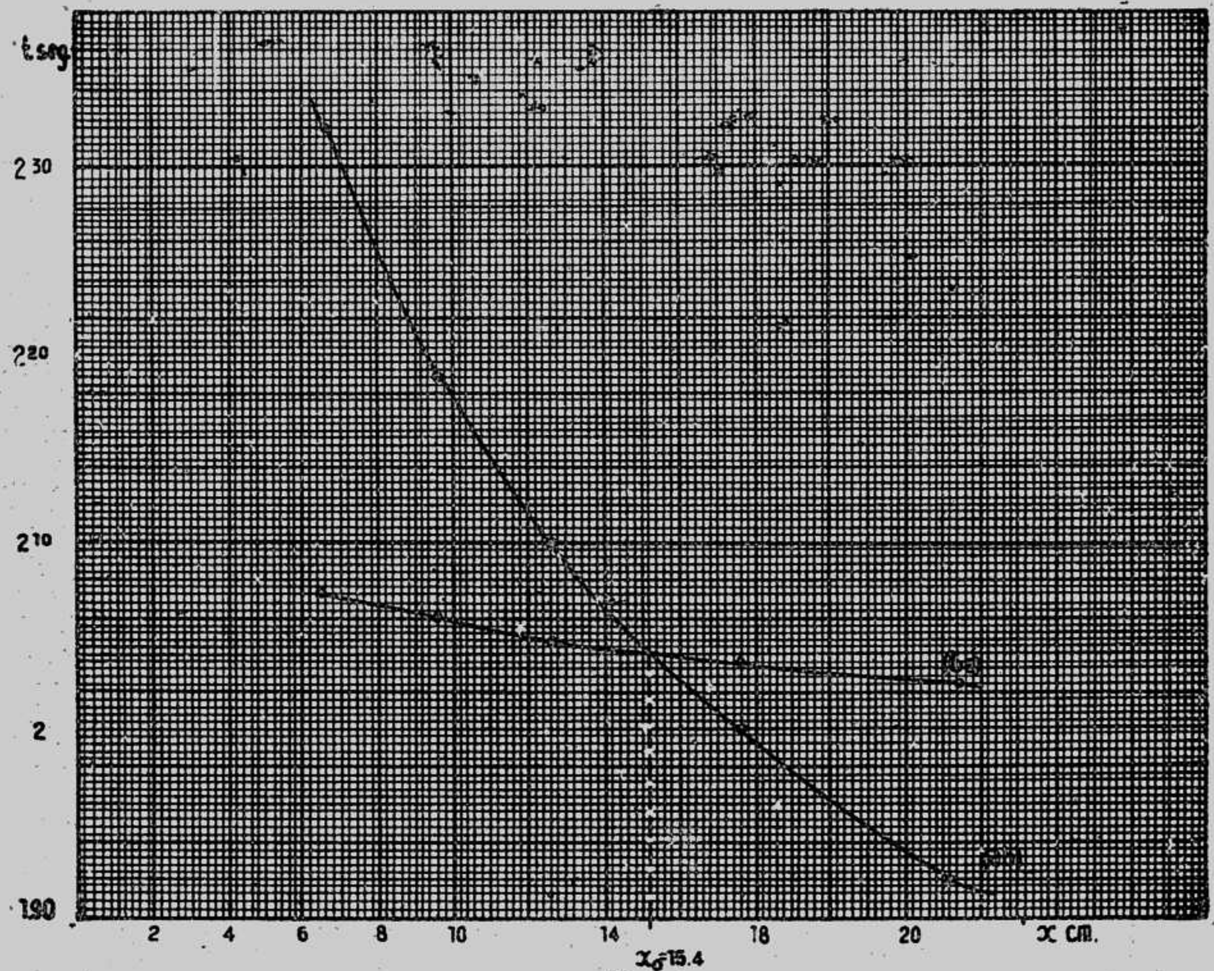


fig.12

Resulta del gráfico para x_0 = 15.4 cm.

C). EXTRAPOLACION.- Se presenta, a veces el problema de determinar uno o varios valores de L, que, por el hecho de ser muy grandes o muy pequeños o por ser valores límites o por otra circunstancia no están comprendidos dentro del intervalo que cubren las observaciones. En tales casos una extrapolación de la curva obtenida, cuando ello es legítimo, permite determinar aquel o aquellos valores. Es necesario observar, sin embargo, que la extrapolación es segura y bastante precisa cuando la dependencia de L y X es una función lineal y tenemos a priori la seguridad que permanece lineal hasta el intervalo dentro del cual se encuentra los valores a determinar. Si la dependencia funcional entre L y X no es lineal de extrapolación también es posible, siempre que tengamos igualmente garantías que hasta el intervalo de extrapolación la función se comporta normalmente y sin variantes respecto al comportamiento dentro del intervalo que cubren las observaciones.

E j e m p l o I.- Al determinar la variación de la viscosidad con la temperatura (Ejemplo de § 3, a) es muy difícil hacer las observaciones para temperaturas cercanas al punto de ebullición e imposible hacerlas para temperaturas superiores a ésta, con los métodos corrientes para medir viscosidades. Este es el caso del ejemplo citado, para el cual no es posible la determinación directa de la viscosidad del agua a temperaturas superiores a los 90°.C. Como la curva correspondiente es muy regular y la viscosidad no varía sensiblemente con variaciones relativamente grande la presión por extrapolación podemos hallar la viscosidad del agua a temperaturas superiores a 100° C como se obtendrían si el agua estuviera sometida a presiones superiores a una atmósfera.

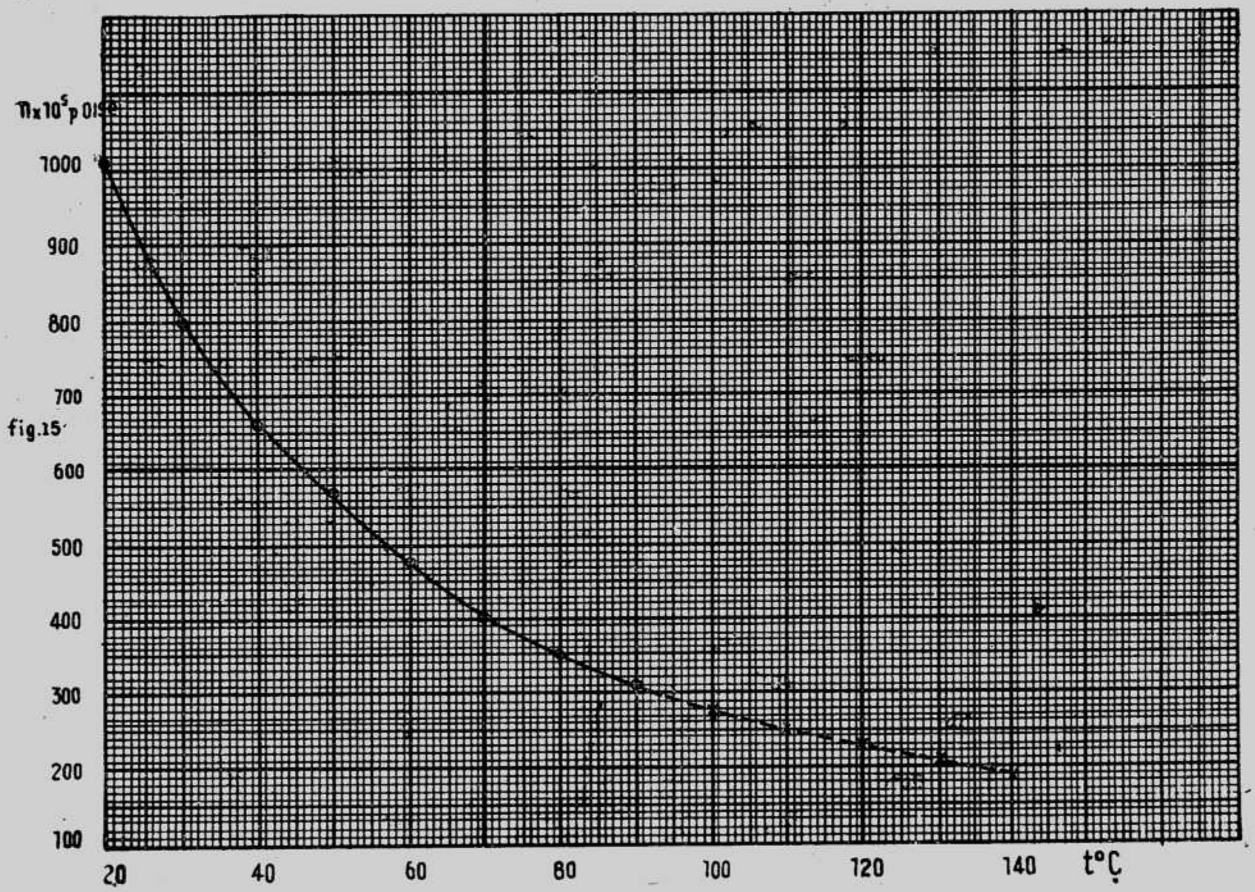


fig.15

Resulta de la extrapolación los siguientes valores aproximados de la viscosidad:

T° C	100	110	120	130	140
η10 poise	2.8	2.6	2.3	2.1	1.9

E j e m p l o II.- En un electrolito el grado de disociación está dada:

$$\alpha = \frac{\Lambda}{\Lambda_\infty}$$

siendo Λ la conductibilidad equivalente χ/η (χ la conductibilidad específica de la solución cuya concentración molar es η) y Λ_∞ el mismo valor de una solución infinitamente diluída. Este valor no es posible medirlo directamente debido a que una solución electrolítica infinitamente diluída tiene una conductibilidad nula. Midiendo Λ en función de la concentración molar, por extrapolación hacia el valor cero de las concentraciones es posible determinar el valor de Λ_∞ y así, el grado de disociación para cada concentración.

Los valores siguientes corresponden al nitrato de plata (NO_3Ag)

$10^6\eta$ $\frac{\text{gr-equiv.}}{\text{litro}}$	0.5	1	2	5
Λ	114	113	112	110

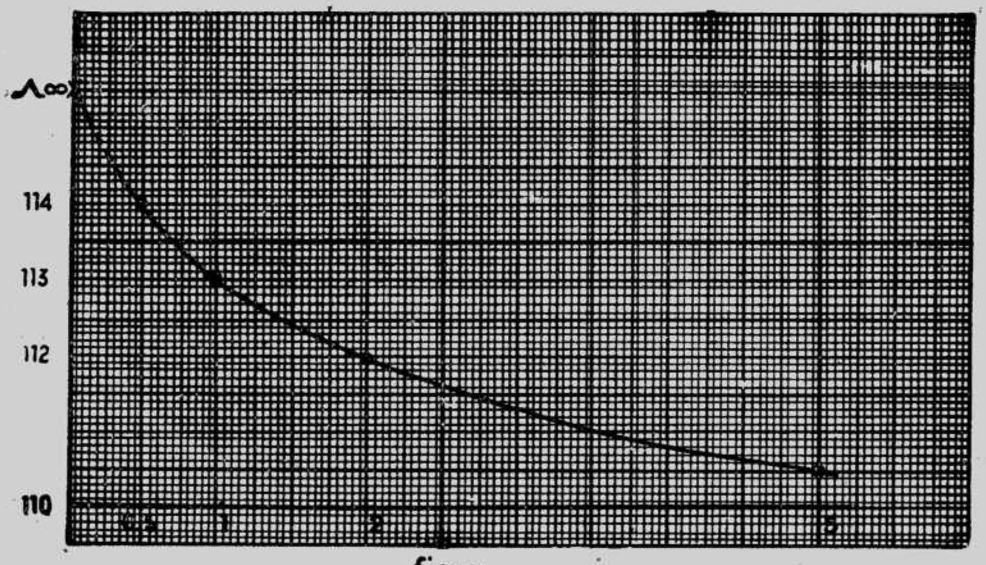


fig.14

Mediante la extrapolación (representada por la parte punteada de la curva) obtenemos el valor:

$$\Lambda_\infty = 115.6$$

§ 4.- DERIVACION GRAFICA. Sean L y X dos magnitudes vinculadas mediante una ley experimental L = f(X) de la cual se conoce la representación gráfica. Se trata de determinar los valores de la función $\frac{df}{dx}$. No conociendo la expresión analítica de f(X) tales valores se encuentran mediante la derivación gráfica, cuyo fundamento es la propia definición de derivada.

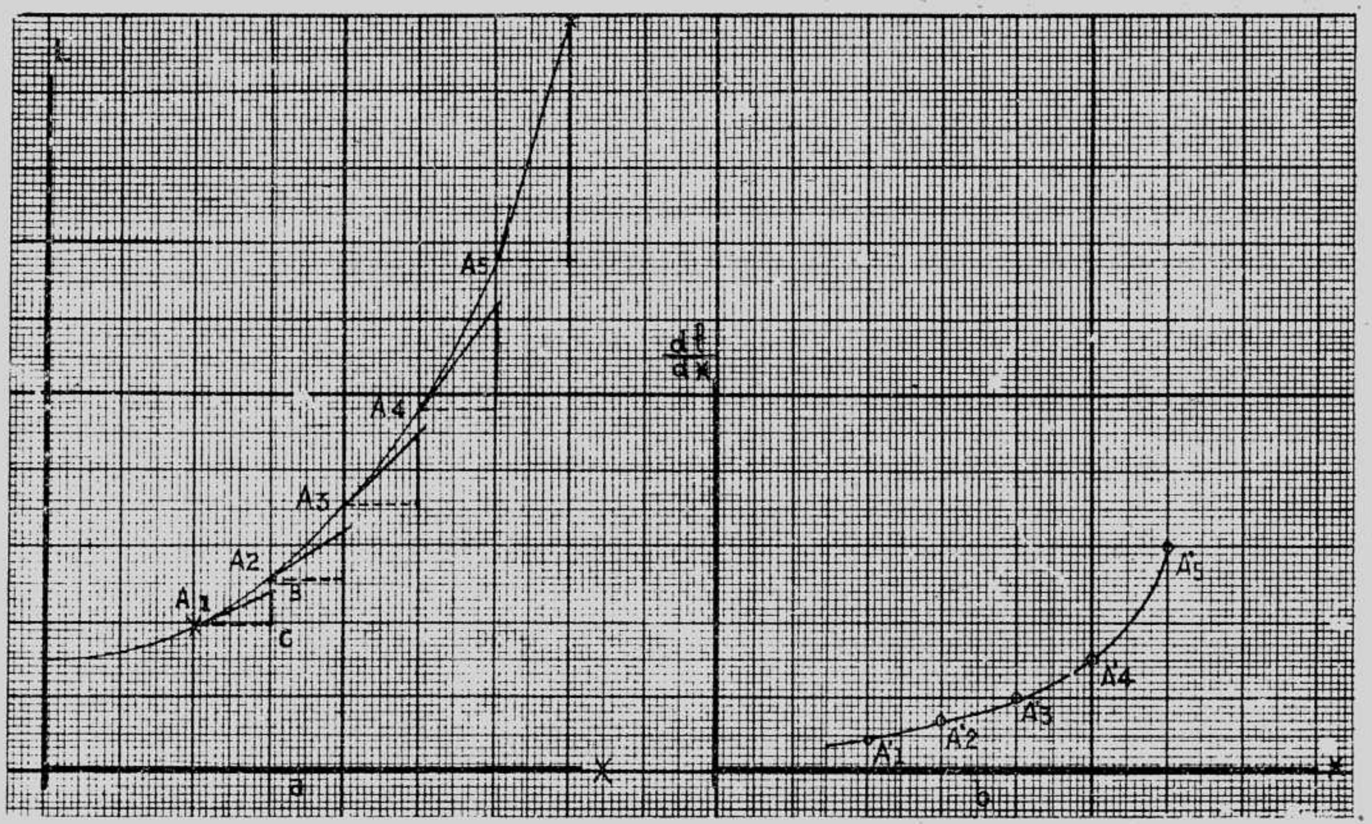


fig.15

Sea la de la fig. 15, a la curva representativa de la función L = f(X). Encontramos primeramente el valor de la derivada para un punto A. . Recordemos que la derivada de una función representada en un sistema de coordenadas cartesianas es igual a la pendiente de la tangente trazada por el punto que se considera. En nuestro caso es la pendiente de la tangente $\hat{A}B$. Si por A_1 trazamos un segmento horizontal $\hat{A}C = 1$, y por C levantamos una perpendicular el segmento CB mide la pendiente de la tangente $\hat{A}B$. La derivada en el punto A_1 está medida, pues, por el segmento CB.

Construímos ahora un sistema cartesiano (fig. 15,b) sobre cuyo eje de las ordenadas representamos los valores de $\frac{df}{dx}$. Si deseamos obtener la curva representativa de la función:

$$\frac{df}{dx}$$

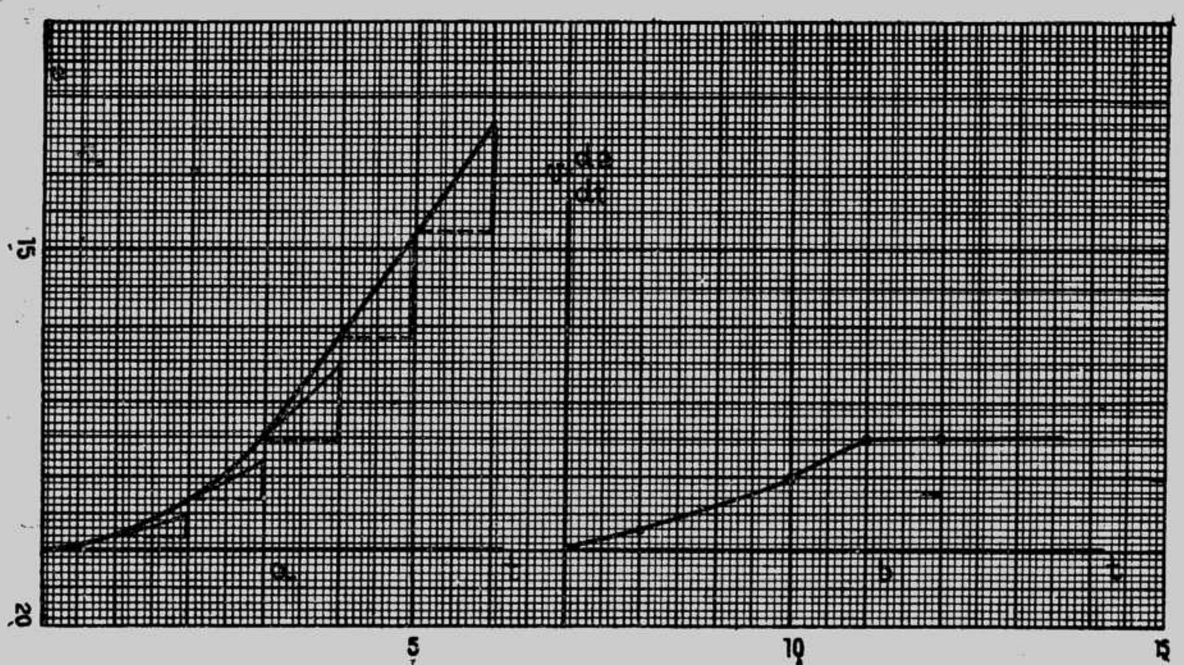
tomamos el valor CB para un abscisa igual a la abscisa de A_1. El punto A'_1 así obtenido representa un punto de la curva derivada. Repitiendo la operación para los puntos A_2, A_3, A_4 ... obtenemos los puntos de la curva derivada A'_2, A'_3, A'_4 ... respectivamente.

Para evitar el manejo de regla y compás conviene usar para estas construcciones papel milimetrado.

E j e m p l o I.- Determinar la velocidad de caída de una esferita en un líquido de viscosidad no muy elevada. Mediante métodos fotográficos pueden obtenerse las posiciones de la esferita al cabo de intervalos regulares y pequeños de tiempo. Con estas posiciones trazamos la curva de la fig. 16 a que nos da el espacio recorrido en función del tiempo. Mediante la derivación gráfica obtenemos los valores de:

$$v = \frac{de}{dt}$$

que representados en la curva de la fig. 16, b nos da la dependencia de la velocidad en el tiempo.



Del examen de la curva de velocidades se desprende que en los primeros momentos la esferita cae con una velocidad aproximadamente uniformemente acelerada convirtiéndose después en una velocidad uniforme (cuando la fuerza de roce se hace igual a la fuerza que produce la caída de la esferita).

§ 5.- OBTENCION GRAFICA DE CURVAS INTEGRALES. Si se dispone de la curva que representa a la función f(X) la obtención de la integral:

$$F(X) = \int^{X} f(X)\,dX$$

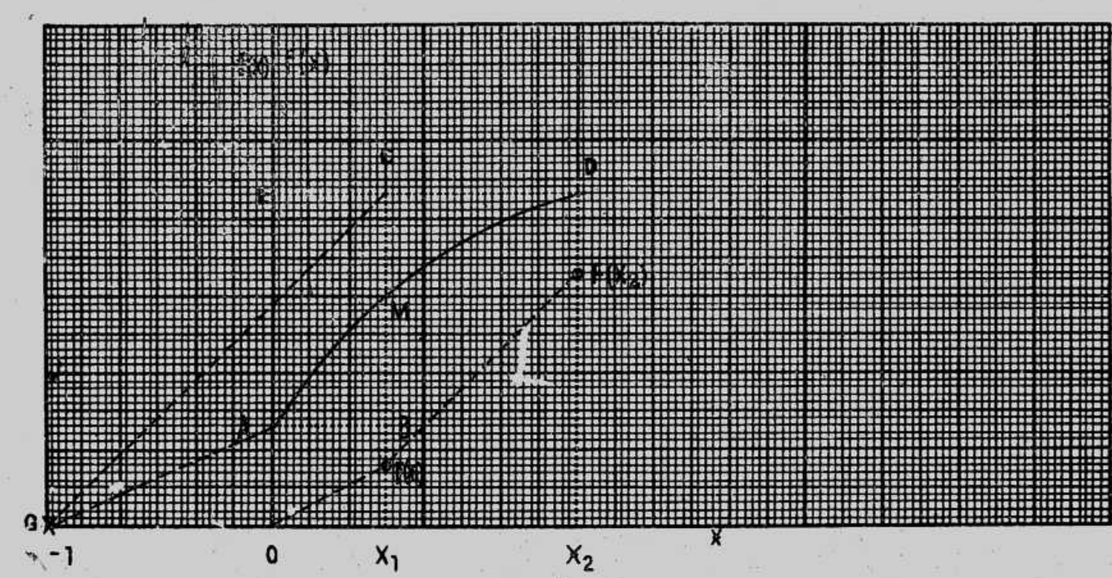
gráficamente, es el proceso inverso de la derivación gráfica. Es necesario observar que la integral queda definida en menos una constante de integración; esto significa, que si no se conoce un punto de la función F(X) la curva integral se la obtendrá desplazada arbitrariamente según el eje de las ordenadas.

Sea AD (fig.17) un arco de la curva f(X) que suponemos aumentado. Se trata de hallar la función F(X) correspondiente al mismo intervalo OX_2. Para ello recordemos que $F(X_2) = \int_0^{x_2} f(X)\,dX$ supuesto que F(0) = 0 representa al área $OADX_2$. Trazamos por un punto M una vertical CX_1 tal que las áreas ABM y MCD sean equivalentes, lo que es fácil lograr a simple vista si el intervalo OX_2 es suficientemente reducido. En esta forma el área $OADX_2$ es equivalente a la suma de las áreas de los dos rectángulos $OABX_1$ y X_1CDX_2. El área del primero representa la integral $\int_0^{x_1} f(X)\,dX = F(X_1)$. Si marcamos el punto -1 y trazamos el segmento que une este punto con A y por el punto O trazamos una recta paralela a este segmento, logramos el punto $F(X_1)$. El segmento $\overline{F(X_1)\,X_1}$ mide el valor del área del rectángulo OABX pues por semejanza de los triángulos OGA y $OF(X_1)\,X_1$ tenemos:

$$\frac{\overline{OA}}{1} = \frac{\overline{F(X_1)\,X_1}}{\overline{OX_1}}$$

de donde $\overline{F(X_1)\,X_1} = \overline{X_1 O}.\overline{OA}$. De lo dicho se sigue que $F(X_1)$ es un punto de la curva integral. Trazando la horizontal DE y por E el segmento EG, haciendo pasar una paralela de éste por el punto $F(X_1)$ obtenemos el punto $F(X_2)$ que por las mismas razones que $F(X_1)$ es otro punto de la curva integral pues se tiene que $F(X_2) = \int_0^{x_1} f(X)\,dX + \int_{x_1}^{x_2} f(X)\,dX$.

Esta construcción se repite tantas veces como intervalos se ha dividido la curva f(X) y se obtiene así una poligonal 0, $F(X_1)$, $F(X_2)$... que es fácil convertir en la curva integral.



E j e m p l o I.- Hallar la curva que representa a la función Q = = f(t) que da la cantidad de calor Q absorbida por un cuerpo de masa unitaria a la temperatura t.

Experimentalmente se mide el calor específico medio C correspondiente al intervalo de temperatura Δt mediante la relación:

$$\Delta Q = C \Delta t \quad (m = 1)$$

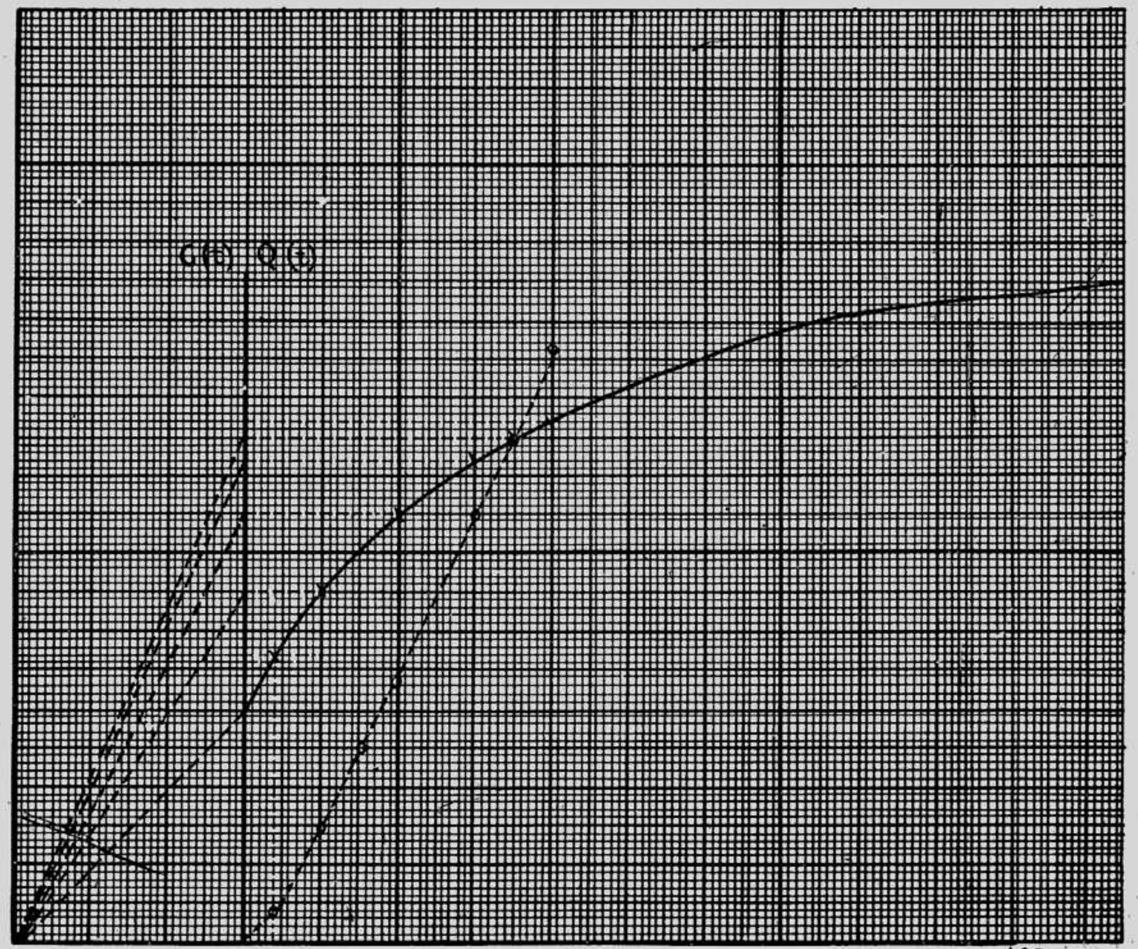
midiendo Δ Q con método calorimétricos. El calor específico medio queda definido por:

$$C = \frac{\Delta Q}{\Delta t}$$

En el límite cuando Δt es muy pequeño el calor específico a la temperatura t queda definido por:

$$C = \frac{dQ}{dt}.$$

Midiendo el calor específico medio correspondientes a intervalos pequeños de temperatura puede construirse la curva que da C en función de t. La función que tratamos de hallar es $Q = \int C(t)\, dt = f(t)$, que se obtiene mediante la integración gráfica de la curva experimental que representa a C(t).



§6.- CALCULO GRAFICO DE INTEGRALES DEFINIDAS. Si disponemos de la curva experimental que representa a L = f(X) el valor:

$$I = \int_{x_1}^{x_2} f(X)\, dX$$

representa, como es sabido al área comprendida entre la curva f(X) y el eje de las abscisas entre los valores X_1 y X_2. El cálculo de estas integrales se reduce pues, a la valoración de dichas áreas.

El método más simple consiste en trazar la curva sobre papel cuadriculado. Por simple cómputo del número de cuadros y fracciones de éstos comprendidos nos permite efectuar aquélla valoración. Es necesario tener en cuenta en estos casos, que la unidad representada sobre el eje de las abscisas no necesariamente es equivalente a la de las ordenadas. Así, si trazamos la curva que representa el enfriamiento de un cuerpo, sobre el eje de las abscisas tomamos la unidad del tiempo, el minuto, p.e., representada por el lado del cuadrado elemental. Sobre el eje de las ordenadas representamos la temperatura en grados tomando como unidad el segmento de longitud igual a tres lados del cuadrado elemental. La unidad de área de dimensiones 1 minuto x 1 grado es el rectángulo de base 1 y altura 3. El valor del área que mide a la integral es el número de veces que este rectángulo está comprendido en esta área. El cómputo se hace fácilmente considerando que cada cuadrado elemental vale 1/3 minuto x grado. Si contamos n cuadrados el valor de I = 1/3 n (minuto x grado),

Otro método que resulta muy simple en su aplicación consiste en efectuar la integración mediante rectángulos parciales. Dividimos el eje de las abscisas en un número n conveniente de partes iguales de amplitud Δ X suficientemente pequeña como para poder considerar al segmento de la curva f(X) comprendida en este intervalo como un segmento de recta. La integral:

$$I = \int_{X_1}^{X_n} f(X)\, dX = \int_{X_1}^{X_2} f(X)\, dX + \int_{X_2}^{X_3} f(X)\, dX \ldots + \int_{X_{n-1}}^{X_n} f(X)\, dX.$$

Cada integral parcial, p.e. la $\int_{X_2}^{X_3} f(X)\, dX$ es equivalente al área del rectángulo de base Δ X y altura L . De modo que:

$$I = \Delta X\ (L_1 + L_2 + L_3 \ldots L_{n-1})$$

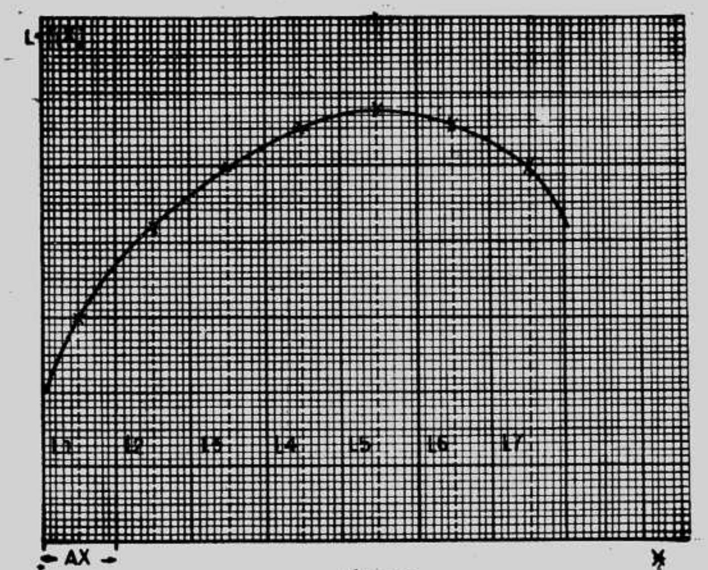
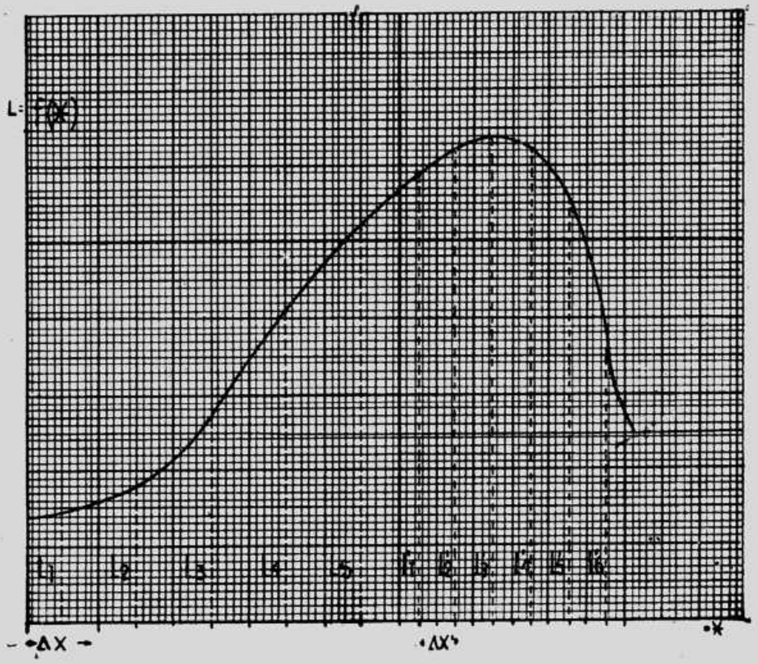


fig. 19

Cuando se trata de una curva que varía lentamente en una región y rápidamente en otra conviene tomar para esta última un intervalo Δ X' tanto menor respecto de Δ X como sea necesario.

En este caso la integral está dada por:

$$I = \Delta X\ (L + L + L + L + L) + \Delta X'\ (L'_1 + L'_2 + L'_3 + L'_4 + L'_5 + L'_6)$$



§ 7.- CALCULO GRAFICO DEL VALOR MEDIO DE UNA FUNCION. .El valor medio de la función $f(X)$ en el intervalo $X_n - X_1$ está definida por:

$$\bar{f} = \frac{1}{X_n - X_1} \int_{X_1}^{X_n} f(X)\, dx$$

Si como en el caso tratado anteriormente dividimos el intervalo $X_n - X_1$ en n partes de amplitudes iguales a ΔX, tenemos $X_n - X_1 = n\, \Delta X$, y obtenemos así para el valor medio:

$$\bar{f} = \frac{1}{n . \Delta X} \Delta X\, (L_1 + L_2 + \ldots L_{n-1}) = \frac{1}{n} (L_1 + L_2 + \ldots L_{n-1})$$

E j e m p l o I.- Cálculo de la constante de enfriamiento.

Un cuerpo que se encuentra en un medio de tamperatura constante T_0 se enfría según la ley:

$$\frac{dT}{dt} = - \alpha\, (T - T_0)$$

El valor α se llama constante de enfriamiento y se trata de determinar experimentalmente su valor. El enfriamiento ΔT que se opera en el lapso $t_2 - t_1$, está dado por:

$$\Delta T = - \alpha \int_{t_1}^{t_2} (T - T_0)\, dt$$

Esta integral está dada por el área comprendida entre la curva de enfriamiento y la recta que representa T_o y los tiempos t y t (fig.)

t minutos	0	2	4	6	8	10	12	14
T C°	70	67°5	65°2	63	61	59	57	55°2

T = 20°C

Trazamos la curva representada en la fig.21. La unidad de área gC°x mint. corresponde al rectángulo rayado que es la fracción $\frac{1}{4}$ del cuadrado elemental. El área abarca: 147.3 cuadras,

Luego: $S = 147.3 \times 4 = 589.2$ gC°x mint.

Siendo: $T = 70 - 5522 = 14°8$

obtenemos: $= \frac{14,8}{589.2} = 0.0262$ 1/mint.

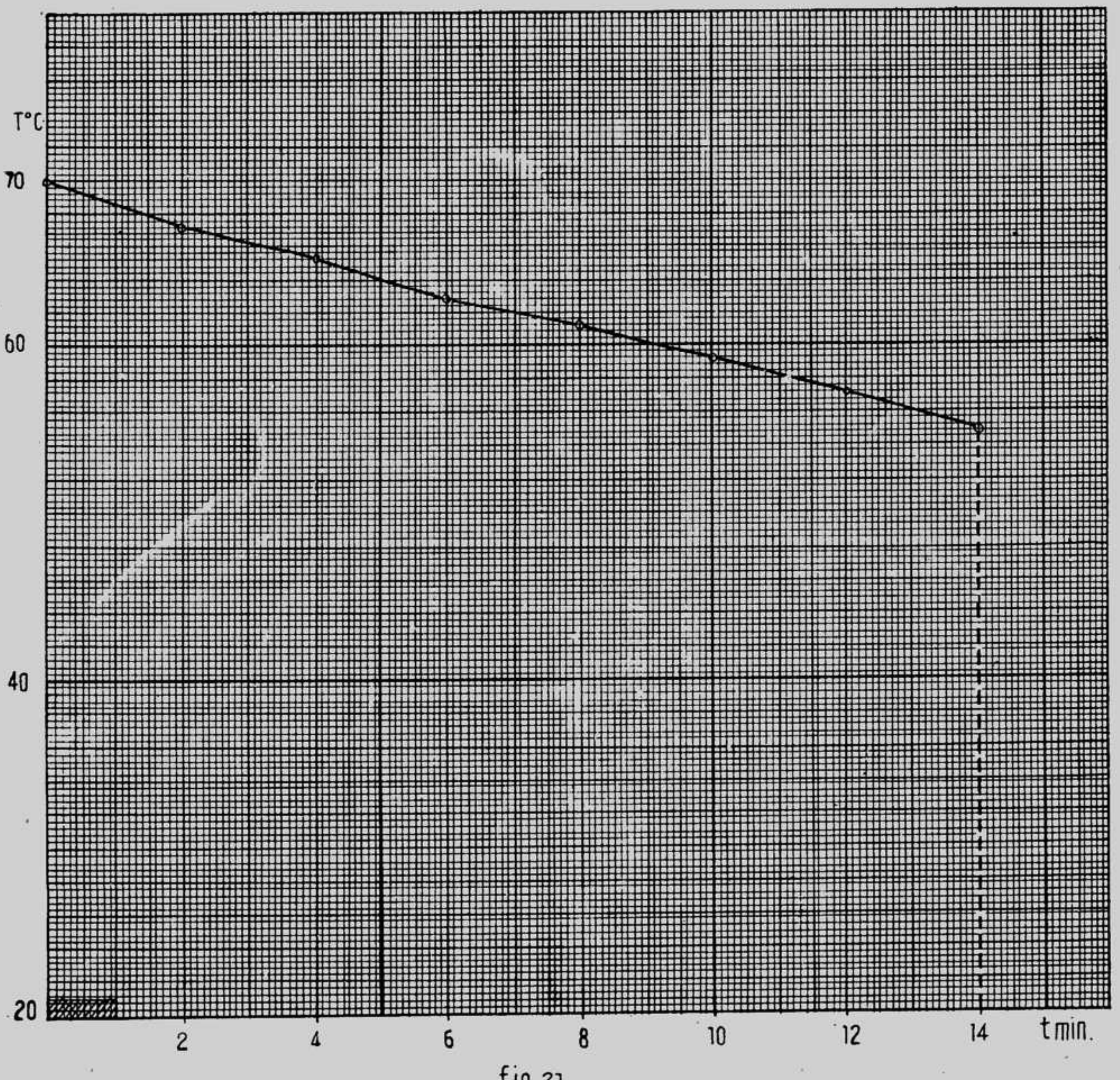


fig.21

E j e m p l o II.– Se trata de determinar la cantidad de calor Q que pasa a través de un tabique de superficie S, espesor d durante el tiempo t que separa dos medios: uno de temperatura constante T_o y otro que se enfría a través del mencionado tabique.

En el tiempo diferencial dt pasa la cantidad de calor:

$$dQ = \lambda \frac{S}{d} (T - T_o)\, dt$$

siendo λ la conductibilidad térmica del tabique. Integrando:

$$Q = \lambda \frac{S}{d} \left[\int_0^t (T - T_o)\, dt \right] = \frac{\lambda S t}{d} \left[\frac{1}{t} \int_0^t T\, dt - T_o \right]$$

La última integral define la temperatura media $\bar{T}$ en el recinto que se enfría.

Se tiene así:

$$Q = \frac{\lambda S t}{d} (\bar{T} - T_o)$$

t minutos	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
T °C	80	72°4	65°4	59°4	53°6	48°5	43°8	39°8	32°5	32°5

Trazando la curva de la fig.1 se determinan los valores:

T_1	T_2	T_3	T_4	T_5	T_6	T_7	T_8	T_9
76°2	68°9	57°3	56°4	51°0	46°1	41°8	38°3	34°7

La temperatura media está dada por:

$$\bar{T} = \frac{1}{10} (T_1 + T_2 + \ldots + T_8 + T_9)$$

Resulta:

$$T = 47°1C$$

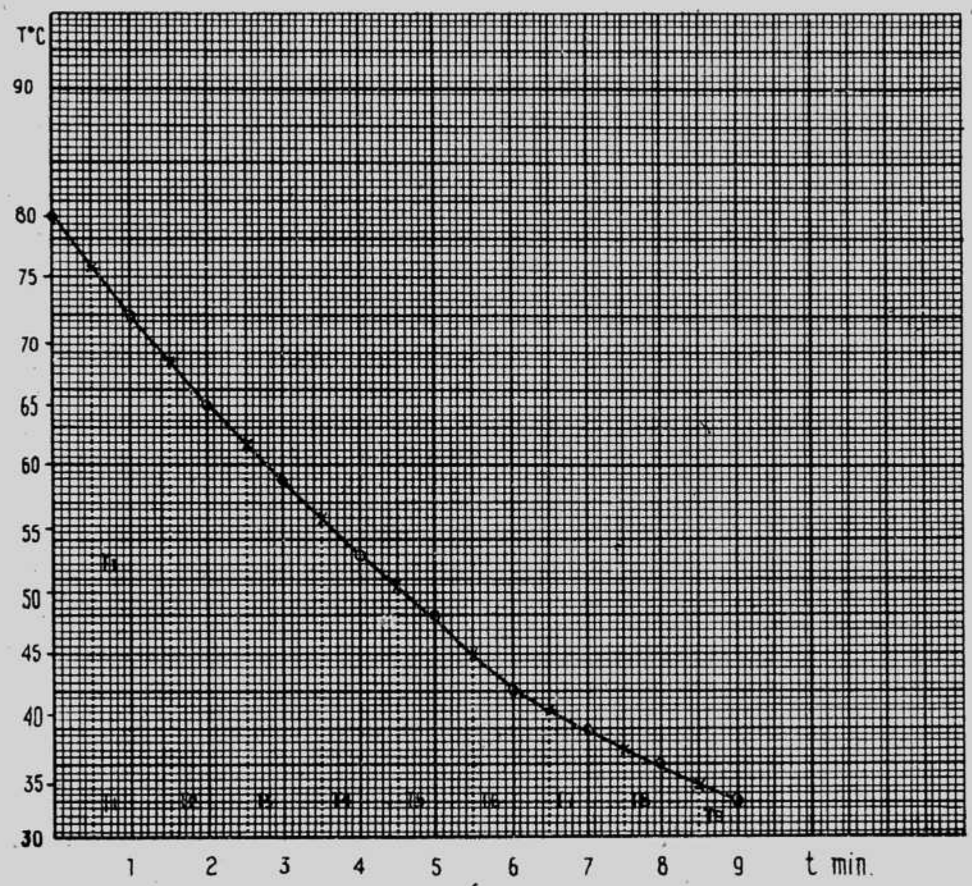


fig.22

I N D I C E

Capítulo I

ERRORES DE MEDICION

COMPARACION DE MEDICIONES DE DISTINTA PRECISION

LEY DE DISTRIBUCION DE GAUSS

COMPENSACION DE ERRORES

Capítulo II

APROXIMACIONES

Capítulo III

METODOS GRAFICOS

Rapsodia Op 119, Nº 4 Brahms
Polonesas (Do menor, Fa# menor) Chopin
Estudios
Sonatas "

Novelletten ; 8, 5, 2, Schuman

Capricho Brahms
Intermezzos "
Visión Prokofiev
allegro Barbaro B. Bartok